arXiv:2602.13077v1 [math.LO] 13 Feb 2026

所有不可数基数上的方阵原理失效弱于一个伍丁基数的极限

DOUGLAS BLUE、PAUL LARSON 和 GRIGOR SARG SYAN

摘要。 我们在满足 ZF 的 Nairian 模型的最小初始片段上强迫选择公理。在该强迫扩张中， $\square_\kappa$ 在所有不可数基数处均失效 κ，且每个正则基数在 HOD 中都是 ω-强可测的，其见证是 ω-俱乐部滤子。因此，（1）处处方块原理失效这一结果已在当前内模型理论的能力范围之内，从而解决了 [5, 问题 5。6]并猜想了 [20, 27]，；（2）HOD 假设不能在 ZFC 中证明。

目录

1. 引言 2
1.1. 问题 6
1.2. 读者指南 6
2. 在极限基数上贯穿 7
相干序列 7
3. ω-强可测基数在 HOD 中

第 1 部分. Nairian 模型上的强迫选择 10
4. H-类集合 10
5. 关于依赖选择 12
6. 一条反射原理 14
7. 提升依赖选择公理 16
8. 一种 Nairian 理论 17

第 2 部分. Nairian 模型满足 Nairian 理论 24
9. 预备知识 24
10. [3] 27
11. Δ-通用性迭代与导出模型表示 35
12. 迭代集与实现的唯一性 46
13. 反射 I 52
14. 反射 II：在 ω_1-序列下的闭包 $\mathbb{P}_{\max}$ 扩张 59
15. 反射 III：有用的引理 69
16. 反射 IV：高于 Θ^N 的 Hull，一个有向系统 78
17. 反射 V：有向系统的反射 82
18. 反射 VI：高于 Θ^N 88
19. Θ-序列 88
N 91
20. 极小 Nairian 模型满足 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$ 93
参考文献 93

第二作者的研究工作部分由美国国家科学基金会 DMS-2452139 号资助。第三作者的研究工作由波兰国家科学中心通过 Maestro 项目资助，注册编号为 UMO-2023/50/A/ST1/00258。

1. 引言

给定一个序数 ξ， ξ 处的 Nairian 模型是结构 $L_\xi(\mathcal{H}, \bigcup_{\alpha<\xi} \alpha^\omega)$，其中 $\mathcal{H}$ 是某个决定性公理模型的 HOD 的谓词。令 Θ_{reg} 为理论 $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ +“Θ是正则基数”。

定义 1.1. 假设 $\mathsf{ZF} + \Theta_{\mathsf{reg}} + V = L(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$。那么 N 是一个**极小奈良模型**，若令 $\xi =$ 序数类 $\cap N$，

(1) $N \vDash$ZF，(2) N 是 ξ处的 Nairian 模型，(3) $\Theta^N < \Theta$ 且 Θ^N 是一个 Solovay 基数，[1](4) 令 δ 为大于 Θ^N的最小 Solovay 基数， ξ 是HOD的一个不可达基数，且是 $<\delta$-强基数在HOD中的极限，并且 (5) 若 $\lambda < \xi$ 是HOD的一个不可达基数，则 λ 不是 $<\xi$-强基数在HOD中的极限。

本文中，我们在极小 Nairian 模型的一个 $\mathbb{P}_{\max}$ 强迫扩张上进行强迫，以证明以下定理。[2]

定理 1.2. $\mathsf{ZF} + \Theta_{\mathsf{reg}} + V = L(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$。设 N 是一个极小 *Nairian* 模型。存在一个 N 的强迫扩张满足

(1) ZFC，*(2)* 对所有共尾数大于 ω_1 的序数 γ， $\square(\gamma)$ 均不成立；
(3) 每个正则基数在 HOD 中都是 ω-强可测的。

这种强迫是温和的，或者说是“极小的”，其目标是在 ZFC 扩张中尽可能保留底层 Nairian 模型的决定性结构。它由 $\mathbb{P}_{\max}$ 后接一个全支撑迭代构成，该迭代依次对真类基数中各成员的幂集进行良序化。这个迭代与使广义连续统假设在 ω_2 以上成立的标准强迫迭代非常相似。

为了证明定理 1.2，我们在假设 Steel 的 *Hod Pair* 捕获 (HPC，参见 [21]) 的前提下，证明极小 Nairian 模型的一些新的基本性质。定理1.3 概述了本文以及 [3] 中证明的极小 Nairian 模型的性质。给定一个集合 X，令 Θ_X为那些是 X 的满射像的序数的上确界。若 M 是一个 ZFC 的传递模型，则 $M|\kappa = V_\kappa^M$。

定理 1.3。 假设 $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}_{\mathbb{R}} + \Theta_{\mathsf{reg}}$ +HPC $+ V = L(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$。设 N 为一个极小 *Nairian* 模型， $\xi =$ 序数类 $\cap N$，并且 $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \xi\rangle$ 是 HOD 中 $<\xi$-强基数及其极限的递增枚举。设 $\kappa_{-1} = \omega$。则以下结论成立。

(1) $\kappa_0 = \Theta^N$。*(2)* 对每个 $\alpha \in [-1, \xi)$， $N \vDash \kappa_{\alpha+1} = \Theta_{\kappa_\alpha^\omega}$。*(3)* 对每个 $\alpha \in [-1, \xi]$， $N \vDash \kappa_{\alpha+2} = \kappa_{\alpha+1}^+$。*(4)* 对每个 $\alpha \in [-1, \xi]$， $N \vDash$ “$\kappa_{\alpha+1}$ 是正则基数”。*(5)* 对每个 $\alpha \in [-1, \xi]$， $cf(\kappa_{\alpha+1}) = \kappa_0$。*(6)* 对每个 $\alpha \in [-1, \xi]$， $\mathscr{P}(\kappa_\alpha^\omega) \cap N \subseteq N|\kappa_{\alpha+1}$。*(7)* 对每个极限序数 $\alpha < \xi$，$(\kappa_\alpha^+)^N = (\kappa_\alpha^+)^W$，其中 $W = L(HOD|\kappa_\alpha, \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)})_\alpha$。*(8)* 对每个序数 $\alpha \in [-1, \xi)$以及每个 $\nu < \kappa_{\alpha+1}$，不存在共尾的 $f : \nu^\omega \to \kappa_{\alpha+1}$在 N中。

[1] κ 称为 Solovay 基数，当且仅当对每个 $\beta < \kappa$，不存在序数可定义满射 $f : \mathscr{P}(\beta) \to \kappa$。[2]参见 §2 ，其中介绍了 $\square(\kappa)$ 及其相关概念的背景。对于阅读本引言的读者，记住这一点可能会有所帮助： $\square(\kappa^+)$是 $\square_\kappa$的弱形式。

(9) 对每个 $\alpha \in [-1, \xi)$、每个 $\beta \in [\alpha+1, \xi)$以及每个 $X \in N|\kappa_{\beta+1}$，存在$\tau < \kappa_{\alpha+1}$和一个初等嵌入 $\sigma\colon\ N|\tau \to N|\kappa_{\beta+1}$，使得 *(a)* $\sigma \restriction \kappa_{\alpha+1} = id$，且 *(b)* $X \in$*rge(*σ*)*。*(10)* 对每个 $\alpha \in [-1, \xi)$、每个 $\beta \in [\alpha+1, \xi)$以及每个 $X \in N|\kappa_{\beta+1}$，存在一个传递的 $W \in N|\kappa_{\alpha+2}$和一个初等嵌入 $\sigma\colon\ W \to N|\kappa_{\beta+1}$，使得 *(a)* $W^{\kappa_\alpha^\omega} \subseteq W$，*(b)* $\sigma \restriction \kappa_{\alpha+1} = id$，且 *(c)* $X \in$ *rge(*σ*)*。*(11)* 如果 $G \subseteq \mathbb{P}_{\max}$ 是泛型的，那么 $N[G]$ 在 $V[G]$中是 ω_1-闭的。*(12)* 如果 $\kappa \leq \Theta^N$ 是苏斯林基数，那么 $N \vDash$ “κ 对序数超紧”。[3] *(13)* $N \vDash$“ω_1 是超紧”。[4]

在后续的一篇论文中，我们将证明 W 定理1.3的条款（10）可以取为 $N|\nu$。

定理1.2排除了集合论中两个核心猜想的若干研究途径。我们首先讨论的猜想是：适当迫使公理与存在一个超紧基数等一致。Baumgartner 证明 PFA 相容性时，将一个超紧基数压塌为 ω_2，而 Viale 和 Weiss [24] 证明，在任何类似于已知 PFA 模型的模型中，都存在一个内模型，其中 ω_2 是一个强紧基数。若该模型是通过适当迫使迭代构造的，那么 ω_2 在该内模型中是超紧的。因此，若能证明每个 PFA 模型都具有 Viale 和 Weiss 定理所要求的性质，那么 PFA 猜想便可得到解决。由于缺乏这样的证明，内模型理论学家一直利用核心模型归纳法来计算 PFA 相容性强度的下界。目前最好的下界处于大基数的短扩张子区域，低于一个作为伍丁基数极限的伍丁基数。

迄今为止计算出的 PFA 下界，实际上都是平方原理失效的下界。这种失效是超紧基数和 PFA 的典型推论，这表明它们确实具有相当强的强度。

定理 1.4 (Todorčević [22])。 PFA 蕴含 $\neg\square_\kappa$ 对每个不可数基数 κ都成立。

为了从 PFA 推导出相容性强度，可以假设一个反大基数假设，并据此构造一个满足覆盖弱形式的精细结构核心模型。在次紧基数以下——这一范围目前超出了核心模型理论的能力——$\square_\kappa$ 对所有 κ 在核心模型中都成立；这是 Schimmerling 和 Zeman 的工作所证明的 [18]。定理 1.4 于是蕴含核心模型无法充分逼近宇宙，因此 PFA 至少与用于定义该核心模型的反大基数假设的否定一样强。

Schimmerling 利用定理 1.4 证明，PFA 蕴含 Δ^1_2-决定性 [16]。Steel 通过将核心模型归纳法应用于 $\neg\square_\kappa$，证明 PFA 对于 κ 一个奇异强极限 [20]蕴含 $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$。Schimmerling 证明，如果 $\neg\square_\kappa + \neg\square(\kappa)$ 且 κ 大于连续统[17]，那么 PD 成立。这进而改进了 Steel 的定理：将 PFA 限制在大小至多为 $(2^\omega)^+$ 的偏序集上，便蕴含 $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$。Jensen、Schimmerling、Schindler 和 Steel [8]证明，如果 $\kappa \geq \omega_2$ 是可数闭的，且 $\square(\kappa)$ 和 $\square_\kappa$ 都不成立，那么存在一个具有任意大的强基数和 Woodin 基数的内模型。更进一步，Sargsyan 证明，奇异强极限基数 κ 处 $\square_\kappa$ 的失败意味着存在一个非驯服鼠 [11], ；Sargsyan 和 Trang 则证明，某种失败配置

[3]也就是说，对每个 α，在 $\mathscr{P}_\kappa(\alpha)$ 上都存在一个正规细 κ-完备超滤子。[4]也就是说，对每个集合 X，在$\mathscr{P}_{\omega_1}(X)$ 上都存在一个正规细可数完备超滤子。

方块原理蕴含存在一个满足最大苏斯林公理的模型 [15]。Sargsyan-Trang 下界是迄今为止最好的结果。

人们一直认为，这些下界远非最优。Steel [20] 猜想，在奇异强极限基数 κ处方块原理 $\square_\kappa$ 失效，其强度至少不低于超强基数。 [5] 中的问题 5.6要求确定超强基数与奇异强极限基数 κ处方块原理 $\square_\kappa$ 失效之间的相容性强度排序。关于 $\neg\square_{\aleph_\omega}$ 的已知最佳上界由 Zeman 计算得出，他从一个可测次紧基数[27]出发，通过强迫得到该结果。（尚不清楚 Zeman 的方法能否用于使方块原理在连续三个正则基数处失效，或在方块原理也失效的奇异基数极限处失效。）这使得 Zeman 猜想：“次紧性是奇异基数 λ处方块原理 $\square_\lambda$ 失效的相容性强度的合适候选” [27,第 411] 页。

然而，最小 Nairian 模型存在的一致性可由弱于“存在一个伍丁基数的 Woodin 极限”的假设推出。

推论 1.5. 理论 ZFC $+$ “$\square(\gamma)$ 对所有共尾数大于 ω_1的序数 γ 均失效”在一致性强度上严格弱于理论 *ZFC* $+$ “存在一个 *Woodin* 基数的 *Woodin* 极限”。

如果 PFA 蕴含存在一个具有长 extender 大基数的内模型，那么推论 y
1.5则排除了将平方原理失效用作替代手段来证明这一点的可能。[5]

推论 1.5 解决了 [5, 问题 5。6]: 理论 ZFC $+$ “存在一个奇异强极限基数 κ 使得 $\square_\kappa$ 失效”并不蕴含 ZFC $+$ “存在一个超强基数”的一致性。这应与以下下界形成对照。

定理 1.6 (Neeman-Steel [10])。 设 δ 是一个伍丁基数，且 $\neg\square(\delta)$ 并且$\neg\square_\delta$. 假设策略分支假设在 δ处成立。[6] 那么存在一个具有次紧基数的内模型。

由于在我们最小的N的强迫扩张中，不可数基数处的方块原理失效，因此，要么在 δ 处成立的策略分支假设是错误的，要么 N的强迫扩张中不存在 Woodin 基数。

事实上， $N[G]$中并不存在 Woodin 基数，但上一段提出了一种据我们所知尚未被考虑过的可能性。本文的结果以及 [3]强烈表明，利用部分背景的 K^c 方法无法构造具有超强基数的鼠。唯一看似可行的希望是满背景构造能够做到这一点。但如果在假设少于一个超强基数的情况下，伍丁基数能够存在于 Nairian 模型的强迫扩张中，那么满背景方法也会失效。鼠的存在性最终或许只是一条假设，而非大基数的可证明推论。

Q问题 1.7。伍丁基数能否存在于 *Nairian* 模型的强迫扩张中？

推论 1.5 也提出了一种可能性，即纯粹的 PFA 与带有大基数的 PFA 之间存在深刻差异。除 Viale-Weiss 定理之外，关于平方原理失效具有很强强度的预期，在很大程度上构成了 PFA 与超紧基数等一致的证据。或许存在一种构造 PFA 模型的方法，不受 Viale-Weiss 定理的约束，且其一致性上界更接近于处处平方原理失效的上界

[5]Rado 猜想和乘积测度扩展公理显然是很强的原则，其已知一致性下界与平方原理失效的下界相当。[6]若对每个 可数初等子结构 δ M 的 V_δ，玩家 II 在 M的传递塌缩上的迭代博弈中都有获胜策略，其中只允许使用将其临界点映射到严格高于其强度之处的短扩张子，以及正规、不重叠的 plus-2 迭代树的线性复合 [10]，则

上界。相比之下，Neeman 和 Trang 独立证明了：如果 PFA 成立且存在一个 Woodin 基数，那么就存在一个具有 Woodin 基数的 Woodin 极限的内模型。

下述猜想表明，「处处方阵原理失效会达到超紧性」这一预期在精神上是成立的，只不过这里说的是决定性意义上的超紧性，而非 ZFC 意义上的超紧性。理论 (2) 在用于证明定理 1.2 [3]. 的 Nairian 模型中成立。

猜想 1.8。 下列理论等一致。

(1) $\mathrm{ZFC}+\forall\kappa\neg\square_\kappa$。*(2)* $\mathrm{ZF}+\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}+$“$\omega_1$ 是一个超紧基数。”

定理 1.2 所涉及的第二个猜想是 Woodin 的 HOD 猜想。令 S^κ_ω 表示具有可数共尾性的 $\alpha<\kappa$ 集合。若存在某个 $\gamma<\kappa$ 使得 $(2^\gamma)^{HOD}<\kappa$，且不存在将 S^κ_ω 划分为 γ个驻定集的序数可定义划分，则称基数 κ 在 HOD 中是 ω-强可测的。经 Goldberg [6], 优化后的 Woodin 的 HOD 二分定理指出，若存在强紧基数 δ，则以下二者必居其一：(1) 大于δ 的正则基数在 HOD 中均非 ω-强可测；或 (2) 大于 δ 的每个正则基数在 HOD 中都是 ω-强可测的。HOD 假设是指存在任意大的正则基数，它们在 HOD 中不是 ω-强可测的；而 HOD 猜想则是指 ZFC $+$“存在超紧基数”能够证明 HOD 假设。人们一直认为，单凭 ZFC 也可能做到这一点。

Woodin 提出 HOD 猜想时，人们尚不清楚如何构造这样的模型：其中有三个以上的正则基数在 HOD 中是 ω-强可测的；或者存在一个具有不可数共尾数的奇异基数的后继，在 HOD 中是 ω-强可测的 [25]。Ben Neria 和 Hayut 证明，相对于一个出人意料地弱的大基数假设，每个正则基数的后继在 HOD 中都是 ω-强可测的 [2]。因此，若 HOD 假设可以在 ZFC 中证明，该证明就必须利用奇异基数后继的组合学。定理 1.2 排除了这种可能性。

推论 1.9。 HOD 假设无法在ZFC中证明。

推论1.9 印证了这样一种必要性：假定 HOD 假设为真，要证明它就必须假设 ZFC 之外的某种假设；这类假设很可能需要足够强，能够确立某种版本的 HOD 二分，例如假设存在一个超紧基数。我们强调，本文并未否定 HOD 猜想，因为显然，我们的 ZFC 模型中不存在超紧基数。

超紧基数是 PFA 和 HOD 猜想的核心。测度意义上的超紧性是本研究的关键。我们拓展了 Becker 和 Jackson [1] 以及 Jackson [7] 的研究；他们分别证明了射影序数超紧到其上确界，而苏斯林基数超紧到低于 Θ的序数。

定理 1.10。在 *Nairian* 模型中，ω_2 对序数超紧，且见证测度是序数可定义的。事实上，所有苏斯林基数都对序数超紧，Θ也如此。

最后，Woodin 猜想，使用 ω-序列定义的 Nairian 模型实际上在 $<\Theta$-序列下闭；其直觉是，在母 AD^+ 模型中，Wadge 秩为 θ_α 的实数集合过于复杂，即使给予宽松的参数，也无法从较低层级定义出来。我们对所强迫得到的极小 Nairian 模型证实了这一点。

定理 1.11. 设 N 是在最小的、由在 $\mathcal{H}$ 中为 $<\varsigma_\infty$-强的基数组成的不可达极限 ς_∞ 处定义的 *Nairian* 模型。设 $\zeta<\Theta^N$。那么对于所有 $\beta<\varsigma_\infty$，

$$(N|\beta)^\zeta\subseteq N.$$

1.1. **问题**。 当然，定理 1.2 引出了下面这个问题。

Q问题 1.12. 哪些自然的组合原理意味着存在一个具有 a su超强基数的内模型？

这里的“自然”原理包括可接近性的失效、基数区间内所有点处的树性质、饱和理想或稠密理想，等等。这个问题既关乎有用的原理是否确实足够强，也关乎在上述讨论的背景下，如何发展新的论证来证明超强基数处的一致性下界。对于任何最终被证明弱于超强基数的原理，例如 $\neg\square_\kappa$，人们都关心它是否能在适当假设下强迫于一个 ZFC 基模型之上。

在下一个问题中，uB 表示实数的普遍贝尔集族，而 Θ^{uB} 是实数在 $L(\mathrm{uB}\ \mathbb{R})$ 中可以满射到的序数的上确界。

Q问题 1.13. 是否存在一种自然理论，能够推出 $\Theta^{\mathrm{uB}} < \omega_3$ 和 $\delta^1_2 = \omega_2$？是否 re on且扩张了$\mathrm{ZFC} + \mathrm{MM}^{++}$?

Viale [23] 定义了公理 MM^{+++}，并证明它蕴含：对于保持其不变的平稳集保持强迫，ω_1-张模型的理论是绝对的。Woodin 定义了 CM^+，即增添了关于 $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$ 的俱乐部滤子的张模型，适用于所有序数 λ；并证明，在假设存在真类多个 Woodin 基数的 Woodin 极限 [26]的情况下，它存在。假设某一类长博弈具有决定性，他还证明存在 CM^+ [26, 的尖点（定理 7.37、7.39]）。

问题 1.14。 CM^+ 理论的绝对性是否意味着 $L(\text{序数类}^{\omega_1})$ 的理论对于平稳集保持强迫也是绝对的？

Nairian 模型中，Θ 以上的基数结构，以及在其 ZFC 强迫扩张中能够对其保持的控制，使人设想可能存在类似公理 $(*)$ 的“决定性强迫公理”，但适用于比 $\mathscr{P}(\omega_1)$ 或 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 更大的幂集。

问题 1.15. 公理$(*)$ 能否推广到更大的基数？

致谢。 作者谨感谢 W. Hugh Woodin 就本文内容与我们进行讨论，并给予我们鼓励。

1.2. **读者指南**。 本文仅直接研究极小 Nairian 模型（尽管我们的结果对更广泛的一类 Nairian 模型也成立）。我们将主要的技术贡献概述如下。

(1) 本文第一部分提炼出一个自然的理论 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$ (定义 8.6)，并展示如何通过一个非常简单的偏序集，在其模型上强制得到选择公理。该偏序集通过对基数的幂集逐步良序化而构造（定理8.7）。

Th定理 1.16. 假设 $M \vDash \mathrm{ZF} + \mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$。那么存在一个齐次可数闭链 化迭 $\mathbb{P}$ 使得如果 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 M-泛型，那么 $M[G] \vDash \mathrm{ZFC}$.

(2) 和谐公理 (定义 8.3)，即 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$ 的一个组成部分，已在 [3] 中证明对 Nairian 模型成立。本文确立的极小 Nairian 模型的主要新技术性质是反射原理 反射 (定义 6.2)，它是 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$(定义 8.6) 的第二个条款。 反射 使我们能够利用第 依赖选择公理$_\kappa$ 节的结果证明 7。

（3）论文第 2 部分使用了繁重的描述性内模型理论工具，并假设HPC。它首先证明一个简单的反射性质（定理 13.7），可用于证明

如果 N 是一个极小奈良模型，那么在母确定性模型中， N 在$<\Theta^N$-序列下闭合（定理 14.12）。

(4) 定理 13.7 中确立的反射原理还意味着，若 $G \subseteq \mathbb{P}_{\max}$ 是 V上的泛型（即相关 Nairian 模型的母确定性模型），那么在 $V[G]$中， $N[G]$对 $<\omega_1$-序列封闭（推论 14.10）。利用这一事实，并应用 定理 3.（该定理又由 [4] 得出），可证明平方原理 $\square(\gamma)$ 在 ZFC-扩张 N 中失效。 [3,

论文最后几节致力于证明极小 Nairian 模型中的反射原理。

定理 1.17。 设 N 是一个极小 *Nairian* 模型。则 $N \vDash \mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$。

2. 在极限基数上贯穿相干序列

设 γ 是一个不可数基数。 **$\square_\gamma$-序列** 是一个序列 $\langle C_\alpha : \alpha < \gamma^+ \rangle$ ，满足对每个 $\alpha < \gamma^+$，只要 β 是 C_α的极限点， C_α 就是 α中的闭无界集，并且 C_α 的序型至多为 γ。原理 $\square_\gamma$ 断言存在一个 $\square_\gamma$-序列。

处理不可贯穿性原理更容易。

定义 2.1 ($\square(\gamma,\ \delta)$)。 设 γ 是一个序数， δ 是一个基数。那么存在一个序列$\langle \mathcal{C}_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ ，使得

(1) 对每个 $\alpha < \gamma$，(a) $0 < |\mathcal{C}_\alpha| \leq \delta$，(b) $\mathcal{C}_\alpha$ 的每个元素都是 α中的闭无界集，并且 (c) 对于 $\mathcal{C}_\alpha$的每个成员 C 以及 C的每个极限点 β ，

$$C \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta.$$

(2) 不存在闭无界集 $E \subseteq \gamma$ ，使得对于 E的每个极限点 α ，都有 $E \cap \alpha \in \mathcal{C}_\alpha$ 。

原理 $\square(\gamma,\ 1)$ 就是原理 $\square(\gamma)$。由于对于任意不可数基数 γ， $\square_\gamma$ 蕴含$\square(\gamma^+)$，只需证明 $\square(\gamma^+)$ 对扩张中的所有 γ 都不成立，其中该扩张由定理8.7中的强迫得到。

将定理 3.3] 应用于 V（环境确定性模型）和一个极小奈良模型N。令 $\kappa = \Theta^N$。令 $G \subseteq \mathbb{P}_{\max}$为 V-泛型。令 $\mathbb{Q}$为定理 8.7 中定义于$N[G]$的偏序集。在 $N[G]$中， $\mathbb{Q}$是 $<\omega_2$-有向闭的。推论 14.10 蕴含， $V[G]$ 中来自 $\mathbb{Q}$的每个 ω_1-序列都存在于 $N[G]$中，因此 $\mathbb{Q}$ 在 $V[G]$中是 $<\omega_2$-有向闭的。令 $H \subseteq \mathbb{Q}$ 为 $V[G]$-泛型，则定理 3.3] 蕴含

$$N[G * H] \vDash \neg\square(\gamma, \omega)$$

对于每个 $\gamma \in [\kappa, \Theta^V)$，其中 $\mathrm{cof}^V(\gamma) > \omega_1$。每个序数 $\kappa_\alpha =_{def} (\kappa^{+\alpha})^N$ 都是这样的 γ。该 N-基数 κ， κ_1，.....， κ_α，.....是 $N[G * H]$ 中的基数 $\aleph_3$， $\aleph_4$，.....， $\aleph_{3+\alpha}$，.....。最后，该

$$N[G * H] \vDash \neg\square(\aleph_2, \omega)$$

这是由以下事实得出的：$\mathrm{MM}^{++}(c)$ 在 $N[G * H]$中成立，依据定理1.4的证明。

3. ω-strongly measurable cardinals in HOD

对于任意基数 κ，令 F_κ 为 κ 上的 ω-俱乐部滤子。对于任意集合或类 W，我们用 $F_\kappa(W)$ 表示 $F_\kappa \cap W$。下面是一个简单的引理。

引理 3.1 (ZF)。设 W 是一个包含 HOD 的传递类，且 κ 是一个正则不可数基数，使得

(1) $F_\kappa(W) \in W$，并且

(2) 在 W, $F_\kappa(W)$ 中是 κ-完备的正规超滤子，定义在 κ 上。

那么， κ 在HOD中是 ω-强可测的。此外，若 $S \in \mathrm{HOD} \cap \mathscr{P}(\kappa)$ 是驻定的，那么$\kappa \setminus S$ 不是驻定的，并且

$$\mathrm{HOD} \vDash \text{“}F_\kappa(\mathrm{HOD}) \textit{ is normal } \kappa\textit{-complete ultrafilter.”}$$

现在我们证明，若 $\mathbb{P}$ 是任意一个可数闭齐次偏序集，且它迫使ZFC在 Nairian 模型之上成立，那么 $\mathbb{P}$ 会迫使每个不可数正则基数都是 ω-强可测的，且处于HOD中。回想一下， $\mathcal{H}$ 是HOD的 hod 前鼠表示。我们使用的记号沿用 [3]；读者可在§9中回顾其中一部分。

定理 3.2。 假设 $\Theta_{\mathsf{reg}} + \mathsf{HPC} + \mathsf{NLE}$，并设 $\xi < \Theta$ 是一个 *Nairian* 基数。令 N为 ξ处的 *Nairian* 模型，$\mathbb{P} \in N$ 为一个可数闭偏序集，且 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为 N-泛型。那么，在 $N[G]$中，对每个不是 $\mathcal{H}$中的超强基数的不可数正则基数 κ，

$$F_\kappa(\mathcal{H}) = E_\kappa,$$

其中 $E_\kappa \in \vec{E}^{\mathcal{H}}$ 是 κ 上最小的 *Mitchell* 序 *0* 完全超滤子。[7]

证明。 我们需要以下基本断言。

命题 3.3。 假设 $\mathcal{M}$ 是某种传递精细结构模型（例如鼠、*hod* 鼠等）， κ 是 $\mathcal{M}$ 的一个可测基数，且 $\mathcal{T}$ 是定义在 $\mathcal{M}$ 上、长度为 $\gamma+1$ 的正规迭代树 [8] ，其主分支 $b = [0,\gamma)_{\mathcal{T}}$ 没有下降。令 $\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{T}$ 的最后模型。假设对某个 $\iota_0 \in b$，对每个 $\iota \in b - \iota_0$,

$$\sup(\pi^{\mathcal{T}}_{\iota,\gamma}[\kappa]) < \pi^{\mathcal{T}}(\kappa).$$

那么存在 $\alpha \in b - \iota_0$，使得对所有 $\beta \in b - \alpha$

$$\pi_{\beta,\gamma}(\mathrm{crit}(E^{\mathcal{T}}_\xi)) = \pi^{\mathcal{T}}(\kappa)$$

其中 ξ 满足 $\mathcal{T}(\xi+1) = \beta$ 且 $\xi+1 \in b$。

证明。 令 $b = [0,\gamma]_{\mathcal{T}}$ 为 $\mathcal{T}$ 的主分支。对于 $\iota \in b$， 令 $\kappa_\iota = \pi^{\mathcal{T}}_{0,\iota}(\kappa)$。对于任意 $\iota \in b$， 令 $\xi(\iota)$ 满足 $\mathcal{T}(\xi(\iota)+1) = \iota$ 且 $\xi(\iota)+1 \in b$。令 $\mu_\iota = \mathrm{crit}(E^{\mathcal{T}}_{\xi(\iota)})$。

由于 $\mathcal{T}$是正规的，序列 $\langle \mu_\beta \mid \beta \in b\rangle$ 是非递减的。由于对每个 $\iota \in b - \iota_0$， $\pi^{\mathcal{T}}_{\iota,\gamma}$在 κ_ι处不连续，因此对每个 $\iota \in b - \iota_0$， $\mu_\iota \leq \kappa_{\iota_0}$。

由此可知，必定存在一个 $\iota \in b - \iota_0$ 使得 $\mu_\iota = \kappa_\iota$；否则，若对所有$\iota \in b - \iota_0$都有 $\mu_\iota < \kappa_\iota$ ，则$\pi^{\mathcal{T}}_{\iota_0,\gamma}$在$\kappa_{\iota_0}$处连续。令 $\alpha \in b - \iota_0$ 为满足 $\mu_\alpha = \kappa_\alpha$的最小值。

现在我们断言，对所有 $\beta \in b-\alpha$，都有 $\mu_\beta = \kappa_\beta$。否则，存在 $\beta \in b-\alpha$使得 $\mu_\beta < \kappa_\beta$。假设 β 是具有此性质的最小值，则条件 $\mu_\beta < \kappa_\beta$ 违背正规性。因此，对所有 $\beta \in b - \alpha$，都有 $\mu_\beta = \kappa_\beta$。 □

现在假设 $\mathfrak{q}$ 是一个满足 $\kappa_{\mathfrak{q}}$ 有定义的 hod 对。令 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{q}^\kappa}$。应用断言 3.3 并令 b 为 $\mathcal{T}$的主分支，我们得到某个 $\alpha \in b$，使得对每个 $\beta \in b - \alpha$， 令 $\xi(\beta)$和 μ_β 按断言 3.3中的定义，

$$\pi^{\mathcal{T}}_{\beta,b}(\mu_\beta) = \kappa.$$

现在我们需要确定 b 中哪些阶段使用米切尔序 0 测度。令 $\lambda = (\kappa^+)^{\mathcal{H}}$和 $X = \pi_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{q}^\kappa}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\lambda]$。当且仅当以下条件成立时， 令 $\tau \in D$

- $\tau = \kappa \cap \mathrm{Hull}^{\mathcal{H}|\lambda}(\tau \cup X)$，并且
- $\mathcal{H} \vDash$“τ 不是可测基数"。

[7] E_κ 实际上是一个扩张子，但我们将其视为超滤子。[8] 与 [3]，中一样，我们使用詹森指标化。

由于 $\mathcal{H}$ 的非可测不可达基数的共尾数为 ω，因此 D 是一个 ω-闭无界集。另请注意，

$$\{\mu_\beta : \beta \in b - \alpha\} \subseteq D \qquad (*)$$

以下是一个关键断言。

命题 3.4. 假设 $\tau \in D - \mu_\alpha$。那么存在某个 $\beta \in b - \alpha$, $\tau = \mu_\beta$。

证明。 该断言通过归纳法证明。我们假设对于所有 $\tau' \in D \cap \tau$，该断言都成立，并证明该断言对 τ 也成立。注意，由于 b 是一个闭无界集，如果 τ 是 D的极限点，那么对于某个 $\beta \in b - \alpha$，有 $\tau = \mu_\beta$ 。于是我们可以假设 τ 是 D的后继点。令$\tau' = \sup(D \cap \tau)$，并令 $\beta \in b$满足 $\tau' = \mu_\beta$。令 $\xi = \min(b - (\beta + 1))$。我们要证明 $\tau = \mu_\xi$。令 E 为 b中在 β 处使用的扩张子。于是我们有

$$\pi^{\mathcal{T}}_{\beta,\xi}(\mu_\beta) = \mu_\xi.$$

现在假设 $\tau < \mu_\xi$（因为 $\mu_\xi \in D$且 $\tau' = \sup(D \cap \tau)$， $\mu_\xi < \tau$是不可能的）。令F为 $E \restriction \tau$的 Jensen 完备化。我们知道 F不是超强型，因此

$$\pi^{\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_\beta}_F(\mu_\beta) > \tau,$$

这意味着存在某个 $f \in \mathcal{H} \cap \mathscr{P}(\mu_\beta^{\mu_\beta})$以及某个 $a \in \tau^{<\omega}$，使得 $\pi^{\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_\beta}_F(f)(a) > \tau$。由于 F 是 E的子扩张子，令$\lambda_\beta = \pi^{\mathcal{T}}_{0,\beta}(\lambda)$，我们有

$$k : Ult(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_\beta, F) \to \mathcal{M}^{\mathfrak{q}^\kappa}$$

使得

$$\pi^{\mathcal{T}}_{\beta,b} = k \circ \pi^{\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_\beta}_F.$$

因此，由于

$$k(f) \in \mathsf{Hull}^{\mathcal{H}|\lambda}(\mu_\beta \cup X),$$

我们有

$$\tau < \sup(\kappa \cap \mathsf{Hull}^{\mathcal{H}|\lambda}(\tau \cup X)),$$

这就产生了矛盾。 □

现在很容易完成定理 3.2 的证明。首先注意， $D \in N$，因为它可以由 $X \in N$和 λ轻易地定义。如果现在 $\tau \in D - \mu_\alpha$， $\beta \in b$ 满足 $\mu_\beta = \tau$，且 E 是在 β 处用于 b的扩张子，那么 E 是 Mitchell 序数 0 超滤子，否则我们就会得到$\mathcal{H} \vDash$ “τ是一个可测基数。”由此可知，对每个 $A \in \mathcal{H} \cap \mathscr{P}(\kappa)$,

$$A \in E_\kappa \leftrightarrow \exists \nu (D - \nu \subseteq A).$$

显然，上述等价关系意味着在 $N[G]$, $F_\kappa(\mathcal{H}) = E_\kappa$。 □

应用引理 3.1、定理 3.2，以及 Nairian 模型的每个正则基数都是 $\mathcal{H}$ [21]中的可测基数这一事实，我们得到以下推论。

推论 3.5. 假设 Θ_{reg}+HPC+NLE，并且设 N 是一个极小奈良模型。设$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\max} * \mathbb{Q} \subseteq N$ 是定理 *8.7*中所述的迭代。那么在 $N^{\mathbb{P}}$中，每个不可数正则基数 κ都是 ω-强可测的，且事实上，HOD中亦然，

$$\mathrm{HOD} \vDash \text{“}F_\kappa(\mathrm{HOD}) \textit{ is a } \kappa\textit{-complete normal ultrafilter.”}$$

第1 部分 在 Nairian 模型上强迫选择公理

在 §8 中，我们引入 Nairian 理论 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$，并展示如何在该理论的模型上强迫选择公理。该理论以 N-层级来表述，这是一种通过关系 $|X| \lesssim |Y|$对集合宇宙进行分层的方式；该关系表示存在一个从 Y 到X的满射。该层级的各层是 H-类集合，定义见 §4。

4. H-型集合

由于我们将在选择公理失效的集合论模型中进行研究，因此我们将通过满射的存在性来比较集合，而非通过单射。

定义 4.1. 设 X 和 Y 是集合。那么

(1) $|X| \lesssim |Y|$ 表示 $X = \emptyset$，或者存在满射 $f\colon Y \to X$。(2) $|X| \approx |Y|$ 表示 $|X| \lesssim |Y|$ 且 $|Y| \lesssim |X|$。(3) 若 κ 是基数，则 $|X| \lesssim \kappa$ 表示 $|X| \lesssim |\kappa|$，而 $|X| \approx \kappa$ 表示 $|X| \approx |\kappa|$。

在本节中，我们通过关系$\lesssim$引入与通常集合 $H(\theta)$ 类似的 H-型集合。首先定义若干相关性质。

定义 4.2. 设 M 是一个集合。

(1) 若存在 $X \in M$ 使得 $M \vDash \forall Y(|Y| \lesssim |X|)$，则 M 具有最大基数。在这种情况下，我们称 X 为 M的最大基数。(2) 若 M 具有最大基数，则称其为后继型。(3) 若 M 非空且不具有最大基数，则称其为极限型。(4) 若对每个 $Y \in M$，都存在传递集 $Z \in M$ 使得$Z \subseteq M$ 且 $Y \in Z$，则称 M 是传递闭的。(5) 若当 X、$Y \in M$时，$X \times Y \in M$，则称 M对乘积封闭。(6) 若对每个 $X \in M$，$\mathscr{P}(X) \subseteq M$，则称 M对取子集封闭。(7) 若 M，且 (a) 传递闭，(b) 对乘积和子集封闭，则称 M 为满的。(8) 若每当 $X \in M$ 且 f 是从 X 到序数类 Ord $\cap M$的函数时，f的值域在序数类 Ord $\cap M$中有界，则称 M 是强正则的。

注意，传递闭集是传递的，因此，传递闭等价于传递且在将每个集合 Y 映射到其传递闭包的$\{Y\}$函数下封闭。另请注意，如果 X 是一个在乘积和子集下封闭的集合 M 的最大基数，那么对于所有正的 $n \in \omega$，$M \vDash |X| \approx |X^n|$。我们记录以下事实。

引理 4.3. 设 M 是满的且为后继型。那么存在一个传递的 $X \in M$，使得 X 是 M的最大基数。

证明。设 Y是 M的最大基数，并设 $X \in M$ 是一个满足 $Y \in X$的传递集。于是我们有 $M \vDash |Y| \lesssim |X|$（因为 $X \times Y \in M$，所以 $\mathscr{P}(X \times Y) \subseteq M$）。因此，$X$ 是 M的最大基数。□

引理 4.4. 假设 M 是一个满集。那么，对于任意 $n \in \omega$ 和 $\langle Y_i : i \leq n\rangle \in M$，$\mathscr{P}\left(\prod_{i\leq n} Y_i\right) \subseteq M$。此外，如果 X 是传递的，且是 M 的最大基数，那么 $|M| \approx |\mathscr{P}(X)|$。

证明。引理的第一部分几乎可以直接由定义得出。为证明第二部分，注意，如果 $Y \in M$ 和 Z 是 $\{Y\}$的传递闭包，那么存在 E，$F \subseteq X^2$，使得 E 是一个等价关系，并且 $(Z, \in)$ 与 $(X/E, F/E)$ 同构，其中

X/E 是 E-等价类的集合，而 F/E 是由 F 在 X/E 上诱导的关系。根据这一观察，并利用 $|X| \approx |X^2|$ 这一事实，我们可以定义一个从 $\mathscr{P}(X)$ 到 M 的满射。□

下述性质将与强正则性结合使用，并起关键作用。

定义 4.5. 集合 M 是**分层的**，如果 M 是传递的，并且令 $\kappa =$ 序数类 $\cap M$，则存在一个由传递集构成的 $\subseteq$-递增连续序列 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$，使得

(1) $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ 并且，

(2) 对每个 $\alpha < \kappa$，$M_\alpha \in M$。

序列 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 是 M的**分层分解**。

作为 H-型 这一性质是本节引入的主要概念。N分层（在第8节中引入）的各层将是 H-型。

定义 4.6. 设 M 是一个传递集。则 M 是 H-**型** 如果

(1) M 是满的且分层的，且 (2) 若 M 是后继型，则 M 是强正则的。

下述陈述是我们的理论 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$（见注记 8.4）。

定义 4.7. “V 是 H-型”是如下公理：它断言每个集合都属于某个后继型的 H-型集合。

ThN-层级的e后继层将具有形式 H_X，如下述定义所示。

Defi义 4.8. 设 X 是一个集合。则 H_X 是遗传大小至多为 $|X|$ 的 Y 所组成的集合，即s 使得存在从 X 到 $\{Y\}$的传递闭包的满射。

注意，每当 $|X| \approx |Y|$时，$H_X = H_Y$。

定义 4.9. 我们称 X 是**真基数**，如果 H_X 是 H-型的。

本节其余部分讨论后继型的 H-型集合（N-层级的后继层将是这种集合）。我们首先指出 H-型集合与形如H_X的集合之间的联系。

定理 4.10. 如果 M是 H-型的，且 X是 M的最大基数，则 $M = H_X$。

证明。根据满性和最大基数的定义，几乎可以立即得出 M 包含于 H_X。反过来，根据引理 4.3，只需考虑 X 是传递的且对所有正的 $n \in \omega$都满足 $|X| \approx |X^n|$ 的情形。因此，设 f 是一个从 X 到 $\{Y\}$的传递闭包的满射，我们将其称为 Z。对 Z中元素的秩进行归纳，只需考虑 $Y \subseteq M$的情形。令 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 为见证，表明 M 是分层的。由于存在一个从 X 到 Y的满射，且 M 是强正则的，因此存在一个 $\alpha < \kappa$ 使得 $Y \subseteq M_\alpha$。由于 $M_\alpha \in M$ 且 M 对取子集封闭，因此 Y 属于 M。□

前一个定理的证明还给出了更多内容，我们在此记录下来。

推论 4.11. 假设 M 是一个 H-类后继型集合，$Y \in M$ 且 $\{A_y : y \in Y\} \subseteq M$。那么 $\langle A_y : y \in Y \rangle \in M$，因此 $\bigcup_{y\in Y} A_y \in M$。

定理 4.12. 如果 M 是一个 H-类后继型集合，那么 $M \vDash \mathsf{ZF}$ –幂集。

证明。$M \vDash$ 替换公理的证明与定理 4.10 的证明非常相似。设$\kappa =$序数类 $\cap M$，并设 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$为 M 的分层分解。设 f为从 Y到 M 的函数，其中某个 $Y \in M$。因为 M 是强正则的，故存在 $\beta < \kappa$，使得对所有 $y \in Y$，$f(y) \in M_\beta$。由于 $M_\beta \in M$且 M对取子集封闭，f的值域属于 M。

推论 4.11 蕴涵 M 满足 配对公理 与并集公理，且对子集封闭给出概括公理。其余公理的证明是直接的。□

定理 4.13是本节的主要定理，它表明，后继H类集合的强迫扩张仍是后继 H类集合。因此，集合大小的强迫保持陈述“V是 H类的”。

定理 4.13. 假设 M 是一个 H类集合，并且 X 是传递的，且其最大基数为 M。假设 $\mathbb{P} \in M$ 是一个偏序集，且 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是一个 V-泛型滤子。那么$M[G] = (H_X)^{V[G]}$并且

$$V[G] \vDash \text{“}H_X \text{ is } H\text{-like”}.$$

证明。 令 $\kappa = M \cap$为序数类，并令 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 为 M 的一个分层分解，其中$\mathbb{P} \in M_0$。

命题 4.14。 若 σ 是一个 $\mathbb{P}$-名称，且 σ_G 是 X的子集，则存在 $\tau \in M$ 使得$\sigma_G = \tau_G$。因此， $\mathscr{P}(X)^{V[G]} \subseteq M[G]$。

证明。 令 $p \in G$ 满足 $p \Vdash \sigma \subseteq \check{X}$，并令 τ为所有满足 $q \leq p$且 $q \Vdash \check{x} \in \sigma$的 $(q, x) \in \mathbb{P} \times X$ 的集合。于是我们有 $\tau \in M$，且 $\sigma_G = \tau_G = \{x : \exists q \in G((q, x) \in \tau)\}$。□

命题 4.15。 $M[G] = (H_X)^{V[G]}$.

证明。 首先，假设对于某个 M中的 $\mathbb{P}$-名称 σ，有 $Y = \sigma_G$。我们要证明 $V[G]$ 包含一个从 X 到 $\{Y\}$的传递闭包的满射。 $\mathbb{P} \times \{\sigma\}$ 与 $\{\sigma\}$ 的传递闭包的并集公理包含一个 $\mathbb{P}$-名称，其对应于 $\{\sigma_G\}$的传递闭包。由于 X 是 M的一个最大基数，存在一个从 X 到该名称的满射，它诱导出一个从 X 到该名称在 $V[G]$中的实现的满射。

对于反向包含关系，设 $Y \in (H_X)^{V[G]}$ 是一个传递集，且 $f\colon X \to Y$ 是 $V[G]$ 中的满射。令 $E = \{(a, b) \in X^2 : f(a) \in f(b)\}$。根据命题 4.14，有 $E \in M[G]$，因此对于某个 $\mathbb{P}$-名称 σ，在 M 中有 $E = \sigma_G$。按照定理 4.10 的证明对 α 进行归纳（或使用定理 4.12），可以证明：每当 M 包含一个秩为 α 的良基外延关系的 $\mathbb{P}$-名称时，它就包含一个传递集的 $\mathbb{P}$-名称，该传递集按 $\in$排序后与此关系同构。□

由命题 4.15 可知， $\langle M_\alpha[G] : \alpha < \kappa \rangle$ 是 $M[G]$ 的分层分解。

命题 4.16。 在 $V[G]$ 中， $M[G]$ 是强正则的。

证明。由命题 4.15，只需固定一个 $f\colon X \to \kappa$ in $V[G]$，并证明 $f[X]$ 在 κ之下有界 $\check{\kappa}$。设 f是 V中的一个 $\mathbb{P}$-名称，满足 $f_G = f$；再设 $p \in G$ 满足 $p \Vdash f\colon X \to \check{\kappa}$。由于 M是强正则的，且 $\mathbb{P} \times X \in M$，因此存在一个 $\tau < \kappa$，使得只要某个$r \leq p$ 迫使 $f(\check{x}) = \xi$，就有 $\xi < \tau$。□

要证明 $M[G]$ 在 $V[G]$中是 H-型的，只需证明它是满的。由于每个 $M_\alpha[G]$都是传递的，因此 $M[G]$ 是传递闭的。由断言 4.14 和断言 4.15可知 $M[G]$ 对取子集和乘积封闭。□

5. 关于依赖选择

我们将通过依次强迫依赖选择公理的更强形式，来构造一个满足选择公理的模型。

定义 5.1。 设 T 是集合 X 上的二元传递关系。

（1）给定序数 η，一条经过 T 的 η-链 是一个函数 $f\colon\ \eta \to X$，满足

$$(f(\alpha), f(\beta)) \in T$$

对所有 $\alpha < \beta < \eta$。(2) 一个 T-**上界** 是指一个 η-链 f的上界，它是一个 $u \in X$，满足对所有 $\alpha < \eta$都有 $(f(\alpha)\ u)$。(3) 若 T满足以下条件，我们称它是 κ-**闭** 的：只要 $\eta < \kappa$ 且 f，则 f就有一个 T-上界：$\eta \to X$是经过 T的一个 η-链。

定义 5.2。设 κ 是一个基数，X 是一个集合。那么

(1) κ-**关于的依赖选择公理**（$\mathrm{DC}_\kappa(X)$）是这样一个命题：若 T是定义在 X上的 κ-闭二元传递关系，则存在一条经过 T的 κ-链；(2) κ-**依赖选择公理**（DC_κ）是这样一个命题：对于所有集合 X，$\mathrm{DC}_\kappa(X)$ 都成立。

注记 5.3。

(1) 根据定义可知，只要 $\lambda > \kappa$，DC_λ 就蕴含DC_κ。(2) 若 κ 是一个基数，且 Y是 X的一个满射像，则$\mathrm{DC}_\kappa(X)$蕴含$\mathrm{DC}_\kappa(Y)$。(3) 对于给定的基数 κ，DC_κ 蕴含：对每个集合 X，要么存在 X 的一个良序，要么存在从 κ 到 X 的一个单射（考虑函数 f的集合：$\gamma \to X$，其中对于某个 $\gamma < \kappa$，这些函数要么是满射，要么是单射，并按延拓关系排序）。(4) 当 κ 是奇异基数时，DC_κ 可由 $\bigwedge_{\lambda<\kappa}\mathrm{DC}_\lambda$推出。(5) 选择公理等价于如下断言：对所有基数 κ，DC_κ 都成立；这也等价于如下断言：对一个真类的 κ，DC_κ 都成立。

下一个引理将用于证明，强迫迭代的末段保持 DC_κ 。

引理 5.4 (ZF)。若 κ 是一个满足DC_κ 的无限基数，且 $\mathbb{P}$ 是一个 κ^+-闭偏序集，则 $\mathbb{P}$强迫DC_κ。

证明。令 T 为一个 $\mathbb{P}$-名称，它是一个以由 $\mathbb{P}$-名称 X给出的集合为底集的树。令 $p \in \mathbb{P}$ 为一个条件，它强迫 T 是 κ-闭的。令 Y为由满足 $q \leq p$ 和 $q \Vdash \sigma \in \check{X}$的对 (q, σ) 构成的集合。令 S为 Y上的传递二元关系，定义为：当且仅当 $q' \leq q$且 $q' \Vdash (\sigma, \sigma') \in \check{T}$时，$((q, \sigma), (q', \sigma'))$属于 S。

我们断言 S 是 κ-闭的。事实上，若 $\eta < \kappa$ 且 $h\colon\ \eta \to Y$是长度为 η 的链，那么令每个值 $h(\alpha)$等于 $(q_\alpha, \sigma_\alpha)$，便有对所有 $\alpha < \beta < \eta$，$q_\beta \leq q_\alpha$。由于 $\mathbb{P}$ 是κ-闭的，我们可以找到 q，使得对所有 $\alpha < \eta$都有 $q \leq q_\alpha$。于是对所有 $\alpha < \beta < \eta$，都有$q \Vdash (\sigma_\alpha, \sigma_\beta) \in \dot{T}$。由 p的选择可知，存在 $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$和 $r \leq q$，使得$r \Vdash \forall \alpha < \check{\eta}\ (\sigma_\alpha, \sigma) \in T$。因此，对所有 $\alpha < \eta$，$((q_\alpha, \sigma_\alpha), (r, \sigma)) \in S$。这表明 S确实是κ-闭的。

利用依赖选择公理$_\kappa$，我们可以找到一条经过 S的链 $((q_\alpha,\ \sigma_\alpha)\colon\ \alpha < \kappa)$。由于 $\mathbb{P}$ 是 κ^+-闭的，我们可以找到某个 $q \in \mathbb{P}$，使得对每个 $\alpha < \eta$，都有 $q \leq q_\alpha$。由此可得 $q \Vdash$ “$(\sigma_\alpha\colon\ \alpha < \check{\kappa})$ 是一条经过 $\dot{T}$的$\check{\kappa}$-链”。□

给定集合 X 和 Y，X^Y 表示从 Y到 X的函数集合。给定一个序数 η 和一个集合 X，我们用 $X^{<\eta}$ 表示 $\bigcup_{\alpha<\eta} X^\alpha$。

注 5.5. 设 κ 是一个满足依赖选择公理$_\kappa$ 的无限基数。若 $\langle X_\alpha\colon\ \alpha < \kappa\rangle$ 满足对所有 $\alpha < \kappa$都有 $|X_\alpha| \lesssim \kappa$，则$\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha\right| \lesssim \kappa$。特别地，若对所有 $\alpha,\ \beta < \kappa$都有$\left|\alpha^\beta\right| \lesssim \kappa$，则$\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^{<\kappa}\right| \approx \kappa$。

定义 5.6。如果 κ 是一个基数，且 X 是一个集合，那么当 $X^{<\kappa} \subseteq X$时，X 是 $<\kappa$-**闭的** 。

引理 5.7。 假设 κ 是一个无限正则基数，ZF $+$依赖选择公理$_\kappa$ 成立，并且对每个$\alpha<\beta<\kappa$，都有 $|\alpha^\beta|\lesssim\kappa$。假设 W 是一个 $<\kappa$-闭传递结构。那么，对于每个满足 $|A|\lesssim\kappa$ 的 $A\subseteq\kappa$，都存在一个 $X\preceq W$，使得 $A\subseteq X$、$|X|\lesssim\kappa$，并且 X 是 $<\kappa$-闭的。[9]

证明。 我们将 X 构造为一个 $\subseteq$-链 $\langle X_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$ 的并集；该链将通过对一个 κ-闭传递二元关系 U 应用依赖选择公理$_\kappa$而得到。 U 的定义域由满足以下条件的有序对 $(X,\ f)$ 组成： $A\subseteq X\subseteq W$ 且 $f:\kappa\to X$ 是一个满射。给定两个这样的有序对 $(X,\ f)$ 和 $(X',\ f')$，当且仅当 $((X,\ f),\ (X',\ f'))$ 属于 U

(1) $X\cup X^{<\kappa}\subseteq X'$，并且 (2) 每当 $s\in X^{<\omega}$ 且 φ 是一个 $(|s|+1)$ 元公式，满足 $W\vDash\exists x\varphi[x,s]$ 时，便存在一个 $b\in X'$，使得 $W\vDash\varphi[b,s]$。

每当 $\langle(X_\alpha,f_\alpha):\alpha<\eta\rangle$ 是一个 U-递增序列时，对于某个极限序数 $\eta\leq\kappa$，存在一个函数 f使得 $(\bigcup_{\alpha<\eta}X_\alpha,f)$ 属于 U 的定义域，并且根据塔斯基–沃特判据，$\bigcup_{\alpha<\eta}X_\alpha\preceq W$。因此，只需证明对于每个 $(X,f)\in\mathrm{dom}(U)$，都存在一对 (X',f)，使得 $((X,f),(X',f'))\in\mathrm{dom}(U)$。对于 X' 的第一个条件，注 5.5 蕴含 $|X\cup X^{<\kappa}|\lesssim\kappa$（应用 κ 的正则性）。对于第二个条件，固定一个枚举 $\langle(s_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha<\kappa\rangle$，列出所讨论的那些对 (s,φ)（使用 f），应用依赖选择公理 DC$_\kappa$，得到一个序列 $\langle b_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$，使得对于每个 $\alpha<\kappa$，$W\vDash\varphi[b_\alpha,s_\alpha]$。于是，集合 X' 可以是 $X\cup X^{<\kappa}\cup\{b_\alpha:\alpha<\kappa\}$。□

6. 反射原理

我们使用以下相对于任意集合的闭包概念。

定义 6.1. 假设 X是一个集合。那么，当且仅当 $X\cup\{X\}\cup W^X\subseteq W$时， W是 X-**闭**的。

由定理 4.12 的证明可知，如果 M 是一个后继 H-类集合，并且 $X\in M$，那么 M 是 X-闭的。我们对原理 依赖选择公理$_\kappa$ 的证明将用到以下反射原理。

定义 6.2（反射）。 对于集合 X、Y和 Z，ref$(X,\ Y,\ Z)$ 表示如下陈述：每当W 是一个传递的 X-闭结构且满足 $Y\in W$，并且 a 是 W的一个元素时，就存在一个传递集 M和一个初等嵌入 $\pi:M\to W$，使得

- $\{X,Y\}\in M$,
- $a\in\mathrm{rge}(\pi)$,
- $M\in Z$,
- $\pi\restriction(X\cup Y\cup\{X,Y\})=\mathrm{id}$，且
- M 是 X-闭的。

当 $Y=\emptyset$时，我们记作反射$(X,\ Z)$。

我们对 反射$(X,\ Y,\ z)$ 的主要应用是引理 7.1。本节其余部分讨论这一原理的性质。我们先观察替换第一个坐标的情形。

注 6.3. 假设 X、 X' 和 Y 是集合，且 $X,X'\in Y$ 和 Y 是 ZF $-$ 幂集 $+\ |X|=|X'|$的传递模型。那么对于任意满足 $Y\in W$ 的传递结构 W， W 是 X-闭的，当且仅当它是 X'-闭的。因此，对于任意集合 Z，ref(X,Y,Z) 成立，当且仅当 ref(X',Y,Z) 成立。

定义 6.4. 假设 M 是一个传递集。那么，如果每当 $N\in M$ 是传递集且 $X\subseteq N$ 在 N 上可定义（参数取自 N）时，都有 $X\in M$，则称 M 是**定义闭合** 的。

引理 6.5 表明，如果在 反射$(X,\ Y,\ Z)$ 的陈述中加入 V和W 是 H-型的条件，那么便可得到 M 具有分层且定义闭合这一附加性质。注意，一个 H-型集合 W 对取子集封闭，但这一性质不会传递给每个初等嵌入其中的结构。

[9]这个引理似乎没有被用到。

引理 6.5。 设 V 是 H-型的，且 X、 Y 和 Z 是满足以下条件的集合： Z 是传递的，并且反射$(X$、Y、$Z)$ 成立。那么，每当 W 是传递的 X-闭 H-型集合，且满足 $Y \in W$，并且 a 是 W 的一个元素时，都存在一个传递的、分层的、定义闭合的 M 以及一个初等嵌入 $\pi\colon\ M \to W$，使得

- $\{X, Y\} \in M$,
- $a \in \mathrm{rge}(\pi)$,
- $M \in Z$,
- $\pi \restriction X \cup Y \cup \{X, Y\} = \mathrm{id}$ 和
- M 是 X-闭的。

证明。固定引理陈述中的 X、 Y、 Z、 W 和 a。我们有 W 是分层的。令 $\kappa = W \cap \in$序数类，并令 $\langle W_\alpha\colon\ \alpha < \kappa\rangle$ 是 W 的分层分解。应用 V 是 H-型这一假设，令 U 为一个真基数，使得 $\{X, Y, W, \langle W_\alpha\colon\ \alpha < \lambda\rangle\} \in H_U$。现在我们将反射$(X, Y, Z)$应用于 H_U 和 $b = \{X, Y, W, a, \langle W_\alpha\colon\ \alpha < \lambda\rangle\}$（我们可以这样做，因为 H_U 是 X-闭且传递的）。令 $\pi\colon\ M' \to H_U$ 为一个初等嵌入，使得 $M' \in Z$, $b \in \mathrm{rge}(\pi)$, $\{X, Y\} \in M'$, $\pi \restriction X \cup Y \cup \{X, Y\} = \mathrm{id}$，且 M' 是 X-闭的。令 $M = \pi^{-1}(W)$。我们断言 $\pi \restriction M\colon\ M \to W$ 正如所需。我们有 $\pi^{-1}(\langle W_\alpha\colon\ \alpha < \lambda\rangle)$ 是 M 为分层的见证。由于 M' 是 X-闭的，且 $H_U \vDash$ “W 是 X-闭的”，所以 M 是 X-闭的。

还需证明 M 是定义闭合的。设 N 是 M 的一个元素，设 z 是 N 的一个元素，并设 $A \subseteq N$ 和 φ 满足： A 是所有满足 $N \vDash \varphi[z, y]$ 的 $y \in N$ 所构成的集合。令 $B \subseteq \pi(N)$ 为所有满足 $\pi(N) \vDash \phi[\pi(z)\ y)]$ 的 y 所构成的集合。于是 $B \in W$，因为 W 是 H 型的。因此，由 π 的初等性可得 $\{y \in A\colon\ N \vDash \varphi[z, y]\}$，也就是说， A，属于 M。□

定理 6.6(用于定理8.7的证明）表明，在某些强迫扩张中反射得以保留。

定理 6.6. 假设 $\mathsf{ZF}+V$ 是 H型的。设 $M_0 \in M_1$ 是两个 H 型的后继型集合，并且令 X 为 M_0 的最大基数，则 反射(X, M_0, M_1) 成立。设 $\mathbb{P} \in M_0$ 是一个偏序集， $G \subseteq \mathbb{P}$ 是一个 V-泛型滤子。那么

$$V[G] \vDash \mathsf{ref}(X, M_0[G], M_1[G]).$$

证明。 令 $W \in V[G]$ 为一个 X-闭传递结构，满足 $M_0[G] \in W$，并令 a 为 W的一个元素。令 Z为 V的一个真基数，使得存在具有如下性质的 $\mathbb{P}$-名称 σ， $\tau \in H_Z\colon\ \sigma_G = W$ 且 $\tau_G = a$，并且此外 $M_0 \in H_Z$。

由于 H_Z是 X-闭的，应用 反射(X, M_0, M_1) 和引理 6.5，我们得到一个初等映射$\pi\colon N \to H_Z$ 以及 $\mathbb{P}$-名称 $\sigma', \tau' \in N$，使得

- $N \in M_1$,
- $M_0 \in N$,
- $\{\sigma, \tau\} \in \mathrm{rge}(\pi)$,
- $\pi^{-1}(\sigma,\ \tau) = (\sigma',\ \tau')$,
- $\pi \restriction M_0 \cup \{M_0\} = \mathrm{id}$, 且
- N 是 X-闭的、传递的、分层的且定义闭合的。

令 $\pi^+(\rho_G) = \pi(\rho)_G$，对于每个 $\mathbb{P}$-名称 $\rho \in N$，我们得到 π 可扩展为一个初等$\pi^+\colon\ N[G] \to H_Z[G]$。由于 $W = \pi(\sigma')_G$且 $a = \pi(\tau')_G$，我们有 $(W,\ a) \in \mathrm{rge}(\pi^+)$。令$K = \sigma'_G$且 $b = \tau'_G$。那么 $(K,\ b) \in N[G]$， $\pi^+(K) = W$且 $\pi^+(b) = a$。由于 $\pi \restriction M_0 \cup \{M_0\} = \mathrm{id}$， $\pi^+ \restriction M_0[G] \cup \{M_0[G]\} = \mathrm{id}$。由于 $M_0[G] \in W \cap N[G]$，我们有 $M_0[G] \in K$。

我们现在断言 $\pi^+ \restriction K\colon\ K \to W$ 正如所需。由于

- $K \in M_1[G]$,
- $M_0[G] \in K$,
- $\pi^+(b) = a$，并且

- $\pi^+ \restriction M_0[G] \cup \{M_0[G]\} = \mathrm{id}$,

只需证明 $N[G]$ 在 $V[G]$ 中是 X-闭的，我们便可完成证明。事实上，由此可知，若 $h\colon X \to K$ 是 $V[G]$ 中的一个函数，则 $h \in N[G]$；又由于 W 在 $V[G]$ 中是 X- 闭的，我们有 $\pi^+(h) \in W$，这意味着 $h \in K$。

为证明 $N[G]$ 在 $V[G]$ 中是 X-闭的，固定 $p \in G$ 和一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{f}$，使得 $p \Vdash \dot{f}\colon \check{X} \to N[G]$。令 $\langle N_\alpha : \alpha < \eta\rangle$ 为 N 的一个分层分解，其中 $\eta =$ 序数类 $\cap N$。对于每个 $x \in X$，令$P_x \subseteq \mathbb{P}$ 为满足如下条件的 $q \leq p$ 集合：存在某个 $\mathbb{P}$-名称 $\rho \in N$，使得 $q \Vdash \dot{f}(\check{x}) = \rho$。由于 M_0 对取子集封闭， $P_x \in M_0$，所以 $P_x \in N$。对于每个 $x \in X$ 和 $q \in P_x$，令

- $P'_{x,q}$ 为满足 $q \Vdash \dot{f}(\check{x}) = \rho$ 的 $\mathbb{P}$-名称 $\rho \in N$ 集合，
- $\alpha_{x,\ q}$ 是满足 $N_\alpha \cap P'_{x,\ q} \neq \emptyset$ 且.....的最小序数
- $P_{x,\ q}$ 是 $P'_{x,\ q} \cap N_{\alpha_{x,\ q}}$。

由于 N 是定义闭合的，每个 $P_{x,\ q}$ 都属于 N。为此，固定 $\rho_0 \in P_{x,\ q}$，并取 $\beta < \eta$ 使得 $\{N_{\alpha_{x,q}}, M_0\} \in N_\beta$。那么 $P_{x,\ q}$ 可由 $(\rho_0,\ N_{\alpha_{x,\ q}},\ q,\ \mathbb{P})$ 在 N_β 上定义如下：

$$\rho \in P_{x,q} \text{ if and only if } N_\beta \vDash \rho \in N_{\alpha_{x,q}} \wedge q \Vdash \dot{\rho} = \rho_0.$$

由于 N 是 X-闭且定义闭合的，并且存在一个从 X 到$X \times \mathbb{P}$的满射，且该满射属于 $M_0 \subseteq N$，因此函数 $(x,\ q) \mapsto P_{x,\ q}$ 属于 N。利用这个函数，我们可以轻易地定义一个名称 $\dot{g} \in N$，使得 $p \Vdash \dot{f} = \dot{g}$。因此， $f_G \in N[G]$。□

7. 提升 DC

引理 7.1 是我们利用反射证明 依赖选择公理$_\kappa$ 的主要工具。

引理 7.1. 假设 ZF$+V$ 是 H-型的。设 κ 是一个无限正则基数， Y 和 M是集合，且 反射(κ, Y, M)成立，并且对所有 $N \in M$，依赖选择公理$_\kappa(N)$成立。那么 依赖选择公理$_\kappa$成立。

证明。设 T是一个 κ-闭关系，并设 U是一个真基数，使得 $\{T, Y, \kappa\} \in H_U$。应用 ref(κ, Y, M)，取一个初等嵌入 $\pi\colon N \to H_U$，使得 N是传递的，$T \in \mathrm{rge}(\pi)$， N是 κ-闭的，并且 $N \in M$。设 $S = \pi^{-1}(T)$。由于 N是 κ-闭的，π 的初等性表明 S 是 κ-闭的。由依赖选择公理$_\kappa(N)$可知，存在一个 κ-链 $f\colon \kappa \to \mathrm{dom}(S)$。于是， $\pi \circ f\colon \kappa \to \mathrm{dom}(T)$是一个 κ-链。□

假设 κ是一个基数，且 M是一个 κ-闭结构。如果对所有 依赖选择公理$_\kappa(N)$都成立， $N \in M$，那么 $M \vDash$依赖选择公理$_\kappa$。引理 7.3 表明逆命题的一个版本成立，但它需要以下类似 广义连续统假设的假设。

定义 7.2. 设 M 是一个集合。

(1) 给定 $Y \in M$，若对所有 $Z \in M$, $Z^Y \in M$，则 M 是 Y-**满的**。(2) 若 M 对每个不是 M 的最大基数的 $Y \in M$ 都是 Y-满的，则 M 是**完全满**。(3) 对每个序数 $\eta \in M$，若 η 小于 M 的某个基数，则 M 是 η- 满的；若此条件对所有序数都成立，则 M 是**完全序数满**。

引理 7.3. 假设

- M 是后继型的 H-类，
- λ 是 M 的一个正则基数，
- M 对每个 $\eta < \lambda$ 都是 η-满的，并且
- $M \vDash$依赖选择公理$_\lambda$。

设 Y 是 M 的满射像。则 依赖选择公理$_\lambda(Y)$ 成立。特别地， $H_M \vDash$ 依赖选择公理$_\lambda$。

证明。根据注记 5.3 的第（2）部分，只需证明依赖选择公理$_\lambda(M)$成立。令 $\kappa = \text{序数类} \cap M$，并设 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ 为 M 的分层分解。设 T 为 M 上的一个 λ-闭关系。对每个 $\alpha < \kappa$，设 T_α 为 T 到 M_α 的限制。由于 M 对取子集和乘积封闭，$S_\alpha \in M$。我们有，对 $\alpha < \beta < \kappa$，$S_\alpha \subseteq S_\beta$。我们断言存在 $\alpha < \kappa$ 使得 S_α 是 λ-闭的。这由 M 上的丰满性假设和 its 的强正则性可得。事实上，对每个 $\alpha < \kappa$，设 $h(\alpha)$ 为低于 κ 的最小序数，使得每当 $\eta < \lambda$，

(1) $\mathrm{dom}(S_\alpha)^\eta \in M_{h(\alpha)}$，(2) 每当 $g\colon \eta \to \mathrm{dom}(S_\alpha)$ 是一条 S_α-链时，$S_{h(\alpha)}$ 都包含 g 的一个上界。

由于对每个 $\eta < \lambda$，M 都是强正则且 η-满的，因此每个值 $h(\alpha)$ 都小于 κ，正如所需。事实上，对每个 $\eta < \lambda$，由于 $\mathrm{dom}(S_\alpha)^\eta \in M$，由推论 4.11 可知存在 $\beta < \kappa$，使得 $\bigcup_{\eta<\lambda} \mathrm{dom}(S_\alpha)^\eta \in M_\beta$。接下来，由于 T 是 η-闭的，根据 M 的强正则性可知，存在一个 $\gamma \in [\beta, \kappa)$，使得每条链 $g\colon \eta \to \mathrm{dom}(S_\alpha)$ 在 S_γ 中都有一个上界。因此，$h(\alpha) < \kappa$。

再次应用 M 的强正则性，取 $\nu < \kappa$，使得 $\mathrm{cf}(\nu) = \lambda$ 且 $h[\nu] \subseteq \nu$。由此可知 $S_\nu = \bigcup_{\alpha<\nu} S_\alpha$ 是 λ-闭的。又由于 $M \vDash$ 满足依赖选择公理 $_\lambda$，可知存在一条经过 T 的 λ-链 $g\colon \lambda \to \mathrm{dom}(S_\nu)$。□

8. A Nairian Theory

本节将引入 N-层级及相应的和谐公理。该公理断言，层级中的集合全都是 H-型的。接着，我们将介绍理论 $\mathrm{NT}_{\mathsf{base}}$，我们构造的 Nairian 模型将满足该理论，并说明如何在该理论的模型上强制选择公理。

定义 8.1. **N-层级** $\langle \mathrm{N}_\alpha : \alpha \in \text{序数类}\rangle$ 定义如下：

(1) N_0 是遗传有限集的集合。(2) $\mathrm{N}_1 = H_{\mathrm{N}_0}$。(3) 对每个 α，$\mathrm{N}_{\alpha+2} = H_{\mathrm{N}_{\alpha+1}}$。(4) 对每个极限序数 α，$\mathrm{N}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\mathrm{N}_\beta$，且 $\mathrm{N}_{\alpha+1} = H_{\mathscr{P}(\mathrm{N}_\alpha)}$。

N_α们是传递的，并且关于 α 按 $\subseteq$递增。利用 $\omega \subseteq N_0$ 这一事实，例如，不难看出，只要集合 X 是某个 N_α 的子集，X 就是 $\mathrm{N}_{\alpha+1}$ 的元素。由此可知，每个集合都属于某个 N_α。另请注意，N_1 是遗传可数集的全体，且 $\mathrm{N}_2 \cap$序数类 $= \Theta$。

术语 8.2。

(1) 如果存在某个后继 α，使得 X 是 N_α 的最大基数，则集合 X **-基数** 称为 N_α-基数。在这种情况下，我们也称 X 是 N_α-基数。(2) 当 α 是后继序数时，我们将 $\mathfrak{n}_\alpha$ 写作

- $\mathrm{N}_{\alpha-1}$，如果 $\alpha - 1$ 是 0 或后继序数，并且
- $\mathscr{P}(\mathrm{N}_{\alpha-1})$，如果 $\alpha - 1$ 是极限序数。我们称 $\mathfrak{n}_\alpha$ 为 N_α的典范N-基数。(3) 若对于某个 α，$M = \mathrm{N}_\alpha$，则称 M 为 **N-集合**。(4) 若对于某个后继序数 α，$M = \mathrm{N}_\alpha$，则称 M 为**后继型**N-集合；若对于某个极限序数 α，$M = \mathrm{N}_\alpha$，则称其为**极限型**N-集合。(5) 若 $M = \mathrm{N}_{\alpha+1}$，其中 α 是极限序数，则称 M 为**极限后继型**N-集合。(6) 若 G 是泛滤子且 $\alpha \in$ 属于序数类，则我们将 N_α^G 记作 $\mathrm{N}_\alpha^{V[G]}$，并且（若 α 是后继序数）将 $\mathfrak{n}_\alpha^G$ 记作 $\mathfrak{n}_\alpha^{V[G]}$。[10](7) 给定任意集合 u，若 α 是满足 $u \in \mathrm{N}_\alpha$的最小序数，则称 α 为 u 的 N-秩。

[10]我们可能不会使用这一条或下一条。

定义 8.3（和谐公理（AH））。对于每个 α，N_α 是 H-型的。

注 8.4. 由于每个集合都属于某个 N_α，和谐公理蕴含 V 是 H-类。它还蕴含每个 N_α 在乘积下闭，因此也蕴含对每个后继序数 α，$|\mathfrak{n}_\alpha| \approx |\mathfrak{n}_\alpha^2|$。

在定理 8.7的证明中，我们将在 N-层级的各层上进行强迫。下面的引理表明，假设 AH成立，则 N-层级的各层满足某些序数满性形式，并且这些形式在特定的强迫扩张下保持不变。

引理 8.5. 假设AH 成立。设 α 是一个序数，$\mathbb{P}$ 是N_α 中的一个偏序集，且 $G \subseteq \mathbb{P}$是一个 V-泛型滤子。那么，对于所有满足 $\alpha < \gamma$的 $\beta < \gamma$，任意N_β 以及任意N_γ，

$$(Y^X)^{V[G]} \in \mathsf{N}_\gamma[G].$$

特别地，对每个 $\eta < \kappa_\beta$，$N_\gamma[G]$ 都是 η-满的。

证明。只需证明以下情形中的断言：α，β 和 γ 都是后继序数。我们还可以假设 $\alpha \leq \beta$。令 $\gamma = \iota + 1$。由定理4.13 可知，$\mathsf{N}_\gamma[G]$ 是 H-样的，$\mathfrak{n}_\gamma$ 是$\mathsf{N}_\gamma[G]$ 的最大基数，并且 $V[G] \vDash N_\gamma[G] = H_{n_\gamma}$。

只需考虑 $X = \mathfrak{n}_\beta$ 和 $Y = \mathfrak{n}_\gamma$的情形。由于 $\mathbb{P} \in N_\beta$ 和 $|\mathfrak{n}_\beta| \approx |\mathfrak{n}_\beta^2|$，存在一个满射 h，从 $\mathfrak{n}_\beta$ 到 $\mathbb{P} \times \mathfrak{n}_\beta$，且属于 N_β。每个从X到 Y的（良好） $\mathbb{P}$-名称 ρ，都由偏函数 $f_\rho = \{((p,\ x)\ y) : (p,\ (x,\ y)) \in \rho\}$ 从 $\mathbb{P} \times N_\tau$ 到 N_ι 编码，因此也由函数 h 和 $f_\rho \circ h$ 编码。由此可知，每个包含 Y（作为子集）的 $\mathfrak{n}_\beta$-闭传递 ZF – 幂集模型（特别是 N_ι）都会包含每个这样的 $\mathbb{P}$-名称ρ（作为元素）。因此，这些名称构成的集合属于 N_γ，而这些名称的实现所构成的集合，即 $(Y^X)^{V[G]}$，则是 $N_\gamma[G]$的一个元素。□

定义 8.6. 令 $\mathrm{NT}_{\mathsf{base}}$ 为以下理论：

(1) ZF +AH。(2) 对每个后继序数 α，若 X 是 N_α 的最大基数，则反射$(X, \mathsf{N}_\alpha, \mathsf{N}_{\alpha+1})$ 成立。

定理 8.7 说明了如何在 $\mathrm{NT}_{\mathsf{base}}$ 的模型上强迫选择公理成立。[11] 在其陈述中，我们使用以下记号表示（类长的）强迫迭代（采用满支撑）。给定一个序数 γ，我们令

- $\mathbb{Q}_{<\gamma} = \mathbb{Q} \restriction \gamma$,
- $\mathbb{Q}_{\leq\gamma} = \mathbb{Q} \restriction (\gamma + 1)$,
- $\mathbb{Q}^{\geq\gamma}$ 为从阶段 γ 开始（包括该阶段）的迭代,
- $\mathbb{Q}^{>\gamma}$ 在阶段 γ之后（不包括该阶段）的迭代，以及
- $\mathbb{Q}(\gamma)$ 是阶段 γ所使用的偏序集。

Thus

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\gamma} * \mathbb{Q}^{\geq\gamma} = \mathbb{Q}_{<\gamma} * \mathbb{Q}(\gamma) * \mathbb{Q}^{>\gamma} = \mathbb{Q}_{\leq\gamma} * \mathbb{Q}^{>\gamma}.$$

对于序数 γ，我们令

$$H_{<\gamma},\ H_{\leq\gamma},\ H^{\geq\gamma},\ H^{>\gamma},\ \text{and}\ H(\gamma)$$

是泛型滤子 H 的自然因子。因此

$$H = H_{<\gamma} * H^{\geq\gamma} = H_{<\gamma} * H(\gamma) * H^{>\gamma} = H_{\leq\gamma} * H^{>\gamma}.$$

[11]在本文的主要应用中，α 将为 2，而 $\mathbb{P}$ 将为 $\mathbb{P}_{\max}$。另一个有趣的情形（也 wi th $\alpha = 2$) 是当 $\mathbb{P}$ 为 Add(1，ω_1) 时。

给定一个基数 κ，偏序 Coll(κ，X) 由从 κ 到X 、基数小于 κ 的偏函数组成，并按包含关系排序。偏序 Add(1，κ) 与 Coll(κ，2) 相同。若 cof(γ) $< \kappa$ 且依赖选择公理γ成立，则 Add(1，κ) 会添加一个从 κ 到 $\mathscr{P}(\gamma)$ 的满射。

定理 8.7。 假设 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$，并且没有正则的 N-基数是 N-基数的极限。设 α 是一个后继序数， $\mathbb{P} \in \mathsf{N}_\alpha$ 是一个偏序集， $G \subseteq \mathbb{P}$ 是一个 V-泛型滤子，并且 $\mathsf{N}_\alpha[G]$ 是完全序数满的，且满足选择公理。

对于每个序数 β，令 κ_β 表示 序数类 $\cap \mathsf{N}_\beta$。在 $V[G]$中，令 $\mathbb{Q}$ 为如下定义的全支撑类迭代。

- $\mathbb{Q}(0) = \mathrm{Coll}(\kappa_\alpha, \mathsf{N}_\alpha[G])$。
- 对于极限序数 β， $\mathbb{Q}(\beta)$ 是平凡偏序集，而 $\mathbb{Q} \restriction \beta$ 是 $\mathbb{Q}(\gamma)$: $\gamma < \beta$)的全支撑迭代。

- 当 β是非极限序数的后继时， $\mathbb{Q}(\beta) = \mathrm{Coll}(\kappa_{\alpha+\beta}, \mathsf{N}_{\alpha+\beta})^{V^{\mathbb{P}*\mathbb{Q}\restriction\beta}}$。
- 当 β 是极限序数的后继时， $\mathbb{Q}(\beta)$ 是偏序

$$\mathrm{Coll}(\eta, \mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\beta})^V) * \mathrm{Coll}(\kappa_{\alpha+\beta+1}, \mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}),$$

如 $V^{\mathbb{P}*\mathbb{Q}\restriction\beta}$ 中的定义，其中 η 是 $V^{\mathbb{P}*\mathbb{Q}\restriction\beta}$ 中 $\kappa_{\alpha+\beta}$ 的基数后继。

那么以下结论在 $V[G*H]$ 中成立。

(1) ZFC。*(2)* 对每个序数 β， $\kappa_{\alpha+\beta}$ 都是基数且 $2^{\kappa_{\alpha+\beta}} = \kappa^+_{\alpha+\beta}$。*(3)* 对每个非极限序数 β， $\kappa_{\alpha+\beta+1} = \kappa^+_{\alpha+\beta}$。

(4) 对每个极限序数 β， $\kappa_{\alpha+\beta+1} = \kappa^{++}_{\alpha+\beta}$。

证明。 首先，我们注意到以下结论。

(1) 对每个后继序数 β, $\mathbb{P} * \mathbb{Q}_{<\beta} \in \mathsf{N}_{\alpha+\beta}$，因此，根据定理 4.13, $N_{\alpha+\beta}[G * H_{<\beta}]$ 是H-类且等于 $H^{V[G*H_{<\beta}]}_{\mathfrak{n}_{\alpha+\beta}}$，因此在 中强正则。

(2) 对每个后继序数 β, $\mathbb{Q}(\beta) \notin \mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G * H_{<\beta}]$。

(3) 对每个极限序数 β，由于 $\mathbb{Q} \restriction \beta \subseteq \mathsf{N}_{\alpha+\beta}$，$(\kappa^+_{\alpha+\beta})^{V[G*H_{<\beta}]} < \kappa_{\alpha+\beta+1}$。也就是说，$\kappa_{\alpha+\beta}$ 在 $V[G*H_{<\beta}]$ 中不是其满射像的最小非零序数，是 $\mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\beta})$ 在 V中的一个满射像。

对于每个后继序数 β，令 $(*)_\beta$表示扩张 $V[G*H_{<\beta}]$ 满足以下每个陈述。

$(*)^{\mathrm{d}}_\beta$ $\kappa_{\alpha+\beta-1}$ 是一个基数，并且满足 $\mathsf{DC}_{\kappa_{\alpha+\beta-1}}$，

$(*)^{\mathrm{s}}_\beta$ 若 $\beta-1$ 不是极限序数，且 κ 是 $N_{\alpha+\beta-1}[G]$的最大基数，则 $2^\kappa = \kappa_{\alpha+\beta-1}$ 并且存在一个从集合 $\mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta-1})$ 到 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G * H_{<\beta}]$ 的满射。

令 $(*)$ 表示以下命题：$(*)_\beta$ 对所有后继序数 β均成立。我们将证明$(*)$，通过对 β进行归纳。我们首先说明，这将证明定理中的若干结论（其他结论将在归纳证明的极限步骤中证明）。首先，以下断言结合注 5.3 和引理 5.4，表明

(4) $(*)$ 蕴含 $V[G*H] \vDash$ 选择公理，并且 (5) 对每个后继序数 γ，$(*)_\gamma$蕴含：每当 κ是 $N_{\alpha+\gamma}[G*H_{<\gamma}]$的基数且 $\beta \geq \gamma$是一个序数时，依赖选择公理$_\kappa$ 在 $V[G*H_{<\beta}]$中成立。

断言 8.8. 设 β 是一个后继序数，并假设 κ 是$\mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G*H_{<\beta}]$的一个基数，使得 $V[G*H_{<\beta}] \vDash$ 依赖选择公理$_\kappa$。那么 $\mathbb{Q}^{\geq\beta}$ 在 $V[G*H_{<\beta}]$中是 κ^+-闭的。

证明。只需证明，对于每个序数 $\iota \geq \beta$， $\mathbb{Q}(\iota)$ 在 $V[G * H_{<\iota}]$中是 κ^+-闭的 $V[G * H_{<\iota}]$。我们用 ι归纳法证明。由引理5.4，在 ι 处的归纳假设将推出 依赖选择公理$_\kappa$在 $V[G * H_{<\iota}]$中成立。归纳的极限步骤显然成立。

若 $\iota = \iota' + 1$，其中 ι' 要么为 0，要么为后继序数，那么由于根据上面的条目 (1)，$\mathsf{N}_{\alpha+\iota}[G * H_{<\iota}]$ 是强正则的，因此 $\mathbb{Q}(\iota) = \mathrm{Coll}(\kappa_{\alpha+\iota}, \mathsf{N}_{\alpha+\iota})$ 在 $V[G * H_{<\iota}]$ 中是 κ^+-闭的。

现在假设 $\iota = \iota' + 1$，其中 ι' 是极限序数，并且 $\mathbb{Q}_{<\iota}$ 在扩张 $V[G * H_{<\beta}]$ 中是 κ^+-闭的。令 η 为 $\kappa_{\alpha+\iota'}$（在 V 中）的基数后继，根据上面的条目 (3)，它小于 $\kappa_{\alpha+\iota}$。由于根据归纳假设，依赖选择公理 DC_κ 在 $V[G * H_{<\iota}]$ 中成立，我们有

$$V[G * H_{<\iota}] \vDash \mathrm{cf}(\eta) > \kappa.$$

因此，$\mathrm{Coll}(\eta, \mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\iota'})^V)$ 在 $V[H_{<\iota}]$ 中是 κ^+-闭的。由于

$$\mathbb{P} * \mathbb{Q}_{<\iota} * \mathrm{Coll}(\eta, \mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\iota'})^V) \in \mathsf{N}_{\alpha+\iota},$$

由引理 5.4，我们再次得到：在 $V^{\mathbb{P}*\mathbb{Q}_{<\iota}*\mathrm{Coll}(\eta,\mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\iota'})^V}$ 中，依赖选择公理成立，且 $\mathrm{Coll}(\kappa_{\alpha+\iota}, \mathsf{N}_{\alpha+\iota})$ 是 κ^+- 闭的。因此，在扩张 $V[G * H_{<\iota'}]$ 中，$\mathbb{Q}(\iota) = \mathrm{Coll}(\eta, \mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\iota'})^V) * \mathrm{Coll}(\kappa_{\alpha+\iota}, \mathsf{N}_{\alpha+\iota})$ 是 κ^+-闭的。□

断言 8.8 和 (∗) 还推出，对于每个后继序数 β，以及结构 $N_{\alpha+\beta}[G * H_{<\beta}]$ 的每个基数 κ，$\mathscr{P}(\kappa)^{V[G*H]} \subseteq V[G * H_{<\beta}]$。由此可知，(∗) 蕴含对于每个序数 β，$\kappa_{\alpha+\beta}$ 都是 $V[G * H]$ 中的一个基数。它还蕴含（通过 $\mathbb{Q}(\beta)$ 和 N-层级的定义），每当 β 不是极限序数时，$2^{\kappa_{\alpha+\beta}} = \kappa_{\alpha+\beta+1} = \kappa^+_{\alpha+\beta}$ 在 $V[G * H]$ 中成立；这就证明了定理的第（3）部分，以及在 β 不是极限序数时的第（2）部分。我们将在归纳法相应的极限步骤中（即命题 8.13 中）证明第（4）部分，以及在 β 是极限序数时的第（2）部分。

在开始对（∗）进行归纳证明之前，我们先对 $N_\alpha[G]$（类似于（∗）$_\beta$ 关于 $\beta = 0$的情形）作一些观察。首先注意到，由于 $\mathbb{P}$ 属于 N_α，而后者是强正则的，因此 κ_α 是 $V[G]$中的一个正则基数。我们对 $N_\alpha[G]$ 的其余分析由以下两个断言给出。

断言 8.9。对于某个 $\mathsf{N}_\alpha[G]$-基数 κ，存在一个满射

$$f : \mathscr{P}(\kappa)^{V[G]} \to \mathsf{N}_\alpha[G]$$

到 $V[G]$中。

证明。设 $X \in \mathsf{N}_\alpha$ 是 N_α的最大基数，并且（应用 $N_\alpha[G] \vDash$选择公理这一假设）令 κ 为 $\mathsf{N}_\alpha[G]$ 的一个基数，使得 $|X|^{\mathsf{N}_\alpha[G]} = \kappa$。根据引理 4.4，存在一个满射$h$：$\mathscr{P}(X) \to \mathsf{N}_\alpha$，其属于 V，因此我们得到一个满射 f：$\mathscr{P}(\kappa) \to \mathsf{N}_\alpha[G]$，其属于 $V[G]$。□

断言 8.10. 对于每个 $N_\alpha[G]$-基数 κ，$V[G] \vDash$ 依赖选择公理$_\kappa$。

证明。设 κ 是最大的 $\mathsf{N}[G]$-基数（即 $\mathfrak{n}_\alpha$ 的基数）。只需证明该断言对 κ 成立。我们有以下事实。

- $\mathsf{N}_\alpha[G] \vDash$ 满足依赖选择公理$_\kappa$，因为 $\mathsf{N}_\alpha[G] \vDash$ 满足选择公理。
- 引理 7.3 推出$\mathsf{N}_{\alpha+1}[G] \vDash$ 满足依赖选择公理$_\kappa$，因为$\mathsf{N}_\alpha[G]$ 根据定理的假设是完全序数满的。
- 反射$(\kappa, \mathsf{N}_\alpha[G], \mathsf{N}_{\alpha+1}[G])$ 在 $V[G]$中成立，依据定理 6.6 和注记 6.3。

该断言现在由引理 7.1 得出。□

断言 8.11 给出了我们归纳证明的以下步骤。

- （∗）$_1$（参见断言 8.9 和 8.10）；

- 若 β 不是极限序数，且 $(*)^{\beta+1}$ 成立，则 $(*)^{\beta+2}$ 成立（在这种情况下，断言中的 κ 为 $\kappa_{\alpha+\beta}$）。

断言 8.11。假设

- β 要么是0，要么是后继序数，
- κ 是 $N_{\alpha+\beta}[G*H_{<\beta}]$ 的最大基数，并且，
- 在 $V[G*H_{<\beta}]$中，依赖选择公理$_\kappa$ 成立，并且存在一个从 $\mathscr{P}(\kappa)$ 到$\mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G*H_{<\beta}]$的满射。

那么$(*)^{\beta+1}$ 成立，并且$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]\vDash$ 选择公理。

证明。由于 β要么是0，要么是后继序数，$\mathbb{Q}(\beta)$是$\mathsf{Coll}(\kappa_{\alpha+\beta},\mathsf{N}^{\alpha+\beta})$，且$\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1}$是 $H_{\mathsf{N}_{\alpha+\beta}}$。由于依赖选择公理$_\kappa$ 在 $V[G*H_{<\beta}]$中成立，用 $\mathbb{Q}(\beta)$进行强迫保持 $\kappa_{\alpha+\beta}$ 为基数，并在 $V[G*H_{\leq\beta}]$ 中添加$\mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G*H_{\leq\beta}]$ 的一个序型为 $\kappa_{\alpha+\beta}$的良序。由于$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]$ 是$\kappa_{\alpha+\beta}$-闭的（由定理 4.13），且$\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1}$ 的每个元素都是$\mathsf{N}^{\alpha+\beta}$的满射像，这意味着

$$N_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]\vDash\mathsf{AC}.$$

Since，在 V中存在从 $\mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta})$到$\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1}$ 的满射，存在从 $\mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta})$的满射 to $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]$ 在 $V[G*H_{\leq\beta}]$中。

由于反射$(\mathsf{N}^{\alpha+\beta},\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1},\mathsf{N}^{\alpha+\beta+2})$ 在 V中成立，由$\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$，注6.3 和定理6.6 可推出

$$V[G*H_{\leq\beta}]\vDash\mathsf{ref}(\kappa_{\alpha+\beta},\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}],\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq\beta}]).$$

由引理8.5，

$$V[G*H_{<\beta}]\vDash\mathsf{N}^{\kappa}_{\alpha+\beta}\in\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{<\beta}].$$

由于 $\mathbb{Q}(\beta)$不添加 κ-序列，

$$V[G*H_{\leq\beta}]\vDash\mathsf{N}^{\kappa}_{\alpha+\beta}\in\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}].$$

由此可得$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]$ 是 η-满的，对所有 $\eta<\kappa_{\alpha+\beta}$均成立。由于 $N_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]$ 满足选择公理，引理7.3 可推出

$$V[G*H_{\leq\beta}]\vDash\mathsf{DC}_{\kappa_{\alpha+\beta}}(N_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]).$$

由定理4.13，

$$V[G*H_{\leq\beta}]\vDash\text{“}V\text{ is }H\text{-like”}.$$

引理7.1 于是推出

$$V[G*H_{\leq\beta}]\vDash\mathsf{DC}_{\kappa+\beta}.$$

□

对于归纳法的极限步骤，我们先注意以下事实。

断言 8.12. 若 β 是极限序数，且对于所有后继序数 $\gamma<\beta$，$(*)^\gamma$ 成立，则以下结论在 $V[G*H_{<\beta}]$ 中成立。

(1) $\kappa_{\alpha+\beta}$ 是基数。*(2)* 依赖选择公理$^{\kappa_{\alpha+\beta}}$*(3)* $\kappa_{\alpha+\beta}$ 与$\mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G*H_{<\beta}]$之间存在双射。

证明。 由于 $(*)^\gamma$对所有后继 $\gamma<\beta$， $\kappa_{\alpha+\beta}$是 $V[G*H_{<\beta}]$ 中的基数的极限，因此是一个基数。根据定理的假设， β 是奇异的。由注释 5.3 以及断言 8.8陈述之前的第二项，我们得到

$$V[G*H_{<\beta}]\vDash\mathsf{DC}_{\kappa_{\alpha+\beta}}.$$

我们有，对于每个后继序数 $\gamma<\beta$, $H_{\gamma+1}$ 良序 $\mathsf{N}_{\alpha+\gamma+1}[G*H_{\leq\gamma}]$，其序型为$\kappa_{\alpha+\gamma+1}$。由依赖选择公理$^{\kappa_{\alpha+\beta}}$，可得 $\kappa_{\alpha+\beta}$ 与 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G*H_{<\beta}]$ 在$V[G*H_{<\beta}]$之间存在双射。□

由断言 8.12 （使用引理 5.4）可知，当 β 是极限序数时，

$$\mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta})^{V[G*H_{<\beta}]} = \mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta})^{V[G*H_{\leq(\beta+1)}]} = \mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta})^{V[G*H]},$$

因此$\kappa^+_{\alpha+\beta}$ 无论在 $V[G*H_{<\beta}]$ 中还是在 $V[G*H]$中计算都相同。断言8.12 也立即给出了$(*)^{\mathrm{d}}_{\beta+1}$ 的归纳步骤。

命题 8.13 表明，若 β 是一个极限序数，使得$(*)_\gamma$ 对所有后继 $\gamma<\beta$成立，则$(*)_{\beta+2}$ 成立，并且在 $V[G*H_{\leq(\beta+1)}]$中，

$$2^{\kappa_{\alpha+\beta}} = \kappa^+_{\alpha+\beta}$$

and

$$\kappa_{\alpha+\beta+1} = \kappa^{++}_{\alpha+\beta}.$$

至此完成了该定理的证明。

命题 8.13. 设 β 为一个极限序数，并假设$(*)_\gamma$ 对所有后继序数$\gamma<\beta$成立。设 $\eta=(\kappa^+_{\alpha+\beta})^{V[G*H_{<\beta}]}$。则在 $V[G*H_{\leq(\beta+1)}]$中，

(1) 存在从 $\mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta+1})^{V[G*H_{\leq(\beta+1)}]}$ 到$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]$的满射，*(2)* η 是正则基数且$\eta=\kappa^+_{\alpha+\beta}=2^{\kappa_{\alpha+\beta}}$，*(3)* $\kappa_{\alpha+\beta+1}$ 是正则基数且 $\kappa_{\alpha+\beta+1}=\eta^+=2^\eta$，*(4)* $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash$ 选择公理，以及 *(5)* 依赖选择公理$^{\kappa_{\alpha+\beta+1}}$。

证明。 由定理 4.13 （以及 $\mathbb{Q}(\beta)$ 的平凡性），我们有

$$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{<\beta}] = (H_{\mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\beta})^V})^{V[G*H_{<\beta}]}$$

and

$$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{<(\beta+1)}] = (H_{\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}})^{V[G*H_{<(\beta+1)}]}$$

在 $V[G*H_{\leq\beta}$ 中二者都是 H-型的。

设 K_0 和 K_1 满足 $H(\beta+1) = K_0*K_1$。由于

$$V[G*H_{\leq\beta}]\vDash \mathsf{DC}_{\kappa_{\alpha+\beta}}\wedge\eta=\kappa^+_{\alpha+\beta},$$

我们有，η 在 $V[G*H_{\leq\beta}]$ 和$V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$中都是正则基数且是 $\kappa_{\alpha+\beta}$ 的基数后继。由于$\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1}$ 是强正则的，且 $\mathsf{Coll}(\eta,\ \mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta})^V)$ 是 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{<\beta}]$ 的一个元素，所以 $\kappa_{\alpha+\beta+1}$ 是 $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 中的正则基数。

强迫 $\mathsf{Coll}(\eta,\mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta})^V)$ 添加了一个从 η 到 $\mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta})^V$ 的满射。由于 $\mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta})^V$ 是 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}]$的最大基数，我们有（利用断言 8.12），$\eta$ 是 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$的最大基数。这进而意味着 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash$ 满足选择公理，并且在 $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 中，

$$\eta=\kappa^+_{\alpha+\beta}=2^{\kappa_{\alpha+\beta}}$$

and

$$\eta^+=\kappa_{\alpha+\beta+1}.$$

子断言 8.14. $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash$ 依赖选择公理$_\eta$。

*Pr*呃。根据$\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$的定义，反射$(\mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta}),\ \mathsf{N}^{\alpha+\beta+1},\ \mathsf{N}^{\alpha+\beta+2})$ 在 V中成立。根据引理6.6 ，

$$V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathsf{ref}(\mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\beta})^V,\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0],\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq\beta}*K_0]).$$

根据备注6.3，

$$V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathsf{ref}(\eta,\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0],\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq\beta}*K_0]).$$

根据引理7.1以及这一事实

$$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq\beta}*K_0] = (H_{\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}})^{V[G*H_{\leq\beta}*K_0]},$$

只需证明

$$V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathsf{DC}_\eta(\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]).$$

由于

$$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathsf{AC},$$

并且由于 $\kappa_{\alpha+\beta}$ 是 $N_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 在 η以下的最大基数，因此根据引理 7.3，只需证明结构 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 在 $\kappa_{\alpha+\beta}$中是满的 $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$。这相当于证明，在 $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$中，

$$\mathscr{P}(\mathsf{N}_{\alpha+\beta})^{\kappa_{\alpha+\beta}}\in \mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0].$$

由于 $|\mathsf{N}_{\alpha+\beta}|=\kappa_{\alpha+\beta}$ 属于 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$，并且

$$V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta})\in \mathsf{N}_{\alpha+\beta}[G*H_{\leq\beta}*K_0],$$

并且由于从 $\kappa_{\alpha+\beta}$ 到 $\mathscr{P}(\kappa_{\alpha+\beta})$ 的函数可以用 $\kappa_{\alpha+\beta+1}$ 的子集编码，我们得到 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 在 $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 中是 $\kappa_{\alpha+\beta}$-满的，正如所需。□

由于

- $\mathrm{Coll}(\kappa_{\alpha+\beta+1},\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1})$ is $\kappa_{\alpha+\beta+1}$-closed in $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]$,
- $(\eta^+)^{V[G*H_{\leq\beta}*K_0]}=\kappa_{\alpha+\beta+1}$, and
- $V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathsf{DC}_\eta$,

我们得到断言的第（2）部分。

由于 $\mathscr{P}(\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1})^V$映射到 $\mathsf{N}^{\alpha+\beta+2}$ 上（在 V中），我们也得到第（1）部分。由于 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$是强正则的，$\kappa_{\alpha+\beta+1}$ 是 $V[G*H_{\leq(\beta+1)}]$中的正则基数，因此我们得到第（3）部分。

由于 η 是 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$的最大基数，我们有

$$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash |\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]|=\kappa_{\alpha+\beta+1}.$$

由于 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+1}[G*H_{\leq\beta}*K_0]$ 是 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]$的最大基数，我们有

$$\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash \mathsf{AC}.$$

尚待证明的是第（5）部分。由于 反射$(\mathsf{N}^{\alpha+\beta+1},\mathsf{N}^{\alpha+\beta+2},\mathsf{N}^{\alpha+\beta+3})$ 在 V中成立，根据 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$，注记6.3 和定理 6.6 可知

$$V[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash \mathsf{ref}(\kappa_{\alpha+\beta+1},\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}],\mathsf{N}_{\alpha+\beta+3}[G*H_{\leq(\beta+1)}]).$$

由引理 8.5,

$$V[G*H_{\leq\beta}*K_0]\vDash \mathsf{N}^\eta_{\alpha+\beta+1}\in \mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq\beta*K_0}].$$

由于 $\mathsf{Coll}(\kappa_{\alpha+\beta+1},\ \mathsf{N}^{\alpha+\beta+1})$ 应用于依赖选择公理η的模型时不会添加 η-序列,

$$V[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash \mathsf{N}^\eta_{\alpha+\beta+1}\in \mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}].$$

It 从而 $\mathsf{N}_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]$ 是 τ-满的，对所有 $\tau<\kappa_{\alpha+\beta+1}$。引理 7.3 进而给出

$$V[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash \mathsf{DC}_{\kappa_{\alpha+\beta+1}}(N_{\alpha+\beta+2}[G*H_{\leq(\beta+1)}]).$$

由定理 4.13,

$$V[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash \text{“}V \text{ is } H\text{-like”}.$$

引理 7.1 则推出

$$V[G*H_{\leq(\beta+1)}]\vDash \mathsf{DC}_{\kappa+\beta+1}.$$

□

□

第2. 部分 Nairian 模型满足 Nairian 理论

在本文的这一部分，我们将构建证明定理 1.17所需的工具。W e pr在第20节给出证明。

9. 预备知识

我们沿用 [3] 中的设定，只有一处不同：对于 ς、 $\mathfrak{d}$和 $\varkappa$，我们将使用 ξ、 δ和η，这些用于 [3] 第10章的 ξ， δ和 η，以便在别处使用它们。

记号 9.1 （设定）。 我们假设工作假设 $\mathcal{V} \vDash$ ZFC是一个 hod 前鼠[12]，并且 $\varsigma \leq \mathfrak{d} < \varkappa$ 满足：

(1) $\varkappa$ 是 $\mathcal{V}$的伍丁基数的不可达极限，(2) $\mathfrak{d}$ 是 $\mathcal{V}$的一个伍丁基数，(3) ς 是 $\mathcal{V}$ 中最小的不可达基数，它既是 $\mathcal{V}$ 的伍丁基数的极限，也是 $\mathcal{V}$中 $< \mathfrak{d}$-强基数的极限。

Le令 $g \subseteq \mathrm{Coll}(\omega, <\varkappa)$ 为 $\mathcal{V}$-泛型，并令 M 为 $\mathcal{V}$ 的导出模型（由 g 计算得出）。因此 t:

(1) $\mathcal{P} = \mathcal{V}|(\varkappa^+)^{\mathcal{V}}$，(2) $\Sigma \in \mathcal{V}$ 是 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{V}$的序列上索引的迭代策略，

(3) $\mathfrak{p} = (\mathcal{P}, \Sigma)$，(4) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^g_{\mathfrak{p}}$ (见 [3, Notation 8.10])，(5) $\mathcal{H} = \mathcal{M}_\infty$ $(\mathfrak{p})$，(6) $\Omega = \Sigma_{\mathcal{H}}$，(7) $\varsigma_\infty = \pi_{\mathfrak{p},\,\infty}(\varsigma)$ 和 $\mathfrak{d}_\infty = \pi_{\mathfrak{p},\,\infty}(\mathfrak{d})$。

Let

$$\mathrm{N}^- = (\mathrm{N}^-_{\varsigma_\infty})^M,\ \mathrm{N} = (\mathrm{N}_{\varsigma_\infty})^M,\ \text{and}\ \mathrm{N}^+ = (\mathrm{N}^+_{\varsigma_\infty})^{\mathcal{M}},$$

as 定义于 [3] 的第1.6节中。我们将 $\mathfrak{p}$ 视为 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}[g]$ 中的一个 hod 对。注意，若 $\alpha < \varkappa$，该 $\mathrm{N}^{\mathfrak{p}|\alpha} \in M$。

当我们说 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$的完全迭代时，意思是 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}|\mathfrak{d}$的完全迭代。此外，我们通常也会将 $\mathfrak{p}$ 的完全迭代视为 M的成员。这里的预期含义是，我们将 $\mathfrak{q}$ 视为 $\mathfrak{p}|\mathfrak{d}$的完全迭代，并且 $\mathfrak{p}|\mathfrak{d} \in M$。

我们使用以下附加记号。

N记号 9.2. 我们的记号采用 [3,§10.1] 中引入的记号，并加上以下记号。

(1) 基数 κ 是一个：

- $<\alpha$-**伍丁基数的强极限**（$<\alpha$-**slw 基数**），如果它是一个 $<\alpha$-强基数，且是伍丁基数的极限；
- α-**伍丁基数的强极限**（α-**slw 基数**），如果它是一个 α-强基数，且是伍丁基数的极限；
- **slw 基数**，如果它是一个 <Ord-slw 基数。

(2) 假设 W 是 ZFC 某个片段的传递模型。(a) 我们将 slw(W) 定义为 W 的最小 slw 基数。

- 我们写 slw(W) 时，意指它存在。
- 此处及下文中，如果 $\mathfrak{p}$ 是一个 hod 对，我们写 slw($\mathfrak{p}$)，而不写 slw($\mathcal{M}^{\mathfrak{p}}$)。
- 对于其他所有记号，我们也将使用相同的术语，并将 $\mathfrak{p}$用作上标或置于括号内。

(b) 我们将 Woodin(W) 定义为 W 的 Woodin 基数组成的集合。

[12]我们默认所有大基数概念都由扩张子序列上的扩张子见证 ce of 该 hod 前鼠。

(c) 如果 $\zeta_0 \leq \zeta_1 \leq$序数类 $\cap W$，那么我们将 SLW(W，$\leq\zeta_0$，ζ_1) 定义为满足以下条件的 $\nu \leq \zeta_0$ 集合：

- $\nu = 0$，或
- ν 是 W 的 $<\zeta_1$-slw 基数，或
- ν 是 W 的 $<\zeta_1$-slw 基数的极限。

我们类似地定义 SLW(W，$<\zeta_0$，ζ_1)。如果 $\zeta_0 = \zeta_1$，那么我们将 SLW(W，$\leq\zeta_0$) 记作 o r 分别表示 SLW(W，$<\zeta_0$)、SLW(W，$\leq\zeta_0$，ζ_0) 和 SLW(W，$<\zeta_0$，ζ_0)。如果 $\zeta_0 =$序数类 $\cap W$，那么我们将 SLW(W) 记作 SLW(W，$<\zeta_0$)。

(3) δ是一个**lsa 基数**，如果 $\delta \in$ Woodin(W)，没有基数 $< \delta$是 $\delta+1$-强的，并且 slw(V_δ) 有定义。[13]

(4) 假设 $\mathfrak{q}$ 是任意一个 hod 对，ν 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$的一个伍丁基数，而 $\kappa < \nu$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$的最小$<\nu$-强基数。我们令

$$\Delta_{\mathfrak{q},\nu} = \{A \subseteq \mathbb{R} : w(A) < \pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\kappa)\},$$

其中 $w(A)$ 是 A的 Wadge 秩。

(5) 假设 $\mathfrak{q}$ 是任意一个 hod 对，κ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$的一个不可达基数，并且 $g \subseteq$ Coll($\omega, <\kappa$) 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$-泛型。在 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$中，我们令 $\mathcal{M}^l_\infty(\mathfrak{q},\kappa)$ 表示 κ处的局部直接极限，即由系统 $\mathcal{F}(\mathfrak{q},\kappa)$ 的直接极限构成，该系统包含 $\mathfrak{q}$ 的所有完全迭代 $\mathfrak{r}$，满足：

(a) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}} \in \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}[g]$（尽管该极限与 g无关），
(b) lh($\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$) $< \kappa$，并且
(c) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\kappa$。

我们令 $\mathfrak{m}(\mathfrak{q},\ \kappa) = (\mathcal{M}^l_\infty(\mathfrak{q},\ \kappa),\ (\Sigma^{\mathfrak{q}})_{\mathcal{M}^l_\infty(\mathfrak{q},\ \kappa)})$。令 $\gamma = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathcal{M}^l_\infty(\mathfrak{q},\ \kappa)}(\kappa)$，我们定义

$$N^l(\mathfrak{q},\kappa) = (L_\gamma(\mathcal{M}^l_\infty(\mathfrak{q},\kappa)|\gamma)^\omega))^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}[g]}$$

为 κ 处的局部 Nairian 模型。[14]

下面介绍本文将用到的一些术语。

Ter术语 9.3. 设 $\mathfrak{q} = (\mathcal{Q},\ \Lambda)$ 是一个 hod 对，且 δ 是 $\mathcal{Q}$ 的一个割点 Woodin 基数。

(1) 若正规迭代 $\mathcal{T}$ of $\mathfrak{q}$ 中使用的所有扩张子的临界点都大于或等于 γ，则称其在 γ 之上；若对所有 $\alpha <$ lh($\mathcal{T}$)，crit($E^{\mathcal{T}}_\alpha$) $> \gamma$，则称其严格高于 γ。(2) 若 $<\delta$-强基数 $\mathcal{Q}$ 中最小的一个是 $\mathcal{Q}$ 的伍丁基数的极限，则称 δ 结束了 $\mathcal{Q}$ 的一个 lsa 块。[15](3) 给定 $\nu < \delta$，若令 κ 为 $\mathcal{Q}$ 中最小的 $<\delta$-强基数，且 $\nu \in [\kappa, \delta]$，则称 ν 属于 $\mathcal{Q}$ 的 δ-块。(4) 假设 δ 结束了 $\mathcal{Q}$ 的一个 lsa 块。给定属于 $\mathcal{Q}$ 的 δ-块的 ν，若存在一个 $\tau \leq \nu$，使得 $\mathcal{Q} \vDash$“τ 是一个可测基数，且是 $<\delta$-强基数的极限。”，则称 ν 在 $\mathcal{Q}$ 中（相对于 δ）是大的。(5) 对于上述 $\nu < \delta$，若 ν 不在 $\mathcal{Q}$ 中为大（相对于 δ），则称 ν 在 $\mathcal{Q}$ 中为小。(6) 若存在一个 δ 使得：则称 $\mathcal{Q}$- 基数 ν 在 $\mathcal{Q}$ 中适当重叠：

- δ 是 $\mathcal{Q}$ 的一个伍丁基数，
- δ 结束了 $\mathcal{Q}$ 的一个 lsa 块，
- ν 属于 $\mathcal{Q}$ 的 δ 块，并且
- 对于所有 $\kappa \leq \nu$，$\mathcal{Q}|\nu \vDash$“κ 是一个强基数”当且仅当 $\mathcal{Q} \vDash$“κ 是一个 $<\delta$-强基数”。

在这种情况下，我们称 ν 相对于 δ**适当重叠**。

---

[13]等价地，最小的 $<\delta$-强基数是伍丁基数的极限，或者按照 [3, 术语 9.8].[14]与 [3] 中一样，$N^l(\mathfrak{q},\kappa)$ 的定义方式使得 $N^l(\mathfrak{q},\kappa)$ 的序数高度为 γ。[15]这一术语的合理性由 [15] 得到说明。

(7) A $\mathcal{Q}$-基数 ν 是 $\mathcal{Q}$中的**真切点**（相对于 δ），当且仅当 ν 适当重叠（相对于 δ），且不是 $\mathcal{Q}$ 的全 extender 的临界点。

在本文的这一部分中，我们将一直使用以下陈述。RefGen 表示反射生成器。

定义 9.4。令 RefGen$_0(\mathfrak{q},\ \kappa,\ \nu)$ 表示以下陈述的合取：
(1) $\mathfrak{q}$是 $\mathfrak{p}$的完全迭代，[16](2) $\kappa<\nu\leq\mathfrak{d}_{\mathfrak{q}}$；(3) $\kappa<\varsigma$是 $M^{\mathfrak{q}}|\varsigma$ 的强基数；(4) ν 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$ 的不可达真截点（相对于 $\mathfrak{d}_{\mathfrak{q}}$）。

令 RefGen$_1(\mathfrak{q},\ \kappa,\ \nu)$ 表示以下陈述的合取：
(1) RefGen$_0(\mathfrak{q},\ \kappa,\ \nu)$；(2) $(\kappa,\ \nu)\cap\mathrm{SLW}(\mathfrak{q}|\mathfrak{d}_{\mathfrak{q}})=\emptyset$；
(3) $\nu\in\mathrm{Woodin}(\mathcal{Q})$ 以及 $\sup(\mathrm{Woodin}(\mathcal{Q}|\nu))<\nu$，
[17] 并且 (4) $(\kappa,\ \nu)\cap\mathrm{Woodin}(\mathcal{Q})\neq\emptyset$。

令 RefGen$_2(\mathfrak{q},\ \lambda,\ \kappa,\ \nu)$ 为以下命题的合取：
(1) RefGen$_0(\mathfrak{q},\ \kappa,\ \nu)$，(2) $\lambda\leq\kappa<\nu\leq\mathfrak{d}_{\mathfrak{q}}$，(3) λ是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\varsigma$ 的强基数，(4) $(\kappa,\ \nu)\cap\mathrm{SLW}(\mathfrak{q}|\mathfrak{d}_{\mathfrak{q}})=\emptyset$，

令 RefGen$_3(\mathfrak{q},\ \lambda,\ \kappa,\ \nu)$ 为以下命题的合取：
(1) RefGen$_1(\mathfrak{q},\ \kappa,\ \nu)$，以及
(2) RefGen$_2(\mathfrak{q},\ \lambda,\ \kappa,\ \nu)$。

我们将在 M 中评估 RefGen。

记号 9.5 ([15, 定义 2.4.9 和 2.4.10])。假设 W 是一个传递集，且 W' 是 W的一个秩初始段，满足 序数类 $\cap W'$是 W的一个不可达基数。
(1) 如果 $\mathcal{T}$ 是定义在 W 上的迭代树，那么当对于每个 $\alpha<\mathrm{lh}(\mathcal{T})$，或者 $[0,\alpha)_{\mathcal{T}}\cap D^{\mathcal{T}}\neq\emptyset$，或者 $E^{\mathcal{T}}_{\alpha}\in\pi^{\mathcal{T}}_{0,\alpha}(W')$ 时，我们称 $\mathcal{T}$ 基于 W'。[18](2) 给定基于 W' 的 $\mathcal{T}$，令 $\downarrow(\mathcal{T},W')$ 为定义在 W' 上的唯一迭代树 $\mathcal{U}$，其树结构与 $\mathcal{T}$ 相同，并使用与 $\mathcal{T}$ 相同的扩张子。(3) 反之，如果 $\mathcal{T}$ 是定义在 W' 上的迭代树，那么令 $\uparrow(\mathcal{T},W)$ 为定义在 W 上的唯一迭代树 $\mathcal{U}$，其树结构与 $\mathcal{T}$ 相同，并使用与 $\mathcal{T}$ 相同的扩张子。[19](4) 如果 $\mathfrak{s}$ 是一个 hod 对且 $\mathfrak{s}'\trianglelefteq\mathfrak{s}$，那么我们将使用 $\downarrow(\mathcal{T},\mathfrak{s}')$ 和 $\uparrow(\mathcal{T},\mathfrak{s})$，而不使用 $\downarrow(\mathcal{T},\mathcal{M}^{\mathfrak{s}'})$ 和 $\uparrow(\mathcal{T},\mathcal{M}^{\mathfrak{s}})$。[20]

记号 9.6. 若 X 是一个集合且 $\beta=$序数类$\cap X$，则我们将满足以下条件的可数$Y\subseteq X$ 所成的集合记为 $\mathscr{P}^{b}_{\omega_1}(X)$：存在某个 $\beta'<\beta$，使得 $Y\subseteq X\cap\beta'$。

术语 9.7。假设 $j:K\to N$ 是两个传递集或类之间的初等嵌入，且 $\nu\in$ 是序数类 $\cap N$。那么，如果 E 由满足 $a\in\nu^{<\omega}$、$A\in K$ 和 $a\in j(A)$ 的有序对 (a,A) 构成，则 E 是由 j 导出的、空间为 ν 的长扩张子。

---

[16]这里通常指可数迭代，即 $\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}$，其中 $\mathfrak{q}$ 在 M 中是可数的。[17]因此，ν 不是伍丁基数的极限。[18]等价地，$\mathcal{T}$ 小于序数类 $\cap W$。[19]或者，$\uparrow(\mathcal{T},W)$ 是通过恒等映射将 $\mathcal{T}$ 映到 W 的副本。这里我们只是在引入一种记号。显然，在没有额外可迭代性假设的情况下，$\uparrow(\mathcal{T},W)$ 的长度可能与 $\mathcal{T}$ 不同。[20]注意，[21] 的结果表明，根据 $\Sigma^{\mathfrak{s}'}$ 和 $\Sigma^{\mathfrak{s}}$，$\downarrow(\mathcal{T},\mathfrak{s}')$ 和 $\uparrow(\mathcal{T},\mathfrak{s})$ 分别是有意义的。

如果 E 是一个 K-扩张子，那么令 $K_E = Ult(K, E)$，并令 $\pi_E\colon K \to K_E$ 为超幂嵌入。

我们还需要使用 [3, 记号 8。4]中引入的术语。在本文中，当我们说 $\mathfrak{q}$ 是迭代树上的一个对 $\mathcal{T}$时，我们的意思是存在某个 $\alpha < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$，使得 $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\alpha^{\mathcal{T}}$（参见 [3,记号 8。4]中的条款 3）。

10. [3]的推论

本节包含本文后文将用到的技术引理。读者可以略过本节，之后再回来阅读。

本文以及 [3] 都在HPC假设下研究极小 Nairian 模型。我们能够分析宇宙的这一部分，是因为一些重要的技术事实，即[3, 引理 9.9、推论 9.10、引理 9.12 和定理 11。1]我们需要 [3,引理 9。12] 中隐含的 [3]若干推论。[21] 这些推论被单独列为推论10.1，其大意是：若 $\mathfrak{s}$ 是某个 hod 对 $\mathfrak{q}$ 在某个基数 κ以上的一个迭代，且 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{q}$的任意另一个迭代，那么在某些情况下，我们可以论证，基本上，在 $\mathfrak{s}$ 与 $\mathfrak{r}$的比较中，只有 $\mathfrak{s}$ 会移动。[22]

推论 10.1。假设

- $\mathrm{RefGen}_0(\mathfrak{q},\ \kappa,\ \nu)$ 成立[23]
- $\mathfrak{r}$ 且 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代，并且$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 都基于 $\mathfrak{q}|\nu$，而 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$高于 κ （但不一定严格高于），并且
- $\zeta < \kappa_{\mathfrak{s}}$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$ 的不可达基数，且满足

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta))$$

并且 ζ 是 $\mathfrak{s}|\kappa_{\mathfrak{s}}$中的一个真切点。

假设 $\mathfrak{w}'$ 是通过最小扩张子分歧共同迭代得到的 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{s}$ 的公共迭代。那么

(1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$ 基于 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$，而$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$，并且存在一个 *hod* 对 $\mathfrak{w}$，使得（见图 *10.1*）

(2) $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{s}$的一个迭代，*(3)* $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\zeta$，*(4)* $\mathfrak{w}|\zeta_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}'|\zeta_{\mathfrak{w}'}$，*(5)* $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}} \trianglelefteq \mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$，*(6)* $(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{w}}$ 严格高于 $\zeta_{\mathfrak{w}}$，以及*(7)* $\sup(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) \leq \zeta_{\mathfrak{w}}$。

证明。 条款 1 成立，因为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 都基于 $\mathfrak{q}|\nu$。现在， [3, 引理 9.12]指出，对于每个 $\lambda \leq \kappa_{\mathfrak{w}'}$（其为 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\mathfrak{d}_{\mathfrak{w}'}$的强基数），$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$ 中只有一个会在其主分支上使用扩张子，而这些扩张子的临界点是 λ的原像。直观地说，由于$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 高于κ，对于每个 $\lambda < \kappa_{\mathfrak{w}'}$（其为 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\mathfrak{d}_{\mathfrak{w}'}$的强基数），我们不会在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$ 的主分支上使用临界点为 λ的原像的扩张子。因此，以下断言必然成立：

[21]例如，在证明 [3, 定理 11.1] 中展示条款 1 蕴含条款 2 的部分。[22]请注意，我们沿用本文此部分以及 [3]中使用的记号：特别是，$\mathfrak{p}$，M，$\mathcal{H}$ 的含义与本文通篇使用的含义相同。[23]我们不需要 ν 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$.的真切点

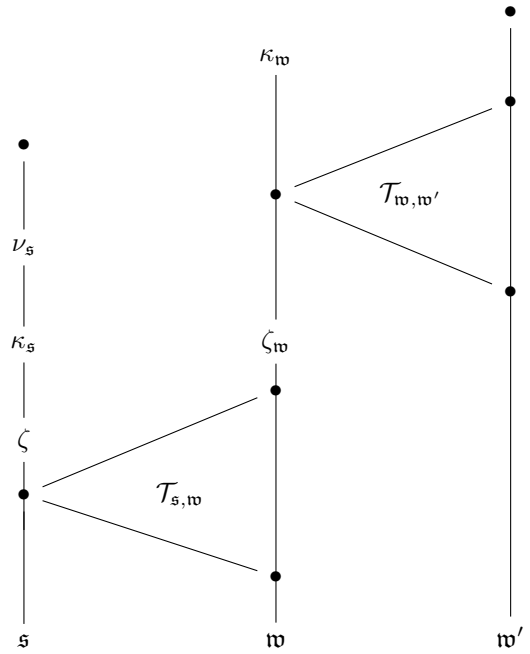


图 10.1. 推论10.1

断言 10.2。 假设 $\lambda < \kappa_{\mathfrak{w}'}$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\mathfrak{d}_{\mathfrak{w}'}$ 的强基数，且 $\gamma+1 = \mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'})$。那么，如果$\alpha \in [0,\gamma)$ $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$满足 $\lambda \in \mathrm{rge}(\pi^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'},\alpha}_{\mathfrak{w}',\gamma})$，并且 $\beta+1 \in [0,\gamma)\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$满足 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}(\beta+1) = \alpha$，那么

$$\pi^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}}_{\alpha,\gamma}(\mathrm{crit}(E^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}}_{\beta})) \neq \lambda.$$

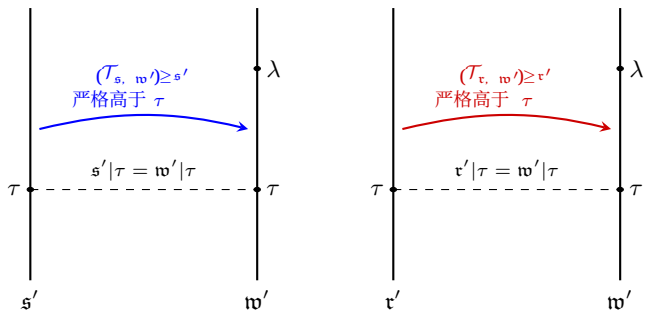


图 10.2. 从 $\mathfrak{s}'$ 和 $\mathfrak{r}'$ 到 $\mathfrak{w}'$的迭代。

证明。 反设结论不成立。令 $\lambda < \kappa_{\mathfrak{w}'}$ 为 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\kappa_{\mathfrak{w}'}$中违反该断言的最小强基数。由 [3,引理 9.12] 可知

(1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$ 在其主分支上不会使用临界点为.....的原像的扩张子 λ.

令 τ 为 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\lambda$的所有强基数的上确界，且 $\xi<\mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'})$ 为满足以下条件的最小值：令 $\mathfrak{s}'=\mathfrak{m}^{\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\xi}^{\mathfrak{w}'}}$，$\mathfrak{s}'|\tau=\mathfrak{w}'|\tau$（见图10.2）。于是有

(2) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{s}'}$ 是 $\mathfrak{s}'$ 上的正规迭代树，且严格高于 τ。

类似地，令 $\iota<\mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'})$为满足以下条件的最小值：令 $\mathfrak{r}'=\mathfrak{m}^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\iota}^{\mathfrak{w}'}}$，$\mathfrak{r}'|\tau=\mathfrak{w}'|\tau$。同样，我们有

(3) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{r}'}$ 是 $\mathfrak{r}'$ 上的正规迭代树，且严格高于 τ。

此外，由于 λ 是一个小基数，我们有

(4) 对于主分支上每个满足 ι' 的 $\iota'<\iota$，若 E 是$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$主分支上 ι' 处使用的扩张子，则$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$，$\pi^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\iota'}^{\mathfrak{w}'}}$(临界点$(E)$) $\neq\lambda$。

现在令 $\mathfrak{q}'$ 为 $\mathfrak{q}$ 的正规迭代，使得 $\mathfrak{q}'|\tau=\mathfrak{w}'|\tau$，生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{q}'})\subseteq\tau$，且 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}'}|\tau$ 和 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\tau$ 的强基数相同（见图10.3）。由于$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 位于 κ之上，我们有

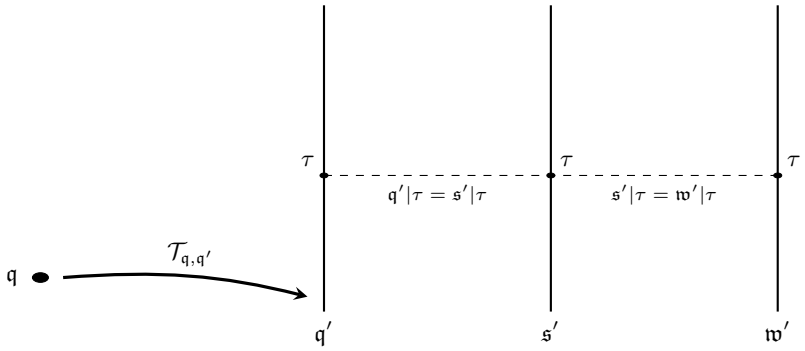


图 10.3。 $\mathfrak{q}$、 $\mathfrak{q}'$、 $\mathfrak{s}'$和 $\mathfrak{w}'$之间的关系。

$\mathfrak{q}'|\lambda_{\mathfrak{s}'}=\mathfrak{s}'|\lambda_{\mathfrak{s}'}$。由此可知，存在某个 $\phi\leq\lambda_{\mathfrak{r}'}$，使得 $\mathfrak{r}'|\phi$ 是 $\mathfrak{s}'|\lambda=\mathfrak{q}'|\lambda$的完全迭代。于是令$\mathfrak{s}''$ 为 $\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{s}'|\lambda},\mathfrak{r}|\phi,\mathfrak{s}')$的最后一对。我们有 $\lambda_{\mathfrak{s}''}=\phi$，且 $\mathfrak{s}''$ 位于$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$的主分支上。现在，若 $\phi<\lambda_{\mathfrak{r}'}$，则在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$ 的主分支上于 $\mathfrak{s}''$ 使用的扩张子的临界点为 ϕ，这与以下事实矛盾：$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'}$ 在其主分支上使用的扩张子，其临界点均不是 λ的原像。因此，$\phi=\lambda_{\mathfrak{r}'}$。但此时，推论 9.11] 蕴含$\mathcal{T}_{\mathfrak{s}'',\mathfrak{w}'}$ 和$\mathcal{T}_{\mathfrak{r}',\mathfrak{w}'}$ 均不使用临界点为 ϕ的扩张子。由于$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$ 使用了这样的扩张子，因此首次使用此类扩张子必定发生在阶段 ι之前，这与（4）矛盾。□

现在令 $\mathfrak{w}$ 为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s}}$ 上的最小节点，$\mathfrak{w}'$ 使得 $\mathfrak{w}|\zeta_{\mathfrak{w}'}=\mathfrak{w}'|\zeta_{\mathfrak{w}'}$。由此可得 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{w}}$ 位于 $\zeta_{\mathfrak{w}'}=\zeta_{\mathfrak{w}}$ 之上。[24] 因此，$\mathfrak{w}$ 满足上述所有子句，可能除条款 3 和 7 之外（见图 10.4）。

令 $\alpha<\mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}'})$ 为满足以下条件的最大序数：令 $\mathfrak{x}=\mathfrak{m}^{\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\alpha}^{\mathfrak{w}'}}$，$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{x}}$ 以 $\mathfrak{s}|\zeta$ 为基；并令 β 为满足以下条件的最大序数：令 $\mathfrak{y}=\mathfrak{m}^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\beta}^{\mathfrak{w}'}}$，$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}}$ 以 $\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}}$ 为基。那么，若

[24]这是因为 κ 很小。

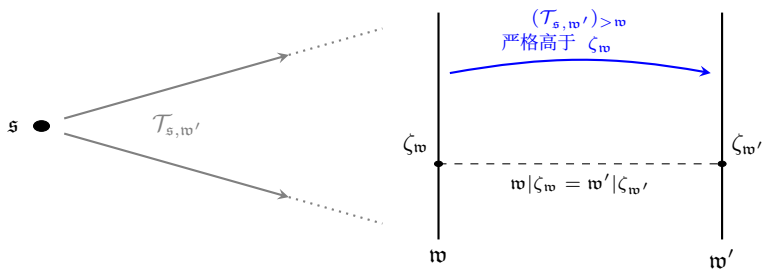


图 10.4。迭代 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\ \mathfrak{w}'}$ 向 $\mathfrak{w}$ 投影，以及随后 $\mathfrak{w}$ 与 $\mathfrak{w}'$之间的一致性。

$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是通过最小扩张子分歧共同迭代在 $\mathfrak{s}|\zeta$ 和 $\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}}$ 上产生的迭代树，那么 $\mathcal{X} \trianglelefteq\downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{x}}, \mathfrak{s}|\zeta)$ 和 $\mathcal{Y} =\downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}}, \kappa_{\mathfrak{r}})$。[25] $\mathcal{X} \neq\downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{x}}, \mathfrak{s}|\zeta)$ 是可能的。由于 $\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathrm{slw}(\mathfrak{s}|\zeta))$，我们必有

(5) $\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}} \trianglelefteq \mathfrak{x}|\zeta_{\mathfrak{x}}$.

以下是关键断言。

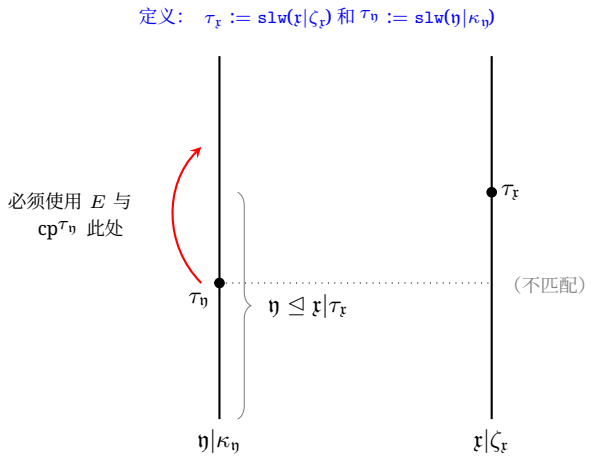


图 10.5。 断言 10.3中的矛盾：如果第一个强基数不同（$\tau_{\mathfrak{x}} > \tau_{\mathfrak{y}}$），$\mathfrak{y}$ 就会成为 $\mathfrak{x}$ 的真初始片段，从而迫使使用此前已排除的扩张子。

断言10.3。 设 $\lambda < \zeta_{\mathfrak{w}'}$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\kappa_{\mathfrak{w}'}$ 的强基数，或是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}|\kappa_{\mathfrak{w}'}$的强基数的极限。则 $\mathfrak{x}|\lambda = \mathfrak{w}'|\lambda = \mathfrak{y}|\lambda$。

证明。 证明遵循 [3, 第 11.1 小节。1] 因此我们只概述一下。假设 $\lambda = \mathtt{slw}(\mathfrak{w}'|\kappa_{\mathfrak{w}'})$。[26] 由于 $\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathrm{slw}(\mathfrak{s}|\zeta))$，我们必须有$\zeta >\mathrm{slw}(\mathfrak{s}|\kappa_{\mathfrak{s}})$。

[25]见记号 9.5。[26]因此它是最小的强基数。

首先我们证明 $\mathrm{slw}(\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}) = \mathrm{slw}(\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}})$。若非如此，则 $\mathrm{slw}(\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}) > \mathrm{slw}(\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}})$（见（5）），这意味着

$$\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}} \lhd \mathfrak{x}|\mathtt{slw}(\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}).$$

但这样一来，我们必须在 $\mathtt{slw}(\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}})$ 的主分支上使用一个临界点为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}$的扩张子，这与断言 10.2 矛盾（见图 10.5）。

现在，由于 $\mathtt{slw}(\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}) = \mathtt{slw}(\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}})$，无论是 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\ \mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{x}}$ 还是$(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{y}}$，都没有使用临界点为 $\mathtt{slw}(\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}})$ $=\mathtt{slw}(\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}})$ 的扩张子（见 [3, 推论 9.11]）。因此，我们必有

$$\mathtt{slw}(\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}) = \mathtt{slw}(\mathfrak{y}|\kappa_{\mathfrak{y}}) = \lambda.$$

可以像在 [3, 第 11.1 小节1], 中那样对其进行归纳重复，从而得出该断言对任意 λ都成立。□

由于 ζ 是真切点，上述断言意味着 $\zeta_{\mathfrak{x}} = \zeta_{\mathfrak{w}'}$，因此实际上，$\mathfrak{x} = \mathfrak{w}$。该断言还意味着 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{y}}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{y}}$之上。因此，

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) = \sup(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}}[\kappa_{\mathfrak{r}}]).$$

□

T以下是推论 10.1的另一个版本，这对我们的计算非常有用。

推论 10.4。假设

- $\mathrm{RefGen}_2(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$,
- $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的两个完全迭代,
- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$ 高于 κ,
- 生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}) \subseteq \lambda_{\mathfrak{r}}$,
- 存在 $\zeta < \kappa_{\mathfrak{s}}$，使得 ζ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$的真切点和不可达基数，$\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}) \subseteq \zeta$，并且

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta)).$$

令 $\mathfrak{w}$ 为 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{s}$ 经最小扩张子分歧余迭代得到的完全迭代。令 $\mathfrak{x}$ 为$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 上的最小序对，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$。

那么，下列条件成立（见图*10.6* 和图*10.7*）：

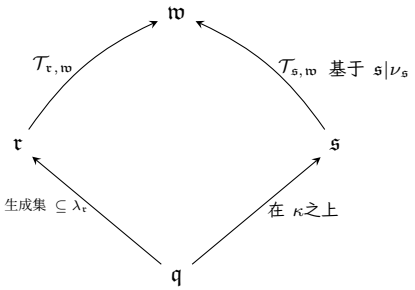


图 10.6。 $\mathfrak{r}$与 $\mathfrak{s}$共同迭代至 $\mathfrak{w}$的概览。

(1) 生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}) \subseteq \nu_{\mathfrak{w}}$ 和 生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}) \subseteq \nu_{\mathfrak{w}}$, *(2)* $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$, *(3)* $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{r}$的完全迭代, *(4)* $\mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{x}}$, *(5)* 如果 $\mathfrak{x}'$ 是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}$ 的最小节点，且满足 $\mathfrak{x}'|\kappa_{\mathfrak{x}'} = \mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}$, 那么 $\mathfrak{x}'$ 位于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$的主分支上, *(6)* 如果 E 是在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}$ 的主分支上于 $\mathfrak{x}'$处使用的扩张子，那么 临界点$(E) = \kappa_{\mathfrak{x}'}$,

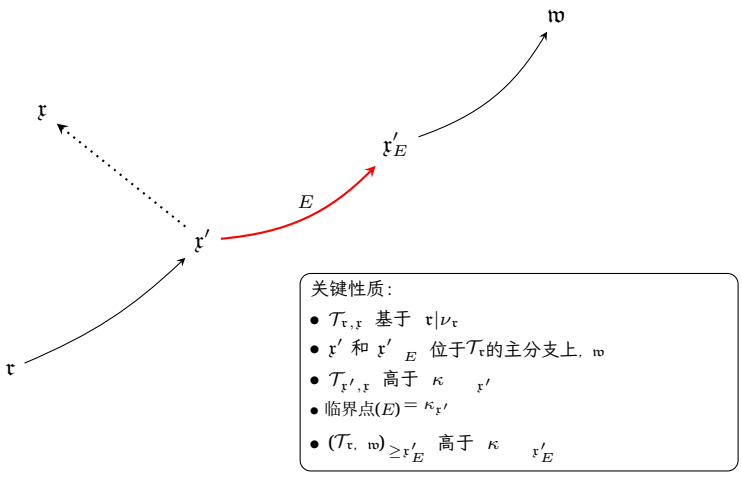


图 10.7. $\mathfrak{r}$-侧迭代的结构：在 $\mathfrak{x}'$ 处分裂并使用 E。

(7) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}})_{\trianglerighteq \mathfrak{x}'_E}$ 高于 $\kappa_{\mathfrak{x}'_E}$。

证明。 我们从较简单的子句开始：

子句 (1)、(3)、(4) 和 (7)。子句 (1) 可由完全正规化以及 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}) \subseteq \nu_{\mathfrak{s}}$ 和 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}) \subseteq \nu_{\mathfrak{r}}$ 这一事实推出。具体而言，若 $\mathcal{U}$ 是通过与 $\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}$ 共同迭代而得到的、基于 $\mathfrak{q}$ 的正规树，那么 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathcal{U}$ 的最后模型，而 $\mathcal{U}$ 完全正规化了这些堆栈 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}})^\frown \mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 和 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}})^\frown \mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$。子句 (3) 成立，因为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 的主分支没有下降，而且 $\mathfrak{x}$ 被特意选为该树上的一个节点。子句 (4) 是 (3) 的直接推论。子句 (7) 可由 κ $(\kappa < \mathfrak{d}_{\mathfrak{q}})$ 的小性推出。

子句 (2)、(5) 和 (6)。这里导致矛盾的关键点在于，我们证明了迭代的 $\mathfrak{r}$ 侧必须在其主分支上使用一个扩张子，其临界点是 $\kappa_{\mathfrak{r}}$ 的像，这意味着在 $\mathfrak{s}$ 侧的主分支上使用的任何扩张子的临界点都不可能是 $\kappa_{\mathfrak{s}}$ 的像。

设 $\alpha < \mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}})$ 满足 $\mathfrak{m}^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r}},\alpha}_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{x}$。设 $\mathfrak{y} = \mathfrak{m}^{\mathcal{T}_{\mathfrak{s}},\alpha}_{\mathfrak{w}}$是$\mathfrak{s}$侧[27]上相应的模型。注意，$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{y}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\zeta$（其中 $\zeta < \kappa_{\mathfrak{s}}$），而 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$。由于这些模型是通过最小扩张子分歧共同迭代产生的，我们有

$$\mathfrak{y}|\nu_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}} \qquad (*).$$

图10.8 中的示意图可能会对读者有所帮助。我们注意到

(1) 由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 避免使用临界点低于 κ 的扩张子，因此任何临界点映射到 $\mathfrak{w}|\kappa_{\mathfrak{w}}$ 的强基数的扩张子 E 只能出现在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 中。

应用 [3, 引理 9。12] 可得以下性质：

(2.1) $\kappa_{\mathfrak{x}} < \kappa_{\mathfrak{w}}$.

[27]回想一下，根据 [3]，在最小 extender 不一致余迭代中，我们允许填充。

(2.2) 若 $\gamma = \mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}) + 1$，且 τ 是 $\mathfrak{w}|\kappa_{\mathfrak{w}}$的强基数，那么对于任意满足 $\tau \in \mathrm{rge}(\pi^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}}_{\beta,\gamma})$ 的 $\beta \in [0,\gamma]_{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}}$，我们有：

$$\sup(\pi^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}}_{\beta,\gamma}[(\pi^{\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}}_{\beta,\gamma})^{-1}(\tau)]) = \tau.$$

(2.3) 对于每个 $\tau < \kappa_{\mathfrak{w}}$，$\tau$ 是 $\mathfrak{w}|\kappa_{\mathfrak{w}}$ 的强基数，当且仅当 $\tau < \kappa_{\mathfrak{x}}$ 且 τ 是 $\mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}$的强基数。

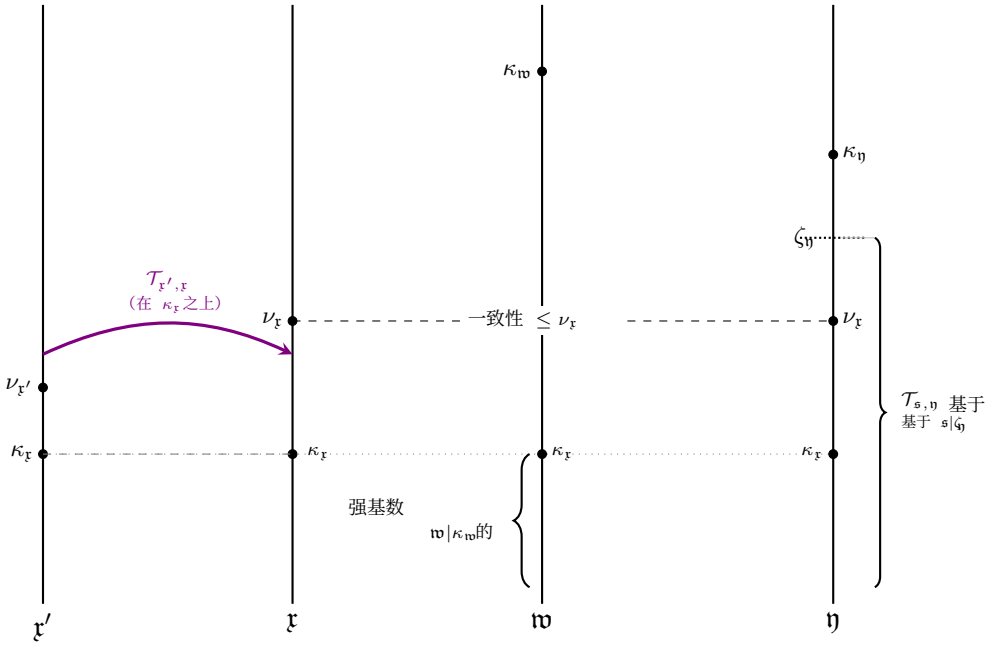


图 10.8。显示从 $\mathfrak{x}'$ 到 $\mathfrak{x}$在 $\kappa_{\mathfrak{x}}$之上进行迭代的序数层级。 $\mathfrak{w}$ 的强基数包含在 $\kappa_{\mathfrak{x}}$之下。

（2.1）成立是因为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{y}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\zeta$，$\zeta < \kappa_{\mathfrak{s}}$ 并且 （$*$） （(*) 蕴含 $\kappa_{\mathfrak{x}} < \nu_{\mathfrak{x}} < \zeta_{\mathfrak{y}}$）。（2.2）是 [3, 引理 9 12], 的推论，并由（1）得出。（2.3）成立是因为我们有$\mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{x}}$ （见当前定理的条款 4）以及（2.2）。

结合（2.2）和（2.3），我们看到，$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 在主分支上于阶段 α 之后立即使用的扩张子的临界点必定是 $\kappa_{\mathfrak{r}}$。这证实了条款（5）和（6）。

最后，对于条款（2）：由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 使用临界点位于 $\kappa_{\mathfrak{r}}$的像中的扩张子，[3,, $\mathfrak{w}$ 不能使用临界点为 $\kappa_{\mathfrak{s}}$的像的扩张子。因而，（2.3）和（$*$）蕴含 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$。□

最后，我们给出以下推论，其精神与上文所述的推论相同。

推论 10.5. 假设 $\mathsf{RefGen}_0(\mathfrak{q},\lambda,\nu)$ 成立，并且 $\mathfrak{r}$和 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的两个 $\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$-有界完全迭代，满足$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$。令 $\mathfrak{w}$ 为 $\mathfrak{r}$和 $\mathfrak{s}$的最小扩张子分歧比较。那么 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$。

证明。 这个证明与我们已经给出的证明非常相似，因此这里只概述证明过程。我们将再次使用 [3, 引理 9.12]。我们有

$$\mathcal{M}_\infty(\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}) \trianglelefteq \mathcal{M}_\infty(\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}).$$

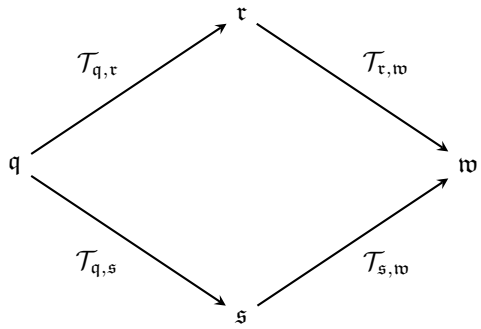


图 10.9. 有界迭代 $\mathfrak{r}$与 $\mathfrak{s}$的比较。

令 α 为满足 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}})^{\leq\alpha}$ 以 $\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r}$ 为基础的最大对象，并令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathcal{T}_\mathfrak{r}}_{,\alpha}{}^{\mathfrak{w}}$。目标是验证以下结论。

(a) $\nu_\mathfrak{m} = \nu_\mathfrak{w}$.

为证明 (a)，我们先确立以下结论。

(b) $\mathcal{M}^\mathfrak{m}|\nu_\mathfrak{m}$ 与 $\mathcal{M}^\mathfrak{w}|\nu_\mathfrak{w}$ 的强基数集合相同。

不难看出，(b) 蕴含 (a)。事实上，令 $\mathfrak{x}$、 $\mathfrak{y}$和 $\mathfrak{n}$ 分别为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$、$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{w}}$ 中满足下述条件的最小节点

$$\mathfrak{n}|\lambda_\mathfrak{w} = \mathfrak{x}|\lambda_\mathfrak{w} = \mathfrak{y}|\lambda_\mathfrak{w} = \mathfrak{w}|\lambda_\mathfrak{w}.$$

Because $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}) \subseteq \lambda_\mathfrak{r}$、$\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}) \subseteq \lambda_\mathfrak{s}$、$\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}) \subseteq \lambda_\mathfrak{x}$ 和 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{y}}) \subseteq \lambda_\mathfrak{y}$，我们有 that $\mathfrak{x} = \mathfrak{n} = \mathfrak{y}$（另外，请注意 $\lambda_\mathfrak{x} = \lambda_\mathfrak{y} = \lambda_\mathfrak{n} = \lambda_\mathfrak{w}$）。因此，

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{n}.$$

由于 $\lambda_\mathfrak{w} < \nu_\mathfrak{m}$ （根据 (b)），我们有 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r}$。因此，只需证明 (b)。(b) 的证明是对 $\mathcal{M}^\mathfrak{w}|\nu_\mathfrak{w}$ 的强基数进行归纳。令 ζ 为 $\mathcal{M}^\mathfrak{w}|\nu_\mathfrak{w}$ 的一个强基数，并令 $\zeta' = \sup(\mathrm{SLW}(\mathcal{M}^\mathfrak{w}|\zeta))$。我们假设

(IH) $\zeta' < \nu_\mathfrak{m}$,

并希望证明 $\zeta < \nu_\mathfrak{m}$。我们有

(1) 如果 $\zeta'' \leq \zeta'$ 是 $\mathcal{M}^\mathfrak{w}|\nu_\mathfrak{w}$的强基数，那么 ζ'' 是 $\mathcal{M}^\mathfrak{m}|\nu_\mathfrak{m}$的强基数。

令 $\mathfrak{m}'$ 为满足 $\mathfrak{m}'|\zeta' = \mathfrak{w}|\zeta'$的 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 的最小节点，令 $\mathfrak{s}'$ 为满足 $\mathfrak{s}'|\zeta' = \mathfrak{w}|\zeta'$的 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 的最小节点，并令 $\mathfrak{q}'$ 为满足 $\mathfrak{q}'|\zeta' = \mathfrak{w}|\zeta'$的 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{w}}$ 的最小节点。因此我们有：

(2.1) 若 $\zeta'' \leq \zeta'$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}}|\nu_{\mathfrak{w}}$的强基数，则 ζ'' 是$\mathcal{M}^{\mathfrak{s}'}|\nu_{\mathfrak{s}'}$的强基数。

(2.2) 若 $\zeta'' \leq \zeta'$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}}|\nu_{\mathfrak{w}}$的强基数，则 ζ'' 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}'}|\nu_{\mathfrak{q}'}$的强基数。

(2.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{m}}$ 基于 $\mathfrak{m}'|\nu_{\mathfrak{m}'}$。

(2.4) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}',\mathfrak{m}'}$ 高于 ζ （该迭代因完全正规化而有定义）。

(2.5) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}',\mathfrak{s}'}$ 高于 ζ' ，且$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}',\mathfrak{s}'}$ 基于$\mathfrak{q}'|\nu_{\mathfrak{q}'}$。

由 (2.5) 可得

(3) $\mathcal{M}_\infty(\mathfrak{s}'|\nu_{\mathfrak{s}'}) \trianglelefteq \mathcal{M}_\infty(\mathfrak{m}'|\nu_{\mathfrak{m}'})$.

由 [3, 引理 9.12] 可知，在 $\mathfrak{m}'$ 与$\mathfrak{s}'$ 的最小扩张子分歧共同迭代中，只有一侧使用临界点是 ζ的原像的扩张子。为了确定是哪一侧，我们分析$\mathfrak{m}'|\zeta_{\mathfrak{m}'}$ 与 $\mathfrak{s}'|\zeta_{\mathfrak{s}'}$的最小扩张子分歧共同迭代。令 $\mathfrak{x}$ 和$\mathfrak{y}$ 分别为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{m}',\ \mathfrak{w}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s}',\ \mathfrak{w}}$ 的最小节点，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{m}',\ \mathfrak{x}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s}',\ \mathfrak{y}}$ 分别以 $\mathfrak{m}'|\zeta_{\mathfrak{m}'}$ 和 $\mathfrak{s}'|\zeta_{\mathfrak{s}'}$为基础，则有三种情形。

情形 1。 设 $\mathfrak{x}|\zeta_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y}|\zeta_{\mathfrak{y}}$。于是由 [3, 推论 9.11] 可得 $\zeta = \zeta_{\mathfrak{x}} = \zeta_{\mathfrak{y}}$；又因为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{m}',\ \mathfrak{x}}$ 以 $\mathfrak{m}'|\nu_{\mathfrak{m}'}$为基础，所以有 $\zeta < \nu_{\mathfrak{m}}$。

情形 2。 $\mathfrak{x}|\zeta_{\mathfrak{x}} \triangleleft \mathfrak{y}|\zeta_{\mathfrak{y}}$。在这种情形下，我们必须使用一个临界点为$\zeta$ 在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{x},\ \mathfrak{w}}$ 而不在$\mathcal{T}_{\mathfrak{y},\ \mathfrak{w}}$上的原像的扩张子。由此可得， $\mathfrak{w}|\zeta$ 是 $\mathfrak{y}|\zeta_{\mathfrak{y}}$的完全迭代，而 (3) 表明， $\mathfrak{x}$ 与 $\mathfrak{y}|\zeta_{\mathfrak{y}}$ 的最小扩张子分歧共同迭代是基于 $\mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}}$的。因此，再次有$\zeta < \nu_{\mathfrak{m}}$。

情形 3。 $\mathfrak{y}|\zeta_{\mathfrak{y}} \triangleleft \mathfrak{x}|\zeta_{\mathfrak{x}}$。在这种情形下，我们必须使用一个临界点为 ζ 在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{y},\ \mathfrak{w}}$ 而不在$\mathcal{T}_{\mathfrak{x},\ \mathfrak{w}}$上的原像的扩张子。由此可得， $\mathfrak{w}|\zeta$ 是 $\mathfrak{x}|\zeta_{\mathfrak{x}}$的完全迭代，因此，$\zeta < \nu_{\mathfrak{m}}$。□

11. Δ-通用性迭代与导出模型表示

我们引入 Δ-通用性迭代，并用它们证明某些 Nairian 模型可实现为导出模型。[28]

定义 11.1. 在 M 中，假设 $\mathrm{RefGen}_1(\mathfrak{q},\kappa,\nu)$ 成立。设 $G \subseteq \mathrm{Coll}(\omega_1,\mathbb{R})$ 为 M-泛型，设 $\vec{B} = (B_i : i < \omega_1)$ 是 $\Delta_{\mathfrak{q}}$、ν 在 $M[G]$ 中的枚举，并且 $\vec{a} = (a_i : i < \omega_1) \in M[G]$ 是 $\mathbb{R}$ 的枚举。那么，如果满足以下条件，$(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_i, \mathcal{T}_i, E_i : i < \omega_1) \in M[G]$ 是相对于 $(\vec{B},\vec{a})$ 的 $\Delta_{\mathfrak{q}}$、ν-通用性迭代：

(1) $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}$。(2) 对于 $i < \omega_1$， $\mathcal{T}_i$ 是 $\mathfrak{q}_i$ 上严格高于 $\kappa_{\mathfrak{q}_i}$ 且基于 $\mathfrak{q}_i|\nu_{\mathfrak{q}_i}$ 的迭代树。(3) 对于 $i < \omega_1$， $\mathfrak{q}'_i$ 是 $\mathcal{T}_i$ 的最后一对。(4) 对于 $i < \omega_1$， $E_i \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}'_i}}$ 满足 $\mathrm{crit}(E_i) = \kappa_{\mathfrak{q}_i}$，且 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathrm{lh}(E_i)$。(5) 对于 $i < \omega_1$， $\mathfrak{q}_{i+1} = Ult(\mathfrak{q}_i,\ E_i)$。(6) 对于极限 $i < \omega_1$， $\mathfrak{q}_i$ 是 $(\mathfrak{q}_j, \pi_{\mathfrak{q}_j,\ \mathfrak{q}_k} : j < k < i)$ 的直接极限。(7) 对于 $i < \omega_1$， 存在某个 $\zeta < \kappa_{\mathfrak{q}_{i+1}}$， 使得 B_i 在 $\mathrm{Code}(\Sigma^{\mathfrak{q}_{i+1}|\zeta})$ 中是射影的；并且存在某个 $g \subseteq$， $\mathrm{Coll}(\omega,\ \zeta)$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_{i+1}}$ 上的泛型，$a_i \in \mathcal{M}^{\mathfrak{q}_{i+1}}[g]$。

[28] 读者可能会发现，复习记号 9.5 和定义 9.4 会有所帮助。本节的灵感来自导出 中所使用的模型表示 [9], [13], [12] 和 [14]。

令 $\mathfrak{q}_{\omega_1}$ 为 $(\mathfrak{q}_i,\ \pi_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{q}_j}:\ i<j<\omega_1)$ 的直接极限。

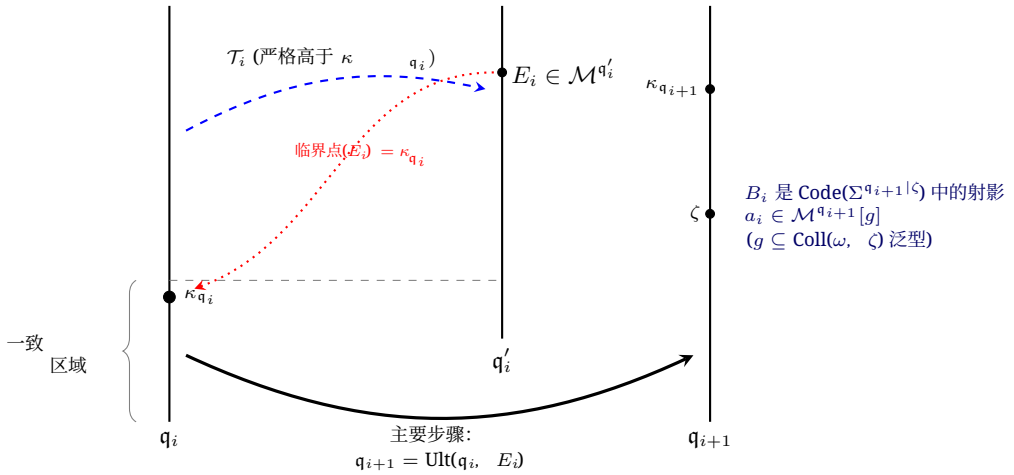


图 11.1。在一次 a$\Delta_{\mathfrak{q},\ \nu}$-通用性迭代中，模型与树之间的关系。注意， B_i 和 a_i 在下文中被 $\mathfrak{q}_{i+1}$ 捕获。

我们指出，整个迭代

$$(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_i, \mathcal{T}_i, E_i : i<\omega_1)$$

是 $\mathfrak{q}$ 的正规迭代。

定理 11.2. 在 M 中，假设 $\mathsf{RefGen}_1(\mathfrak{q}, \kappa, \nu)$ 成立。令
(1) $G \subseteq \mathrm{Coll}(\omega_1, \mathbb{R})$ 是 M-泛型，*(2)* $\vec{B} = (B_i :\ i<\omega_1)$ 是 $\Delta_{\mathfrak{q},\nu}$ 在 $M[G]$ 中的一个枚举，*(3)* 并且 $\vec{a} = (a_i :\ i<\omega_1) \in M[G]$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个枚举。
那么存在 $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_i, \mathcal{T}_i, E_i\colon i<\omega_1) \in M[G]$，它是相对于 $(\vec{B}, \vec{a})$ 的 $\Delta_{\mathfrak{q},\nu}$-通用性迭代。

证明。 下面的构造如图11.2所示。定理 11.2 是 [3,定理 11.1]的推论。

假设我们已经定义了 $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_i, \mathcal{T}_i, E_i\colon\ i<\beta)$，现在要定义 $(\mathfrak{q}_\beta, \mathfrak{q}'_\beta, \mathcal{T}_\beta, E_\beta)$。若$\beta = \gamma+1$，则 $\mathfrak{q}_\beta = \mathrm{Ult}(\mathfrak{q}_\gamma, E_\gamma)$。若 β 是一个极限序数，则 $\mathfrak{q}_\beta$ 是以下各项的直接极限

$$(\mathfrak{q}_\gamma, \pi_{\mathfrak{q}_\gamma,\mathfrak{q}_{\gamma'}} : \gamma<\gamma'<\beta).$$

现在我们描述获得 $\mathfrak{q}'_\beta$ 的步骤。

$\mathfrak{q}'_\beta$ 的构造。

步骤 1. 令 $\bar{\nu} \in (\kappa_{\mathfrak{q}_\beta}, \nu_{\mathfrak{q}_\beta})$ 为 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_\beta}$ 的一个伍丁基数。令 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{q}_\beta$ 的一个完全迭代，使得

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\beta,\mathfrak{s}}$ 以 $\mathfrak{q}_\beta|\bar{\nu}$ 为基础，
- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\beta,\mathfrak{s}}$ 严格高于 $\kappa_{\mathfrak{q}_\beta}$，并且
- a_β 相对于 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$ 对一个大小为 $\bar{\nu}_{\mathfrak{s}}$的偏序集是泛型的。

步骤 2. 接下来应用条款 1 于 [3, 定理 11。1] 应用于 B_β， $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$，以及区间 $(\bar{\nu}_{\mathfrak{s}}, \nu_{\mathfrak{s}})$ [29],并得到一个完全迭代 $\mathfrak{w}$ 之于 $\mathfrak{s}$以及一个 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}}$-不可达基数 ζ 使得

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|(\bar{\nu}_{\mathfrak{s}}, \nu_{\mathfrak{s}})$,
- $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}) \subseteq \zeta$，并且
- B_β 在 $\mathrm{Code}(\Lambda_{\mathfrak{w}|\zeta})$ 中是射影的。

令集合 $\mathfrak{q}'_\beta = \mathfrak{w}$。

现在令 $E \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{w}}}$ 为具有最小指标且满足 $\zeta < \mathrm{lh}(E)$ 的扩张子，并设

- $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\beta,\mathfrak{w}}$,
- $E_\beta = E$,
- 临界点$(E) = \kappa_{\mathfrak{q}_\beta}$，并且
- $\mathfrak{q}_{\beta+1} = \mathrm{Ult}(\mathfrak{q}_\beta, E)$。

□

下一个定理将一个关于 $N|\kappa$的局部版本放大到 $N|\kappa$，通过一次 $\Delta_{\mathfrak{q},\nu}$-通用性迭代。图 11.3 展示了这一过程。

定理 11.3。 假设 $M \vDash \mathrm{RefGen}_1(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$ 成立。令

- $G \subseteq \mathrm{Coll}(\omega_1, \mathbb{R})$ 是 M-泛型的，并且
- $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_i, \mathcal{T}_i, E_i : i < \omega_1) \in M[G]$ 是关于某些 $\vec{B} = (B_i : i < \omega_1)$ 和 $\vec{a} = (a_i : i < \omega_1)$的一个 $\Delta_{\mathfrak{q},\nu}$-通用性迭代。

令 $\mathfrak{q}_\infty$ 为$(\mathfrak{q}_i, \pi_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{q}_j} : i < j < \omega_1)$的直接极限。那么

(1) $\kappa_{\mathfrak{q}_\infty} = \omega_1^M$， *(2)* $\mathcal{M}_\infty^l(\mathfrak{q}_\infty, \kappa_{\mathfrak{q}_\infty}) = \mathcal{M}_\infty(\mathfrak{q}|\nu)|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\kappa)$， *(3)* 对每个 $i < \omega_1$、每个 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_i}$-泛型的 $h \subseteq \mathrm{Coll}(\omega, < \kappa_{\mathfrak{q}_i})$，以及每个 $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{q}_i,\kappa_{\mathfrak{q}_i},h}$,

$$\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \kappa_{\mathfrak{r}} = \pi_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{q}_\infty} \circ \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}(\mathfrak{q}_i,\kappa_{\mathfrak{q}_i})} \restriction \kappa_{\mathfrak{r}},$$

以及 (4) $N^l(\mathfrak{q}_\infty, \kappa_{\mathfrak{q}_\infty})|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda) = N|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda)$。

证明。 第一条是一个标准推论，因为对每个 $i < \omega_1$，临界点$(E_i) = \kappa_{\mathfrak{q}_i}$。我们引入以下记法，以供证明余下部分使用。在 $M[G]$中工作，固定一个 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_\infty}$-泛型 $g \subseteq \mathrm{Coll}(\omega, < \omega_1^M)$，使得 $\mathbb{R}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_\infty}[g]} = \mathbb{R}$，并令

记法 11.4。

(1.1) $\tau = \omega_1^M = \kappa_{\mathfrak{q}_\infty}$， (1.2) $\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{q}_\infty$， (1.3) 对于 $i \leq \tau$, $\kappa_i = \kappa_{\mathfrak{q}_i}$， (1.4) 对于 $i \leq \tau$, $\mathfrak{q}_i = (\mathcal{Q}_i, \Lambda_i)$， (1.5) 对于 $i < m \leq \tau$, $\pi_{i,m} = \pi_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{q}_m}$， (1.6) 对于 $i < m \leq \tau$, $\mathcal{T}_{i,m} = \mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{q}_m}$， (1.7) 对于 $i \leq \tau$, $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}(\mathfrak{q}_i, \kappa_i)$（参见记号 9.2），(1.8) 对于 $i \leq \tau$, $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}^{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{M}_\infty^l(\mathfrak{q}_i, \kappa_i)$， (1.9) 对于 $i \leq \tau$, $g_i = g \cap \mathrm{Coll}(\omega, < \kappa_i)$，以及 (1.10) 对于 $i \leq \tau$，使得 g_i 是 $\mathcal{Q}_i$- 泛型， $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(\mathcal{Q}_i, \kappa_i, g_i)$。

[29]这意味着迭代树位于 $\bar{\nu}_{\mathfrak{s}}$ 之上且位于 $\nu_{\mathfrak{s}}$ 之下。

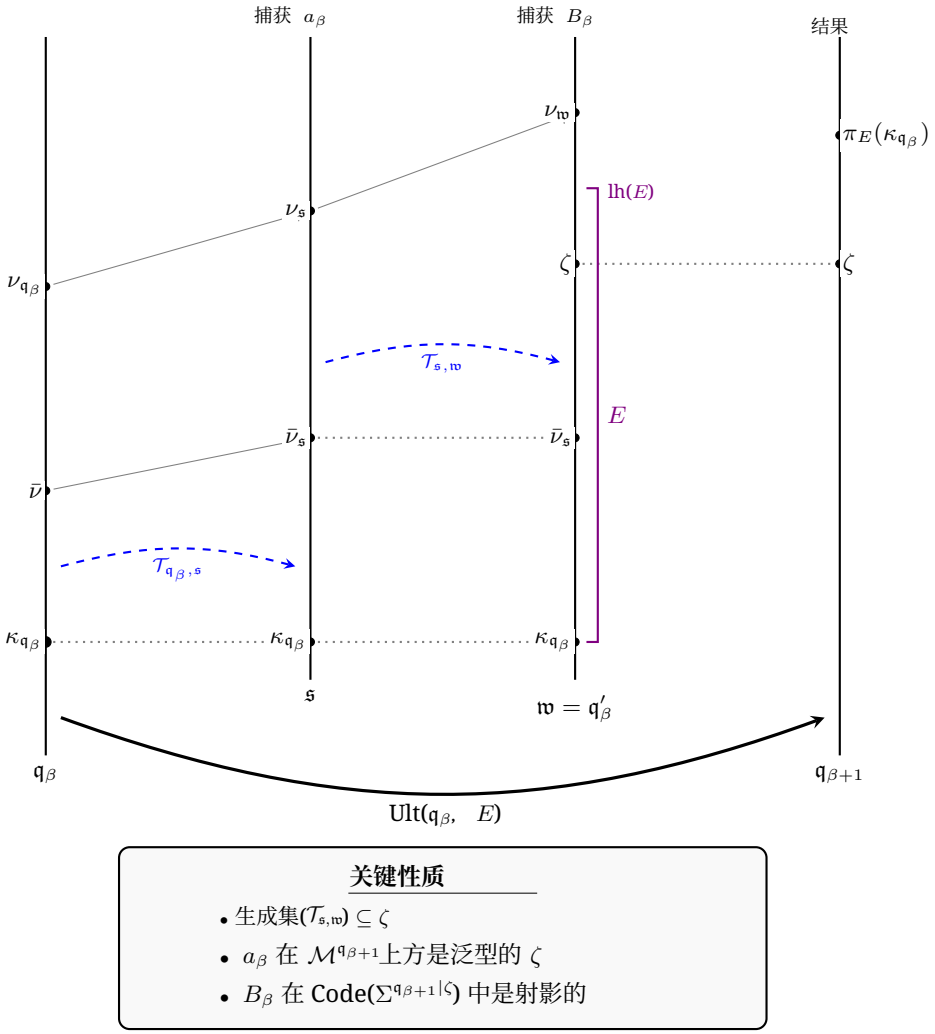


图 11.2。递归步骤构造。该图展示了基数的移动以及模型之间的一致性。

我们首先证明以下有用的引理。注意，在 $M[G]$ 中，

(1) 对于一个闭无界集中的 $i < \tau$， $i = \kappa_i$ 和 $g_i = g \cap$， $\mathrm{Coll}(\omega, < \kappa_i)$在 $\mathcal{Q}_i$上是泛型的。

令 C 为上述闭无界集。

引理 11.5. 假设 $i \in C$、 $k \in C$ 或 $k = \tau$，并且 $i < k$。那么 $\pi_{i,\ k}$ 可以提升为

$$\pi^+_{i,k} : \mathcal{Q}_i[g_i] \to \mathcal{Q}_k[g_k],$$

并且若 $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}_i$ 那么 $\pi^+_{i\ k,}\ (\mathfrak{r}) \in \mathcal{F}_k$ 且 $\mathfrak{w} =_{def} \pi^+_{i\ k,}\ (\mathfrak{r})$ 是 $\mathfrak{r}$ 的一个迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{r}}$之上。证明。 读者可参阅图 11.4 和图 11.5。令 $\zeta < \kappa_i$ 满足

(a1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{r}}$ 以 $\mathfrak{q}|\zeta$为基础，

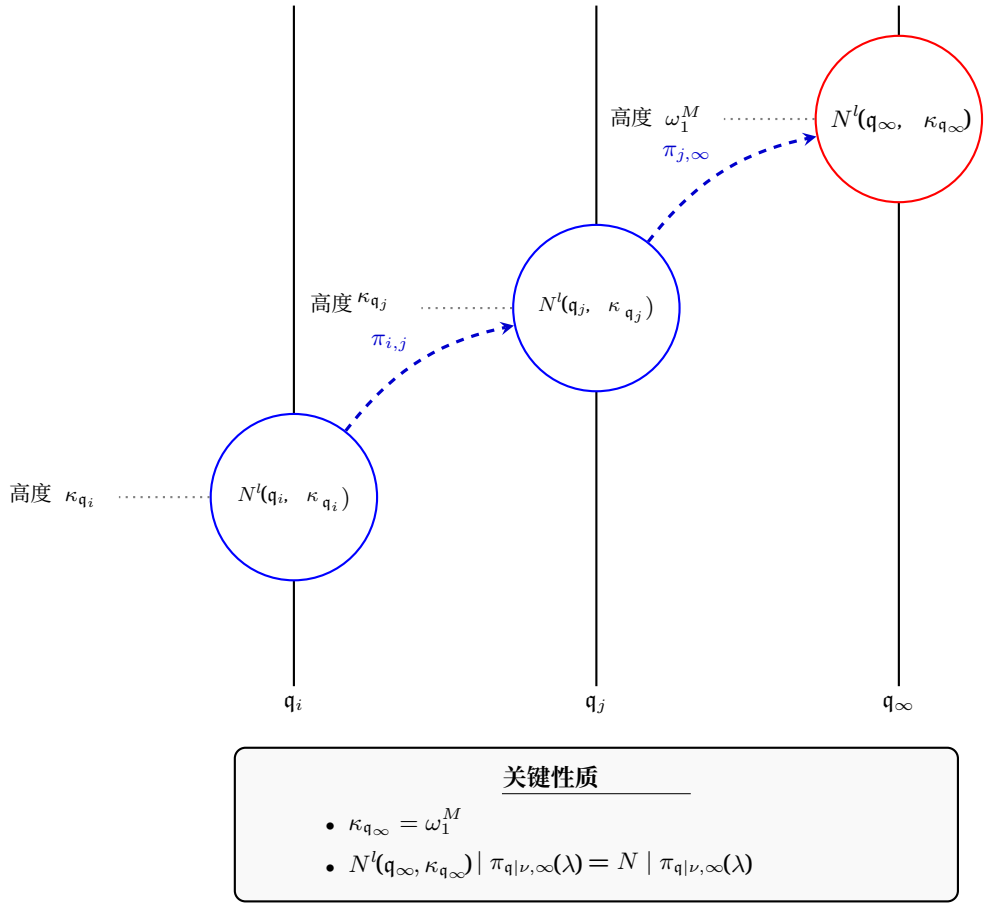


图 11.3。定理的可视化 11.3。局部 N 模型扩张为满模型的方式。

(a2) ζ 是真切点（见术语 9.3），并且

(a3) ζ 是 $\mathcal{Q}_i$的一个不可达基数。

设 $\mathcal{U} = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{r}},\ \mathfrak{q}|\zeta)$（参见记号 9.5）。我们有 $\pi_{i\ k}^{+}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$。设 $\mathcal{X} = \uparrow(\mathcal{U},\ \mathfrak{q}_k)$。

现在注意，如果 $\mathcal{Y}$ 是$(\mathcal{T}_{i,k})^\frown\mathcal{X}$ 的完全正规化，那么$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{r}} \trianglelefteq \mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{Y}_{\geq\mathfrak{r}}$ 位于 $\kappa_\mathfrak{r}$之上（事实上 $\mathcal{Y}_{\geq\mathfrak{r}}$ 是$\mathcal{T}_i$的最小副本，k 通过$\pi_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{r}}$，参见 [3, 定义 8。7]）。引理的证明至此完成。□

提醒读者，按照 [3],，如果 $\mathfrak{w}$ 是一个 hod 对，那么 $\mathfrak{w} = (\mathcal{M}^\mathfrak{w}, \Sigma^\mathfrak{w})$，其中 $\mathcal{M}^\mathfrak{w}$是一个 hod 鼠，$\Sigma^\mathfrak{w}$ 是一个具有强壳凝聚的迭代策略。[30]

推论 11.6。假设 $i \in C$, $k \in C$ 或 $k = \tau$, $i < k$，以及 $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}_i$。那么令$\mathfrak{w} = \pi_{i\ k,}^{+}(\mathfrak{r})$[31]，

$$\pi_{\mathfrak{w},\mathfrak{m}_k} \circ \pi_{i,k} \restriction (\mathcal{M}^\mathfrak{r}|\kappa_\mathfrak{r}) = \pi_{i,k} \circ \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}_i} \restriction (\mathcal{M}^\mathfrak{r}|\kappa_\mathfrak{r}).$$

证明。我们有 $\pi_{i\ k,}^{+}(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}_i}) = \pi_{\mathfrak{w},\mathfrak{m}_k}$。由于 $\pi_{i\ ,k}^{+} \restriction \kappa_\mathfrak{r} = id$，断言得证。 □

[30]参见 [19, 定义 0。1] 和 [19,定理 1。4]。[31]注意 $\mathcal{M}^\mathfrak{r}|\kappa_\mathfrak{r} = \mathcal{M}^\mathfrak{w}|\kappa_\mathfrak{w}$。

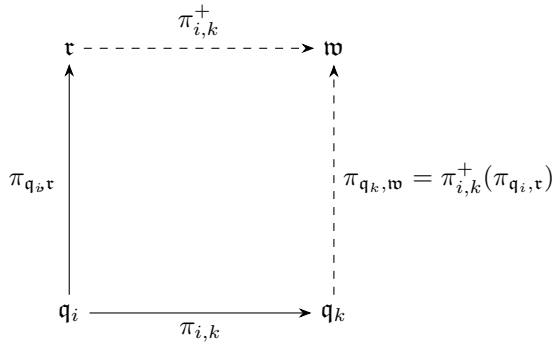


图 11.4. $\mathfrak{r}$-到-$\mathfrak{w}$图。

现在我们定义一个嵌入

$$j : \mathcal{M}_\tau|\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{m}_\tau}(\lambda) \to \mathcal{M}_\infty(\mathfrak{q}|\nu)|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda)$$

如下。固定 $x \in \mathcal{M}_\tau|\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{m}_\tau}(\lambda)$。我们称 $(\mathfrak{r},\zeta,i)$ 对 x 是良好的，如果元组 $(\mathfrak{r},\zeta,i)$ 具有以下性质：

(p1) (p1) $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}_\tau$ 且 $x \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}_\tau})$.

(p2) $\zeta < \tau$和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{r}}$基于 $\mathfrak{q}_\tau|\zeta$。

(p3) $\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{r}}(\zeta) = \zeta$。

(p4) ζ 是 $\mathcal{Q}_\tau$ 的不可达基数。

(p5) 如果 $y \in \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}$ 满足 $\pi_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}_\tau}(y) = x$，那么 $y \in \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\zeta$。

(p6) $i \in C$、$\zeta < \kappa_i$，并令 $\mathcal{U} = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{r}},\ \mathfrak{q}_\tau|\zeta)$，$\mathcal{U} \in \mathcal{Q}_i[g_i \cap \mathrm{Coll}(\omega,\ <\zeta)]$。

现在固定一个对 x 有利的 $(\mathfrak{r},\ \zeta,\ i)$。令 $\mathcal{U}^+ = \uparrow(\mathcal{U},\ \mathfrak{q}_i)$（这有意义，因为 $\mathfrak{q}_i|\zeta = \mathfrak{q}_\tau|\zeta$）。令 $\mathfrak{r}'$ 为 $\mathcal{U}^+$ 的最后模型（因此，$\mathfrak{r}' \in \mathcal{F}_i$），并设

$$j_{\mathfrak{r},\zeta,i}(x) = \pi_{\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'},\infty}(y).$$

下面我们将证明 $j_{\mathfrak{r},\ \zeta,\ i}(x)$ 与 $(\mathfrak{r},\ \zeta,\ i)$ 无关。为了证明这一点，我们将使用以下观察，这只是推论 11.6 的重述。

(2.1) 假设 $k \in C$ 或 $k = \tau$，且 $\mathfrak{w} \in \mathcal{F}_k$。假设 $i \in k \cap C$ 满足：对于某个 $\mathcal{Q}_i$-不可达基数 $\zeta < \kappa_i$，$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_k,\ \mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{q}_k|\zeta$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_k,\ \mathfrak{w}} \in \mathfrak{q}_k|\zeta[g_k \cap \mathrm{Coll}(\omega,\ <\zeta)]$。令 $\mathcal{U} = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_k,\ \mathfrak{w}},\ \mathfrak{q}_k|\zeta)$，且 $\mathfrak{r}$ 为 $\uparrow(\mathcal{U},\ \mathfrak{q}_i|\zeta)$的最后模型。那么

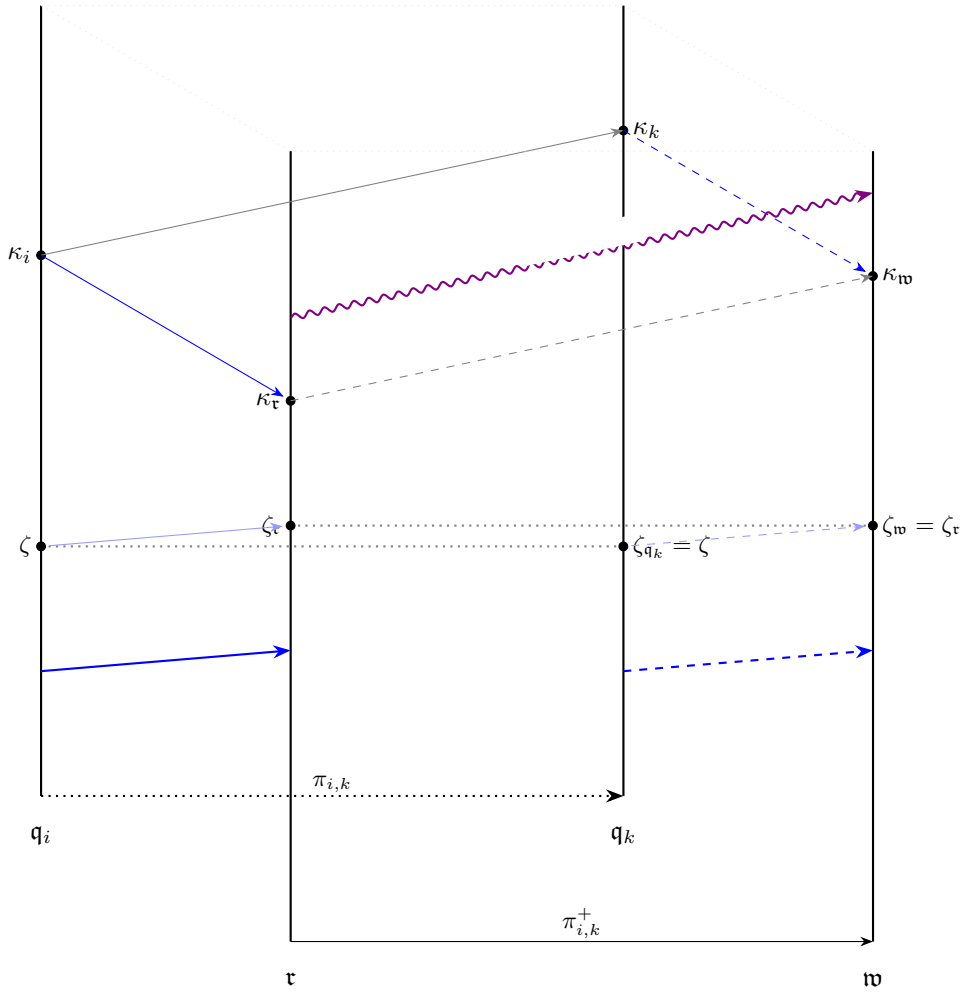
(2.2) $\pi^+_{i\ k,}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{w}$,

(2.3) $\mathfrak{w}$是 $\mathfrak{r}$的一个迭代,

(2.4) $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{r}}$之上，且

(2.5) $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$。

继续沿用 (2.1) 中的记号，我们称 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{w}$ 的 i-原像。



关键性质

- $\mathcal{Y}$ 是（$\mathcal{T}$的完全正规化 $)^\frown \mathcal{T}_{\mathfrak{q}_k,\mathfrak{w}}$
- $\mathcal{Y}_{\geq \mathfrak{r}}$ 高于 $\kappa_{\mathfrak{r}}$。
- $\mathcal{Y}_{\geq \mathfrak{r}}$ 是$\pi_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{r}}$-最小副本，属于$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{q}_k}$。

图 11.5。 $\mathfrak{r}$-到-$\mathfrak{w}$ 迭代。

引理 11.7. 设 $x \in \mathcal{M}_\tau | \pi_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{m}_\tau}(\lambda)$，并且 $(\mathfrak{r},\zeta,i)$ 和 $(\mathfrak{w},\alpha,k)$ 是两个对 x 良好的元组。那么

$$j_{\mathfrak{r},\zeta,i}(x) = j_{\mathfrak{w},\alpha,k}(x).$$

证明。 图 11.6 展示了证明的要点。我们有

(3.1) $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}_\tau$ 和 $\mathfrak{w} \in \mathcal{F}_\tau$。

(3.2) $x \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}_\tau})$ 和 $x \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{m}_\tau})$。

(3.3) $\zeta < \tau$ 与 $\alpha < \tau$。

(3.4) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{r}}$基于 $\mathfrak{q}_\tau|\zeta$，且$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{w}}$基于 $\mathfrak{q}_\tau|\alpha$。

(3.5) $\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{r}}(\zeta) = \zeta$ 与$\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{w}}(\alpha) = \alpha$。

(3.6) ζ 是 $\mathcal{Q}_\tau$的不可达基数，且 α 是 $\mathcal{Q}_\tau$的不可达基数。

(3.7) 若 $y \in \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}$ 使得$\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}_\tau}(y) = x$，则 $y \in \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\zeta$；且若 $z \in \mathcal{M}^{\mathfrak{w}}$ 使得$\pi_{\mathfrak{w},\mathfrak{m}_\tau}(z) = x$，则 $z \in \mathcal{M}^{\mathfrak{w}}|\alpha$。

(3.8) $i \in C$, $\zeta < \kappa_i$，并令 $\mathcal{U} = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{r}}, \mathfrak{q}_\tau|\zeta)$，$\mathcal{U} \in \mathcal{Q}_i[g_i \cap \mathrm{Coll}(\omega, < \zeta)]$。

(3.9) $k \in C$, $\alpha < \kappa_k$，并令 $\mathcal{V} = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\mathfrak{w}}, \mathfrak{q}_\tau|\alpha)$，$\mathcal{V} \in \mathcal{Q}_k[g_k \cap \mathrm{Coll}(\omega, < \alpha)]$。

令 $\mathfrak{r}' = (\pi^+_{i\ ,\tau})^{-1}(\mathfrak{r})$ 和 $\mathfrak{w}' = (\pi^+_{k\ ,\tau})^{-1}(\mathfrak{w})$。注意，$\mathfrak{r}'$是 $\mathfrak{r}$的 i-原像，而 $\mathfrak{w}'$是 $\mathfrak{w}$的k-原像。

将 (2.1) 应用于 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{w}$，我们得到

(4.1) $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{r}'$的完全迭代，(4.2) $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}',\ \mathfrak{r}}$ 在$\kappa_{\mathfrak{r}'}$之上，(4.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}',\mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'}$，(4.4) $\mathfrak{w}$是 $\mathfrak{w}'$的完全迭代，(4.5) $\mathcal{T}_{\mathfrak{w}',\mathfrak{w}}$ 在 $\kappa_{\mathfrak{w}'}$之上，且(4.6) $\mathcal{T}_{\mathfrak{w}',\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'}$。

令 $\beta < \tau$ 使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{r}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{w}}$ 都基于 $\mathfrak{q}_\tau|\beta$，β 在 $\mathcal{Q}_\tau$ 中是不可达的，并且 $\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{r}}(\beta) = \pi_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{w}}(\beta) = \beta$。由此可知，$\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{w}$ 有一个公共迭代 $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}_\tau$，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{n}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\beta$，且 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{n}}$ 基于 $\mathfrak{w}|\beta$（这是因为 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{r}}) \subseteq \beta$ 且 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{w}}) \subseteq \beta$）。现在可推出

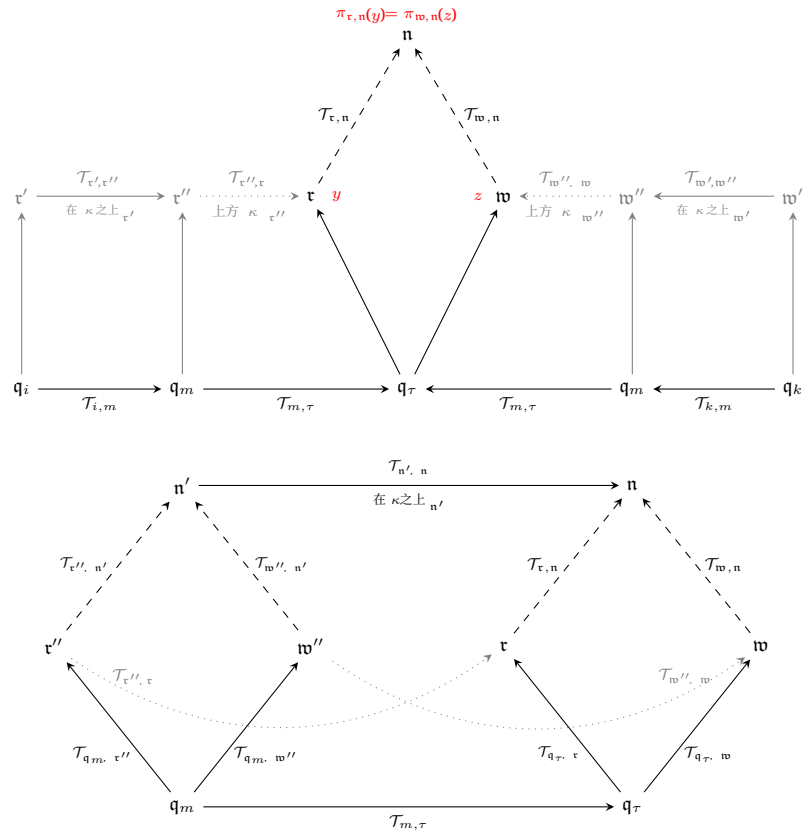
$$(5.1)\quad \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{n}}(y) = \pi_{\mathfrak{w},\mathfrak{n}}(z).$$

现在我们可以找到某个 $m \in [\mathrm{max}(i,\ k)\ \tau) \cap C$，使得 $\beta < \kappa_m$，并令

$$\mathfrak{r}'' = \pi^+_{i,m}(\mathfrak{r}') \text{ and } \mathfrak{w}'' = \pi^+_{k,m}(\mathfrak{w}').$$

显然有 $\mathfrak{n} \in \mathrm{rge}(\pi^+_{m,\ \tau})$，并且由（2）还可知，$\mathfrak{r}''$ 是 m 的原像，$\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{w}''$ 的原像，m 是 $\mathfrak{w}$ 的原像。因此，

(6.1) $\mathfrak{r}''$ 是 $\mathfrak{r}'$的完全迭代，(6.2) $\mathfrak{w}''$ 是 $\mathfrak{w}$的完全迭代，(6.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}',\ \mathfrak{r}''}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{r}'}$之上，(6.4) $\mathcal{T}_{\mathfrak{w}',\ \mathfrak{w}''}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{w}'}$之上，



关键事实：$\mathfrak{r}$侧

- $j_{r,\ \zeta,\ i}(x)=\pi_{\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'},\ \infty}(y)$
- 由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}',\ \mathfrak{r}''}$ 在 $\kappa_{\mathfrak{r}'}$之上：
  $j_{r,\ \zeta,\ i}(x)=\pi_{\mathfrak{r}''|\nu_{\mathfrak{r}''},\ \infty}(y)$
- $\pi_{\mathfrak{r}''|\nu_{\mathfrak{r}''},\infty}(y)=\pi_{\mathfrak{n}'|\nu_{\mathfrak{n}'},\infty}(\pi_{\mathfrak{r}'',\mathfrak{n}'}(y))$
- 因此，
  $j_{r,\ \zeta,\ i}(x)=\pi_{\mathfrak{n}'|\nu_{\mathfrak{n}'},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{r}'',\ \mathfrak{n}'}(y))$

关键事实：The $\mathfrak{w}$-side

- $j_{w,\ \alpha,\ k}(x)=\pi_{\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'},\ \infty}(z)$
- 由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w}',\ \mathfrak{w}''}$ 高于 $\kappa_{\mathfrak{w}'}$：
  $j_{w,\ \alpha,\ k}(x)=\pi_{\mathfrak{w}''|\nu_{\mathfrak{w}''},\ \infty}(z)$
- $\pi_{\mathfrak{w}''|\nu_{\mathfrak{w}''},\ \infty}(z)=\pi_{\mathfrak{n}'|\nu_{\mathfrak{n}'},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{w}'',\ \mathfrak{n}'}(z))$
- 因此，
  $j_{w,\ \alpha,\ k}(x)=\pi_{\mathfrak{n}'|\nu_{\mathfrak{n}'},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{w}'',\ \mathfrak{n}'}(z))$

结论：$j_{r,\ \zeta,\ i}(x)=j_{w,\ \alpha,\ k}(x)$

$$
\begin{aligned}
j_{\mathfrak{r},\ \zeta,\ i}(x) &= \pi_{\mathfrak{n}'|\nu_{\mathfrak{n}'},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{r}'',\ \mathfrak{n}'}(y)) \\
&= \pi_{\mathfrak{n}|\nu_{\mathfrak{n}},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{r}'',\ \mathfrak{n}}(y)) \text{（因为 } \mathcal{T}_{\mathfrak{n}',\ \mathfrak{n}} \text{ 高于 } \kappa_{\mathfrak{n}'}\text{）} \\
&= \pi_{\mathfrak{n}|\nu_{\mathfrak{n}},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{w}'',\ \mathfrak{n}}(z)) \text{（因为 } \pi_{\mathfrak{r}'',\ \mathfrak{n}}(y)=\pi_{\mathfrak{w}'',\ \mathfrak{n}}(z)\text{）} \\
&= \pi_{\mathfrak{n}'|\nu_{\mathfrak{n}'},\ \infty}(\pi_{\mathfrak{w}'',\ \mathfrak{n}'}(z)) \text{（因为 } \mathcal{T}_{\mathfrak{n}',\ \mathfrak{n}} \text{ 高于 } \kappa_{\mathfrak{n}'}\text{）} \\
&= j_{w,\alpha,k}(x)
\end{aligned}
$$

图 11.6。图表展示了等式 $j_{\mathfrak{r},\zeta,i}(x)=j_{\mathfrak{w},\alpha,k}(x)$ 背后的原因

(6.5) 令 $\mathfrak{n}'=(\pi^{+}_{m,\ \tau})^{-1}(\mathfrak{n})$，$\mathfrak{n}'$ 是 $\mathfrak{r}''$ 和 $\mathfrak{w}''$的公共迭代，(6.6) $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}'',\ \mathfrak{n}'}$ 基于 $\mathfrak{r}''|\beta$，而$\mathcal{T}_{\mathfrak{w}'',\ \mathfrak{n}'}$ 基于 $\mathfrak{w}''|\beta$,

(6.7) $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{n}'$的完全迭代，并且

(6.8) $\mathcal{T}_{\mathfrak{n}',\ \mathfrak{n}}$ 位于$\kappa_{\mathfrak{n}'}$之上。

由 (5) 和 (6.1)-(6.8)（尤其是 (6.8)）可得

$$\pi_{\mathfrak{r}'',\mathfrak{n}'}(y) = \pi_{\mathfrak{w}'',\mathfrak{n}'}(z).$$

进而由 (4.3) 和 (4.6) 可得

$$\pi_{\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'},\infty}(y) = \pi_{\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'},\infty}(z).$$

□

给定$x \in \mathcal{M}_\tau|\pi_{\mathfrak{q}_\tau,\ \mathfrak{m}_\tau}(\lambda)$，现在令 $j(x) = j_{\mathfrak{r},\ \zeta,\ i}(x)$ 其中（$\mathfrak{r}$，ζ，i）对 x是良好的。下一个引理完成了定理11.3中条款 2 的证明。

引理 11.8. j 是满射。

证明。假设

$$y \in \mathcal{M}_\infty(\mathfrak{q}|\nu)|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda).$$

我们要证明存在 $x \in \mathcal{M}_\tau$，使得 $j(x) = y$。固定 $\mathfrak{q}$ 的一个完全迭代 $\mathfrak{r}$，使得 $y \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\infty}), \mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$，且 $\mathrm{lh}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}) < \tau(= \omega_1^M)$。因为 λ 很小，不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}) \subseteq \lambda_\mathfrak{r}$（见引理 9.14] 的 [3, ）。令

$$\gamma = \sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_\mathfrak{r},\infty}[\kappa_\mathfrak{r}]).$$

It 由我们的构造可知[32] 存在某个后继 $i < \tau$ 和某个 $\zeta < \kappa_i$ 使得 t

(7.1) ζ 是 $\mathfrak{q}_i$ 的真切点（见术语9.3），

(7.2) ζ 是 $\mathcal{Q}_i$的不可达基数，并且

(7.3) $\pi_{\mathfrak{q}_i|\zeta,\ \infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{q}_i|\kappa_i)) > \gamma$ (参见记号 9.2，请回想 $\mathtt{slw}(W)$ 是W的最小 slw 基数。

由推论 10.1 可知[33]

(8.1) $\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\infty}[\kappa_\mathfrak{r}]) < \pi_{\mathfrak{q}_i|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{q}_i|\kappa_i))$.

此外，如果 $\mathfrak{w}'$ 是通过最小扩张子分歧共同迭代得到的 $\mathfrak{q}_i$ 和 $\mathfrak{r}$ 的公共迭代，那么存在 $\mathfrak{w}$ 使得 [34]

(9.1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{w}'}$ 基于 $\mathfrak{q}_i|\nu_{\mathfrak{q}_i}$ 和$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}'}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r}$；(9.2) $\mathfrak{w}$是 $\mathfrak{q}_i$ 的一个迭代；(9.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{q}_i|\zeta$；(9.4) $\mathfrak{w}|\zeta_\mathfrak{w} = \mathfrak{w}'|\zeta_{\mathfrak{w}'}$；(9.5) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{w}} \trianglelefteq \mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{w}'}$,

[32]参见记号 9.2中的条款 6g。[33]令 10.1 中的推论取值为 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0$，$\mathfrak{s} = \mathfrak{q}_i$，$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$，$\zeta = \zeta$ 和 $\kappa = \kappa_{\mathfrak{q}_0} = \kappa_0$。推论 10.1中的条款 6 和 7 是关键。[34]再次，通过应用推论10.1，我们得到 (9.1)–(9.7)。

(9.6) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{w}}$ 严格高于 $\zeta_{\mathfrak{w}}$，并且

(9.7) $\sup(\pi_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}'}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) \leq \zeta_{\mathfrak{w}}$.

L且 $z = (\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty})^{-1}(y)$。由 (9.7) 可得 $\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}(z) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{w}}|\zeta_{\mathfrak{w}}$，并由 (9.4)、(9.5)、and (9.6) 可得

$$\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}(z) = \pi_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}},\infty}(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}(z)).$$

设 $u = \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}'}(z)$。因此我们有 $\pi_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}},\infty}(u) = y$。

回忆一下，$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{q}_i|\zeta$ （见 (9.3)）。于是设 $\mathcal{U} = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{w}}, \mathfrak{q}_i|\zeta)$。那么我们可以找到某个 $k \in C$，使得 $\mathcal{U} \in \mathcal{Q}_k[g_k]$。再设 $\mathcal{X}$ 为 $(\mathcal{T}_{i,k})^\frown(\uparrow(\mathcal{U}, \mathfrak{q}_k))$ 的满正规化。与引理 11.5 的证明相同，若 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathcal{X}$的最后模型，则 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{w}$ 的完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\mathfrak{s}}$ 高于 $\kappa_{\mathfrak{w}}$。此外，$\mathfrak{s} \in \mathcal{F}_k$。因此 $\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\infty}(u) = y$。现在，令 $x = \pi_{\mathfrak{s},\mathfrak{m}_\tau}(u)$，我们有 $j(x) = y$。□

这就完成了定理 11.3第 1 和第 2 条的证明。注意，对引理 11.8 稍作修改还可得到 j 是初等的[35]。因此，我们得到 $j = id$。

条款 4 可由以下事实推出：若 $\alpha < \kappa_\tau$，则

$$(\alpha^\omega)^{M[G]} = (\alpha^\omega)^M = (\alpha^\omega)^{\mathcal{Q}_\tau[g]}.$$

事实上，若 $X \in (\alpha^\omega)^M$，那么利用引理 11.8 的证明，我们可以找到某个 $i < \tau$ 以及某个 $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}_i$，使得 $X \subseteq \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty})$。现在令 $z : \omega \to \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\gamma$ 为一个满射，其中 $\gamma < \kappa_{\mathfrak{r}}$ 满足

$$X \subseteq \pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}[\gamma],$$

并令 $w \subseteq \omega$ 满足

$$X = \{\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}(z(m)) : m \in w\}.$$

最后，令 $\mathfrak{w} = \pi^+_{i\ \tau,}(\mathfrak{r})$。于是我们有

$$X = \{\pi_{\mathfrak{w}|\tau,\mathfrak{m}_\tau}(z(m)) : m \in w\}$$

且 $(z, w) \in \mathcal{Q}_\tau[g]$。因此，$X \in \mathcal{Q}_\tau[g]$。 □

以下是证明引理 11.8 时用到的一个有用事实。

引理 11.9. </style}假设 $(\mathcal{Q}, \Lambda)$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个完全迭代，且 $\kappa \in \mathrm{SLW}(\mathcal{Q}|\mathfrak{d})$ 相对于 $\mathfrak{d}$ 是小的。假设 $\nu \in (\kappa, \mathfrak{d})$ 是 $\mathcal{Q}$ 和 $\alpha < \pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\kappa)$ 的一个真重叠基数。进一步假设 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的两个迭代，满足

(1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 都基于 $\mathfrak{q}|\nu$，*(2)* $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 高于 κ （但不一定严格高于），*(3)* $\alpha_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}}$ 有定义，且 *(4)* 存在 $\zeta < \lambda_{\mathfrak{s}}$，使得 ζ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$ 和 $\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta))$ 的一个真重叠不可达基数。

于是存在 $\mathfrak{s}$ 的一个完全迭代 $\mathfrak{w}$，使得 *(5)* $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\ \mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\zeta$；*(6)* $\alpha_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}$ 被定义；*(7)* $\pi_{\mathfrak{w},\ \infty}(\alpha_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}) = \pi_{\mathfrak{r},\ \infty}(\alpha_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}})$。

[35]这由（9.6）得出。由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\mathfrak{w}'} = (\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{w}'})_{\geq\mathfrak{w}}$ 严格高于 $\zeta_{\mathfrak{w}}$，因此 u 满足 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}}$ 和 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}'}$中的相同公式。

证明。 设 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{w}'$ 如引理 11.8 的证明中所述（它们是利用推论 10.1 得到的）。与该证明一样，我们得到 $\alpha_{\mathfrak{w}'}$[36] 等于 $\alpha_{\mathfrak{w}}$。当前引理提供的额外信息是 $\pi_{\mathfrak{w},\infty}(\alpha_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}) = \pi_{\mathfrak{r},\infty}(\alpha_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}})$。这是因为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\mathfrak{w}'}$ 位于 $\zeta_{\mathfrak{w}}$之上，而 $\alpha_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}} < \zeta_{\mathfrak{w}}$。于是我们有 $\pi_{\mathfrak{w},\infty}(\alpha_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}) = \pi_{\mathfrak{w}',\infty}(\alpha_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}) = \pi_{\mathfrak{r},\infty}(\alpha_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}})$。□

12. 迭代集与实现的唯一性

在本节中，我们定义两个重要的集合，它们将在后续计算中发挥作用。首先，我们单独介绍迭代集这一概念。读者在阅读下面的定义之前，或许可以参阅术语9.3。

定义 12.1。设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 的 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，并且是 $\mathcal{H}$ 的一个不可达基数。若集合 $Z \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\mathcal{H}|\nu)$ 是一个**位于 ν 处的迭代集**，则存在一个 hod 对 $\mathfrak{q}$，使得 (1) $\mathcal{H} = \mathcal{M}_\infty(\mathfrak{q})$，(2) $\nu_{\mathfrak{q}}$ 有定义，以及 (3) $Z(\mathfrak{q}, \nu) = \pi_{\mathfrak{q},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu_{\mathfrak{q}}]$。

令 its(ν) 表示位于 ν 处的迭代集的集合。若 $\mathfrak{q}$ 见证了 $Z \in$its(ν)，则称 $\mathfrak{q}$ 是 Z 的一个 its(ν)-证书。我们还将 $Z \in$its(ν) 记作由 $\mathfrak{q}$ 认证。

以下是一个直接推论： N 在序数可定义性下闭（即，如果 X，$Y \in N$ 且 $Z \subseteq Y$ 是 M中的 OD_X，那么 $Y \in N$）。

命题 12.2. 假设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言的 $\mathcal{H}$ 中的真切点，并且是 $\mathcal{H}$的不可达基数。那么 its（ν） $\in N$。

记号 12.3. 假设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言的 $\mathcal{H}$ 中的真切点，并且是 $\mathcal{H}$的不可达基数。假设 $Z \in$ its(ν)。令 $\kappa = \sup(\mathrm{SLW}(\mathcal{H}|\nu))$。再令 $\mathcal{Q}_Z$ 为 Z[37] 的传递塌缩， $\mathcal{Q}^Z$ 为 $\mathrm{Hull}^{\mathcal{H}|\nu}(Z \cup \kappa)$ 的传递塌缩。令 $\tau_Z : \mathcal{Q}_Z \to \mathcal{H}|\nu$ 和$\tau^Z : \mathcal{Q}^Z \to \mathcal{H}|\nu$ 为这些传递塌缩的逆映射，并令 Λ_Z 和 Λ^Z 分别为 $\mathcal{H}|\nu$的 τ_Z-拉回和 τ^Z-拉回。设 $\mathfrak{q}_Z = (\mathcal{Q}_Z, \Sigma_Z)$ 和 $\mathfrak{q}^Z = (\mathcal{Q}^Z, \Sigma^Z)$。

下面是一个由 [3, 第 9 节1]的结果直接推出的简单引理。读者可以参阅 [3, 记号 93]中对记号的定义， $\mathfrak{q}^\kappa$ 以及 [3, 定理 1013]证明中的第 (3) 点。

引理 12.4。 设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言位于 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，并且是 $\mathcal{H}$的一个不可达基数。设 $Z \in$ 其(ν)以及 $\kappa = \sup(\mathtt{SLW}(\mathcal{H}|\nu))$。那么，令 $\mathfrak{q}$ 为见证 $Z \in$其(ν)的任意 *hod* 对，

(1) $\mathfrak{q}^Z = \mathfrak{q}^\kappa|\pi^\kappa_{\mathfrak{q},\infty}(\nu_{\mathfrak{q}})$，*(2)* $\mathfrak{h}|\nu$ 是 $\mathfrak{q}^Z$的一个完全迭代，并且 *(3)* $\tau_Z = \pi_{\mathfrak{q}^Z,\mathfrak{h}|\nu}$。

定义 12.5。 设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言位于 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，并且是 $\mathcal{H}$的一个不可达基数。设 $Z \in$ 其(ν) 以及 $\kappa = \sup(\mathrm{SLW}(\mathcal{H}|\nu))$。集合 $Y \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\mathcal{H}|\kappa)$称为一个 Z-**迭代集**，如果 $Z[Y] \in$ 其(ν)，其中

$$Z[Y] = \{f(a) : a \in Y \wedge f \in Z\}.$$

令 its(Z) 表示由 Z-迭代集组成的集合。

[36]记作 u在引理11.8的证明中。[37]注意，$Z \prec \mathcal{H}|\nu$。

以下引理表明，可实现映射是唯一的。读者可能会受益于回顾 [3, 第 9 节。1]特别地，请回忆，对于 $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}$ 的完全迭代， $\mathfrak{q}^\nu$ 是 $\mathcal{T}_\mathfrak{q}$ 的最小节点 $\mathfrak{m}$ ， $\mathfrak{h}$ （这仅仅意味着具有最小指标的节点），使得 $\mathfrak{m}|\nu = \mathfrak{h}|\nu$。于是我们有

$$\pi^\nu_{\mathfrak{q},\infty} = \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{q}^\nu}$$

and

$$\mathcal{T}^\nu_{\mathfrak{q},\infty} = (\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{h}})_{\leq \mathfrak{q}^\nu}.$$

定理 *12.6*。设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言的 $\mathcal{H}$ 的真切点，并且是 $\mathcal{H}$ 的不可达基数。设 $Z \in$ 是 *its(ν)*，且 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{r}$ 是 Z 的两个 *its(ν)*-证书。令 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{q}_Z$ 的一个完全迭代，并令 $\mathfrak{x}$ 为 $\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{s}}, \mathfrak{q})$ 的最后一对， $\mathfrak{y}$ 为 $\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{s}}, \mathfrak{r})$ 的最后一对。那么（见图 *12.1*）

$$\pi_{\mathfrak{x},\infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{s} = \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{s}.$$

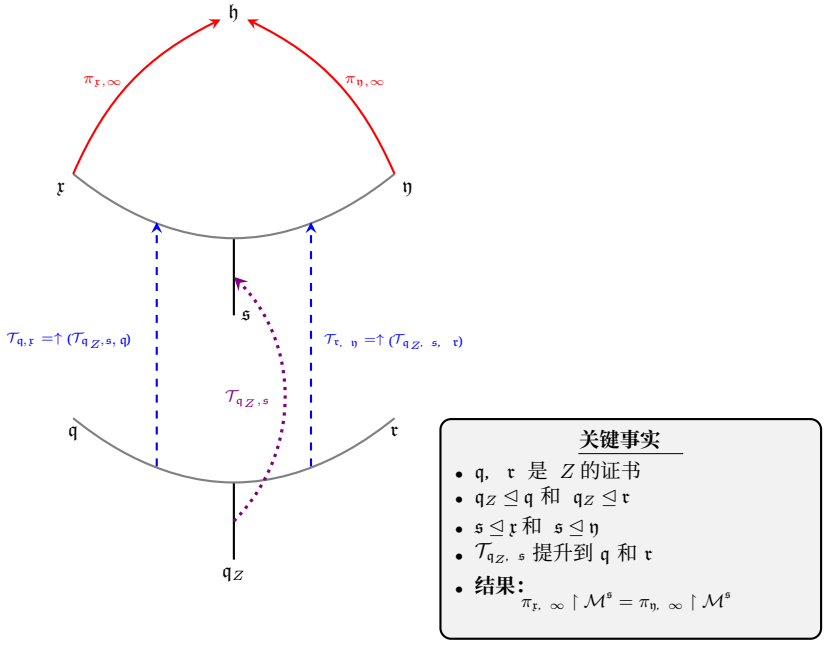


图 12.1. 定理 12.6 的示意图。基树 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{s}}$ 提升到两个证书。

证明。 该证明是对以下文献中论证的一种变体： [3]。我们有

$$\pi_{\mathfrak{q}|\nu_\mathfrak{q},\mathfrak{s}} = \pi_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{s}} = \pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\mathfrak{s}}$$

and

$$\pi_{\mathfrak{q},\infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{q}|\nu_\mathfrak{q} = \pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r}.$$

接着令

$$p = \pi_{\mathfrak{q}|\nu_\mathfrak{q},\mathfrak{s}} = \pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\mathfrak{s}}$$

and

$$q = \pi_{\mathfrak{q},\infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{q}|\nu_\mathfrak{q} = \pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r}.$$

令 $(\zeta_\alpha : \alpha \leq \iota)$ 为 SLW($\mathcal{S}$) 的枚举，其中 $\mathfrak{s} = (\mathcal{S}, \Psi)$。令 λ_α 为 ζ_α 的 $\mathcal{S}$-后继。通过对 $\alpha \leq \iota$ 作归纳法，我们验证

(IH^0_α) $\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{S}|\zeta_\alpha = \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{S}|\zeta_\alpha$，并且

(IH^1_α) $\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{S}|\lambda_\alpha = \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{S}|\lambda_\alpha$。

我们有

(1) 对每个 $\phi \in \text{SLW}(\mathcal{H}, \leq \kappa)$，令 ψ 为 $\mathcal{H}$ 中 ϕ 的后继，$\mathcal{M}^{\mathfrak{r}^\phi}|\psi = \mathcal{H}|\psi = \mathcal{M}^{\mathfrak{y}^\phi}|\psi$.

(1) 可由 [3, 引理 9.4], 推出，并且是以下事实的推论：若 ϕ 是 $\mathcal{H}|\mathfrak{d}_\infty$ 的小强基数，则 $\mathfrak{r}^\phi$ 位于 $\mathcal{T}_\mathfrak{r}$ 的主分支上，$\infty = \mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{h}}$，且 $\mathfrak{y}^\phi$ 位于$\mathcal{T}_\mathfrak{y}$ 的主分支上，$\infty = \mathcal{T}_{\mathfrak{y},\mathfrak{h}}$。

对于每个 $\alpha \leq \iota$ 与 $A \in \mathscr{P}(\zeta_\alpha) \cap S$，我们有（例如参见 [3, 推论9.10]）

- $f_\alpha \in \mathcal{Q}_Z$,
- $f_A \in \mathcal{Q}_Z$,
- $s_\alpha \in [\zeta_\alpha]^{<\omega}$，以及
- $s_A \in [\zeta_\alpha]^{<\omega}$

使得

$$\zeta_\alpha = p(f_\alpha)(s_\alpha) \text{ and } A = p(f_A)(s_A).$$

由此可得

(2.1) 对每个 $\alpha \leq \iota$ 和 $A \in \mathscr{P}(\zeta_\alpha) \cap S$，$\pi_{\mathfrak{r},\infty}(\zeta_\alpha)$与$\pi_{\mathfrak{r},\infty}(A)$由 $(f_\alpha, s_\alpha, \pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \zeta_\alpha)$与$(f_A, s_A, \pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \zeta_\alpha)$如下

$$\pi_{\mathfrak{r},\infty}(\zeta_\alpha) = q(f_\alpha)(\pi_{\mathfrak{r},\infty}(s_\alpha)) \text{ and } \pi_{\mathfrak{r},\infty}(A) = q(f_A)(\pi_{\mathfrak{r},\infty}(s_A)),$$

(2.2) 并且对每个 $\alpha \leq \iota$ 和 $A \in \mathscr{P}(\zeta_\alpha) \cap S$，$\pi_{\mathfrak{y},\infty}(\zeta_\alpha)$与$\pi_{\mathfrak{y},\infty}(A)$由$(f_\alpha, s_\alpha, \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \zeta_\alpha)$与$(f_A, s_A, \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \zeta_\alpha)$如下唯一确定

$$\pi_{\mathfrak{y},\infty}(\zeta_\alpha) = q(f_\alpha)(\pi_{\mathfrak{y},\infty}(s_\alpha)) \text{ and } \pi_{\mathfrak{y},\infty}(A) = q(f_A)(\pi_{\mathfrak{y},\infty}(s_A)).$$

由此可得(IH^0_α) 蕴含(IH^1_α)。我们现在用归纳法证明(IH^0_α)成立。读者可能会发现图12.2有用。

我们有 (IH^0_0) 成立，因为

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction (\mathcal{S}|\zeta_0) &= \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction (\mathcal{S}|\zeta_0) \\ &= \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction (\mathcal{S}|\zeta_0)\end{aligned}$$

显然，对于 α 极限序数，(IH^0_α) 可由 $\forall \gamma < \alpha (IH^0_\gamma)$ 推出。剩下要证明的是，在 (IH^1_α) 成立的前提下，$(IH^0_{\alpha+1})$ 也成立。这与 $\alpha = 0$ 情形类似。事实上，设

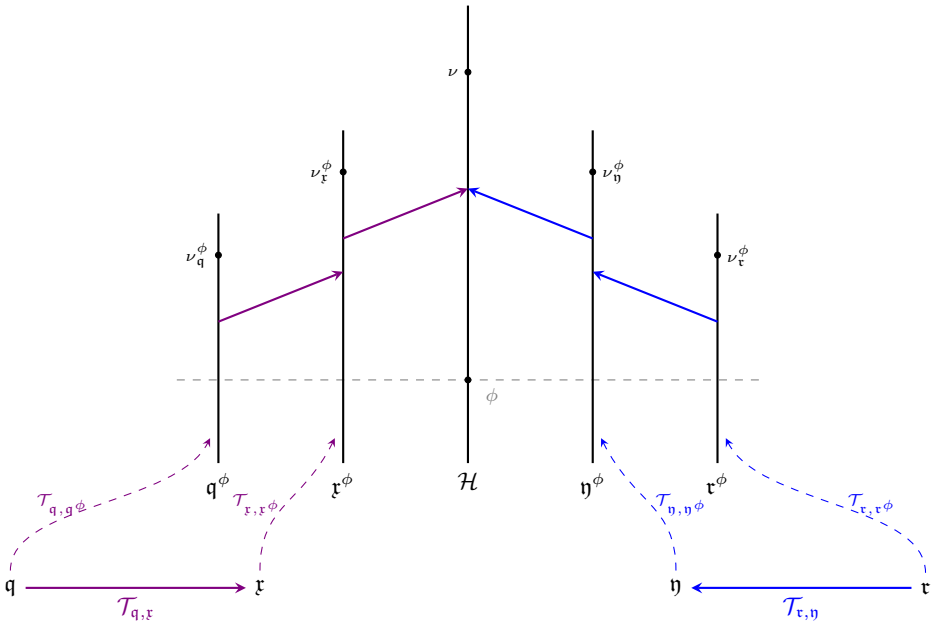
$$\phi = \pi_{\mathfrak{r},\infty}(\zeta_\alpha) = \pi_{\mathfrak{y},\infty}(\zeta_\alpha).$$

现在我们有

(3) $\mathcal{M}^{\mathfrak{r}^\phi}|\pi^\phi_{\mathfrak{r},\infty}(\nu_\mathfrak{r}) = \mathcal{M}^{\mathfrak{y}^\phi}|\pi^\phi_{\mathfrak{y},\infty}(\nu_\mathfrak{y})$ (this follows from (IH^1_α).

要看出（3），请注意

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{r}^\phi}|\pi^\phi_{\mathfrak{r},\infty}(\nu_\mathfrak{r}) = Ult(\mathcal{S}, F_\mathfrak{r})$$



关键事实

- $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ 是 Z的证书
- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{x}} = \uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}Z}{}^{\frown}\mathfrak{s}, \mathfrak{q})$和$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}} = \uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}Z}{}^{\frown}\mathfrak{s}, \mathfrak{r})$,
- $\mathfrak{q}^\phi|\nu_{\mathfrak{q}_\phi} = \mathfrak{r}^\phi|\nu_{\mathfrak{r}_\phi}$ 以及 $\mathfrak{x}^\phi|\nu_{\mathfrak{x}_\phi} = \mathfrak{y}^\phi|\nu_{\mathfrak{y}_\phi}$,
- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}^\phi,\mathfrak{x}^\phi}$ 是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}^\phi,\mathfrak{r}^\phi}$ 位于.....之上 ϕ 且基于 $\mathfrak{q}^\phi|\nu_{\mathfrak{q}_\phi} = \mathfrak{r}^\phi|\nu_{\mathfrak{r}_\phi}$,
- $\downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}^\phi,\mathfrak{x}^\phi}, \mathfrak{q}^\phi|\nu_{\mathfrak{q}^\phi}) = \downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{r}^\phi,\mathfrak{y}^\phi}, \mathfrak{r}^\phi|\nu_{\mathfrak{r}^\phi})$,
- $\pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{q}^\phi} \restriction \mathcal{Q}_Z = \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{r}^\phi} \restriction \mathcal{Q}_Z =_{def} m$,
- 如果 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{T}$的最小节点 $\mathfrak{q},\mathfrak{x}$ 使得
$$\mathfrak{m}|\zeta_\alpha = \mathfrak{x}|\zeta_\alpha$$
则$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}^\phi,\mathfrak{x}^\phi}$ 是$\mathcal{T}_{\mathfrak{m}|\nu_\mathfrak{m},\mathfrak{s}}$的极小$\pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}^\phi}$-拷贝,
- 如果 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathcal{T}$的最小节点 $\mathfrak{r},\mathfrak{y}$ 使得
$$\mathfrak{n}|\zeta_\alpha = \mathfrak{y}|\zeta_\alpha$$
则$\mathcal{T}_{\mathfrak{r}^\phi,\mathfrak{y}^\phi}$ 是$\mathcal{T}_{\mathfrak{n}|\nu_\mathfrak{n},\mathfrak{s}}$的极小$\pi_{\mathfrak{n},\mathfrak{n}^\phi}$-拷贝。

图 12.2. 对称提升结构。树$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{q}^\phi}$ 和$\mathcal{T}_{\mathfrak{x},\mathfrak{x}^\phi}$ 将证书提升到垂直模型中，在那里它们与 $\mathcal{H}$ 一致，直到 ϕ。

其中， $F_{\mathfrak{x}}$ 是从 $\pi_{\mathfrak{x},\infty} \restriction (\mathcal{S}|\lambda_\alpha)$ 导出的长扩张子，其空间为 ϕ，类似地，

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{y}^\phi}|\pi^\phi_{\mathfrak{y},\infty}(\nu_\mathfrak{y}) = Ult(\mathcal{S}, F_\mathfrak{y})$$

其中 $F_{\mathfrak{y}}$ 是由 $\pi_{\mathfrak{y}\text{导出的长扩张子},\infty} \restriction (\mathcal{S}|\lambda_\alpha)$ 的空间为 ϕ (参见术语 9.7)。但是 (IH^1_α) 意味着 $F_{\mathfrak{x}} = F_{\mathfrak{y}}$。

接下来我们有

(4) $\pi^\phi_{\mathfrak{x},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}} = \pi^\phi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$.

要看出 (4)，注意如果 $F = F_{\mathfrak{x}} = F_{\mathfrak{y}}$ ，那么

$$\pi^{\phi}_{\mathfrak{x},\infty} = \pi^{\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}}_{F} \text{ and } \pi^{\phi}_{\mathfrak{y},\infty} = \pi^{\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}}_{F}$$

and

$$\pi^{\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}}_{F} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}} = \pi^{\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}}_{F} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}.$$

最后，我们得到以下断言。

命题 12.7。 $\mathfrak{q}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{q},\ \infty}(\nu) = \mathfrak{r}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{r},\ \infty}(\nu)$ 、以及 $\mathfrak{x}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{x},\ \infty}(\nu_{\mathfrak{x}})$ 和 $\mathfrak{y}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{y},\ \infty}(\nu_{\mathfrak{y}})$ 都是$\mathfrak{q}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{q},\ \infty}(\nu) = \mathfrak{r}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{r},\ \infty}(\nu)$ 的完全迭代。

证明。 首先注意到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mathfrak{q}^{\phi}}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{q},\infty}(\nu) &= \mathsf{cHull}^{\mathcal{H}|\nu}(\phi \cup Z)\\ &= \mathcal{M}^{\mathfrak{r}^{\phi}}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{r},\infty}(\nu)\end{aligned}$$

并且如果

$$\sigma : \mathcal{M}^{\mathfrak{q}^{\phi}}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{q},\infty}(\nu) \to \mathcal{H}|\nu$$

是传递塌缩的逆映射，那么

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{q}^{\phi},\mathfrak{h}} \restriction (\mathcal{M}^{\mathfrak{q}^{\phi}}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{q},\infty}(\nu)) &= \sigma\\ &= \pi_{\mathfrak{r}^{\phi},\mathfrak{h}} \restriction (\mathcal{M}^{\mathfrak{r}^{\phi}}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{r},\infty}(\nu))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{q},\infty}(\nu) &= \sigma\text{-pullback of } \mathfrak{h}|\nu\\ &= \mathfrak{r}^{\phi}|\pi^{\phi}_{\mathfrak{r},\infty}(\nu)\end{aligned}$$

接下来，为了完成断言的证明，我们需要论证

(a) $\mathfrak{x}^{\phi}|\nu_{\mathfrak{x}^{\phi}}$ 是 $\mathfrak{q}^{\phi}|\nu_{\mathfrak{q}^{\phi}}$的一个完全迭代，而(b) $\mathfrak{y}^{\phi}|\nu_{\mathfrak{y}^{\phi}}$ 是 $\mathfrak{r}^{\phi}|\nu_{\mathfrak{r}^{\phi}}$的一个完全迭代。

由于(a)的论证与(b)的论证相同，我们给出(a)的论证。令 $\mathfrak{m}$为$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{x}}$ 的最小节点，使得

$$\mathfrak{m}|\zeta_{\alpha} = \mathfrak{x}|\zeta_{\alpha} = \mathfrak{s}|\zeta_{\alpha}.$$

注意， $\mathfrak{m}|\nu_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathfrak{m}'$ 中$\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{s}}$ 的最小节点，使得

$$\mathfrak{m}'|\zeta_{\alpha} = \mathfrak{s}|\zeta_{\alpha}.$$

此外，

(5.1) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{s}})^{\geq \mathfrak{m}|\zeta_{\alpha}}$ 是一个以 $\mathfrak{m}|\nu_{\mathfrak{m}}$ 为基础且严格高于 ζ_{α}的迭代树 ，

(5.2) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}})^{\geq \mathfrak{m}}$ 是基于 $\mathfrak{m}|\nu_{\mathfrak{m}}$ 的迭代树，且严格高于 ζ_{α}；(5.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{m},\ \mathfrak{x}} = \uparrow (\mathcal{T}_{\mathfrak{m}|\nu_{\mathfrak{m}},\ \mathfrak{s}},\ \mathfrak{m})$ (5.4) $\mathfrak{m}^{\phi} = \mathfrak{q}^{\phi}$ 以及 $\pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{q}^{\phi}} = \pi_{\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}^{\phi}} \circ \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{m}}$。

对 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{m},\ \mathfrak{x}})^{\frown}\mathcal{T}_{\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}^{\phi}}$ 应用完全正规化，意味着

(6.1) $\mathfrak{x}^{\phi}$ 是 $\mathfrak{q}^{\phi}$ 的完全迭代，

(6.2) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}^{\phi},\ \mathfrak{x}^{\phi}}$ 高于 ϕ，

(6.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}^\phi,\ \mathfrak{x}^\phi}$ 是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{m},\ \mathfrak{x}}$ 的最小 $\pi_{\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}^\phi}$-复制。

这就完成了断言的证明12.7。 □

最后，应用 (3)、(4) 和断言12.7 可得

(7) $\mathfrak{x}^\phi|\pi^\phi_{\mathfrak{x},\infty}(\nu_{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{y}^\phi|\pi^\phi_{\mathfrak{y},\infty}(\nu_{\mathfrak{y}}) =_{def} \mathfrak{w}$.

Set

$$k = \pi^\phi_{\mathfrak{x},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}} = \pi^\phi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}.$$

由此可知，若 $\gamma = k(\zeta_{\alpha+1})$ 且 β 满足 $\mathfrak{h}|\beta$ 是 $\mathfrak{w}|\gamma$ 的一个完全迭代，则

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{x},\infty} \restriction \mathcal{S}|\zeta_{\alpha+1} &= \pi_{\mathfrak{w}|\gamma,\mathfrak{h}|\beta} \circ k \restriction \mathcal{S}|\zeta_{\alpha+1}\\ &= \pi_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{S}|\zeta_{\alpha+1}.\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明12.6。 □

受定理12.6启发，我们给出如下定义。

定义 12.8. 假设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，并且是 $\mathcal{H}$的一个不可达基数。进一步假设 $Z \in \mathrm{its}(\nu)$。令 $\mathrm{rel}(Z)$ 为由满足以下条件的有序对 $(\mathfrak{r}, \tau_{\mathfrak{r}})$ 构成的集合： $\mathfrak{r}$是 $\mathfrak{q}_Z$ 的一个完全迭代，并且每当 $\mathfrak{q}$ 是 Z的一个 $\mathrm{its}(\nu)$-证书时，令 $\mathfrak{s}$ 为 $\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{r}}, \mathfrak{q})$ 的最后一对，

$$\tau_{\mathfrak{r}} = \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}.$$

为强调对 Z 的依赖，我们将写作 $\tau^Z_{\mathfrak{r}}$。

推论 12.9. 假设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，并且是 $\mathcal{H}$的一个不可达基数。进一步假设 $Z \in \mathrm{its}(\nu)$。那么 $\mathrm{rel}(Z) \in N$。

现在我们讨论 $\mathrm{its}(\nu)$、$\mathrm{its}(Z)$ 和 $\mathrm{rel}(Z)$ 在 N 中的可定义性。首先回顾 ∞-Borel 的定义。

定义 12.10. 假设 α 是一个序数且 $A \subseteq \alpha^\omega$。那么，对于某个公式$\phi$ 和某个序数集 S，若对所有 $X \in \alpha^\omega$，则称 A 为 **∞-Borel**，

$$X \in A \leftrightarrow L[S, X] \vDash \phi[X],$$

且 S 是 A的一个 **∞-博雷尔代码** 。

推论 12.12 表明，事实上我们可以在 $\mathrm{its}(\nu)$ 和 $\mathrm{rel}(Z)$ 中定义 N，只需取某个 $A \in \mathscr{P}(\nu) \cap \mathcal{H}$。应用 [3, 定理 10.6], 的证明，可得如下结果（参见推论 12.12之后的证明概要）。

定理 12.11。 假设 $\alpha < \varsigma$ 和 $A \in N \cap \mathscr{P}(\alpha^\omega)$。则

$$N \vDash \text{“}A \text{ is } \infty\text{-Borel”}.$$

此外，假设 A 在 M中可由 $X \in \varsigma^\omega$ 序数可定义，并令 γ 为 $\mathcal{H}$ 中大于 $\sup(X)$的最小伍丁基数，则存在 $S \in \mathcal{H}|(\gamma^+)^{\mathcal{H}}$，使得集合 (S, X) 是 A的一个 ∞-博雷尔代码。

由于 $\mathrm{its}(\nu)$ 是序数可定义的，且 $(\mathrm{its}(Z), \mathrm{rel}(Z))$ 可由 Z在 M中序数可定义，因此有如下推论。

推论 12.12。 假设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 的 $\mathcal{H}$ 真切点，且是 $\mathcal{H}$ 的不可达基数。设 γ 是 $\mathcal{H}$ 中大于 ν 的最小伍丁基数。那么存在 S、$T \in \mathcal{H}|(\gamma^+)^{\mathcal{H}}$ 以及公式 ϕ 和 ψ，使得对于每个 X、Y、Z、a、$b \in (\mathcal{H}|\nu)^\omega$，以下结论成立：

(1) $Z \in \mathrm{its}(\nu) \leftrightarrow L[S, Z] \vDash \phi[Z]$ （即 S 是一个关于$\mathrm{its}(\nu)$的 ∞-博雷尔代码）。

(2) $Z \in \mathsf{its}(\nu)$，$Y \in \mathsf{its}(Z)$，$a \in \omega^\omega$ 为 $\mathfrak{q}^{Z[Y]}$ 的完全迭代 $\mathfrak{r}$ 编码，$b \in \omega^\omega$ 编码了一个双射 $f : \omega \to \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}$，并且

$$X = \{\tau_{\mathfrak{r}}^{Z[Y]}(b(i)) : i \in \omega\}$$

当且仅当

$$L[T, X, Y, Z, a, b] \vDash \psi[X, Y, Z, a, b].$$

记号 12.13. 设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathcal{H}$ 而言的 $\mathfrak{d}_\infty$ 真切点，并且是 $\mathcal{H}$的不可达基数。令 γ 为 $\mathcal{H}$ 中大于 ν的最小伍丁基数。我们令 $S_\nu, T_\nu \in \mathcal{H} \cap \mathscr{P}(\gamma)$ 为见证推论 $\mathcal{H}$的 12.12 中最小的集合。

下面的引理将在后文中使用。

引理 12.14. 设 $\nu < \mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathcal{H}$ 而言的真切点，并且是 $\mathfrak{d}_\infty$ 的不可达基数。令 $\mathcal{H}$中大于 γ 的最小伍丁基数为 $\mathcal{H}$ 。设 ν是 $\mathfrak{q}$的一个完全迭代，且 $\mathfrak{p}$有定义。那么

$$(S_\nu, T_\nu) \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{q},\infty}).$$

证明。 注意到 $\gamma_{\mathfrak{q}}$ 也有定义。现在令 (S, T) 为满足推论 $\mathcal{H}$12.12 的最小对。由此可得 12.12。进而，(S, T) 可由 ν定义，因此 $S_{\mathfrak{q}}$ 和 $T_{\mathfrak{q}}$ 均有定义。□

我们简要概述推论 12.12 的证明。 [3, 定理 10.6]的证明利用了以下事实：在 $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}} + V = L(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 下成立 M， V嵌入到 $\mathcal{H}$ 在 Θ处的导出模型中，而且，将该嵌入限制到 $\mathcal{H}$ 后得到的嵌入属于 $\mathcal{H}$。因此，存在一个公式ϕ 使得对于所有 $Z \in (\mathcal{H}|\nu)^\omega$,

$$Z \in \mathsf{its}(\nu) \text{ if and only if } \mathcal{H}[Z] \vDash \phi[Z].$$

令 $j : M \to W$ 为从 M 到 $\mathcal{H}$ 的导出模型的嵌入， ϕ 本质上表达了如下陈述：

$$W \vDash j[Z] \in \mathsf{its}(j(\nu)).$$

证明 [3, 定理 10.6] 所使用的另一个关键事实是，每个这样的 Z 都是通过一个大小为 γ 的偏序集在 $\mathcal{H}$ 上泛型的，其中 γ 是 $\mathcal{H}$ 中高于 ν 的最小伍丁基数（见 [3, 引理 10.4]） 。 S 本身是由 $\mathcal{H}$ 的一个秩初始段的 Skolem 包得到的，而 S 满足：存在一个初等嵌入 $m : S \to \mathcal{H}|\zeta$，其中 ζ 远大于 Θ^M。

13. 反射 I

本节将着手证明定义 6.2 中引入的反射性质在 Nairian 模型中成立。我们先证明它的一个基本形式，然后将其推广为定义 6.2中陈述的版本。首先，我们描述可能的反射点。

定义 13.1. 假设对于某些 $\alpha \leq \beta$, $\sigma' : \mathcal{H}|\alpha \to \mathcal{H}|\beta$是一个函数。那么，如果对于每个 $X \in \mathscr{P}^b_{\omega_1}(\alpha)$， $\sigma : N|\alpha \to N|\beta$由 σ' **生成**,

$$\sigma(X) = \sigma'[X]$$

并且对于每个 $z \in N|\alpha$, $\sigma(z) = w$成立，当且仅当只要 (ϕ, X) 满足以下条件：

- $X \in \mathscr{P}^b_{\omega_1}(\alpha)$,
- ϕ 是一个公式，并且
- z是唯一的 y，使得 $N|\alpha \vDash \phi[y, X]$,

那么 $N|\beta \vDash \phi[w, \sigma(X)]$。

如果 σ' 和 σ 如上所述，则记作 $\sigma = \mathsf{ind}(\sigma')$

注13.2。如果 $\sigma \restriction \mathscr{P}^b_{\omega_1}(\alpha)$ 是初等的（即，对于 $X \in \mathscr{P}^b_{\omega_1}(\alpha)$， $N|\alpha \vDash \phi[X]$ 当且仅当$N|\beta \vDash \phi[\sigma(X)]$），那么 σ 定义良好且是初等的。

定义 13.3。设 $u = (\mathfrak{q},\ \lambda,\ \nu)$ 并且

$$M \vDash \mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu).$$

Let

$$\sigma'_u : \mathcal{H}|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda) \to \mathcal{H}|\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$$

是由 $\sigma'_u(x) = y$ 给出的嵌入，当且仅当每当 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的一个完全迭代，使得

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$，并且
- $x \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\ \infty})$,

$y = \pi_{\mathfrak{r},\ \infty}(x)$。令

$$\sigma_u : N|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda) \to N|\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$$

是由 σ'_u 诱导的嵌入。然后我们令 $\lambda_u = \pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda)$ 与 $\lambda^u = \pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$。

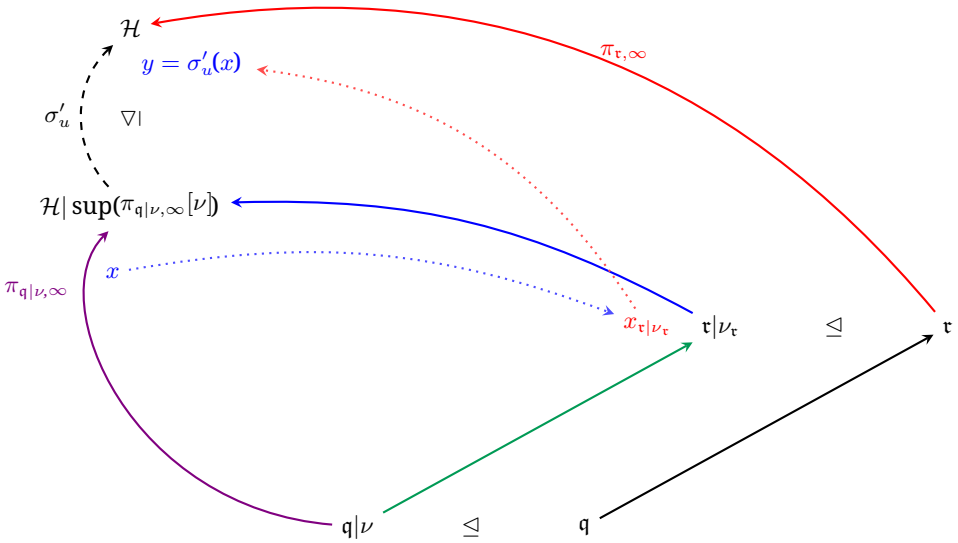


图 13.1。嵌入 σ'_u。元素 x 经由 $\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}$ 被拉回到迭代 $\mathfrak{r}$，然后经由 $\pi_{\mathfrak{r},\infty}$ 向前映射到 its 最终值 y。

注 13.4。注意，由于 λ 很小，我们可以如下定义 σ'_u： $\sigma_u(x) = y$ 当且仅当每当 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代且满足

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$,
- 生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}) \subseteq \lambda_{\mathfrak{q}}$，且
- $x \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\ \infty})$,

$y = \pi_{\mathfrak{r},\infty}(x)$。

接下来我们证明 σ'_u 定义良好。[38]

[38]注意，由定义立即可知13.3，$\sigma'_u(x)$ 独立于 $\mathfrak{r}$。

注记 13.5. 引理 13.6不需要 ν的伍丁性，只需假设ν 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\mathfrak{d}_\infty$的不可达的适当重叠基数。

RefGen 的定义见RefGen，定义 9.4。

引理 13.6。 假设 $u=(\mathfrak{q},\lambda,\nu)$ 以及 $\mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q},\lambda,\kappa,\nu)$ 成立。那么 σ'_u 是良定义的 .

证明。 固定 $x\in\mathcal{H}|\lambda_u$。再固定 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{r}'$，使得 $x_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}}$ 和 $x_{\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'}}$ 有定义，并且 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}$ 以及$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}'}$ 都基于 $\mathfrak{q}|\nu$。我们要证明

$$(a)\qquad \pi_{\mathfrak{r},\infty}(x_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}})=\pi_{\mathfrak{r}',\infty}(x_{\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'}}).$$

利用 [3, 定理 11。1] ，如同我们在定理11.2的证明中所做的那样，我们可以找到 $\mathfrak{s}$和 $\mathfrak{s}'$ 使得

(1.1) $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的一个完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$ 且高于 κ，

(1.2) $\mathfrak{s}'$ 是 $\mathfrak{s}$ 的完全迭代，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}'}$ 基于 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$ 且位于 $\kappa_{\mathfrak{s}}$之上，

(1.3) 对某个 $\zeta<\kappa_{\mathfrak{s}}$ 而言，它是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$的真重叠不可达基数，

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}])<\pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta)),$$

and

(1.4) 对某个 $\zeta'<\kappa_{\mathfrak{s}'}$ 而言，它是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$的真重叠不可达基数，

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}'|\kappa_{\mathfrak{r}'},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}'}])<\pi_{\mathfrak{s}'|\zeta',\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}'|\zeta')).$$

应用引理11.9，我们得到 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{w}'$ 使得

(2.1) $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{s}$的完全迭代，且 $\mathfrak{w}'$ 是 $\mathfrak{s}'$的完全迭代，(2.2) $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\ \mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\zeta$ ，且$\mathcal{T}_{\mathfrak{s}',\ \mathfrak{w}'}$ 基于 $\mathfrak{s}'|\zeta'$，(2.3) $x_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}$ 和$x_{\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'}}$ 有定义，(2.4) $\pi_{\mathfrak{w},\ \infty}(x_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}})=\pi_{\mathfrak{r},\ \infty}(x_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}})$，且(2.5) $\pi_{\mathfrak{w}',\ \infty}(x_{\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'}})=\pi_{\mathfrak{r}',\ \infty}(x_{\mathfrak{r}'|\nu_{\mathfrak{r}'}})$。

由 (2.4) 和 (2.5) 可知，要证明 (a)，只需证明

$$(b)\qquad \pi_{\mathfrak{w},\infty}(x_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}})=\pi_{\mathfrak{w}',\infty}(x_{\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'}}).$$

现在令 $\mathfrak{w}''$为 $\uparrow(\mathcal{U},\mathfrak{s}')$ 的最后模型，其中 $\mathcal{U}=\downarrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}},\mathfrak{s}|\zeta)$。图 13.2 或许对读者有所帮助。

我们有

(3) $\mathfrak{w}''$ 是 $\mathfrak{w}$ 的一个完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\mathfrak{w}''}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{w}}$ 之上，且基于 $\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}$。

(3) 很容易通过分析 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'})^\frown\mathcal{T}_{\mathfrak{s}',\mathfrak{w}''}$ 的完全正规化得出（我们在引理 11.7 的证明中做过这类计算）。由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s}',\mathfrak{w}'}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{s}',\mathfrak{w}''}$ 都基于 $\mathfrak{s}'|\nu_{\mathfrak{s}'}$，我们可以找到 $\mathfrak{w}'''$，使得

(4.1) $\mathfrak{w}'''$ 是 $\mathfrak{w}'$ 和 $\mathfrak{w}''$的一个完全迭代，

(4.2) $\mathcal{T}_{\mathfrak{w}',\mathfrak{w}'''}$ 基于 $\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'}$，并且

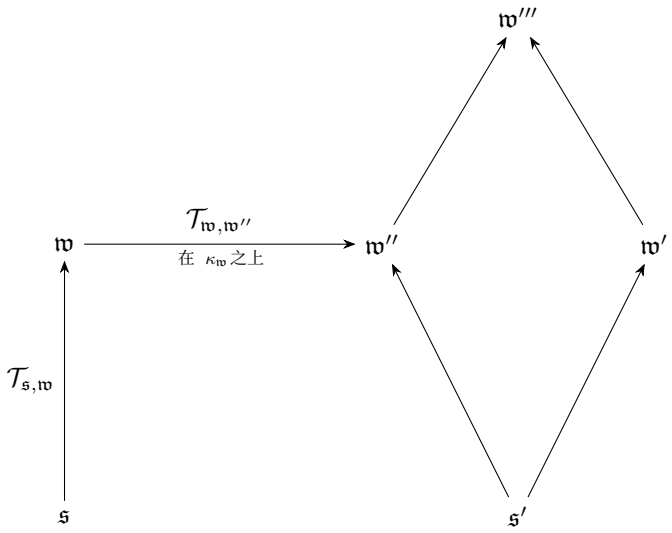


图13.2。 $\mathfrak{s}$、 $\mathfrak{s}'$、 $\mathfrak{w}$、 $\mathfrak{w}'$、 $\mathfrak{w}''$ 与 $\mathfrak{w}'''$ 之间的关系。

(4.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{w}'',\mathfrak{w}'''}$ 基于 $\mathfrak{w}''|\nu_{\mathfrak{w}''}$。

于是我们有

(5.1) $\pi_{\mathfrak{w},\mathfrak{w}'''}(x_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}) = x_{\mathfrak{w}'''|\nu_{\mathfrak{w}'''}}$, and

(5.2) $\pi_{\mathfrak{w}',\mathfrak{w}'''}(x_{\mathfrak{w}'|\nu_{\mathfrak{w}'}}) = x_{\mathfrak{w}'''|\nu_{\mathfrak{w}'''}}$.

现在我们有

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{w},\infty}(x_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}}) &= \pi_{\mathfrak{w}''',\infty}(x_{\mathfrak{w}'''|\nu_{\mathfrak{w}'''}}) \\ &= \pi_{\mathfrak{w}',\infty}(x_{\mathfrak{w}'|\nu'_{\mathfrak{w}}}).\end{aligned}$$

因此，(b) 得证。 □

以下是本节的主要定理。rel 出现在定义 12.8。

定理 13.7。 假设 $u = (\mathfrak{q}, \lambda, \nu)$ 且 $\mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$，并且 $X \in N|\lambda^u$ 可由某个可数的 $Y \subseteq \pi_{\mathfrak{q},\infty}[\lambda]$ 在 $N|\lambda^u$ 上可定义。则

(1) σ_u 是一个初等嵌入，*(2)* σ_u 在 N 上可由 $\mathsf{rel}(\pi_{\mathfrak{q},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu])$ 定义（因而也可由 $\sigma_u \in N$ 定义），*(3)* $X \in \mathrm{rge}(\sigma_u)$。

证明。 设 $Y \subseteq \pi_{\mathfrak{q},\infty}[\lambda]$ 使得 X 可由 Y 在 $N|\lambda^u$ 上定义。则 $Y \in \mathrm{rge}(\sigma_u)$，因为若 $Z = \pi^{-1}_{\mathfrak{q},\infty}[Y]$，则 $\sigma_u(\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}[Z]) = Y$。由此可得 $X \in \mathrm{rge}(\sigma_u)$。这表明条款 (3)。条款 (2) 立即由 σ'_u 的定义得出。下面我们证明条款 (1)。设

- $G \subseteq \mathrm{Coll}(\omega_1, \mathbb{R})$ 是 M-泛型，
- $\vec{B} = (B_i : i < \omega_1^M) \in M[G]$ 是 $\Delta_{\mathfrak{q}}$ 的一个枚举，ν，
- $\vec{a} = (a_i : i < \omega) \in M[G]$ 是 $\mathbb{R}^M$ 的一个枚举，并且

- $(\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{q}'_i,\ \mathcal{T}_i,\ E_i\colon\ i<\omega_1)\in M[G]$是一个 $\Delta_{\mathfrak{q},\,\nu}$-相对于 $(\vec{B},\ \vec{a})$(这由定理 11.2保证存在)。

我们令

- 对于 $i<j\leq\omega_1$、$\pi_{\mathfrak{q}_i,\,\mathfrak{q}_j}=\pi_{i,\,j}$,
- 对于 $i\leq\omega_1$, $\mathfrak{m}_i=\mathfrak{m}(\mathfrak{q}_i,\kappa_{\mathfrak{q}_i})$ (见记号 9.2),
- 对于 $i\leq\omega_1$, $N^l_i=N^l(\mathfrak{q}_i,\kappa_{\mathfrak{q}_i})$(见记号 9.2).

我们沿用定理 11.3的证明，并将使用记号11.4中引入的记号。令 $C\subseteq\tau$ 如定理 11.3的证明中所述。我们将使用以下观察（它可直接由定义 11.1、引理 11.9和引理 13.6推出）。

（观察）假设 $Z\in\mathscr{P}^b_{\omega_1}(\lambda_u)$。那么存在 $i_0\in C$，使得对每个 $i\in[i_0,\omega_1)$，都存在

$$\mathfrak{r}\in\mathcal{F}_i\text{ and }Z'\in\mathscr{P}(\lambda_{\mathfrak{r}})\cap\mathcal{Q}_i[g_i]$$

使得

$$\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}[Z']=Z\text{ and }\sigma_u(Z)=\pi_{\mathfrak{r},\infty}[Z'].$$

事实上，存在 $i_0<\omega_1$、$\mathfrak{r}_0\in\mathcal{F}_{i_0}$ 和 $Z_0\in\mathscr{P}(\lambda_{\mathfrak{r}_0})\cap\mathcal{Q}_{i_0}[g_{i_0}]$，使得对每个 $i\in[i_0,\omega_1)$，令

$$\mathfrak{r}=\pi^+_{i_0,i}(\mathfrak{r}_0)\text{ and }Z'=\pi^+_{i_0,i}[Z_0],$$

$\sigma_u(Z)=\pi_{\mathfrak{r},\,\infty}[Z']$。

断言 13.8。 σ_u 是一个初等嵌入。

证明。 只需证明：若对于某个 $\zeta<\lambda_u$，$Z\in(\mathcal{H}|\zeta)^\omega$，且 $\phi(x)$ 是一个公式，那么

$$N|\lambda_u\vDash\phi[Z]\text{ implies that }N|\lambda^u\vDash\phi[\sigma_u(Z)].$$

于是固定一对 $(Z,\ \phi)$，使得 $N|\lambda_u\vDash\phi[Z]$。应用 (Obs)，我们可以找到一些 $i\in C\text{ and }\mathfrak{r}\in\mathcal{F}_i$，使得对于某个 $Z'\in\mathscr{P}(\lambda_{\mathfrak{r}})\cap\mathcal{Q}_i[g_i]$,

$$Z=\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}[Z']\text{ and }\sigma_u(Z)=\pi_{\mathfrak{r},\infty}[Z'].$$

现在令 $z\colon\ \omega\to\mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}}$ 是一个满射，并令 $w\subseteq\omega$ 满足 $(z,\ w)\in\mathcal{Q}_i[g_i]$ and

$$Z'=\{z(k):k\in w\}.$$

由定理 11.3 可知，若

$$Z''=\{\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}_i}(z(k)):k\in\omega\}=\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{m}_i}[Z']$$

then

$$Z''\in\mathcal{Q}_i[g_i]\cap N^l_i\text{ and }Z=\pi^+_{i,\tau}(Z'').$$

$\pi^+_{i\ ,\ k}$ 出现在引理11.5中。由定理 11.3 还可知，由于

$$\pi^+_{i,\tau}(N^l_i)=N|\pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\infty}(\kappa_{\mathfrak{r}}),$$

令 $\iota=\pi_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{m}_i}(\lambda_{\mathfrak{q}_i})$,

$$N^l_i|\iota\vDash\phi[Z''].$$

在 $M[G]$ 中，我们还可以找到一个 $\Delta_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{d}_{\mathfrak{q}_i}}$-通用性迭代

$$(\mathfrak{s}_m,\mathfrak{s}'_m,\mathcal{U}_m,F_m:m<\tau)$$

使得 $\mathfrak{s}_0=\mathfrak{q}_i$。令 $\mathfrak{s}_\tau$ 为.....的直接极限

$$(\mathfrak{s}_m,\pi_{\mathfrak{s}_m,\mathfrak{s}_k}:m<k<\tau),$$

并令 $h\subseteq \mathrm{Coll}(\omega,<\tau)$ 为 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_\tau}$-泛型，使得

$$g_i\subseteq h \text{ and} \mathbb{R}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_\tau}[h]}=\mathbb{R}^M.$$

于是我们有 $\pi_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{s}_\tau}$ 可以提升到

$$\pi^+_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{s}_\tau}:\mathcal{Q}_i[g_i]\to\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_\tau}[h].$$

由定理 11.3 可知

$$\pi^+_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{s}_\tau}(N^l_i)=N|\pi_{\mathfrak{q}_i,\infty}(\kappa_i),$$

并且由于

$$\pi^+_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{s}_\tau}(\iota)=\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$$

and

$$\pi^+_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{s}_\tau}(Z'')=\sigma_u(Z),$$

我们有

$$N|\lambda^u\vDash\phi[\sigma(Z)].$$

□

□

本节最后给出一个更强的界，来限制 σ'_u 的可定义性（见推论13.11）。在推论13.11中，我们将使用以下记号。

术语 13.9。假设 $\nu<\mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言、在 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，且是 $\mathcal{H}$的不可达基数。假设 $U\in$ 其(ν)，并且 $\lambda\in U$ 是 $\mathcal{H}|\nu$的强基数。于是，我们令 $\mathsf{rel}(U)\restriction\lambda$ 由满足以下条件的有序对 $(\mathfrak{r},\tau_{\mathfrak{r}})$ 组成：[39]

- for some $\tau'_{\mathfrak{r}}$, $(\mathfrak{r},\tau'_{\mathfrak{r}})\in\mathsf{rel}(U)$ and $\tau_{\mathfrak{r}}=\tau'_{\mathfrak{r}}\restriction\mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}}$, and
- $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_U,\mathfrak{r}})\subseteq\lambda_{\mathfrak{r}}$.

我们指出，由于上述定义中的 $\tau'_{\mathfrak{r}}$ 由$(U,\mathfrak{r})$ 唯一确定（见定义12.8 和定理12.6），$\tau_{\mathfrak{r}}$ 也由$(U,\mathfrak{r})$唯一确定。下面这个简单的引理将在推论13.11的证明中用到。

引理13.10。假设 $\nu<\mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言、在 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，且是 $\mathcal{H}$的不可达基数。假设

- $U\in\mathsf{its}(\nu)$ 由 $\mathfrak{q}$ 证明，
- $\lambda\in U$ 是 $\mathcal{H}|\nu$ 的强基数，并且
- $(\mathfrak{r},\tau_{\mathfrak{r}})\in$相对论$(U)\restriction\lambda$.

于是存在一个完整的 λ-有界迭代 $\mathfrak{s}$ （因此 $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}})\subseteq\lambda_{\mathfrak{s}}$），属于 $\mathfrak{q}$，使得

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$,
- $\mathfrak{r}=\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$，并且
- $\tau_{\mathfrak{r}}=\pi_{\mathfrak{s},\infty}\restriction\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\lambda_{\mathfrak{s}}$。

要得到如上的 $\mathfrak{s}$，我们只需令 $\mathfrak{s}$ 为 $\restriction(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}|\nu,\ \mathfrak{r}},\ \mathfrak{q})$ 的最后模型。

[39]此处及本文其他地方，我们用 $x_{\mathfrak{w}}$ 表示 x 在 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}}$ 中的原像，假设该映射之下 立。因此，在当前情形下，$\lambda_{\mathfrak{r}}=(\tau'_{\mathfrak{r}})^{-1}(\lambda)$。

推论 13.11。设

- $u = (\mathfrak{q}, \nu, \lambda)$ 是一个反射生成元，
- $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^{\lambda^u}$，
- β 满足： $\mathfrak{h}|\beta$ 是 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$的完全迭代，
- $Z = \pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\mathfrak{h}|\beta}[\pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu]]$,
- $\kappa = \min(\mathrm{SLW}(\mathfrak{q}|\nu) - (\lambda + 1))$，且
- $E \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}}$ 是满足以下性质的最小对象：$\mathrm{lh}(E) > \nu$ 且$\mathrm{crit}(E) = \kappa$。

于是，根据 $\mathfrak{q}_E$ 给出的证书， $Z \in \mathsf{its}(\beta)$，并且 σ_u 可由$(\mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u, \lambda^u)$在 $N|\beta$ 上定义。

证明。 我们首先证明 $\mathfrak{q}_E$ 是 Z 的 its(β)-证书。因此，我们需要证明

$$Z = \pi_{\mathfrak{q}_E,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu].$$

该等式成立，因为令 $\mathfrak{s} = \mathfrak{q}_E^{\lambda^u}$ 并对 $(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{q}_E})^\frown\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_E,\mathfrak{s}}$ 进行完全正规化后，我们得到

(1.1) $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_F$ 其中 $F = \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}(E)$,
(1.2) $\mathfrak{q}_E|\nu = \mathfrak{q}|\nu$,(1.3) $\mathfrak{s}|\pi_{\mathfrak{q}_E,\mathfrak{s}}(\nu)$
$= \mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$,[40](1.4) $\pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu = \pi_{\mathfrak{q}_E,}$
$_{\mathfrak{s}} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu$。

于是我们有

$$(*) \qquad \begin{aligned} \pi_{\mathfrak{q}_E,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu] &= \pi_{\mathfrak{s}|\pi_{\mathfrak{q}_E,\mathfrak{s}}(\nu),\mathfrak{h}|\beta} \circ \pi_{\mathfrak{q}_E,\mathfrak{s}}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu] \\ &= \pi_{\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}},\mathfrak{h}|\beta} \circ \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu] \\ &= Z \end{aligned}$$

接下来，我们需要验证 σ'_u 可由 $(\mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u, \lambda^u)$ 在 $N|\beta$ 上定义。我们知道， σ'_u可以很容易地由 $\mathsf{rel}(U)$ 定义，其中

$$U = \pi_{\mathfrak{q},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu].$$

应用注记 13.4，我们可以看到，可以由 σ'_u 通过 $\mathsf{rel}(U) \restriction \lambda^u$定义。下面的断言即可完成证明。

断言13.12. $\mathsf{rel}(U) \restriction \lambda^u = \mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u$。

证明。 读者或许会发现图13.3 很有帮助。为了说明

$$\mathsf{rel}(U) \restriction \lambda^u \subseteq \mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u$$

只需证明（见引理 13.10）

(a) 若 $\mathfrak{r}$ 是 λ^u-有界迭代 $\mathfrak{q}$ 的一个完全迭代，且 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu$，则

$$(\mathfrak{r}|\nu, \pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}}) \in \mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u.$$

（a）的证明与证明 $\mathfrak{q}_E$ 是 Z 的 its(β)-证书的论证相同。事实上，令

- $F = \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}(E)$，并令
- $\mathfrak{s}$ 是 $\restriction(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}|\nu,\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}}, \mathfrak{q}_E)$的最后模型。

[40]Notice that $\pi_{\mathfrak{q}_E,\mathfrak{s}}(\nu) \neq \nu_{\mathfrak{s}}$ as $\nu_{\mathfrak{s}} = \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}(\nu) = \pi_{\mathfrak{q}_E,\mathfrak{s}}(\nu_{\mathfrak{q}_E})$ and $\nu < \nu_{\mathfrak{q}_E}$.

注意，$\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}|\nu,\ \mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}},\ \mathfrak{q}_E)$作为 $\mathfrak{q}_E|\nu = \mathfrak{q}|\nu$是有意义的。对$(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{q}_E})^\frown\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_E,\ \mathfrak{s}}$ 应用完全正规化后，我们得到

（2） $\mathfrak{r}_F = \mathfrak{s}$.

按照（$*$）中的论证，我们看到（请记住，$\mathfrak{r}|\lambda_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_F|\lambda_{\mathfrak{r}_F}$）

$$\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}} = \pi_{\mathfrak{r}_F,\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}_F}|\lambda_{\mathfrak{r}_F}.$$

因此我们有（应用（2））

(3) $\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}} = \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\lambda_{\mathfrak{s}}$.

由于 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}_E$ 的一个完备 λ^u-有界迭代，并且 $\mathfrak{q}_E$ 是其(β)-证书，且对应于 Z，我们有

$$(\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}, \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu_{\mathfrak{s}}) \in \mathsf{rel}(Z)$$

并且由于 $\mathfrak{r}_F|\nu_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$，我们得到

$$(\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}, \pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}}) \in \mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u.$$

反过来，要证明

$$\mathsf{rel}(Z) \restriction \lambda^u \subseteq \mathsf{rel}(U) \restriction \lambda^u$$

只需证明（见引理 13.10）

(b) 如果 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}_E$ 的一个完备 λ^u 有界迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_E,\ \mathfrak{s}}$ 基于 $\mathfrak{q}_E|\nu$，那么

$$(\mathfrak{s}|\nu, \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\lambda_{\mathfrak{s}}) \in \mathsf{rel}(U) \restriction \lambda^u.$$

注意，$\nu = \beta_{\mathfrak{q}_E}$（这可能会让读者感到困惑）。这里的关键点在于，就像 (a) 的证明中一样，如果 $\mathfrak{r}$ 是 $\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{q}_E|\nu,\ \mathfrak{s}|\beta_{\mathfrak{s}}},\ \mathfrak{q})$ 的最后模型，那么令 $F = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}(E)$，

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_F.$$

于是，如同 (a) 的证明一样，我们得到 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{s}|\beta_{\mathfrak{s}}$,

$$\pi_{\mathfrak{r},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}} = \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\lambda_{\mathfrak{s}},$$

and

$$(\mathfrak{s}|\beta_{\mathfrak{s}}, \pi_{\mathfrak{s},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\lambda_{\mathfrak{s}}) \in \mathsf{rel}(U) \restriction \lambda^u.$$

□

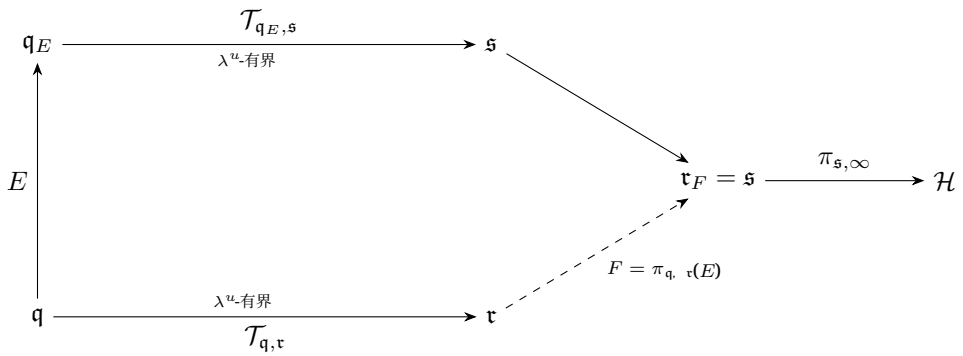
□

14. 反射 II： $\mathbb{P}_{\max}$ 扩张中对 ω_1-序列的闭包

推论 10.4 使我们能够证明：如果 $\mathfrak{r}$ and $\mathfrak{s}$ 如 10.4 的陈述所述，那么 $\mathfrak{s}$ 可用于生成 $\sigma_{(\mathfrak{r},\lambda_{\mathfrak{r}},\nu_{\mathfrak{r}})}$。从 $\mathfrak{r}$ 过渡到 $\mathfrak{s}$ 很有用，因为给定任意一个 ω_1-序列 $((\mathfrak{r}_\alpha, \lambda_{\mathfrak{r}_\alpha}, \nu_{\mathfrak{r}_\alpha}) : \alpha < \omega_1)$，我们可以找到一个满足 10.4 条件的单一 $\mathfrak{s}$，这使我们能够证明，在 M 的 $\mathbb{P}_{\max}$-扩张中，N 对 ω_1-序列是闭的（见推论 14.10），并且在 M 中对 $< \Theta^N$-序列是闭的（见定理 14.12）。我们先给出所需的确切陈述。读者或许需要回顾定义 12.8 中引入的记号。

推论 14.1。假设 $M \vDash \mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$，且 $\mathfrak{r}$和 $\mathfrak{s}$是 $\mathfrak{q}$的两个完全迭代，并且

- $\kappa < \lambda$,
- κ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu$ 的最大强基数,



关键事实

- $\nu_{\mathfrak{r}} = \beta_{\mathfrak{s}}$,
- $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{s}|\beta_{\mathfrak{s}}$,
- $\pi_{\mathfrak{r},\ \infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\lambda_{\mathfrak{r}} = \pi_{\mathfrak{s},\ \infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\lambda_{\mathfrak{s}}$。

图 13.3。 $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_E$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_F$与 $\mathfrak{s}$之间的关系。

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$ 高于 κ,
- 生成集($\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}$) $\subseteq \lambda_{\mathfrak{r}}$,
- 存在一个 $\zeta < \kappa_{\mathfrak{s}}$ ， 它是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$的真切点，也是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$的不可达基数，

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta)),$$

  以及gen($\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$) $\subseteq \zeta$。

令 $Z = \pi_{\mathfrak{s},\ \infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu_{\mathfrak{s}}]$ 和 $u = (\mathfrak{r}, \lambda_{\mathfrak{r}}, \nu_{\mathfrak{r}})$。那么存在 $\mathfrak{k}$ 的一个完全迭代 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$，使得对于某个 ξ，

(1) $\mathfrak{k}|\xi$ 是 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$ 的一个完全迭代；*(2)* ξ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{k}}$ 的一个真切点，也是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{k}}$ 的一个 *Woodin* 基数；*(3)* 若 λ' 是 $\mathfrak{s}|\kappa_{\mathfrak{s}}$ 的所有强基数的上确界，则

$$\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\mathfrak{k}}(\lambda') < \xi < \pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\mathfrak{k}}(\kappa_{\mathfrak{s}}),$$

(4) 对于 $\beta < \lambda_u$，令 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{k}$ 的一个完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{k},\ \mathfrak{m}}$ 基于 $\mathfrak{k}|\xi$，且 $\beta_{\mathfrak{m}|\xi_{\mathfrak{m}}}$ 有定义，

$$\sigma_u(\beta) = \tau^Z_{\mathfrak{m}}(\beta_{\mathfrak{m}|\xi_{\mathfrak{m}}}).$$

证明。读者或许会发现图 14.1 有所帮助。令 $\mathfrak{w}$ 为 $\mathfrak{s}$ 与 $\mathfrak{r}$进行最小扩张子分歧共同迭代的结果。令 $\mathfrak{x}$ 为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$ 上最小的一对，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$。于是我们有（见推论10.4）

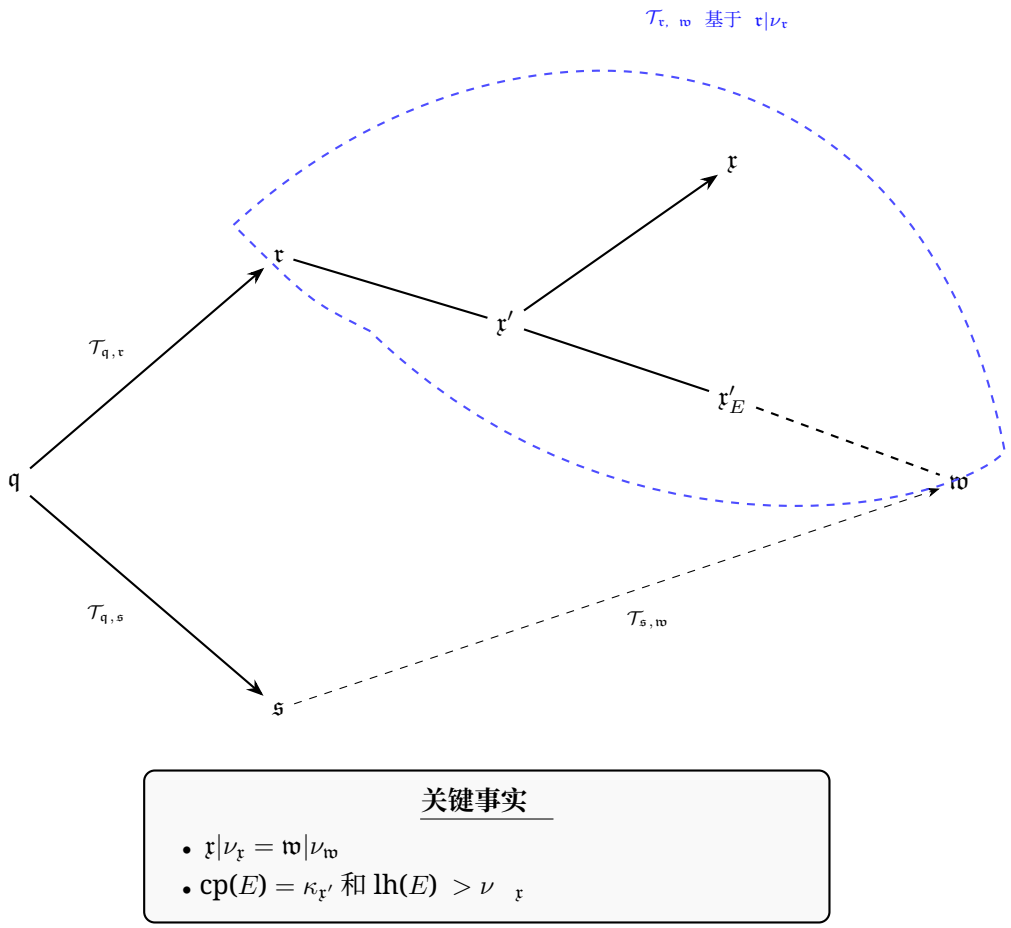
(1.1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$的生成集为 $\subseteq \nu_{\mathfrak{w}}$，且 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$的生成集为 $\subseteq \nu_{\mathfrak{w}}$；(1.2) $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$；(1.3) $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{r}$的完全迭代；(1.4) $\lambda_{\mathfrak{w}} = \lambda_{\mathfrak{x}}$ 和 $\mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{x}}$,

(1.5) 如果 $\mathfrak{x}'$ 是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}$ 的最小节点，且满足 $\mathfrak{x}'|\kappa_{\mathfrak{x}'} = \mathfrak{x}|\kappa_{\mathfrak{x}}$，那么 $\mathfrak{x}'$ 位于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}$的主分支上，

(1.6) 若 E 是在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}}$ 的主分支上使用的扩张子，且位于 $\mathfrak{x}'$，则

$$\mathrm{crit}(E) = \kappa_{\mathfrak{x}'} \text{ and } \mathrm{lh}(E) > \nu_{\mathfrak{x}},$$

(1.7) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}})^{\geq \mathfrak{x}'_E}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{x}'_E}$ 之上，并且 (1.8) $(\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{w}})^{\geq \mathfrak{x}'}$ 是 $\mathfrak{x}'$ 上的一棵迭代树，因此 $\mathfrak{w}$ 是 $\mathfrak{x}'$ 的完全迭代，而 $\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{w}}$ 位于 $\kappa_{\mathfrak{x}'}$ 之上。



关键事实

- $\mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}$
- $\mathrm{cp}(E) = \kappa_{\mathfrak{x}'}$ 和 $\mathrm{lh}(E) > \nu_{\mathfrak{x}}$

图14.1。 $\mathfrak{r}$和 $\mathfrak{s}$的共同迭代。

令 $\xi = \nu_{\mathfrak{r}}$。首先注意，若 $\beta < \lambda_u$，则存在 $\mathfrak{w}$ 的一个完全迭代 $\mathfrak{y}$，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}$基于 $\mathfrak{w}|\xi$，且 $\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}$ 有定义（此处 $\xi_{\mathfrak{y}} = \pi_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}(\xi)$ 和 $\xi_{\mathfrak{y}} < \nu_{\mathfrak{y}}$）。这是因为 $\mathfrak{w}|\xi = \mathfrak{x}|\xi$，而且 $\mathfrak{x}|\xi$ 是 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$ 的一个完全迭代。

以下是我们的关键断言。

命题 14.2. 假设 $\beta < \lambda_u$ 且 $\mathfrak{y}$ 是 $\mathfrak{w}$ 的迭代，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\mathfrak{y}}$ 基于 $\mathfrak{w}|\xi$ ，且 $\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}$已定义（此处$\xi_{\mathfrak{y}} = \pi_{\mathfrak{w},\mathfrak{y}}(\xi)$）。则

$$\sigma_u(\beta) = \pi_{\mathfrak{y},\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}).$$

证明。 读者可能会发现图14.2 和图14.3 很有用。注意，由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}'}$ 基于 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$,

(2) 如果 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{x}'$ 的一个完全迭代，使得

- $\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{m}}$ 基于 $\mathfrak{x}'|\nu_{\mathfrak{x}'}$，并且
- $\beta_{\mathfrak{m}|\nu_{\mathfrak{m}}}$ 有定义，

then

$$\sigma_u(\beta) = \pi_{\mathfrak{m},\infty}(\beta_{\mathfrak{m}|\nu_{\mathfrak{m}}}).$$

我们考虑（$\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{w}}$）$^\frown\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}$ 的完全正规化 $\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}}$ （由 (1.4) 和 (1.8)，这是有意义的）。令 $\mathfrak{y}'$ 为 $\uparrow(\mathcal{T}_{\mathfrak{w}|\xi,\ \mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}},\ \mathfrak{x})$ 的最后模型。于是我们有

(3.1) $\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}'}$ 是$\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}}$ 中基于$\mathfrak{x}'|\nu_{\mathfrak{x}'}$的最长初始片段,

(3.2) 若 $\mathfrak{y}''$ 是$\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}'}$ 中满足 $\mathfrak{y}''|\kappa_{\mathfrak{y}''} = \mathfrak{y}'|\kappa_{\mathfrak{y}}$的最小节点，则 $\mathfrak{y}''$ 位于$\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}}$的主分支上,

(3.3) $\kappa_{\mathfrak{y}''} = \pi_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}(\kappa_{\mathfrak{x}})$和$\nu_{\mathfrak{y}'} = \pi_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}(\xi)$（回忆一下， $\xi = \nu_{\mathfrak{x}}$），

(3.4) 若 F 是$\mathcal{T}_{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}}$ 在 $\mathfrak{y}''$处的主分支上所使用的扩张子，则

$$\mathrm{crit}(F) = \kappa_{\mathfrak{y}''} \text{ and } \mathrm{lh}(F) > \nu_{\mathfrak{y}'},$$

(3.5) $\mathcal{T}_{\mathfrak{y}''_F,\ \mathfrak{y}}$ 位于$\kappa_{\mathfrak{y}''_F}$之上，并且

(3.6) $\mathfrak{y}$ 是 $\mathfrak{y}''$ 的完全迭代，且$\mathcal{T}_{\mathfrak{y}'',\ \mathfrak{y}}$ 位于$\kappa_{\mathfrak{y}''}$之上。

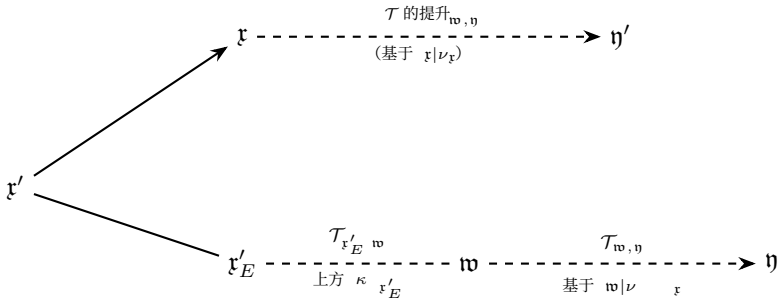


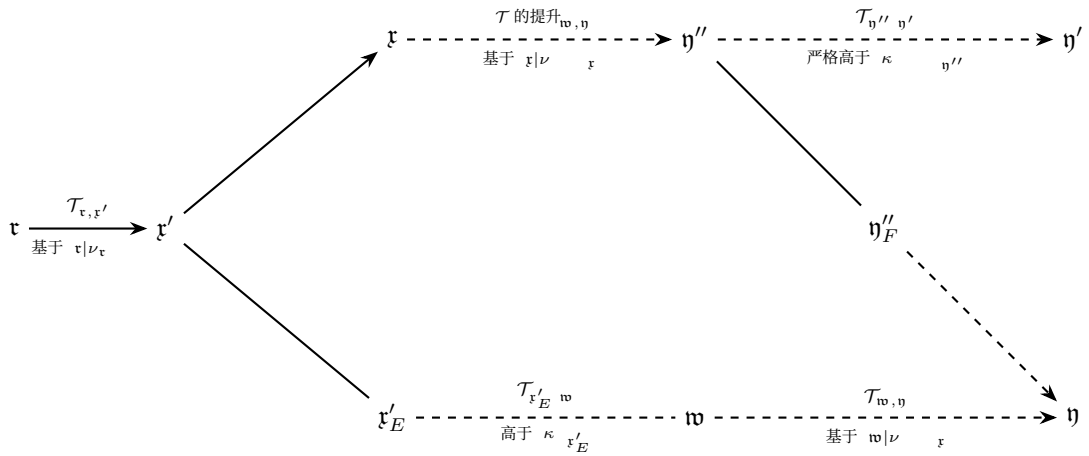
图 14.2。断言 11.5 中各迭代之间的关系。树$\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}$ 被提升到 $\mathfrak{x}$ （因为 $\mathfrak{x}|\nu_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{x}}$），从而得到 $\mathfrak{y}'$。

由于 $\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}} < \lambda_{\mathfrak{y}} = \lambda_{\mathfrak{y}''} < \kappa_{\mathfrak{y}''}$ （这里 $\xi_{\mathfrak{y}} = \pi_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}(\xi)$ ）且 $\mathfrak{y}''|\lambda_{\mathfrak{y}''} = \mathfrak{y}|\lambda_{\mathfrak{y}}$，(3.1)-(3.6) 意味着

(3) $\pi_{\mathfrak{y}''_F,\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}) = \pi_{\mathfrak{y}'',\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}) = \pi_{\mathfrak{y},\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}})$.

此外， $\mathfrak{y}''$ 是 $\mathfrak{r}$ 的一个迭代，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{y}''}$ 以 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$为基础。(2)进而意味着

$$\sigma_u(\beta) = \pi_{\mathfrak{y}'',\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}),$$



关键事实

- 由于$\mathcal{T}_{\mathfrak{y}'',\mathfrak{y}'}$严格高于$\kappa_{\mathfrak{y}''}$，我们有
$$\pi_{\mathfrak{y}'',\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}) = \pi_{\mathfrak{y},\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}})$$
- 由于$\mathcal{T}_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}''}$基于$\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$，我们有
$$\sigma_u(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}) = \pi_{\mathfrak{y}'',\infty}(\beta_{\mathfrak{r}|\xi_{\mathfrak{r}}}).$$
- 因此，
$$\sigma_u(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}) = \pi_{\mathfrak{y},\infty}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}})$$

图 14.3. 各种 hod 对之间的关系。

因此，(4)蕴含该断言。 □

现在设定 $\mathfrak{k} = \mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}$。回想一下，我们设定了 $\xi = \nu_{\mathfrak{x}}$。下面的断言完成证明。

断言 14.3. $(\mathfrak{k},\ \xi)$ 满足推论 *14.1*中的条款 *(1)-(4)*。

证明。 我们逐一验证所有条款。

条款 1。 这是 (1.4) 的推论。我们有，$\mathfrak{x}|\xi$ 是 $\mathfrak{r}|\nu_{\mathfrak{r}}$ 的一个完全迭代，并且 $\mathfrak{x}|\xi = \mathfrak{w}|\xi$。

条款 2。 这是 (1.6) 以及 $\nu_{\mathfrak{x}}$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}$ 的一个伍丁基数这一事实的推论。(1.6) 蕴含

$$\mathscr{P}(\xi) \cap \mathcal{M}^{\mathfrak{w}} \subset \mathcal{M}^{\mathfrak{x}}$$

条款 3。 这是 (1.2)、(1.5) 和 (1.6) 的推论。我们有

$$\mathfrak{x}'|\kappa_{\mathfrak{x}'} = \mathfrak{w}|\kappa_{\mathfrak{x}'},$$

这意味着

$$\pi_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}(\lambda') < \kappa_{\mathfrak{x}'}.$$

由于 $\kappa_{\mathfrak{x}'} < \nu_{\mathfrak{x}}$，我们有

$$\pi_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}(\lambda') < \xi.$$

应用 (1.2)，我们得到

$$\pi_{\mathfrak{s},\mathfrak{w}}(\lambda',\kappa_{\mathfrak{s}})=\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\mathfrak{k}}(\lambda',\kappa_{\mathfrak{s}}),$$

因此

$$\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\mathfrak{k}}(\lambda')<\xi.$$

注意到，接下来 (1.6) 蕴含 $\xi<\kappa_{\mathfrak{w}}$，且由于 $\kappa_{\mathfrak{w}}=\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\ \mathfrak{k}}(\kappa_{\mathfrak{s}})$，我们有

$$\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\mathfrak{k}}(\lambda')<\xi<\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\mathfrak{k}}(\kappa_{\mathfrak{s}}).$$

条款 4. 现在令 $Z=\pi_{\mathfrak{s},\ \infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu_{\mathfrak{s}}]$。由断言 14.2 可知

(4) 对每个 $\beta<\lambda_u$，令 $\xi=\nu_{\mathfrak{x}}$ 和 $\mathfrak{y}$ 为 $\mathfrak{w}$ 的任意完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}$ 基于 $\mathfrak{w}|\xi$，且 $\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}$ 在 $\xi_{\mathfrak{y}}=\pi_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{y}}(\xi)$ 处有定义，

$$\sigma_u(\beta)=\tau^Z_{\mathfrak{y}|\nu_{\mathfrak{y}}}(\beta_{\mathfrak{y}|\xi_{\mathfrak{y}}}).$$

这是因为

(5.1) $\mathfrak{s}$是 Z 的 its($\pi_{\mathfrak{q},\ \infty}(\nu)$)-证书，

(5.2) $\xi=\nu_{\mathfrak{x}}<\kappa_{\mathfrak{w}}<\nu_{\mathfrak{w}}$ （见 (1.6)），并且

(5.3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\ \mathfrak{y}}$ 以 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$ 为基础。

因此（见定理 12.6和定义 12.8）

$$\tau^Z_{\mathfrak{y}|\nu_{\mathfrak{y}}}=\pi_{\mathfrak{y},\infty}\restriction\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\nu_{\mathfrak{y}}.$$

□

□

记号 14.4。假设 $\nu<\mathfrak{d}_\infty$ 是相对于 $\mathfrak{d}_\infty$ 而言 $\mathcal{H}$ 中的一个真切点，并且是 $\mathcal{H}$ 的一个伍丁基数，但不是 $\mathcal{H}$ 的伍丁基数的极限。假设

- $Z\in$its(ν)，
- $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{q}_Z$的完全迭代，且
- ξ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{k}}$的不可达真截点基数。

令 $v=(Z,\ \mathfrak{k},\ \xi)$。接着令

$$\sigma_v:\mathcal{H}|\pi_{\mathfrak{k}|\xi+1,\infty}(\xi)\to\mathcal{H}|\gamma$$

为由下式给出的嵌入

$$\sigma_v(x)=\tau^Z_{\mathfrak{r}}(x_{\mathfrak{r}}),$$

其中

- $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个完全迭代，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{k},\ \mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{k}|\xi$，
- $x=\pi_{\mathfrak{r},\ \infty}(x_{\mathfrak{r}})$，以及
- $\gamma=$sup($\sigma_v[\pi_{\mathfrak{k}|\xi+1,\infty}(\xi)]$)。

注 14.5。鉴于第 12 节的结果（特别是定理 12.6）以及第 13 节的结果（特别是引理 13.6），显然 σ_v 定义良好。

术语 14.6。设 $M\vDash\mathrm{RefGen}_3(\mathfrak{q},\ \lambda,\ \kappa,\ \nu)$，并设 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$的完全迭代，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$高于 κ。令

$$\sigma:N|\alpha\to N|\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$$

是一个初等嵌入。我们称 σ 在**之下生成**，如果存在

- 一个 $\mathfrak{r}$ 的完全迭代，且
- $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$ 的一个不可达基数 $\zeta<\kappa_{\mathfrak{s}}$，它是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$中的一个真切点，

使得

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}|\kappa_{\mathfrak{r}},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta)),$$

生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}) \subseteq \lambda_{\mathfrak{r}}$、生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}) \subseteq \zeta$，以及$\sigma = \sigma_{(\mathfrak{r},\lambda_{\mathfrak{r}},\nu_{\mathfrak{r}})}$。

我们现在得到以下显然的推论。

推论 14.7。设

- $M \vDash$反射生成集$_3(\mathfrak{q},\lambda,\kappa,\nu)$,,
- $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$ 位于 κ之上，并且
- σ： $N|\alpha \to N|\pi_{\mathfrak{q},\ \infty}(\lambda)$ 在 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$ 下生成。

令 $Z = \pi_{\mathfrak{q},\ \infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu]$，存在 $\mathfrak{k}$ 的完全迭代 $\mathfrak{q}_Z$ 以及 $\mathcal{M}^{\mathfrak{k}}$ 的一个不可达真截点，使得令[41] $v = (Z,\ \mathfrak{k},\ \xi)$，

$$\sigma = \mathrm{ind}(\sigma_v).$$

推论 14.8。假设 $M \vDash \mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q},\ \lambda,\ \kappa,\ \nu)$，并假设 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代，满足 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{s}}$ 高于 κ。假设

$$\sigma : N|\alpha \to N|\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)\ \ and\ \sigma' : N|\alpha \to N|\pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda)$$

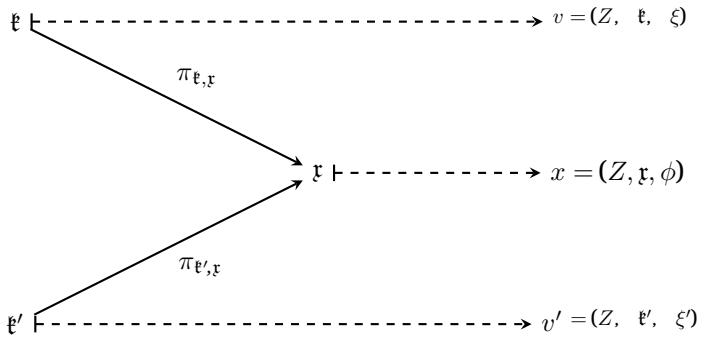
在 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$ 下生成。于是 $\sigma = \sigma'$。

证明。令 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{r}'$ 见证 σ 和 σ' 在 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$ 下生成。令 $(\mathfrak{k},\xi)$ 和 $(\mathfrak{k}',\xi')$ 如推论 14.1 中将其应用于 $(\mathfrak{r},\mathfrak{s})$ 和 $(\mathfrak{r}',\mathfrak{s})$ 时所述。令 $\mathfrak{x}$ 为通过最小 extender 不一致余迭代由 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}'$ 产生的完全迭代。由 [3, 引理 9.12] 可知

$$\pi_{\mathfrak{k},\mathfrak{x}}(\xi) = \pi_{\mathfrak{k}',\mathfrak{x}}(\xi') =_{\mathrm{def}} \phi$$

并且 $\mathfrak{x}|\phi$ 是 $\mathfrak{k}|\xi$ 和 $\mathfrak{k}'|\xi'$的一个共同完全迭代。

令 $Z = \pi_{\mathfrak{s},\ \infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu_{\mathfrak{s}}]$。现在令 $v = (Z,\ \mathfrak{k},\ \xi)$、$v' = (Z,\ \mathfrak{k}',\ \xi')$ 和 $x = (Z,\ \mathfrak{x},\ \phi)$。



通过余迭代实现唯一性

- $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}'$的公共迭代。
- $\pi_{\mathfrak{k},\ \mathfrak{x}}(\xi) = \pi_{\mathfrak{k}',\ \mathfrak{x}}(\xi') = \phi$。
- $\sigma = \mathrm{ind}(\sigma_v) = \mathrm{ind}(\sigma_x) = \mathrm{ind}(\sigma_{v'}) = \sigma'$.

图 14.4. 通过最小扩张子分歧共同迭代使提取元组对齐。

[41] ind 在定义13.1中给出。

应用推论14.7 可得

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathrm{ind}(\sigma_v)\\ &= \mathrm{ind}(\sigma_x)\\ &= \mathrm{ind}(\sigma_{v'})\\ &= \sigma'.\end{aligned}$$

□

定理 14.9. 假设 $u = (\mathfrak{q}, \nu, \lambda)$, $\mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$ 成立，且 $G \subseteq \mathbb{P}_{\max}$ 是 M-泛型。假设 $(\mathfrak{r}_\alpha : \alpha < \omega_1) \in M[G]$ 是 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代序列，并且对每个 $\alpha < \omega_1$,

$$\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}_\alpha}) \subseteq \lambda_{\mathfrak{r}_\alpha}.$$

对于 $\alpha < \omega_1$，令

(1) $\lambda_\alpha = \lambda_{\mathfrak{r}_\alpha}$，*(2)* $\nu_\alpha = \nu_{\mathfrak{r}_\alpha}$，
(3) $u_\alpha = (\mathfrak{r}_\alpha, \lambda_\alpha, \nu_\alpha)$，以及 *(4)*
$\sigma_\alpha = \sigma_{u_\alpha}$： $N|\lambda_{u_\alpha} \to N|\lambda^{u_\alpha}$。

Then

$$(\sigma_\alpha : \alpha < \omega_1) \in N[G].$$

证明。 设 $\kappa_\alpha = \kappa_{\mathfrak{r}_\alpha}$。首先注意到

$$(\lambda_{u_\alpha} : \alpha < \omega_1) \in N[G],$$

并且对每个 $\alpha < \omega_1$, $\lambda^{u_\alpha} = \pi_{\mathfrak{q},\infty}(\lambda) = \lambda_\infty$。第一个断言由以下事实得出：

$$\mathrm{cf}^{M[G]}(\Theta^N) = \omega_2^{M[G]},$$

因此，如果

- $\gamma < \Theta^N$,
- $(x_\alpha : \alpha < \omega_1) \subseteq \mathbb{R}$，并且
- $f : \mathbb{R} \to \gamma$

满足对每个 $\alpha < \omega_1$,

$$\lambda_{u_\alpha} < \gamma, \quad f \in N, \quad \text{and} \quad f(x_\alpha) = \lambda_{u_\alpha},$$

and

$$(x_\alpha : \alpha < \omega_1) \in M[G],$$

then

$$(x_\alpha : \alpha < \omega_1) \in L(\mathbb{R})[G] \subseteq N[G],$$

因此

$$(\lambda_{u_\alpha} : \alpha < \omega_1) \in N[G].$$

在 $M[G]$ 并使用 [3, 定理 11。1], 我们可以找到

- $\mathfrak{s}$ 关于 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代，以及
- $\zeta < \kappa_{\mathfrak{s}}$

使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}$ 高于 κ，且 ζ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$ 的不可达真截点基数，并具有以下性质：

$$\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\mathfrak{s}}) \subseteq \zeta,$$

并且对于每个 $\alpha < \omega_1$,

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}_\alpha|\kappa_\alpha,\infty}[\kappa_\alpha]) < \pi_{\mathfrak{s}|\zeta,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\zeta)).$$

应用推论 14.1 于 $M[G]$ 并令

$$Z = \pi_{\mathfrak{s},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu_{\mathfrak{s}}],$$

对于每个 $\alpha<\omega_1$，我们都能找到

- 一个 $\mathfrak{w}_\alpha$ 的完全迭代 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$，并且
- ξ_α 它是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{w}_\alpha}$的一个不可达真切点

使得令 $v_\alpha=(Z,\ \mathfrak{w}_\alpha,\ \xi_\alpha)$,

$$\sigma_\alpha=\mathrm{ind}(\sigma_{v_\alpha}).$$

由于对于每个 $\alpha<\omega_1$，$v_\alpha\in M$ 都由一个实数 $y_\alpha\in\mathbb{R}$ 编码，因此编码实数序列（y_α: $\alpha<\omega_1$）$\in M[G]$属于 $L(\mathbb{R})[G]\subseteq N[G]$。因此，我们再次得到

$$(v_\alpha:\alpha<\omega_1)\in N[G],$$

因此

$$(\sigma_\alpha:\alpha<\omega_1)\in N[G].$$

□

推论 14.10。假设 $G\subseteq\mathbb{P}_{\max}$是 M-泛型的。那么在 $M[G]$中，对任意 $\lambda<\varsigma_\infty$，

$$^{\omega_1}(N|\lambda[G])\subseteq N[G].$$

证明。由于 ς_∞ 是 $\mathcal{H}|\varsigma_\infty$的强基数的极限，只需在假设$\lambda$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma_\infty$的强基数的情况下证明该断言。因此，设 λ 是 $\mathcal{H}$ 和 f 的一个 $<\varsigma_\infty$-强基数：$\omega_1\to N|\lambda[G]$是 $M[G]$中的一个函数。由于 $M[G]\vDash$ 依赖选择公理$\aleph_2$，我们可以找到 h：$\omega_1\to N|\lambda$，使得对每个$\alpha<\omega_1$，$h(\alpha)$都是一个 $\mathbb{P}_{\max}$-名称，且 $h(\alpha)_G=f(\alpha)$。只需证明 $h\in N[G]$。

令 κ 为满足 $\lambda<\kappa$的 $\mathcal{H}$ 的最小 $<\varsigma_\infty$-强基数，并令 $\nu<\varsigma_\infty$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个伍丁基数，使得对于 $\mathfrak{p}$的某个完全迭代 $\mathfrak{q}$，$(\lambda_{\mathfrak{q}},\ \kappa_{\mathfrak{q}},\ \nu_{\mathfrak{q}})$ 有定义，并且

$$M\vDash\mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q},\lambda_{\mathfrak{q}},\kappa_{\mathfrak{q}},\nu_{\mathfrak{q}}).$$

利用定理 13.7以及 $M[G]\vDash$依赖选择公理$\aleph_2$这一事实，我们可以找到一个序列 $(\mathfrak{r}_\alpha:\alpha<\omega_1)\in M[G]$，它由 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代组成，并且令 $u_\alpha=(\mathfrak{r}_\alpha,\lambda_{\mathfrak{r}_\alpha},\nu_{\mathfrak{r}_\alpha})$，对每个 $\alpha<\omega_1$, $h(\alpha)\in\mathrm{rge}(\sigma_{u_\alpha})$。

由定理 14.9 可知 $(\sigma_{u_\alpha}:\ \alpha<\omega_1)\in N[G]$。为完成证明，我们作如下观察：

(1.1) 令 $\gamma=\sup_{\alpha<\omega_1}\lambda_{u_\alpha}$，则有 $\gamma<\Theta^N$ and $((\sigma_{u_\alpha})^{-1}(h(\alpha)):\ \alpha<\omega_1)\subseteq N|\gamma$。

(1.2) 存在一个满射 $k:\mathbb{R}\to N|\gamma$，满足 $k\in N$。

(1.3) Since $\mathscr{P}(\omega_1)\cap M[G]=\mathscr{P}(\omega_1)\cap L(\mathbb{R})\subseteq N[G]$, we obtain that $((\sigma_{u_\alpha})^{-1}(h(\alpha)):\alpha<\omega_1)\in N[G]$.

由于嵌入和名称的原像都在 $N[G]$中，我们得出序列本身 h 属于 $N[G]$。□

推论 14.11. 在 M中，对任意 $\beta<\varsigma_\infty$，

$$^{\omega_1}N|\beta\subseteq N.$$

证明。设 $f:\omega_1\to N|\beta$且 $f\in M$。则每当 $G\subseteq\mathbb{P}_{\max}$为 M-泛型时，$f\in N[G]$。由此可得 $f\in N$。□

定理 14.12. 设 $\zeta<\Theta^N$ 且 $\lambda<\varsigma_\infty$。则 $(N|\lambda)^\zeta\subseteq N$。

证明。同样，只需假设 λ 是 $\mathcal{H}|\varsigma_\infty$的一个强基数。现在设

- λ是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{p}}|\varsigma_{\mathfrak{p}}$的强基数，

- $\kappa = \min(\mathrm{SLW}(\mathcal{M}^{\mathfrak{p}}|\varsigma_{\mathfrak{p}}) - (\lambda+1))$，并且
- $\nu \in$ 伍丁$(\mathcal{M}^{\mathfrak{p}}|\varsigma_{\mathfrak{p}})$，使得伍丁$(\mathcal{M}^{\mathfrak{p}}) \cap (\kappa, \nu) \neq \emptyset$ 且 ν 不是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{p}}$ 中伍丁基数的极限。

我们想要证明

(a) if $f : \zeta \to N|\lambda_\infty$, then $f \in N$.

在 M 中，对每个 $\alpha < \zeta$，令 λ_α 为最小的，使得对于某个 $\mathfrak{p}$ 的完全迭代 $\mathfrak{r}$，若 $u = (\mathfrak{r}, \lambda_{\mathfrak{r}}, \nu_{\mathfrak{r}})$，则

$$f(\alpha) \in \mathrm{rge}(\sigma_u) \text{ and } \lambda_u = \lambda_\alpha.$$

因为

$$M \vDash \mathrm{cf}(\Theta^N) > \zeta,$$

我们必有

$$\sup_{\alpha<\zeta} \lambda_\alpha < \Theta^N.$$

因此，由编码引理，

$$(\lambda_\alpha : \alpha < \zeta) \in N.$$

令 $G \subseteq \mathbb{P}_{\max}$ 为 M-泛型。由于 $M[G] \vDash$ 依赖选择公理$^{\omega_2}$，并且

$$M[G] \vDash |\zeta| = \omega_2,$$

在 $M[G]$中，应用定理 13.7，我们可以找到一个序列

$$(u_\alpha = (\mathfrak{r}_\alpha, \lambda_{\mathfrak{r}_\alpha}, \nu_{\mathfrak{r}_\alpha}) : \alpha < \zeta)$$

使得对每个 $\alpha < \zeta$,

(1.1) $\lambda_\alpha = \lambda_{u_\alpha}$,

(1.2) $\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}_\alpha}) \subseteq \lambda_{\mathfrak{r}_\alpha}$, and

(1.3) $f(\alpha) \in \mathrm{rge}(\sigma_{u_\alpha})$.

我们有

(2) $\sigma_{u_\alpha} \in N$.

现在令 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的一个完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{p},\mathfrak{s}}$ 位于 κ 之上，并且对于某个 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$-不可达的$\xi \in (\lambda_{\mathfrak{s}}, \kappa_{\mathfrak{s}})$，它是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}$的一个不可达真截点，

(3.1) 对每个 $\alpha < \zeta$,

$$\sup(\pi_{\mathfrak{r}_\alpha|\kappa_{\mathfrak{r}_\alpha},\infty}[\kappa_{\mathfrak{r}_\alpha}]) < \pi_{\mathfrak{s}|\xi,\infty}(\mathtt{slw}(\mathfrak{s}|\xi)),$$

(3.2) 生成集$(\mathcal{T}_{\mathfrak{p},\mathfrak{s}}) \subseteq \xi$。

现在令

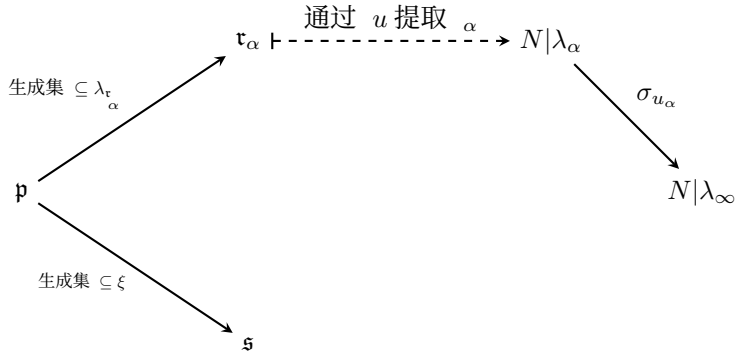
$$Z = \pi_{\mathfrak{s},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu].$$

It 由此可得，对于每个 $\alpha < \zeta$，σ_{u_α} 都是在 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$ 以下生成的。进而可得（见推论 14.8）

$$\sigma_{u_\alpha} : N|\lambda_\alpha \to N|\lambda_\infty$$

是如下形式的唯一嵌入$^{\sigma_{(Z,\mathfrak{t},\xi)}}$，其中 $(Z, \mathfrak{t}, \xi)$ 是将推论 14.1 应用于$(\mathfrak{p}, \mathfrak{r}_\alpha, \mathfrak{s}, \lambda, \kappa, \nu)$所得的见证。因此，

$$(\sigma_{u_\alpha} : \alpha < \zeta) \in N$$



反射的关键性质

- 定义域界：$\zeta < \Theta^N \implies$ 上确界 $_{\alpha<\zeta} \lambda_\alpha < \Theta^N$。
- 不相交性：ξ 是真切点。
- 唯一解码：σ_u $_\alpha$ 可由 $(Z, \mathfrak{k}, \xi)$ 唯一确定。
- $f \in N$ 因为 $(\sigma_{u_\alpha} : \alpha < \zeta) \in N$ 以及 $f(\alpha) \in \mathrm{rge}(\sigma_{u_\alpha})$。

图 14.5. 通过从 $\mathfrak{r}_\alpha$ 中提取的嵌入 σ_{u_α}，使用元组 u_α对 $f(\alpha)$ 进行反射。

正如它可以根据 N 从 Z、$\mathrm{rel}(Z)$ 和 $(\lambda_\alpha : \alpha < \zeta)$ 定义一样。由于对于所有 $\alpha < \zeta$，f，$f(\alpha) \in \mathrm{rge}(\sigma_{u_\alpha})$，因此可以在 N 中恢复 $f \in N$。[42] □

15. 反射 III：有用的引理

在接下来的几节中，我们将建立临界点严格大于 Θ^N 的反射原理。回顾一下，我们的主要目标是构造固定初始片段 $N|\lambda$ 的充分闭壳。我们将着手在 N 内建立 $\mathrm{ref}(X, \mathrm{N}_\alpha, \mathrm{N}_{\alpha+1})$。我们的目标是在 Nairian 模型的背景下，实现由 $N|\lambda$ 的初等子模型组成的连续链的典范构造。主要障碍在于缺少 Skolem 函数，这使得必须更加细致地处理该构造中的后继步骤。下面的引理旨在以一种支持迭代的构造性方式执行连续链构造的后继步骤。

引理 15.1. 设

$$M \vDash \mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$$

且 $\eta < \lambda$ 是 $(\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\lambda)$ 的强基数。令

- $u = (\mathfrak{q}, \lambda, \nu)$，
- $\xi \in [\kappa, \nu)$ 是 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu$ 的不可达真切点基数，
- $\alpha = \pi_{\mathfrak{q}|\nu,\ \infty}(\eta)$ 以及 $\alpha' = \eta_\infty = \pi_{\mathfrak{q},\ \infty}(\eta)$，
- $\mathfrak{s} = \mathfrak{q}^\alpha_\alpha$ 以及 $\mathfrak{s}' = \mathfrak{q}^{\alpha'}_{\alpha'}$，
- $j = \pi_{\mathfrak{q}|\nu,\ \infty}$ 和 $j' = \pi^{\mathfrak{q}}_{\alpha'\ ,\ \infty}$。

Then

[42] 这里，根据编码引理，集合 $(\sigma_{u_\alpha}^{-1}(f(\alpha)) : \alpha < \zeta) \in N$。

(1) $\sigma_u(\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|j(\nu)) = \mathcal{M}^{\mathfrak{s}'}|j'(\nu)$，(2) $\sigma_u(\mathfrak{s}|j(\xi)) = \mathfrak{s}'|j'(\xi)$，以及 (3) $\sigma_u(j \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\xi) = j' \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\xi$（见图15.1）。

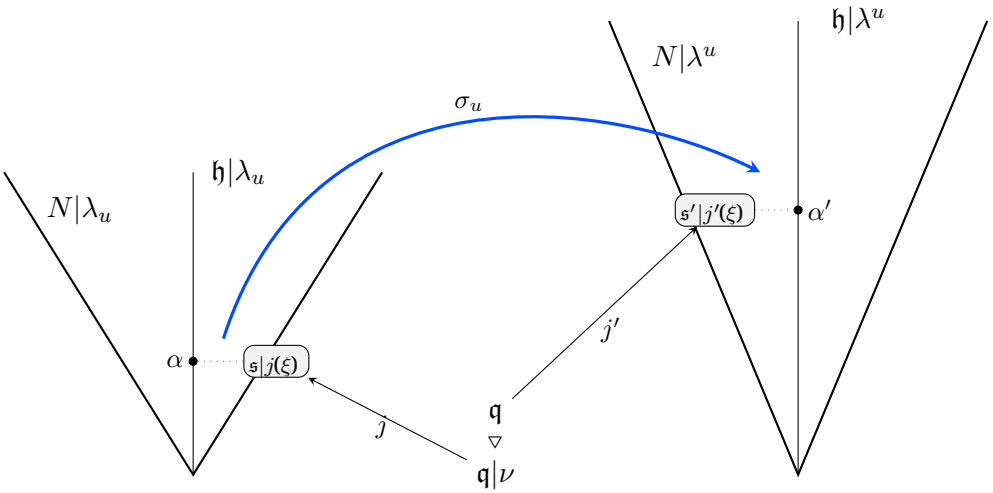


图 15.1. 反射映射 σ_u 恰好穿过 $N|\lambda_u$ 的间隙。

证明。我们首先令

- $\mathfrak{q} = (\mathcal{Q},\ \Lambda)$,
- $\zeta = (\eta^+)^{\mathcal{Q}}$,
- $Z = j[\mathcal{Q}|\zeta]$ 和 $Z' = j'[\mathcal{Q}|\zeta]$,
- $i = j \restriction (\mathcal{Q}|\zeta)$ 是 Z 的传递塌缩的逆映射,
- $i' = j' \restriction (\mathcal{Q}|\zeta)$ 是 Z' 的传递塌缩的逆映射,
- $G = \{(a, A)\colon\ A \in \mathcal{Q}|\zeta \wedge a \in [\alpha]^{<\omega} \wedge a \in i(A)\}$，且
- $G' = \{(a, A)\colon\ A \in \mathcal{Q}|\zeta \wedge a \in [\alpha']^{<\omega} \wedge a \in i'(A)\}$。

注意，

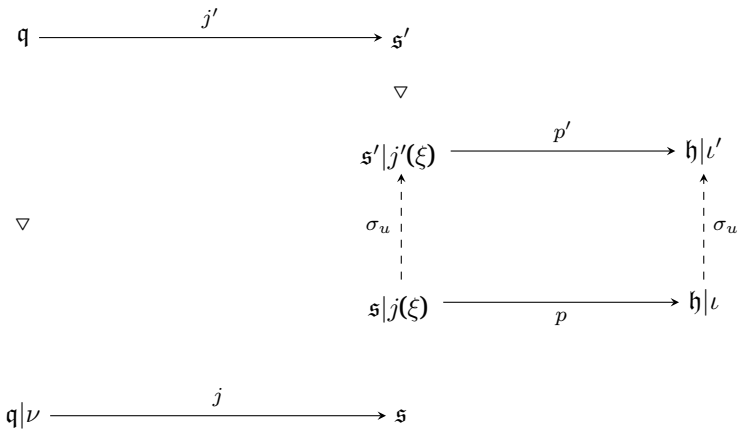
(1.1) $\sigma_u(\alpha) = \alpha'$，(1.2) $j \restriction \mathcal{Q}|\zeta = \pi_{\mathfrak{q}|\nu}$，$\infty \restriction \mathcal{Q}|\zeta$（见 [3, 第 9 章。1]），(1.3) $j' \restriction \mathcal{Q}|\zeta = \pi_{\mathfrak{q}}$，$\infty \restriction \mathcal{Q}|\zeta$（见 [3, 第 9 章。1]），(1.4) 对每个 z，$z \in Z$ 当且仅当 $j'(z_{\mathfrak{q}|\nu}) \in Z'$，(1.5) $Z' = \sigma_u[Z]$（见定义 13.3），(1.6) $\sigma_u(Z) = Z'$（这由 (1.5) 以及 Z 是可数这一事实得出），以及 (1.7) $\sigma_u(i) = i'$ 和 $\sigma_u(G) = G'$。

由于 $\mathfrak{s} = Ult(\mathfrak{q}, G)$、$\mathfrak{s}' = Ult(\mathfrak{q}, G')$、$j = \pi^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}}_G$ 和 $j' = \pi^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}}_{G'}$，我们有

(2) 对于每个 $\iota \in (\eta, \omega_1^M)$,

$$\sigma_u(\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|j(\iota)) = \mathcal{M}^{\mathfrak{s}'}|j'(\iota) \text{ and } \sigma_u(j \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\iota) = j' \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\iota.$$

注意，（2）验证了子句 （*1*）和 （*3*），即引理 15.1的相应子句。下面的断言完成了引理 15.1的证明，方法是验证剩余的条款 （*2*）。



关键事实

- $\sigma_u(j \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\iota) = j' \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\iota$ 对于 $\iota \in (\eta, \omega_1^M)$,
- $\sigma_u(\mathfrak{s}|j(\xi)) = \mathfrak{s}'|j'(\xi)$,
- $\sigma_u(p) = p'$。

图 15.2。 σ_u的作用。

断言 15.2。 $\sigma_u(\Sigma^{\mathfrak{s}|j(\xi)}) = \Sigma^{\mathfrak{s}'|j'(\xi)}$。

证明。 读者或许可以参考图15.2。设 ι 和 ι' 满足 $\mathfrak{h}|\iota$ 是 $\mathfrak{s}|j(\xi)$的完全迭代，并且 $\mathfrak{h}|\iota'$ 是 $\mathfrak{s}'|j'(\xi)$ 的完全迭代。设

$$p = \pi_{\mathfrak{s}|j(\xi),\mathfrak{h}|\iota} \restriction M^{\mathfrak{s}}|j(\xi) \text{ and } p' = \pi_{\mathfrak{s}'|j'(\xi),\mathfrak{h}|\iota'} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{s}'}|j'(\xi).$$

由于 $\mathfrak{s}|j(\xi)$ 是 $\mathfrak{h}|\iota$ 关于 p 的拉回，且 $\mathfrak{s}'|j'(\xi)$ 是 $\mathfrak{h}|\iota'$ 关于 p' 的拉回，因此只需证明 $\sigma_u(p) = p'$。

令 $E \in \vec{E}^{\mathcal{Q}}$ 为具有最小指标且满足 $\mathrm{crit}(E) > \eta$ 并且 $\mathrm{lh}(E) > \xi$的扩张子。Le t

- $\mathfrak{r} = Ult(\mathfrak{q}, E)$,
- $F = j(E)$,
- $F' = j'(E)$,
- $\mathfrak{x} = Ult(\mathfrak{s}, F)$，以及
- $\mathfrak{x}' = Ult(\mathfrak{s}', F')$。

应用 (2) 可得

$$\sigma_u(F) = F'.$$

由完全正规化可知

(3) $\mathfrak{r}^\alpha = \mathfrak{x}$ and $\mathfrak{r}^{\alpha'} = \mathfrak{x}'$.

此外，我们有

(4.1) $\mathfrak{s}|j(\xi) = \mathfrak{x}|j(\xi)$ 和 $\mathfrak{s}'|j'(\xi) = \mathfrak{x}'|j'(\xi)$,
(4.2) $p = \pi_{\mathfrak{x}|j(\xi),\ \mathfrak{h}|\iota}$ 和 $p' = \pi_{\mathfrak{x}'|j'(\xi)\ \mathfrak{h}|\iota'}$,
(4.3) $\pi^\alpha_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\ \infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{r}|\xi = j \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{q}|\xi$，以及
(4.4) $\pi^{\alpha'}_{\mathfrak{r}\ ,\ \infty} \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{r}|\xi = j' \restriction \mathcal{M}^\mathfrak{q}|\xi$。

现在假设 $x \in \mathcal{M}^\mathfrak{x}|j(\xi)$。我们有，对于某些 $f \in \mathcal{M}^\mathfrak{r}|\xi$ 和 $s \in [\alpha]^{<\omega}$,

$$x = \pi^\alpha_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\infty}(f)(a).$$

于是应用 (4.2) 以及 [3, 第 9 章的1],结果，我们得到

(5) $p(x) = \pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\infty}(f)(a)$.

应用 (4.2) 和 (4.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
\sigma_u(p(x)) &= \sigma_u(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\infty}(f)(a)) \\
&= \sigma_u(\pi_{\mathfrak{r}|\nu_\mathfrak{r},\infty}(f))(\sigma_u(a)) \\
&= \pi_{\mathfrak{r},\infty}(f)(\sigma_u(a)) \\
&= p'(j'(f))(\sigma_u(a))) \text{ (see Definition 13.3)} \\
&= p'(j'(f)(\sigma_u(a))) \text{ (because } \mathrm{crit}(p') > \alpha') \\
&= p'(\sigma_u(j(f))(\sigma_u(a))) \\
&= p'(\sigma_u(j(f)(a))) \\
&= p'(\sigma_u(x)).
\end{aligned}$$

因此， $\sigma_u(p) = p'$。 □

□

我们还需要以下引理。

引理 15.3. 设

$$M \vDash \mathsf{RefGen}_3(\mathfrak{q}, \lambda, \kappa, \nu)$$

并且 λ 是 $\mathcal{M}^\mathfrak{q}|\lambda$的强基数。令 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{q}$ 的一个完备的、 λ-有界迭代，并令 $u = (\mathfrak{q}, \lambda, \nu)$和 $v = (\mathfrak{s}, \lambda_\mathfrak{s}, \nu_\mathfrak{s})$。则 $\mathrm{rge}(\sigma_u) \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_v)$。

证明。 我们有

$$\sigma_u : N|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda) \to N|\lambda_\infty$$

and

$$\sigma_v : N|\pi_{\mathfrak{s}|\nu_\mathfrak{s},\infty}(\lambda_\mathfrak{s}) \to N|\lambda_\infty.$$

于是，只需证明

$$\mathrm{rge}(\sigma_u \restriction \mathcal{H}|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\infty}(\lambda)) \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_v \restriction \mathcal{H}|\pi_{\mathfrak{s}|\nu_\mathfrak{s},\infty}(\lambda_\mathfrak{s})).$$

固定 $x \in \mathcal{H}|\pi_{\mathfrak{q}|\nu,\ \infty}(\lambda)$。令 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{q}$ 的完全迭代，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}$ 基于 $\mathfrak{q}|\nu_\mathfrak{q}$，且对某个 $y \in \mathcal{M}^\mathfrak{r}|\lambda_\mathfrak{r}$, $\pi_{\mathfrak{r}|\lambda_\mathfrak{r},\ \infty}(y) = x$。令 $\mathfrak{w}$ 为最小扩张子分歧的结果

对 $\mathfrak{r}$ 与 $\mathfrak{s}$的比较。由推论 10.5可知，$\mathcal{T}_{\mathfrak{s},\,\mathfrak{w}}$ 基于 $\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}}$。于是令$z=\pi_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}},\,\infty}(\pi_{\mathfrak{r},\,\mathfrak{w}}(y))$。于是我们有

$$\begin{aligned}\sigma_u(x)&=\pi_{\mathfrak{r},\infty}(y)\\&=\pi_{\mathfrak{w},\infty}(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}(y))\\&=\sigma_v(\pi_{\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}},\infty}(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}(y)))\\&=\sigma_v(z)\end{aligned}$$

由此可得 $\mathrm{rge}(\sigma_u)\subseteq\mathrm{rge}(\sigma_v)$。□

引理 15.4 是我们迈出的第一步，旨在说明我们确实能够构造一个初等链的连续序列。这里的关键点在于 $\sigma_0^-\in\mathrm{rge}(\sigma_1^-)$，这超出了引理 15.1。代价是我们必须有三个 Woodin 基数。

引理 15.4。假设

- $\eta<\lambda<\kappa<\varsigma$ 是 $<\varsigma$ 强基数，且属于 $\mathfrak{h}$，
- $\nu^0<\gamma<\nu^1\in(\kappa,\varsigma_\infty)$ 是 $\mathfrak{h}$ 中的三个 *Woodin* 基数，并且 $\mathfrak{h}$ 在区间 (κ,ν^0) 内有一个 *Woodin* 基数，而 γ 是 $\mathfrak{h}$ 中大于 ν^0的最小 *Woodin* 基数，
- $\mathfrak{r}=(\mathcal{R}$<*style id='5'*，$\Psi)$ 是 $\mathfrak{p}$ 的完全迭代，使得（见图*15.3*）
$$\{\eta,\lambda,\kappa,\nu^0,\gamma,\nu^1\}\subseteq\mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r},\infty}),$$
- $\mathfrak{q}_0$ 和 $\mathfrak{q}_1$ 是 η-有界的[43] 完全迭代，且满足
$$\pi_{\mathfrak{q}_0,\infty}[\eta_{\mathfrak{q}_0}]\subseteq\pi_{\mathfrak{q}_1,\infty}[\eta_{\mathfrak{q}_1}].$$

对于 $i\in 2$，令

- $u_i=(\mathfrak{q}_i,\lambda_{\mathfrak{q}_i},\nu^i_{\mathfrak{q}_i})$,
- $u_i^-=(\mathfrak{q}_i,\eta_{\mathfrak{q}_i},\nu^i_{\mathfrak{q}_i})$,
- $\sigma_i=\sigma_{u_i}$，*and*
- $\sigma_i^-=\sigma_{u_i^-}$.

那么（见图*15.4*）

$$\mathrm{rge}(\sigma_0^-)\subseteq\mathrm{rge}(\sigma_1^-)$$

and

$$\sigma_0^-\in\mathrm{rge}(\sigma_1^-).$$

证明。我们令

- $\mathfrak{w}=\mathfrak{r}^\eta$,
- $\mathfrak{y}=\mathfrak{q}_1$ 和 $\mathfrak{x}=\mathfrak{q}_0$,
- $\zeta=\pi_{\mathfrak{r}|\nu^1_{\mathfrak{r}},\,\infty}(\eta_{\mathfrak{r}})$，
- $\mathfrak{s}=\mathfrak{y}^\zeta$,
- $\alpha=(\gamma^+)^{\mathfrak{h}}$。

下文中，我们将记 $\alpha_{\mathfrak{w}}$ 和 $\alpha_{\mathfrak{s}}$ 为这些有序对中 α 的原像，并将这一记号用于所有其他相关的序数和对象。注意，由于 $\mathfrak{y}$和 $\mathfrak{x}$ 是 η-有界迭代，且来自 $\mathfrak{r}$ (参见 [3, 引理 9。6])，

(1.1) $\mathfrak{w}=\mathfrak{y}^\eta=\mathfrak{x}^\eta$,

(1.2) $\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}=\{\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}}(f)(a):f\in\mathcal{P}\wedge a\in[\eta_{\mathfrak{y}}]^{<\omega}\}$,

(1.3) $\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}=\{\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{x}}(f)(a):f\in\mathcal{P}\wedge a\in[\eta_{\mathfrak{x}}]^{<\omega}\}$,

[43]参见 [3, 定义 9.1]。

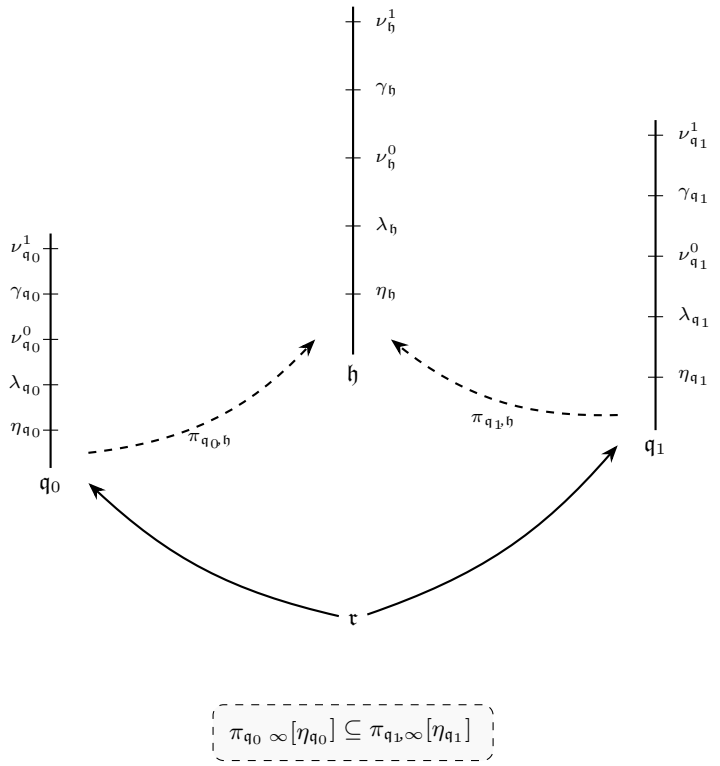


图 15.3. $\mathfrak{r}$、 $\mathfrak{q}_0$、 $\mathfrak{q}_1$ 与 $\mathfrak{h}$之间的关系。

(1.4) 令 $k = (\pi_{\mathfrak{y},\infty})^{-1} \circ \pi_{\mathfrak{x},\infty}$,

$$k : \mathcal{M}^{\mathfrak{x}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{y}}$$

是一个初等嵌入，并且

$$\pi_{\mathfrak{x},\infty} = \pi_{\mathfrak{y},\infty} \circ k,$$

and

(1.5) $\pi^{\eta}_{\mathfrak{x},\infty} \restriction (\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\nu^0_{\mathfrak{x}}) = \pi^{\eta}_{\mathfrak{y},\infty} \circ k \restriction (\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\nu^0_{\mathfrak{x}})$.

由引理15.1 可知

(2.1) $\sigma_1(\mathfrak{s}|\alpha_{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{w}|\alpha_{\mathfrak{w}}$, (2.2) $\sigma_1(\mathfrak{s}|\nu^0_{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{w}|\nu^0_{\mathfrak{w}}$, 以及 (2.3) $\pi^{\eta}_{\mathfrak{y},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\alpha_{\mathfrak{y}} = \sigma_1(\pi^{\zeta}_{\mathfrak{y}|\nu^1_{\mathfrak{y}},\infty} \restriction \mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\alpha_{\mathfrak{y}})$。

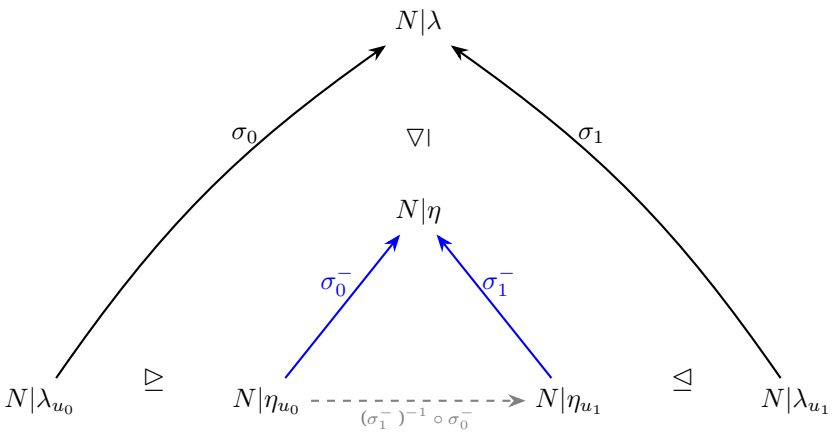
令 β 满足： $\mathfrak{h}|\beta$ 是 $\mathfrak{w}|\alpha_{\mathfrak{w}}$ 的完全迭代，并设

$$Y = \pi^{\eta}_{\mathfrak{x},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\alpha_{\mathfrak{x}}].$$

Let

$$Z = \pi_{\mathfrak{w}|\alpha_{\mathfrak{w}},\mathfrak{h}|\beta}[Y].$$

我们现在得到



关键性质

- $\sigma_0^- = \sigma_0 \restriction N|\eta_{u_0}$,
- $\sigma_1^- = \sigma_1 \restriction N|\eta_{u_1}$,
- **目标：** $\mathrm{rge}(\sigma_0^-) \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_1^-)$ 以及 $\sigma_0^- \in \mathrm{rge}(\sigma_1^-)$,
- **关键点：** γ 是推论 12.12 的应用所必需的。

图 15.4。 σ 嵌入。

(3) $Y \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_1)$。

事实上，对于 $x \in Y$，令 $y \in \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\alpha_{\mathfrak{r}}$ 满足 $x = \pi^{\eta}_{\mathfrak{r},\infty}(y)$，

$$\begin{aligned} x &= \pi^{\eta}_{\mathfrak{r},\infty}(y) \\ &= \pi^{\eta}_{\mathfrak{y},\infty}(k(y)) \\ &= \sigma_1(\pi^{\zeta}_{\mathfrak{y}|\nu^1_{\mathfrak{y}},\infty}(k(y))) \quad \text{(see (2.3))}. \end{aligned}$$

应用 (2.1) 和 (3)，我们得到

(4) $Z \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_1)$。

我们现在给出以下断言。读者不妨回顾一下记号 12.13。令集合

$$\xi = \pi_{\mathfrak{w}|\alpha_{\mathfrak{w}},\mathfrak{h}|\beta}(\nu^0_{\mathfrak{w}}).$$

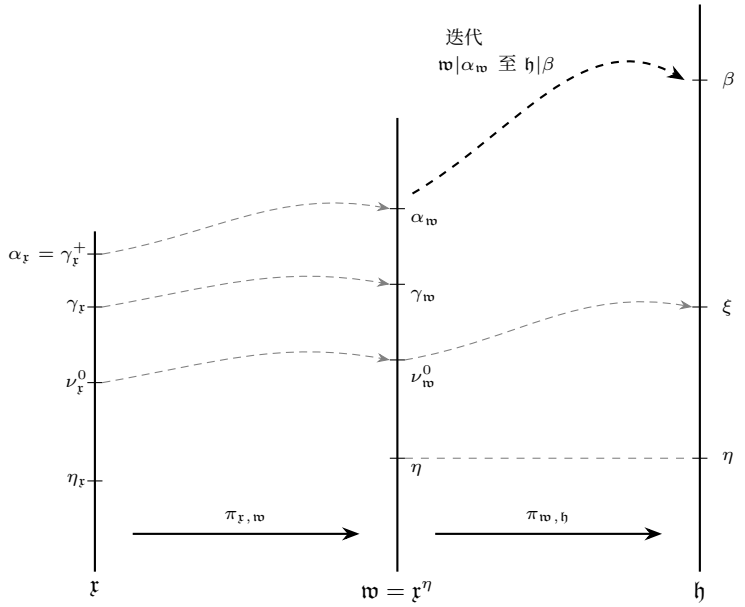
命题 15.5. $Z \cap \xi \in \mathrm{its}(\xi)$，$(S_\xi,\ T_\xi) \in \mathrm{rge}(\sigma_1)$ 且

$$\mathrm{rel}(Z) \in \mathrm{rge}(\sigma_1).$$

证明。证明 $Z \cap \xi \in \mathrm{its}(\xi)$ 与推论 13.11 的证明完全相同。因此我们仅作简要概述。令 $E \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{r}}}$ 为具有最小指标且满足以下条件的扩张子：$\mathrm{lh}(E) > \alpha$且 临界点$(E) > \eta$。于是我们有

$$Z = \pi_{\mathfrak{r}_E,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{r}_E}|\alpha_{\mathfrak{r}}].$$

(a) $\mathfrak{x}$ **至** $\mathfrak{w}$**至** $\mathfrak{h}$



(b) $\mathfrak{y}$ **至** $\mathfrak{w}$**至** $\mathfrak{h}$

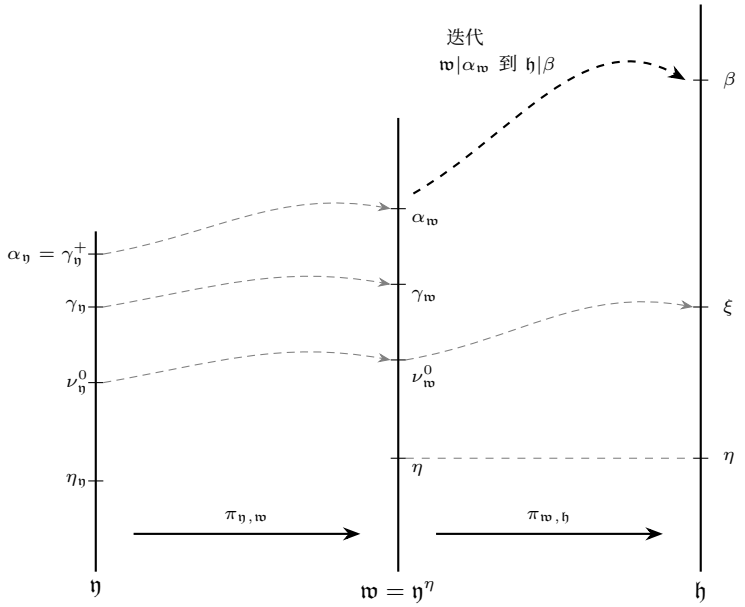
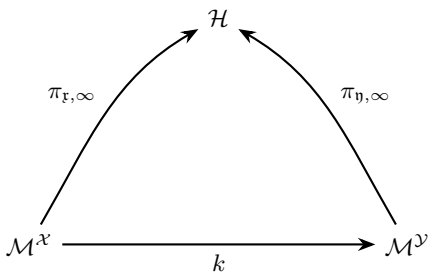


图 15.5。 $\mathfrak{x}$、 $\mathfrak{y}$、 $\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{h}$ 之间的关系，展示了在 η 处的一致性。



断言： $\mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{x},\infty}) \subseteq \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{y},\infty})$.
证明：回想一下，$\mathfrak{x} = \mathfrak{q}_0$ 和 $\mathfrak{y} = \mathfrak{q}_1$ 是 $\mathfrak{r}$的 η-有界迭代。任意 $z \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{x},\infty})$可以写成：

$$z = \pi_{\mathfrak{r},\infty}(f)(s)$$

对于某个 $f \in \mathcal{M}^{\mathfrak{r}}$ 以及有限的$s \subseteq \pi_{\mathfrak{x},\infty}[\eta_{\mathfrak{x}}]$。
根据假设，$\pi_{\mathfrak{q}_0,\ \infty}[\eta_{\mathfrak{q}_0}] \subseteq \pi_{\mathfrak{q}_1,\ \infty}[\eta_{\mathfrak{q}_1}]$。因此，存在一个有限的 $t \subseteq \eta_{\mathfrak{y}}$，使得 $s = \pi_{\mathfrak{y},\ \infty}(t)$。代回可得：

$$z = \pi_{\mathfrak{r},\infty}(f)(\pi_{\mathfrak{y},\infty}(t)) = \pi_{\mathfrak{y},\infty}(\pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{y}}(f)(t)).$$

因此，$z \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{y},\ \infty})$.

图 15.6. $\mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{x},\ \infty}) \subseteq \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{y},\ \infty})$

It 现在可得 $Z \cap \xi \in \mathrm{its}(\xi)$ 正如 $\mathfrak{x}$所证，并且由引理 12.14 可知

$$(S_\xi, T_\xi) \in Z.$$

由于 $Z \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_1)$（见 (4)），我们得到

$$(S_\xi, T_\xi) \in \mathrm{rge}(\sigma_1).$$

最后，推论 12.12 (具体来说，条款*(2)*) 意味着

$$\mathrm{rel}(Z) \in \mathrm{rge}(\sigma_1).$$

□

因为 σ_0^-可由 $N|\lambda^u$ 上的 $\mathrm{rel}(Z)$ 定义，所以存在

$$\sigma' : N|\eta_{u_0} \to N|\zeta$$

使得 $\sigma' \in N|\lambda_{u_1}$ 和

$$\sigma_1(\sigma') = \sigma_0^-.$$

但因为[44]

$$\sigma_0^- \in N|\eta_\infty,$$

我们有

$$\sigma' \in \mathrm{dom}(\sigma_1^-).$$

Thus, $\sigma_1^-(\sigma') = \sigma_0^-$. □

我们还需要以下推论，它可由断言 15.5 的证明推出。**推论 15.6**。 假设

- $\eta < \lambda < \kappa < \varsigma$ 是 $\mathfrak{h}$ 的 $<\varsigma$-强基数，

[44]这是因为 $\sup(\sigma_0^-[\eta_{u_0}]) < \eta_\infty$ (见 [3, 定理 10。20])，并且因为 [3, 定理 10。6]。

- $\nu^0 < \gamma < \nu^1 \in (\kappa, \varsigma_\infty)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的三个 *Woodin* 基数，并且 $\mathfrak{h}$ 在区间 (κ, ν^0) 内有一个 *Woodin* 基数，而 γ 是 $\mathfrak{h}$ 中大于 ν^0 的最小 *Woodin* 基数，
- $\mathfrak{r} =$ （$\mathcal{R}$， Ψ）是 $\mathfrak{p}$ 的一个完全迭代，使得（见图*15.3*）

$$\{\eta, \lambda, \kappa, \nu^0, \gamma, \nu^1\} \subseteq \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{r},\infty}),$$

- $\mathfrak{q}_0$ 和 $\mathfrak{q}_1$ 是 η-有界的[45] 完全迭代，且满足 $\mathfrak{r}$

$$\pi_{\mathfrak{q}_0,\infty}[\eta_{\mathfrak{q}_0}] \subseteq \pi_{\mathfrak{q}_1,\infty}[\eta_{\mathfrak{q}_1}].$$

对于 $i \in 2$，令

- $u_i =$ （$\mathfrak{q}_i$， $\lambda_{\mathfrak{q}_i}$， $\nu^i_{\mathfrak{q}_i}$），
- $u_i^- =$ （$\mathfrak{q}_i$， $\eta_{\mathfrak{q}_i}$， $\nu^i_{\mathfrak{q}_i}$），
- $\sigma_i = \sigma_{u_i}$，
- $\sigma_i^- = \sigma_{u_i^-}$，
- $\mathfrak{w} = \mathfrak{r}^\eta$，
- $\alpha = (\gamma^+)^{\mathcal{H}}$，
- $Y = \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{w}}[\mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\alpha_{\mathfrak{r}}]$，
- β 满足以下条件：$\mathfrak{h}|\beta$ 是 $\mathfrak{w}|\alpha_{\mathfrak{w}}$的完全迭代，
- $Z = \pi_{\mathfrak{w}|\alpha_{\mathfrak{w}},\mathfrak{h}|\beta}[Y]$，以及
- $\xi = \pi_{\mathfrak{w}|\alpha,\mathfrak{h}|\beta}(\nu^0_{\mathfrak{w}})$。

Then

(1) $\mathrm{rge}(\sigma_0^-) \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_1^-)$；*(2)* $\sigma_0^- \in \mathrm{rge}(\sigma_1^-)$；*(3)* $\mathrm{its}(\xi) \in \mathrm{rge}(\sigma_1)$；以及 *(4)* $\mathrm{its}(Z) \in \mathrm{rge}(\sigma_1)$。

16. 反射IV：Θ^N之上的壳，一个有向系统

假设

- $\eta < \lambda < \kappa$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma$的强基数，
- $\nu \in (\kappa, \varsigma)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个伍丁基数，使得 ν 是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的一个真切点，并且 $\mathcal{H}$ 在区间 (κ, ν) 内有一个伍丁基数，且
- $Z \in \mathrm{its}(\nu)$。

令 $x = (\eta, \lambda, \kappa, \nu, Z)$，并令

$$\mathrm{its}(x) = \mathrm{its}(Z) \cap \mathscr{P}(\eta).$$

在下文中，我们可以用 η^x 表示 η，等等。因此，$x = (\eta^x, \lambda^x, \kappa^x, \nu^x, Z^x)$。我们称这样的 x 为一个**有向系统生成元**，或简称**ds-生成元**。

给定 Y， $Y' \in \mathrm{its}(x)$，记作

$$Y =_x Y'$$

if $Z[Y] = Z[Y']$。令 $[Y] = [Y]_{=_x}$ 为 Y的等价类。我们注意到，对于每个 $Y \in \mathrm{its}(x)$，

$$Y =_x Z[Y] \cap \eta.$$

令 $\mathcal{I}_x$ 为 $=_x$-等价类的集合。给定 $p \in \mathcal{I}_x$，令

$$Z_p = Z[Y]$$

其中 $p = [Y]_{=_x}$。此外，对于 $p = [Y] \in \mathcal{I}_x$，令 $\mathfrak{s}$ 为 Z_p的 $\mathrm{its}(\nu)$-证书

$$W_p = N|\pi_{\mathfrak{s}|\nu_{\mathfrak{s}},\infty}(\lambda)$$

[45]参见 [3,定义 9。1]。

and

$$\sigma_p = \sigma_u : W_p \to N[\lambda$$

其中 $u = (\mathfrak{s},\ \lambda_{\mathfrak{s}},\ \nu_{\mathfrak{s}})$。为了强调对 x的依赖，我们将写作 $W_{p,\ x}$，而不写 W_p；并写作 $\sigma_{p,\ x}$，而不写 σ_p。

现在假设 $p,\ q \in \mathcal{I}_x$。我们记

$$p \leq_x q$$

当且仅当存在一个its（ν）-证书 $\mathfrak{s}$，其对应于 Z_p 某个完备的 η-有界迭代 $\mathfrak{s}'$ $\mathfrak{s}$ 是一个its（ν）-证书，对应于 Z_q。应用引理 15.3，我们得到：如果

$$p \leq_x q$$

then

$$\mathrm{rge}(\sigma_p) \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_q).$$

现在假设 $p \leq_x q$，令

$$\sigma_{p,q} = \sigma_q^{-1} \circ \sigma_p.$$

我们还有以下引理。

引理 16.1。 $\leq_x$ 是可数有向的。

证明。我们证明，若

$$(p_i : i < \omega) \subseteq \mathcal{I}_x,$$

则存在 $p \in \mathcal{I}_x$，使得对每个 $i < \omega$，$p_i \leq_x p$。对于每个 $i < \omega$，令 $\mathfrak{q}_i$ 为 Z_{p_i} 的一个 its(ν)-证书。于是，对每个 $i < \omega$，我们可以找到 $\mathfrak{q}_i$ 的一个完备的 η-有界迭代 $\mathfrak{s}_i$，使得对每个 $i < j < \omega$，

$$\pi_{\mathfrak{s}_i,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_i}|\nu_{\mathfrak{s}_i}] = \pi_{\mathfrak{s}_j,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_j}|\nu_{\mathfrak{s}_j}].$$

为找到这样的序列，我们归纳地构造一个序列 $(\mathfrak{s}_i^k :\ k < \omega,\ \ i < \omega)$，使得

(1.1) 对每个 $k < \omega$，令

$$X_k = \bigcup_{i<\omega} \pi_{\mathfrak{s}_i^k,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_i^k}|\eta_{\mathfrak{s}_i^k}],$$

对每个 $i < \omega$，

$$X_k \subseteq \pi_{\mathfrak{s}_i^{k+1},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_i^{k+1}}|\eta_{\mathfrak{s}_i^{k+1}}],$$

(1.2) 对每个 $i < \omega$，$\mathfrak{s}_i^0 = \mathfrak{q}_i$，且

(1.3) 对每个 $i < \omega$ 和 $k < \omega$，$\mathfrak{s}_i^{k+1}$ 是 $\mathfrak{s}_i^k$ 的一个 η-有界完全迭代。

接着我们令对于 $i < \omega$，$\mathfrak{s}_i$ 为 $(\mathfrak{s}_i^k :\ k < \omega)$ 的直接极限。

现在令

$$Y = \pi_{\mathfrak{s}_0,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}_0}|\eta_{\mathfrak{s}_0}].$$

由此可知，若 $p = [Y]$，则对每个 $i < \omega$，都有 $p_i \leq_x p$。 □

现在令 $\mathcal{F}_x$ 为由模型 W_p 和嵌入 $\sigma_{p,q}$（其中 $p \leq_x q$）组成的有向系统。首先注意，以下引理成立。

引理 16.2. 设 $q \leq_x r \leq_x s$ 且 $q \leq_x s$。那么

$$\sigma_{q,s} = \sigma_{r,s} \circ \sigma_{q,r}.$$

证明。根据定理 12.6，映射 $\sigma_{q,s}$, $\sigma_{r,s}$ 和 $\sigma_{q,r}$ 不依赖于用于定义它们的具体证书。设 $\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ 满足

(1.1) $\mathfrak{q}$ 是 its(ν)-证书，属于 Z_q，并且 $\mathfrak{q}$ 的某个 η-有界完全迭代是 its(ν)-证书，属于 Z_r,

(1.2) $\mathfrak{r}$ 是 Z_r 的 its(ν)-证书，并且 $\mathfrak{r}$的某个 η-有界完全迭代是 Z_s的 its(ν)-证书,

(1.3) $\mathfrak{s}$是 Z_s的 its(ν)-证书。

设 $\mathfrak{q}'$ 是 $\mathfrak{q}$ 的一个 η-有界完全迭代，它见证了 (1.1)。我们还可以假设，$\mathfrak{s}$是某个 $\mathfrak{q}''$ 的完全 η-有界迭代，而该 $\mathfrak{q}''$ 是 Z_q的 its(ν)-证书。

设 $u = (\mathfrak{q},\ \lambda_{\mathfrak{q}},\ \nu_{\mathfrak{q}})$、$v = (\mathfrak{r},\ \lambda_{\mathfrak{r}},\ \nu_{\mathfrak{r}})$ 和 $w = (\mathfrak{s},\ \lambda_{\mathfrak{s}},\ \nu_{\mathfrak{s}})$。于是我们有

(2.1) $\sigma_{q,r} = \sigma_v^{-1} \circ \sigma_u$,

(2.2) $\sigma_{r,s} = \sigma_w^{-1} \circ \sigma_v$, and

(2.3) $\sigma_{q,s} = \sigma_w^{-1} \circ \sigma_u$.

这三个等式都由引理15.3 和定理 12.6得出。例如，对于 (2.1)，若令 $u' = (\mathfrak{q}',\ \lambda_{\mathfrak{q}'},\ \nu_{\mathfrak{q}'})$，则根据定义 $\sigma_{q,\ r} = \sigma_{u'}^{-1} \circ \sigma_u$。然而，由于 $\mathfrak{q}'$和 $\mathfrak{r}$都为Z_r提供证书，定理 12.6 推出 $\sigma_{u'} = \sigma_v$，从而得到该等式。我们需要条件$q \leq_x s$ 的原因是，这样就能得出 (2.3)；其证明方法与得出 (2.1) 完全相同。

将 (2.1) 和 (2.2) 代入复合中，得到：

$$\sigma_{r,s} \circ \sigma_{q,r} = (\sigma_w^{-1} \circ \sigma_v) \circ (\sigma_v^{-1} \circ \sigma_u) = \sigma_w^{-1} \circ (\sigma_v \circ \sigma_v^{-1}) \circ \sigma_u = \sigma_w^{-1} \circ \sigma_u.$$

由 (2.3)，这恰好是$\sigma_{q,\ s}$。 □

尽管 $\leq_x$ 不是传递的，我们仍可定义直接极限 $W_{x,\ \infty}$ 以及嵌入

$$\sigma_{x,\infty} : W_{x,\infty} \to N|\lambda$$

如下。考虑满足 $y \in W_q$的有序对 $(q,\ y)$。我们将等价关系 $\sim_x$ 定义为

$$(q, y) \sim_x (q', y')$$

当且仅当存在 $s \in \mathcal{I}_x$ 使得 $q,\ q' \leq_x s$ 且

$$\sigma_{q,s}(y) = \sigma_{q',s}(y').$$

令 $\mathcal{D}$为有序对 $(q,\ y)$ 的 $\sim_x$-等价类集合，记作 $[q, y]$。给定

$$A = [q, y], B = [q', y'] \in \mathcal{D},$$

我们记作 $A \in^* B$，当且仅当对于满足 $r \in \mathcal{I}_x$ 的任意 $q,\ q' \leq_x r$,

$$\sigma_{q,r}(y) \in \sigma_{q',r}(y').$$

引理 16.3。关系 $\in^*$ 定义良好。也就是说，如果 $(q、\ y) \sim_x (u、\ w)$ 和 $(q'、\ y') \sim_x (u'、\ w')$，那么

$$[q, y] \in^* [q', y'] \leftrightarrow [u, w] \in^* [u', w'].$$

证明。假设 $[q, y] \in^* [q', y']$。我们证明 $[u, w] \in^* [u', w']$。设 $k \in \mathcal{I}_x$ 满足$u,\ u' \leq_x k$。我们必须证明 $\sigma_{u,\ k}(w) \in \sigma_{u',\ k}(w')$。

设 $s,\ s' \in \mathcal{I}_x$ 是这些代表元等价性的见证，即

(1.1) $q,\ u \leq_x s$ 且 $\sigma_{q,\ s}(y) = \sigma_{u,\ s}(w)$,

(1.2) $q',\ u' \leq_x s'$ 和 $\sigma_{q',\ s'}(y') = \sigma_{u',\ s'}(w')$。

利用引理 16.1，令 $t \in \mathcal{I}_x$ 为满足以下条件的公共上界

$$q, q', u, u', s, s', k \leq_x t.$$

（注意，由于 $\leq_x$ 不是传递的，我们明确要求 t 扩展基条件q， u， q'， u'以及中间见证 s， s'， k。）

应用引理 16.2，我们得到

(2.1) $\sigma_{u,\ t} = \sigma_{s,\ t} \circ \sigma_{u,\ s}$ 和 $\sigma_{q,\ t} = \sigma_{s,\ t} \circ \sigma_{q,\ s}$，

(2.2) $\sigma_{u',\ t} = \sigma_{s',\ t} \circ \sigma_{u',\ s'}$ 和 $\sigma_{q',\ t} = \sigma_{s',\ t} \circ \sigma_{q',\ s'}$。

应用 (1.1) 和 (1.2)，我们得到：

$$\sigma_{u,t}(w) = \sigma_{s,t}(\sigma_{u,s}(w)) = \sigma_{s,t}(\sigma_{q,s}(y)) = \sigma_{q,t}(y),$$

类似地，$\sigma_{u',t}(w') = \sigma_{q',t}(y')$。

由于 $[q, y] \in^* [q', y']$ 且 $q, q' \leq_x t$，根据定义可知

$$\sigma_{q,t}(y) \in \sigma_{q',t}(y').$$

代入上面推导出的值，得到

$$\sigma_{u,t}(w) \in \sigma_{u',t}(w').$$

最后，我们将其拉回到 k。由于 $u, u', k \leq_x t$，引理 16.2 蕴含 $\sigma_{u,t} = \sigma_{k,t} \circ \sigma_{u,k}$ 且$\sigma_{u',t} = \sigma_{k,t} \circ \sigma_{u',k}$。因此，

$$\sigma_{k,t}(\sigma_{u,k}(w)) \in \sigma_{k,t}(\sigma_{u',k}(w')).$$

由 $\sigma_{k,t}$ 的初等性可知，$\sigma_{u,k}(w) \in \sigma_{u',k}(w')$。 □

我们还有以下结论。

引理 16.4。 $A \in^* B$ 当且仅当存在两对(q, y) 和(q', y')，以及 $r \in \mathcal{I}_x$，使得$[q, y] = A$, $[q', y'] = B$, $q, q' \leq_x r$，并且

$$\sigma_{q,r}(y) \in \sigma_{q',r}(y').$$

证明。由 $\in^*$的定义，正向蕴含显然成立。我们证明反向蕴含。假设存在 (q, y)、(q', y')，以及 r，它们见证了右侧成立。也就是说，

(1) $[q, y] = A, [q', y'] = B, r \in \mathcal{I}_x, q, q' \leq_x r$, and $\sigma_{q,r}(y) \in \sigma_{q',r}(y')$.

我们首先断言 $[q, y] \in^* [q', y']$。为此，我们必须证明，对于任意 $k \in \mathcal{I}_x$，若$q, q' \leq_x k$,

$$\sigma_{q,k}(y) \in \sigma_{q',k}(y').$$

令 k 为这样的条件。由引理16.1，取 $t \in \mathcal{I}_x$ 作为 q、 q'、 r和 k的公共上界。由引理16.2，我们得到以下交换关系：

(2.1) $\sigma_{q,t} = \sigma_{r,t} \circ \sigma_{q,r} = \sigma_{k,t} \circ \sigma_{q,k}$,

(2.2) $\sigma_{q',t} = \sigma_{r,t} \circ \sigma_{q',r} = \sigma_{k,t} \circ \sigma_{q',k}$.

将初等嵌入 $\sigma_{r,\ t}$ 应用于（1）中的包含关系，并利用（2.1）和（2.2）中的第一个等式，我们得到：

$$\sigma_{q,t}(y) \in \sigma_{q',t}(y').$$

代入 (2.1) 和 (2.2) 中的第二个等式，得到：

$$\sigma_{k,t}(\sigma_{q,k}(y)) \in \sigma_{k,t}(\sigma_{q',k}(y')).$$

由 $\sigma_{k,t}$ 的初等性，我们得出 $\sigma_{q,k}(y) \in \sigma_{q',k}(y')$。因此，$[q,y] \in^* [q',y']$。

最后，由于 $[q,y] = A$ 与 $[q',y'] = B$，由引理 16.3 可知 $A \in^* B$。 □

由于 $\leq_x$ 是可数有向的，故 $\in^*$ 是良基的。然后令 $W_{x,\infty}$ 为 $(\mathcal{D}, \in^*)$ 的传递塌缩。对于 $q \in \mathcal{I}_x$，我们令

$$\sigma_{q,\infty} : W_q \to W_{x,\infty}$$

由下式给出

$$\sigma_{q,\infty}(y) = [q,y].$$

应用引理 16.2，我们得到：

引理 16.5. $\sigma_{q,\infty}$ 是一个初等嵌入。

最后我们定义

$$\sigma_{x,\infty} : W_{x,\infty} \to N|\lambda$$

为满足以下性质的唯一嵌入

$$\sigma_{x,\infty}([q,y]) = \sigma_q(y).$$

同样，引理 16.2 蕴含 $\sigma_{x,\infty}$ 定义良好且为初等。为强调对 x 的依赖，我们将 $\sigma^x_{p,q}$ 记作$\sigma_{p,q}$，并将 $\sigma^x_{q,\infty}$ 记作 $\sigma_{q,\infty}$。

17. Reflection V: reflection of the directed system

注意，$\sigma_{x,\infty}$: $W_x \to N|\lambda$是 $N|\lambda$ 的一个 Hull；若我们知道 W_x 对 η-序列闭，则可用它证明 ref 在N 中成立。为实现这一闭包，我们需要构造一条链

$$(\sigma_{x_\alpha,\infty}, W_{x_\alpha} : \alpha < \eta)$$

使得对于 $\alpha < \beta$,

$$\sigma_{x_\alpha,\infty} \in \mathrm{rge}(\sigma_{x_\beta,\infty}).$$

本节的目标是确保这一点能够实现，我们将借鉴推论 15.6 背后的思路来做到这一点。具体而言，我们将证明，对于许多 $x = (\eta^x, \lambda^x, \kappa^x, \nu^x, Z^x)$ 和$y = (\eta^y, \lambda^y, \kappa^y, \nu^y, Z^y)$ 有

$$\sigma_{x,\infty} \in \mathrm{rge}(\sigma_{y,\infty}).$$

我们将研究满足 x 和 y，且 $\eta^x = \eta^y$ 和 $\lambda^x = \lambda^y$的情形。

定义 17.1. 设

$$x = (\eta^x, \lambda^x, \kappa^x, \nu^x, Z^x)$$

and

$$y = (\eta^y, \lambda^y, \kappa^y, \nu^y, Z^y)$$

是两个 ds-生成元。我们称 x **投影** 到 y 或 y 是 x (见图17.1) 的投影

(1) $\eta^x = \eta^y$ 和 $\lambda^x = \lambda^y$,

(2) $\kappa^y < \nu^y < \kappa^x$, (3)

$Z^y \cap \kappa^y = Z^x \cap \kappa^y$,

(4) $\kappa^y \in Z^x$, (5) 令

- $\mathcal{R} = \mathrm{cHull}^{\mathcal{H}|\nu^x}(\kappa^y \cup Z^x)$,
- $i : \mathcal{R} \to \mathcal{H}|\nu^x$ 为传递塌缩的逆映射，并且
  - $\mathfrak{r}$是 i的拉回 $\mathfrak{h}|\nu^x$，$\mathfrak{h}|\nu^y$ 是 $\mathfrak{r}$ 的

完全迭代，并且

$$Z^y = \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{h}|\nu^y}[i^{-1}[Z^x]].$$

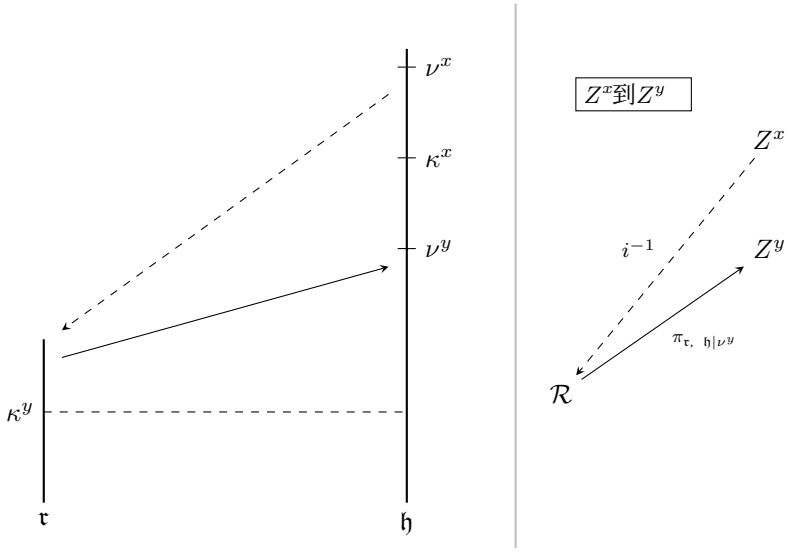


图17.1。 Z^x 先塌缩到 R，然后被$\pi_{\mathfrak{r},\ \mathfrak{h}|\nu^y}$ 向上推，生成 Z^y。

以下引理的证明与断言 15.5 的证明类似。下面 $\nu^x_{\mathfrak{q}}$ 只是 $(\nu^x)_{\mathfrak{q}}$，即 ν^x 在 $\mathfrak{q}$ 中的原像。

引理*17.2*。设 x 和 y 是两个 *ds*-生成元，使得 x投影到 y。固定一个针对 Z^x 的 *its*(ν^x)-证书 $\mathfrak{q}$，并令 $E \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}}$ 为指标最小的扩张子，使得临界点 *crit(E)* $\in(\kappa^y_{\mathfrak{q}}, \nu^x_{\mathfrak{q}})$且 *lh(E)* $> \nu^x_{\mathfrak{q}}$。那么 $\mathfrak{q}_E$是针对 Z^y 的 *its*(ν^y)-证书，且 $\nu^x_{\mathfrak{q}} = \nu^y_{\mathfrak{q}_E}$（见图*17.2*）。

证明。 令 $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^{\kappa^y}$。再令$\tau = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}(\nu^x_{\mathfrak{q}})$和$G = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}(E)$。注意，由于 $\mathfrak{q}$是一个 its(ν^x)-证书， $\nu^x_{\mathfrak{q}}$ 在 $\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}$ 中不可达；并且根据 E的选取，lh(E) $> \nu^x_{\mathfrak{q}}$。

我们验证 $\mathfrak{q}_E$ 成为证书所需的性质。我们有以下事实::

(1.1) $(\mathfrak{q}_E)^{\kappa^y} = \mathfrak{r}_G$,

(1.2) $\mathrm{crit}(G) > \kappa^y$,

(1.3) $\mathfrak{r}_G|\tau = \mathfrak{r}|\tau$,

(1.4) $\pi^{\kappa^y}_{\mathfrak{q}_E,\infty} \restriction (\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu^x_{\mathfrak{q}} + 1) = \pi^{\kappa^y}_{\mathfrak{q},\infty} \restriction (\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu^x_{\mathfrak{q}} + 1)$, and

(1.5) $\tau = \pi^{\kappa^y}_{\mathfrak{q}_E,\infty}(\nu^x_{\mathfrak{q}})$.

由条目 (1.4) 可立即推出 $\nu^y_{\mathfrak{q}_E} = \nu^x_{\mathfrak{q}}$。于是我们有:

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathfrak{q}_E,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu^y_{\mathfrak{q}_E}] &= \pi_{\mathfrak{r}_G|\tau,\mathfrak{h}|\nu^y} \circ \pi^{\kappa^y}_{\mathfrak{q}_E,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu^x_{\mathfrak{q}}] \\
&= \pi_{\mathfrak{r}|\tau,\mathfrak{h}|\nu^y} \circ \pi^{\kappa^y}_{\mathfrak{q},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu^x_{\mathfrak{q}}] \quad \text{(by (1.3) and (1.4))} \\
&= \pi_{\mathfrak{r}|\tau,\infty}[U] \quad \text{where } U = \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu^x_{\mathfrak{q}}] \\
&= Z^y
\end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为 $\mathfrak{q}$ 是 Z^x 的一个证书，这意味着

$$\begin{aligned} Z^x &= \pi_{\mathfrak{q},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu^x_{\mathfrak{q}}] \\ &= \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{h}} \circ \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu^x_{\mathfrak{q}}] \\ &= \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{h}}[U] \end{aligned}$$

因此，由于 x 投影到 y，我们有 $Z^y = \pi_{\mathfrak{r}|\tau,\ \mathfrak{h}|\nu^y}[U]$。 □

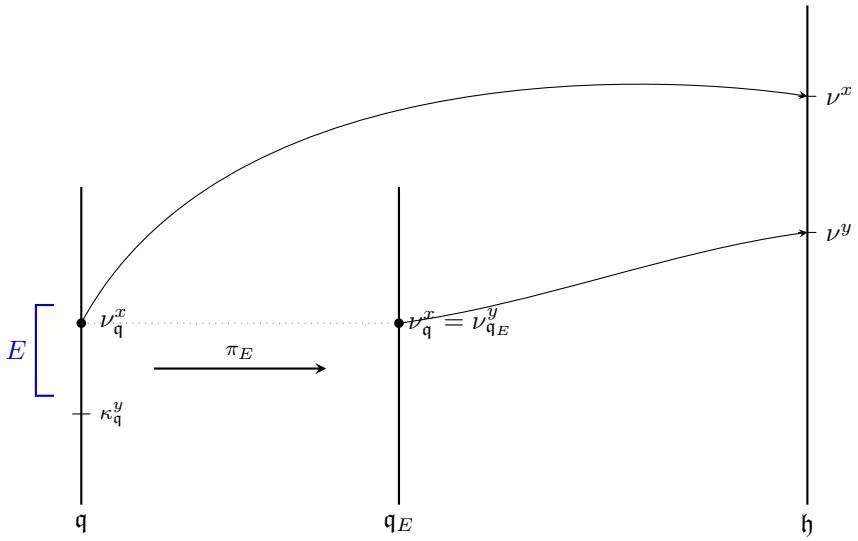


图17.2。 $\nu^x_{\mathfrak{q}} = \nu^y_{\mathfrak{q}_E}$ 和 $Z^y = \pi_{\mathfrak{q}_E,\ \infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu^x_{\mathfrak{q}}]$。

那么，假设 x 和 y 是两个 ds-生成元，且 x 投影到 y。如果 $\mathfrak{q}$ 是关于 Z^x 的 its(ν^x)-证书，且 $E \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}}$ 是满足临界点(E) $\in (\kappa^y_{\mathfrak{q}}, \nu^x_{\mathfrak{q}})$ 且 lh(E) $> \nu^x_{\mathfrak{q}}$ 的最小指标扩张子，我们称 $(\mathfrak{q}, E)$ 是一个 (x, y)-证书。引理17.2说明了更多内容。

引理17.3。 假设 x 和 y 是两个 *ds*-生成元，且 x 投影到 y。假设 $Y \in$its(x)，并且 $\mathfrak{q}$ 是关于 $Z^x[Y]$ 的一个 its(ν^x)-证书。设 $E \in \vec{E}^{\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}}$ 为满足 临界点(E) $\in (\kappa^y_{\mathfrak{q}}, \nu^x_{\mathfrak{q}})$ 且 lh$(E) > \nu^x_{\mathfrak{q}}$ 的最小指标扩张子。令

$$x(Y) = (\eta^x, \lambda^x, \kappa^x, \nu^x, Z^x[Y])$$

and

$$y(Y) = (\eta^y, \lambda^y, \kappa^y, \nu^y, Z^y[Y]).$$

那么$(\mathfrak{q}, E)$ 是一个$(x(Y)\ y(Y))$证书，并且 $\nu^y_{\mathfrak{q}_E} = \nu^x_{\mathfrak{q}}$。

定义17.4。 设 x 和 y 是两个 ds-生成元，且 x 投影到 y。如果 D由满足以下条件的 $Y \in$ its(x)组成，我们称 D为(x, y)-迭代空间：

- 一个(x, y)-证书$(\mathfrak{q}, E)$,
- 一个完整的 η-有界迭代 $\mathfrak{x}$，它来自 $\mathfrak{q}$，以及
- 一个完整的 η-有界迭代 $\mathfrak{y}$，它来自 $\mathfrak{q}_E$

使得[4] [6]

$$Y = \pi_{\mathfrak{x},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\eta_{\mathfrak{x}}] = \pi_{\mathfrak{y},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\eta_{\mathfrak{y}}].$$

[46]可以证明 $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_F$，其中$F = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}}(E)$。这类似于 tw 的嵌入规范化证明 o ext可以在 [21]中找到的结束者。由于我们实际上并不需要这一事实，因此不予证明。

接着令 $D_x = \{[Y]_{=_x} : Y \in D\}$ 和 $D_y = \{p|y : p \in D_x\}$，其中对于 $p = [Y] \in D_x$，$p|y = [Y]_{=_y}$。

引理 17.5. 设 x 和 y 是两个 *ds*-生成元，使得 x投影到 y，且 D 是(x, y)-迭代空间。则有以下结论：

(1) $D \in N$. *(2)* $D_x \subseteq \mathcal{I}_x \cap \mathrm{its}(Z^y)$（因此，对于每个 $p \in D_x$，$p|y$ 都有定义）。*(3)* 对于 Y，$Y' \in D$，$Y =_x Y'$，当且仅当 $Y =_y Y'$。

(4) 若 $p = [Y]_x \in D$，则

$$W_{p,x} = W_{p|y,y}$$

and

$$\sigma_{p,x} = \sigma_{p|y,y}.$$

(5) D_y 在 $\mathcal{I}_y$中稠密。此外，对于任意 p，$p' \in D_x$，若 $p \leq_x p'$ 且 $p|y \leq_y p'|y$，则

$$\sigma^x_{p,p'} = \sigma^y_{p|y,p'|y}.$$

(6) 对每个 p，$p' \in D_x$，都存在 $q \in D_x$，使得 *(a)* $p \leq_x q$ 且 $p' \leq_x q$，以及 *(b)* $p|y \leq_y q|y$ 且 $p'|y \leq_y q|y$。*(7)* $W_{x,\infty} = W_{y,\infty}$ 和 $\sigma_{x,\infty} = \sigma_{y,\infty}$。

证明。 我们设定 $\eta = \eta^x = \eta^y$ 和 $\lambda = \lambda^x = \lambda^y$。由于 $D \in N$ 可由 (x, y) 序数定义（事实上，只需由 x即可，因为 y 可由 x序数定义）。

条款 2： 对于条款 (2)，显然 $D_x \subseteq \mathcal{I}_x$。现在固定 $Y \in D_x$，并令 $(\mathfrak{q}, E)$ 为一个 (x, y)-证书，使得存在 $\mathfrak{q}$ 的一个 η-有界完全迭代 $\mathfrak{r}$，以及 $\mathfrak{q}_E$ 的一个 η-有界完全迭代 $\mathfrak{s}$，满足

$$Y = \pi_{\mathfrak{r},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{r}}|\eta_{\mathfrak{r}}] = \pi_{\mathfrak{s},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\eta_{\mathfrak{s}}].$$

现在注意到，由于 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{q}_E$的一个 η-有界完全迭代，我们有

$$\pi_{\mathfrak{s},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu^y_{\mathfrak{s}}] = Z^y[Y].$$

这是因为

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{s},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\nu^y_{\mathfrak{s}}] &= (\pi_{\mathfrak{q}_E,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}_E}|\nu^y_{\mathfrak{q}_E}])[Y] \\ &= Z^y[Y].\end{aligned}$$

因此，$Y \in \mathrm{its}(Z^y)$，进而 $D_y \subseteq \mathcal{I}_y$。

条款 3： 现在我们验证条款 (3)。令 $(\mathfrak{r}, i)$ 如定义 17.1中所述，我们有

$$Z^y[Y] = \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{h}|\nu^y}[i^{-1}[Z^x[Y]]] \quad \text{and} \quad Z^y[Y'] = \pi_{\mathfrak{r},\mathfrak{h}|\nu^y}[i^{-1}[Z^x[Y']]].$$

因此我们有

$$Z^x[Y] = Z^x[Y'] \text{ if and only if } Z^y[Y] = Z^y[Y'].$$

条款 4： 对于条款 (4)，设 $p = [Y]_x \in D_x$ 满足 $Y \in D$，并令 $(\mathfrak{q}, E)$ 为见证 $Y \in D$ 的 (x, y)-证书。令 $\mathfrak{x}$ 为 $\mathfrak{q}$ 的一个完备 η-有界迭代，且 $\mathfrak{y}$ 为 $\mathfrak{q}_E$ 的一个完备 η-有界迭代，使得

$$Y = \pi_{\mathfrak{x},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\eta_{\mathfrak{x}}] = \pi_{\mathfrak{y},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\eta_{\mathfrak{y}}].$$

于是我们有

$$W_{p,x} = N|\pi_{\mathfrak{x}|\nu^x_{\mathfrak{x}},\infty}(\lambda_{\mathfrak{x}}),$$

and

$$W_{p|y,y} = N|\pi_{\mathfrak{y}|\nu^y_{\mathfrak{y}},\infty}(\lambda_{\mathfrak{y}}).$$

设 $F = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}}(E)$。由引理 17.3 可知 $(\mathfrak{x},\ F)$ 是一个 $(x\ (Y)\ \ y\ (Y)$ 证书，因此

$$Z^y[Y] = \pi_{\mathfrak{x}_F,\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\nu^x_{\mathfrak{x}}]$$

且 $\nu^x_{\mathfrak{x}} = \nu^y_{\mathfrak{x}_F}$。因此，

$$\begin{aligned} W_{p|y,y} &= N|\pi_{\mathfrak{x}_F|\nu^x_{\mathfrak{x}},\infty}(\lambda_{\mathfrak{x}}) \\ &= N|\pi_{\mathfrak{x}|\nu^x_{\mathfrak{x}},\infty}(\lambda_{\mathfrak{x}}) \\ &= W_{p,x}. \end{aligned}$$

接下来我们需要证明 $\sigma_{p,x} = \sigma_{p|y,y}$。我们有 $\sigma_{p,x} = \sigma_u$，其中 $u = (\mathfrak{x}, \lambda_{\mathfrak{x}}, \nu^x_{\mathfrak{x}})$，并且$\sigma_{p|y,y} = \sigma_v$，其中 $v = (\mathfrak{x}_F, \lambda_{\mathfrak{x}}, \nu^x_{\mathfrak{x}})$（因为如上所示，$\mathfrak{x}_F$是 $Z^y[Y]$的一个 its(ν^y)-证书，且 $\nu^x_{\mathfrak{x}} = \nu^y_{\mathfrak{x}_F}$）。但由引理13.11 可知，$\sigma_u = \sigma_v$ 作为

$$\mathsf{rel}(Z^x[Y]) \restriction \lambda = \mathsf{rel}(Z^y[Y]) \restriction \lambda.$$

因此，我们得到

$$\sigma_{p,x} = \sigma_{p|y,y}.$$

条款5：为证明条款（5），我们先证明稠密性。固定一个 (x, y)-证书 $(\mathfrak{q}, E)$。任取$r \in \mathcal{I}_y$，并令 $\mathfrak{r}$ 为 Z^r的一个 its(ν^y)-证书。我们有 $\mathfrak{q}_E$ 是 Z^y的一个 its(ν^y)-证书。与引理 16.1 的证明一样，我们可以找到 $\mathfrak{s}$、$\mathfrak{x}$和 $\mathfrak{y}$，使得

(2.1) $\mathfrak{s}$是 $\mathfrak{q}$ 的一个完备 η-有界迭代,

(2.2) $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{q}_E$ 的一个完备 η-有界迭代,

(2.3) $\mathfrak{y}$ 是 $\mathfrak{r}$ 的一个完备 η-有界迭代，并且

(2.4) $\pi_{\mathfrak{s},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{s}}|\eta_{\mathfrak{s}}] = \pi_{\mathfrak{x},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\eta_{\mathfrak{x}}] = \pi_{\mathfrak{y},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\eta_{\mathfrak{y}}]$.

令 $Y = \pi_{\mathfrak{x},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\eta_{\mathfrak{x}}]$。(2.1) 和 (2.2) 蕴含 $Y \in D$。

令 $s_x = [Y]_x$ 和 $s_y = [Y]_y$。根据构造，$s_y \in D_y$。由于 $\mathfrak{y}$ 是 $\mathfrak{r}$ 的一个迭代，我们有$r \leq_y s_y$。因此，D_y 在 $\mathcal{I}_y$ 中稠密。

对于条款 (5) 的第二部分，假设 $p, p' \in D_x$、$p \leq_x p'$ 和 $p|y \leq_y p'|y$。根据条款 (4)，

(3.1) $W_{p,x} = W_{p|y,y}$ 以及 $W_{p',x} = W_{p'|y,y}$;

(3.2) $\sigma_{p,x} = \sigma_{p|y,y}$; 以及 (3.3) $\sigma_{p',x} = \sigma_{p'|y,y}$。

Thus

$$\begin{aligned} \sigma^x_{p,p'} &= \sigma^{-1}_{p',x} \circ \sigma_{p,x} \\ &= \sigma^{-1}_{p'|y,y} \circ \sigma_{p|y,y} \\ &= \sigma^y_{p|y,p'|y}. \end{aligned}$$

条款 6：对于条款 (6)，固定一个 (x, y)-证书 $(\mathfrak{q}, E)$，并令 $p, p' \in D$。重复条款 (5) 的证明中给出的论证，我们可以找到 $Y \in D$，使得对某个 η-有界完全迭代 $\mathfrak{x}$（$\mathfrak{q}$ 的）以及对某个 η-有界完全迭代 $\mathfrak{y}$（$\mathfrak{q}_E$ 的），

(4.1) $Y = \pi_{\mathfrak{x},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{x}}|\eta_{\mathfrak{x}}] = \pi_{\mathfrak{y},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{y}}|\eta_{\mathfrak{y}}]$,

(4.2) $p \leq_x [Y]_x$ and $p' \leq_x [Y]_x$, and

(4.3) $p|y \leq_y [Y]_y$ and $p'|y \leq_y [Y]_y$.

因此， $q = [Y]_x$ 即为所求。

第7条： 我们定义 $j : W_{x,\ \infty} \to W_{y,\ \infty}$。给定 $a \in W_{x,\ \infty}$，我们固定 $p_0 \in \mathcal{I}_x$ 使得$\sigma^x_{p_0,\ \infty}(a_0) = a$ 对某个 $a_0 \in W_{p_0,\ x}$成立。现在我们可以找到 $p \in D$ 使得 $p_0 \leq p$。接着我们令

$$j(a) = \sigma_{p|y,y}(\sigma^x_{p_0,p}(a_0)).$$

现在我们证明 j 定义良好。

断言17.6。 设 (p_0, a_0) 和 (p_1, a_1) 满足：对于 $i \in 2$, $p_i \in \mathcal{I}_x$, $a_i \in W_{p_i,\ x}$, 以及$\sigma^x_{p_i,\ \infty}(a_i) = a$。令 $q_0, q_1 \in D$ 满足：对于 $i \in 2$, $p_i \leq_x q_i$。那么

$$\sigma_{q_0|y,y}(\sigma^x_{p_0,q_0}(a_0)) = \sigma_{q_1|y,y}(\sigma^x_{p_1,q_1}(a_1)).$$

证明。 我们可以找到 $q \in D_x$ 使得对于 $i \in 2$, $q_i \leq_x q$, $q_i|y \leq_y q|y$, $p_i \leq_x q$ 以及 $p_i|y \leq_y q|y$。因此我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_{q_0|y,y}(\sigma^x_{p_0,q_0}(a_0)) &= \sigma_{q|y,y}(\sigma^y_{q_0|y,q|y}(\sigma^x_{p_0,q_0}(a_0))) \\
&= \sigma_{q,x}(\sigma^x_{q_0,q}(\sigma^x_{p_0,q_0}(a_0))) \\
&= \sigma_{q,x}(\sigma^x_{p_0,q}(a_0)) \\
&= \sigma_{p_0,x}(a_0) \\
&= \sigma_{p_1,x}(a_1) \\
&= \sigma_{q,x}(\sigma^x_{q_1,q}(\sigma^x_{p_1,q_1}(a_1))) \\
&= \sigma_{q|y,y}(\sigma^y_{q_1|y,q|y}(\sigma^x_{p_1,q_1}(a_1))) \\
&= \sigma_{q_1|y,y}(\sigma^x_{p_1,q_1}(a_1))
\end{aligned}$$

□

现在证明 j 是满射。事实上，固定 $b \in W_{y,\infty}$ ，并令 $p_0 \in D$ 满足：对于某个$b_0 \in W_{p_0|y,\ y}$, $\sigma^y_{p_0|y,\infty}$, 有 $(b_0) = b$。接着令 $a = \sigma^x_{p_0,\infty}(b_0)$。于是我们有 $j(a) = b$。因此我们有

$$W_{x,\infty} = W_{y,\infty}.$$

类似的论证表明 $\sigma_{x,\infty} = \sigma_{y,\infty}$。 □

我们通过将推论 15.6 应用到当前情形来结束本节（参见引理 17.8） .

定义17.7。 设 x 是一个 ds-生成元， 且 $\xi \in (\lambda^x, \kappa^x)$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的一个强基数。于是我们令 $x \downarrow \xi$ 为唯一满足以下条件的 ds-生成元 y： $\eta^y = \eta^x$, $\lambda^y = \lambda^x$, $\kappa^y = \xi$, 且 x 投影到 y。

引理 17.8。 设

- $\nu^0 < \gamma < \nu^1$ 是相对于 ς 的 $\mathcal{H}$ 的真截点伍丁基数,
- $\eta < \lambda < \kappa < \kappa' < \nu^0$ 是 $< \varsigma$-强基数 $\mathcal{H}$,
- $Z \in$its (ν^1) 满足$\{\eta, \lambda, \kappa, \kappa', \nu^0, \gamma\} \subseteq Z$,

- 对于 $i \in 2$, $x_i = (\eta, \lambda, \kappa, \nu^i, Z|\kappa)$ 是一个 *ds*-生成元。

Then

(1) $x_0 \downarrow \kappa \in \mathrm{rge}(\sigma_{x_1})$，*(2)* $\mathcal{F}_{x_0 \downarrow \kappa} \in \mathrm{rge}(\sigma_{x_1})$，*(3)* $W_{x_0} \in W_{x_1}$，以及 *(4)* $\sigma_{x_0,\infty} \in \mathrm{rge}(\sigma_{x_1,\infty})$。

18. 反射 VI: Θ^N 之上的闭包

本节的目标是整合前几节中定义的概念，以证明以下定理。

定理 18.1. 设 $\zeta < \eta < \lambda$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 和 $X \in N|\lambda$ 的强基数。于是存在 $W \in N|(\eta^+)^N$ 和 $\sigma : W \to N|\lambda$，使得

(1) $\sigma \in N$，*(2)* $X \in \mathrm{rge}(\sigma)$，且 *(3)* 在 N 中，$W^{\zeta^\omega} \subseteq W$。

证明。设 $\kappa' < \kappa$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的两个强基数，满足 $\lambda < \kappa'$。设 $\nu \in (\kappa, \varsigma)$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的一个真切点，满足 ν 是伍丁基数的极限，并且

$$\mathcal{H} \vDash \mathrm{cf}(\nu) = \eta.$$

设 $(\nu_\alpha : \alpha < \eta)$ 是由 $\mathcal{H}$ 中属于区间 (κ, ν) 的 Woodin 基数组成的序列，使得

- 区间 (κ, ν_0) 包含 $\mathcal{H}$ 中的一个 Woodin 基数，
- 对于所有 $\alpha < \eta$，区间 $(\nu_\alpha, \nu_{\alpha+1})$ 都包含 $\mathcal{H}$ 中的一个 Woodin 基数，
- 且 $\nu = \sup_{\alpha<\eta} \nu_\alpha$。

设 $\nu' = (\nu^+)^{\mathcal{H}}$，并设 $(\mathfrak{q}, Z)$ 满足

- $\{\zeta, \eta, \lambda, \kappa', \kappa\} \subseteq \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{q},\infty})$，
- $(\nu_\alpha : \alpha < \eta) \in \mathrm{rge}(\pi_{\mathfrak{q},\infty})$，
- $Z = \pi_{\mathfrak{q},\infty}[\mathcal{M}^{\mathfrak{q}}|\nu'_{\mathfrak{q}}]$，以及
- X 可由 $Z \cap \lambda$ 和一个实数在 $N|\lambda$ 中定义。

现在我们将定义一个序列 $(W_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \eta) \in N$，使得

(1.1) 对每个 $\alpha < \eta$，$W_\alpha \in N|(\eta^+)^N$，

(1.2) 对每个 $\alpha < \eta$，$\sigma_\alpha : W_\alpha \to N|\lambda$ 是一个初等嵌入，

(1.3) 对每个 $\alpha < \beta < \eta$，

$$\sigma_{\alpha,\beta} : W_\alpha \to W_\beta$$

是一个初等嵌入，并且 $(W_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta}) \in W_\beta$，

(1.4) 对于 $\alpha < \beta < \gamma < \eta$，

$$\sigma_{\alpha,\gamma} = \sigma_{\beta,\gamma} \circ \sigma_{\alpha,\beta},$$

(1.5) 对每个 $\alpha < \eta$，$N|\eta = W_\alpha|\eta$ 和 $\sigma_\alpha \restriction \eta = id$，并且

(1.6) $Z \cap \lambda \in \mathrm{rge}(\sigma_0)$。

假设我们有这样一个序列，下面的断言即可完成定理18.1的证明。令 W 为 $(W_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \eta)$ 的直接极限，并令 $\sigma : W \to N|\lambda$ 由 $\sigma(x) = \sigma_\alpha(x')$ 给出，其中 (α, x') 满足，令

$$\sigma_{\alpha,\infty} : W_\alpha \to W$$

为直接极限嵌入，$\sigma_{\alpha,\infty}(x') = x$。

断言 18.2. 假设

$$(W_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \eta) \in N$$

满足 *(1.1)-(1.6)*。设 W 为 $(W_\alpha \sigma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \eta)$ 的直接极限。则以下成立：

(1) $W \in N|(\eta^+)^N$。*(2)* 在 N 中，$W^{\zeta^\omega} \subseteq W$。*(3)* σ 是初等的，且 $X \in \mathrm{rge}(\sigma)$。

证明。(1.6) 蕴含 $X \in \mathrm{rge}(\sigma)$。子句 (1) 与 (3) 是标准的；我们验证条款 (2)。设$f : \zeta^\omega \to W$ 且 $f \in N$。于是，由于 η 是强正则基数，于 N 中（参见 [3, 定理 10.20]），我们得到

(2) 对某个 $\alpha < \eta$,

$$\mathrm{rge}(f) \subseteq \mathrm{rge}(\sigma_{\alpha,\infty}).$$

因为

$$W_\alpha \in W_{\alpha+1}|(\eta^+)^{W_{\alpha+1}},$$

我们可以固定一个满射

$$F : \eta^\omega \to W_\alpha$$

with $F \in W_{\alpha+1}$。同样，由于 η 是 N 中的一个强正则基数，我们有 $\beta < \eta$ 使得 t

(3) 对每个 $Y \in \zeta^\omega$，都存在 $Y' \in \beta^\omega$ 使得

$$F(Y') = \sigma_{\alpha,\infty}^{-1}(f(Y)).$$

那么，令 A 由满足 $Y' \in \beta^\omega$、$Y \in \zeta^\omega$ 且.....的有序对 (Y', Y) 组成

$$F(Y') = \sigma_{\alpha,\infty}^{-1}(f(Y)).$$

由于 $W_{\alpha+1}|\eta = N|\eta$ 和 $A \subseteq \beta^\omega \times \zeta^\omega$，我们有

(4.1) $A \in N|\eta$,

（4.2），因此，$A \in W_{\alpha+1}$。

因此，由于对于 $Y \in \zeta^\omega$, $\sigma_\alpha^{-1}{}_{,\infty}(f(Y)) = F(Y')$，其中 $Y' \in \beta^\omega$ 是任意满足 $(Y', Y) \in A$ 的集合，

(5) $(\sigma_{\alpha,\infty}^{-1}(f(Y)) : Y \in \zeta^\omega) \in W_{\alpha+1}$.

注意到 (1.1) 和 (1.5) 蕴含

$$\sigma_{\alpha+1,\infty} \restriction W_\alpha = id,$$

并且由于 $\sigma_{\alpha,\ \alpha+1} \in W_{\alpha+1}$ 以及 $\sigma_{\alpha,\ \infty} = \sigma_{\alpha+1,\ \infty} \circ \sigma_{\alpha,\ \alpha+1}$，我们得到

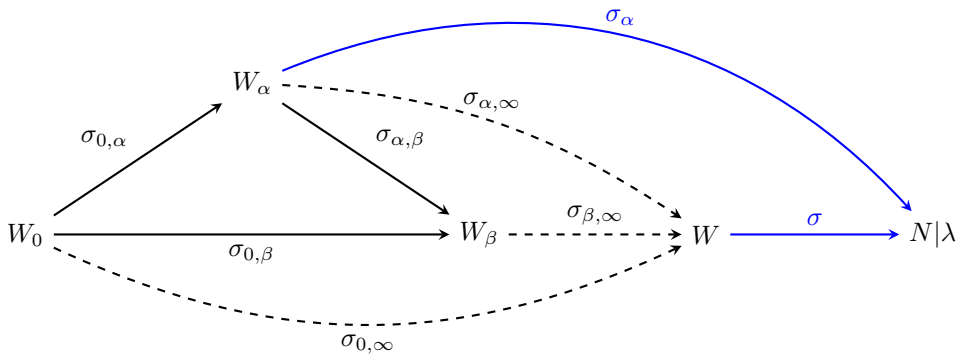
(6) $\sigma_{\alpha+1,\infty}(\sigma_{\alpha,\alpha+1}) = \sigma_{\alpha,\infty}$.

应用 (5) 和 (6)，我们得到 $f \in W$。 □

现在我们着手构造序列

$$(W_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \eta).$$

现在固定 $\alpha < \eta$。如果 $Y \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\mathcal{H}|\eta)$ 满足以下条件，我们称其为一个 $(\alpha,\ Z)$-良 集合：



包的关键性质

- $W =$极限 $(W_\alpha,\ \sigma_{\alpha,\ \beta})$ 与 $W \in N|(\eta^+)^N$。
- $\sigma_\alpha = \sigma \circ \sigma_{\alpha,\ \infty}$ 对所有 $\alpha < \eta$。
- $\sigma_{\alpha,\ \gamma} = \sigma_{\beta,\ \gamma} \circ \sigma_{\alpha,\ \beta}$ 对 $\alpha < \beta < \gamma < \eta$。
- $Z \cap \lambda \in \mathrm{rge}(\sigma_0) \implies X \in \mathrm{rge}(\sigma)$。

图 18.1。闭包的直接极限（$W_\alpha :\ \alpha < \eta$）以及最终嵌入 σ。

- $\alpha \in Y$，并且
- $Z[Y] \in \mathrm{its}(\nu_\alpha)$。

给定一个 ds-生成元 x，我们称 x 是一个 (α, Z)-*ds*-生成元，如果

- $\eta^x = \eta$，$\lambda^x = \lambda$，$\kappa^x = \kappa$，$\nu^x = \nu_\alpha$，并且
- 对于某个 (α, Z)-良好的 Y，$Z[Y] = Z^x$。

N注意，对于每个 $\alpha < \eta$，都存在一个 (α, Z)-ds-生成元。注意，我们有如下结论 .

(7) 设 x 和 y 是两个 (α, Z)-ds-生成元。那么

$$W_x = W_y \text{ and } \sigma_{x,\infty} = \sigma_{y,\infty}.$$

(7) 成立，因为 $\mathcal{I}_x$ 有一个包含于 $\mathcal{I}_y$ 的稠密子集，反之亦然。事实上，$Y \in \mathrm{its}(x) \cap \mathrm{its}(y)$的集合在 $\mathcal{I}_x$ 和 $\mathcal{I}_y$中都稠密。于是我们令

$$W_\alpha = W_x \text{ and } \sigma_\alpha = \sigma_{x,\infty}$$

其中 x 是任意一个 (α, Z)-ds-生成元。

现在设 $\alpha < \beta < \eta$。由引理 17.8 可知

(8) $W_\alpha \in W_\beta$, $\sigma_\beta \restriction W_\alpha = id$ and $\sigma_\alpha \in \mathrm{rge}(\sigma_\beta)$.

确实，我们可以固定 $Y \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\mathcal{H}|\eta)$ 使得 Y既是一个 (α, Z)-良好集合，又是一个 (β, Z)-良好集合。接着，我们可以应用引理 17.8 来

$$x_0 = (\eta, \lambda, \kappa, \nu_\alpha, Z[Y] \cap \nu_\alpha)$$

and

$$x_1 = (\eta, \lambda, \kappa, \nu_\beta, Z[Y] \cap \nu_\beta).$$

κ 在当前定理中所起的作用与引理 κ' 17.8 中的17.8相同，而 κ' 在当前定理中所起的作用与 κ引理 17.8中的

$$W_\alpha = W_{x_0} \text{ and } \sigma_\alpha = \sigma_{x_0,\infty}$$

and

$$W_\beta = W_{x_1} \text{ and } \sigma_\beta = \sigma_{x_1,\infty},$$

我们得到 (8)。[47]

对于 $\alpha < \beta < \eta$，令

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \sigma_\beta^{-1} \circ \sigma_\alpha.$$

由于 $\sigma_\beta \restriction W_\alpha = id$ 和 $\sigma_\alpha \in \mathrm{rge}(\sigma_\beta)$，我们确实有

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta \circ \sigma_{\alpha,\beta}.$$

现在可得序列

$$(W_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \eta) \in N$$

并且满足 (1.1)-(1.6)。那么令 W 为 $(W_\alpha、\sigma_{\alpha、\beta} : \alpha < \beta < \eta)$ 和 $\sigma : W \to N|\lambda$ 如上定义。由于 $Z \cap \lambda \in \mathrm{rge}(\sigma_0)$，可得 $X \in \mathrm{rge}(\sigma)$。定理 18.1 的其余子句由断言 18.2 推出。□

19. The Θ-sequence of N

令 $(\kappa_\alpha : \alpha < \varsigma)$ 为如下定义的序列：

(1) $\kappa_0 = \Theta_{\omega^\omega}$，(2) 对于 $\alpha < \varsigma$, $\kappa_{\alpha+1} = \Theta_{\kappa_\alpha^\omega}$,

(3) 对于极限序数 $\alpha < \varsigma$, $\kappa_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \kappa_\beta$。

[3, 定理 10.23] 确立了一个与下一个定理非常接近的结论。

定理 19.1. 序列 $(\kappa_\alpha : \alpha < \varsigma)$ 是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的强基数及其极限的递增枚举。

证明。令 $(\nu_\alpha : \alpha < \varsigma)$ 为 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的强基数及其极限的递增枚举。我们通过归纳法证明，对所有 $\alpha < \varsigma$, $\nu_\alpha = \kappa_\alpha$ 均成立。我们有 $\kappa_0 = \Theta^N$，且它是 $\mathcal{H}|\varsigma$ 的最小强基数。因此 $\kappa_0 = \nu_0$。现在假设 $\alpha > 0$，并且对所有 $\beta < \alpha$, $\kappa_\beta = \nu_\beta$ 均成立。如果α 是极限序数，那么显然 $\kappa_\alpha = \nu_\alpha$。

现在假设等式对 α 成立，并证明它对 $\alpha + 1$ 也成立。令 $\kappa = \kappa_\alpha = \nu_\alpha$ and$\nu = \nu_{\alpha+1}$。首先注意到，[3, 定理 10.13] 蕴含 $\kappa_{\alpha+1} \leq \nu$。因此，只需证明 $\nu \leq \kappa_{\alpha+1}$；为此，只需证明：若 $\eta' < \nu$，则存在一个满射 $f : \kappa^\omega \to \eta'$，使得 $f \in N$。于是固定 $\eta' < \nu$。

设 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个完全迭代，且 $\kappa_\mathfrak{q}$ 有定义，并且 $\sup(\pi_{\mathfrak{q},\infty}[\nu_\mathfrak{q}]) > \eta'$。令

- $\eta =$上确界$(\pi_{\mathfrak{q},\ \infty}[\nu_\mathfrak{q}])$,
- $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^\kappa = (\mathcal{R},\ \Psi)$,
- $\lambda = \pi_{\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}}(\nu_\mathfrak{q})$ 和
- $Z = \pi_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}}[\mathcal{M}^\mathfrak{q}|\nu_\mathfrak{q}]$。

[47] $\sigma_\beta \restriction W_\alpha = id$ 可由以下事实推出：$\sigma_\beta \restriction \eta^\omega = id$ 且 $W_\alpha \in N|(\eta^+)^N$，因此 $|W_\alpha|^{W_\beta} = \eta^\omega$。

现在我们得到， $\mathfrak{h}|\eta$ 是 $\mathfrak{r}|\lambda$ 的一个完全迭代，使得$\mathcal{T}_{\mathfrak{r}|\lambda,\ \mathfrak{h}|\eta}$ 位于 λ之上。

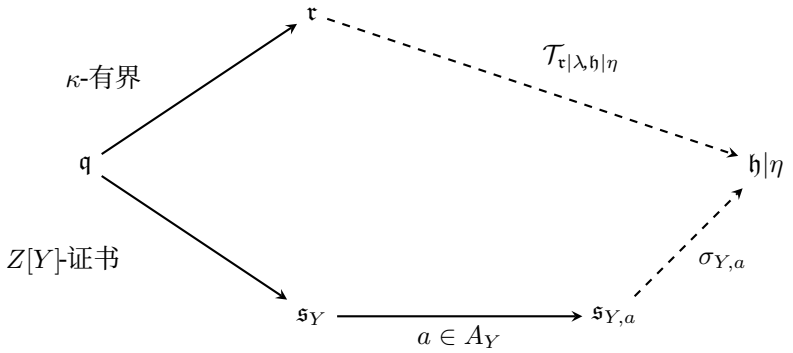
对于每个 $Y \in \mathsf{its}(Z)$，令 $\mathfrak{s}_Y = \mathfrak{q}_{Z[Y]}$。设 $\mathfrak{s}_Y = (\mathcal{S}_Y,\ \Sigma_Y)$。对于每个 Y，令 A_Y 为对 $\mathcal{S}_Y$ 的一个完全 Σ_Y-迭代进行编码的实数集。对于 $a \in A_Y$，令 $\mathfrak{s}_{Y,\ a}$ 为由 a 编码的迭代树的最后模型，并设

$$\mathfrak{s}_{Y,a} = (\mathcal{S}_{Y,a}, \Sigma_{Y,a}).$$

对于 $a \in A_Y$，令 $\sigma_{Y,\ a}$ 为满足以下条件的唯一嵌入

$$(\mathfrak{s}_{Y,a}, \sigma_{Y,a}) \in \mathsf{rel}(Z[Y]).$$

注意，函数 $(Y,\ a) \mapsto (\mathfrak{s}_{Y,\ a},\ \sigma_{Y,\ a})$ 属于 N(见推论 12.9)。



满射 f 的关键事实

- $f\ (Y, a, b) = \sigma_{Y,a}\ (\alpha_b) \in \eta$,
- f 的定义域由 $|\mathsf{its}(Z) \times A \times B| \leq \kappa^\omega$界定,
- $\sigma_{Y,\ a}$ 的唯一性确保 $f \in N$。

图19.1。迭代树以及定义满射 f 的嵌入 $\sigma_{Y,\ a}$ 。

最后，令 $A = \bigcup_{Y \in \mathsf{its}(Z)} A_Y$ 和 $B \in N$ 为一个编码可数序数的实数集。对于$b \in B$，令 α_b 为由 b 编码的序数。现在我们定义一个满射

$$f : \mathsf{its}(Z) \times A \times B \to \eta$$

并证明 $f \in N$。假设

$$(Y, a, b) \in \mathsf{its}(Z) \times A \times B.$$

若 $a \notin A_Y$ 或 $\alpha_b \notin \mathcal{S}_{Y,\ a}$，则集合 $f(Y,\ a,\ b) = 0$。现在假设 $a \in A_Y$ 且 $\alpha_b \in \mathcal{S}_{Y,\ a}$。那么集合

$$f(Y, a, b) = \sigma_{Y,a}(\alpha_b).$$

现在由 [3, 第 9 节。2] 可知， f 是到 η上的满射，[48] 并且由于函数 $(Y,\ a) \mapsto (\mathfrak{s}_{Y,\ a},\ \sigma_{Y,\ a})$ 属于 N，我们有 $f \in N$。因为 $|\mathsf{its}(Z) \times A \times B| \leq \kappa^\omega$ 属于 N，这就导出了所需的从 κ^ω 到 η' 的满射，从而完成证明。□

[48]这是因为，若 $\zeta < \eta$，则存在一个 $\mathfrak{q}$ 的完全 κ-有界迭代 $\mathfrak{w}$，以及一个 $\mathfrak{w}'$ 的完全迭代 $\mathfrak{w}$ such，使得 $\mathcal{T}_{\mathfrak{w},\ \mathfrak{w}'}$ 基于 $\mathfrak{w}|\nu_{\mathfrak{w}}$，并且 $\zeta_{\mathfrak{w}'}$ 已定义。

20. 极小 Nairian 模型满足 $\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$

$\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$ 是在定义 8.6 中引入的。$\mathsf{NT}_{\mathsf{base}}$ 的第一条款是 ZF + AH，其中 AH 是在定义 8.3 中引入的。因此，要验证 AH，我们需要证明对于每个 α，N_α 是 H-似的。回忆一下，若 M 是 H-似的，则

(1) M 是满的（见定义4.2第7条）且是分层的（见定义4.5），并且 (2) 若 M 是后继型（见定义4.2第2条），则 M 是强正则的（见定义4.2第8条）。

Now N_0 是遗传有限集的集合，因此显然它是极限型、满的，并且它 is hie是分层的。

N_1 是遗传可数集的集合。它是后继型且是满的。我们需要证明它是分层的。对于 $\alpha < \omega_1$，令 W_α 为所有满足 $\mathrm{Ord} \cap \mathsf{tc}(x) < \alpha$ 的 $x \in \mathsf{N}_1$ 的集合。W_α 是传递的，因为若 $x \in W_\alpha$ 且 $y \in x$，则 $\mathsf{tc}(y) \subseteq \mathsf{tc}(x)$，因此 $\mathrm{Ord} \cap \mathsf{tc}(y) < \alpha$，这意味着 $y \in W_\alpha$。

接下来令$(\kappa_\alpha : \alpha < \varsigma)$ 为紧接在定理19.1之前定义的序列。应用定理19.1我们得到，在 N 中，对每一个 $\alpha < \varsigma$，$\mathsf{N}_{\alpha+1} = H_{\kappa_\alpha^\omega}$。由于每个$H_{\kappa_\alpha^\omega}$是分层的，其见证序列为$(N|\beta : \beta < \kappa_{\alpha+1})$，并且极限阶段平凡地继承其 H-like性质自先前阶段，因此我们有 $N \vDash \mathsf{AH}$。

最后，定理13.7 与定理18.1 蕴含：对每一个 $\alpha < \varsigma$，反射$(X, \mathsf{N}_\alpha, \mathsf{N}_{\alpha+1})$ 在 N中成立。至此完成定理1.17的证明。

参考文献

[1] Howard Becker 和 Steve Jackson。《射影层级中的超紧性》。《符号逻辑杂志》，66(2):658–672，2001。[2] Omer Ben-Neria 和 Yair Hayut。《关于 ω-强可测基数》。《Forum Math. Sigma》，11:28，2023。编号/期号 e19。[3] DOUGLAS BLUE、Paul B Larson 和 GRIGOR SARGSYAN。《Nairian 模型》。arXiv:2501.18958，2025。[4] A. E. Caicedo、P. Larson、G. Sargsyan、R. Schindler、J. Steel 和 M. Zeman。《 $\mathbb{P}_{\max}$ 扩张中的平方原理》。《Israel J. Math.》，217(1):231–261，2017。[5] Matthew Foreman。《奇异基数组合学中的一些问题》。《Notre Dame Journal of Formal Logic》，46(3):309–322，2005。[6] Gabriel Goldberg。《强紧基数与序数可定义性》。《数学逻辑杂志》，24(01):2250010，2024。[7] Steve Jackson。《弱平方性质》。《符号逻辑杂志》，66(2):640–657，2001。[8] R. B. Jensen、E. Schimmerling、R. Schindler 和 J. R. Steel。《鼠的堆叠》。《J. Symb. Log.》，74 335，2009 1 315( ): – 。[9] Sandra Müller 和 Grigor Sargsyan。《迈向张模型的泛绝对性定理》，2023。[10] Itay Neeman 和 John Steel。《次紧基数处的等一致性》。《Arch. Math. Logic》，55 238，2016 1 2 207(-): – 。[11] G. Sargsyan。《奇异强极限基数处方块原理失效所导致的非驯服鼠》。《J. Math. Log.》，14(01):1450003，2014。[12] G. Sargsyan 和 N. D. Trang。《由可迭代性得到的封闭》。《Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B》，8:229–248，2021。[13] G. Sargsyan 和 N. D. Trang。《普遍贝尔集的泛绝对性的确切强度》，2021，见 https://arxiv.org/abs/2110.02725。[14] Grigor Sargsyan。《泛生成元》。进行中的工作，可按需索取。[15] Grigor Sargsyan 和 Nam Trang。《最大苏斯林公理》，Lect. Notes Log. 第56卷。剑桥：剑桥大学出版社，2024。[16] E. Schimmerling。《一个伍丁基数的核心模型中的组合原理》。《Ann. Pure Appl. Log.》，74:153–201，1995。[17] E. Schimmerling。《相干序列与线程》。《Adv. Math.》，216:89–117，2007。[18] Ernest Schimmerling 和 Martin Zeman。《核心模型中的方块原理》。《符号逻辑通报》，7 314，2001 3 305( ): – 。[19] J. R. Steel。《鼠对与苏斯林基数》，2022，见 https://math.berkeley.edu/∼steel/。[20] John R Steel。《PFA 蕴含 $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$》。《符号逻辑杂志》，70(4):1255–1296，2005。

[21] John R. Steel。《鼠对比较过程》，Lect. Notes Log. 第51卷。剑桥：剑桥大学出版社；纽约州伊萨卡：符号逻辑协会（ASL），2023。[22] S. Todorčević。《关于适当迫使公理的一则注记》。载于《公理化集合论》，Contemp. Math. 第31卷，第209–218页。美国数学会，1984。[23] M. Viale。《范畴迫使、MM^{+++}与强迫迫使公理理论的泛绝对性》。《J. Amer. Math. Soc.》，29(3):675–728，2016。[24] M. Viale 和 C. Weiß。《适当迫使公理的相容性强度》。《Adv. Math.》，228 2687，2011 2672: – 。[25] Hugh Woodin、Jacob Davis 和 Daniel Rodríguez。《hod二分》。《arXiv 预印本 arXiv:1605 00613》，2016。。[26] W. H. Woodin。《决定性与泛绝对性》。2021。[27] Martin Zeman。《$\neg\square_{\aleph_\omega}$ 的相容性强度的两个上界，以及两个连续 $\aleph_n$处的驻定集反射》。2017。

匹兹堡大学哲学系，宾夕法尼亚州匹兹堡 15260 doug.blue@pitt.edu

迈阿密大学数学系，俄亥俄州牛津 45056 larsonpb@miamioh.edu

波兰科学院数学研究所，ul. Śniadeckich 8,
00-656 华沙 gsargsyan@impan.pl