arXiv:2602.13090v1 [math.RT] 13 Feb 2026

# 关于包含一个固定温和表示的 Arthur 包

ALEXANDER HAZELTINE、AARYA KUMAR、ANDREW TUNG

Abstract. 我们确定经典 $p$-进群中包含某个固定温和表示的局部 Arthur 包的数量。更具体地说，给定一个支撑于整数上的温和扩展多段，我们确定所有由它经由局部 Arthur 包交叉理论所产生的算子作用而得到的扩展多段的数量。

## 1. 引言

设 $F$ 是一个 $p$-进域。为简单起见，在本引言中，我们令 $G_n$ 表示分裂群 $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$。我们指出，所得结果对准分裂正交群或辛群的纯内形式也成立，但在某些情形下，从表示论转向组合论论证可能需要额外假设（见注 2.21）。

朗兰兹纲领中的一个基本问题是建立局部朗兰兹对应，即对连通约化$p$-进群的复不可约容许表示的等价类进行参数化。Arthur 通过证明局部 Arthur 包的存在（[1, 定理 1.5.1]），确立了 $G_n$ 的局部朗兰兹对应。局部 Arthur 包理论在研究 $G_n$的表示时已被证明非常有用；然而，局部 Arthur 包往往表现得不太规整。例如，局部 Arthur 包常有非平凡交集。人们主要借助各种组合算法，在 [3, 11, 12] 中理解了这些交集。对于理论应用而言，更精确的结果和算法是值得期待的。例如，组合算法并不能直接为以下问题提供明确而统一的答案。

**问题 1.1**。 给定 $G_n$的不可约温和表示 $\pi$，确定包含 $\pi$的局部 *Arthur* 包的数量。

解决这个问题会产生重要影响。例如，已知的一种情形是 $\pi$ 为超尖点。在这种情况下，Mœglin 的工作表明，$\pi$ 属于尽可能多的局部 Arthur 包（[14, 15]；另见 [7, 定理 7.5]）。Gan、Gross 和 Prasad 随后利用这一结果构造了以下例子：

日期：2026年2月16日。2020 数学学科分类。 主要分类 11F70，22E50。关键词与短语。温和表示，局部 Arthur 包。第一位署名作者的研究获得了 AMS-Simons 差旅资助计划的支持。第二位和第三位署名作者的研究获得了密歇根大学数学系和美国国家科学基金会资助项目 DMS-2301507 的支持。

对非温和 Gan-Gross-Prasad 猜想而言，会产生非零重数的非相关 Arthur 参数（[7, §7]）。上述问题的解将推广 Mœglin 的结果，并为构造更多此类例子提供来源。

我们的主要结果是一个递归公式，用于确定包含 $\pi$的局部 Arthur 包的数量，其中 $\pi$ 是某种不可约温和表示。

**定理 1.2** (定理3.7)。 对于某些不可约温和表示$\pi$，存在一个递归公式，用于确定包含 $\pi$的局部 *Arthur* 包的数量。

这里简要介绍该定理背后的思路。首先，利用扩展多段对局部 Arthur 包进行参数化（[2, 12]；见§2.2），以及局部 Arthur 包交集的交叉理论（[11, 12]；见 §2.3），可将问题归结为理解某些扩展多段。这些扩展多段自然分为两种情形：扩展多段的支撑位于整数中（见定义 2.4），以及扩展多段的支撑位于半整数中。本文在定理 3.7 中完全解决了整数情形。因此，上述定理适用于其对应扩展多段的支撑完全位于整数中的任意温和表示。一般而言，温和表示 $\pi$ 的扩展多段可能同时支撑于整数和半整数中；此时，我们的定理给出了包含 $\pi$ 的局部 Arthur 包数量的下界。

定理 1.2 背后的关键思想是：一个（与温和表示 $\pi$相关联的）支撑在整数上的扩展多段，可以分解为若干块（见定义 3.3）。这一分解由 $\pi$ 唯一确定（引理 3.4）。接着，定理 3.7将包含 $\pi$ 的局部 Arthur 包的数量，与每个块“所属”的局部 Arthur 包数量联系起来（§3对此作了精确定义）。定理 3.6 还给出了一个递归公式，可根据较小的块来确定这一数量。

**注 1.3**。 要回答问题 *1.1*，目前只需补全半整数情形。我们预计，整数情形的结果对此会很有帮助，因为组合学中涉及的算子大多相同；不过，两者肯定也存在一些差异。例如，需要考虑一个额外的操作（部分对偶；见 [11, 定义 6。5]），而整数情形中并不存在这一操作。

我们指出，尽管定理1.2并未完全解决问题1.1，但在理论应用中仍然很有用。事实上，在一篇即将发表的文章中（[10]），我们将利用定理1.2来研究包含以下 theta 提升的 Arthur 包的数量：将不可约温和（或反温和）表示提升至上升塔首次出现处的 theta 提升 $G_n$。

本文的结构如下。在 §2 中，我们回顾局部 Arthur 包的若干结果。在 §3 中，我们精确陈述主要结果。为证明这些结果，我们在§4中汇集一些预备定义和陈述。在§5中，我们研究单独的块这一情形。基于这一理论，我们证明第一个主要

结果（包含给定块的局部 Arthur 包的数量，定理3.6）见 §6。最后，我们在 §7 研究块之间可能如何相互作用，并证明另一个主要结果（定理3.7），由此得到定理1.2。

**致谢**。第一位署名作者感谢 Yiannis Sakellaridis 的启发性交流，这些交流促成了本研究的发端，尤其是关于即将开展的局部 theta 对应应用。作者还感谢 Chi-Heng Lo 的启发性讨论与评论。最后，作者感谢 Wee Teck Gan 提供的宝贵意见与支持。

## 2. Background

回顾一下，$F$ 是一个特征 0 的非阿基米德局部域。目前，设 G 是定义在 $F$ 上的约化群，且 $G = \mathbf{G}(F)$。我们主要关注 $G$ 的复不可约容许表示的等价类集合，并将其记作 $\Pi(G)$。

令 $\mathbf{G}_n = \mathrm{Sp}_{2n}$、$\mathrm{SO}_{2n+1}$或$\mathbf{O}_{2n}$，并假设 $G_n^+ = \mathbf{G}_n(F)$ 是准分裂的。当 $G_n^+$是准分裂非分裂偶数维正交群时，我们指出，$G_n^+$具有一个准分裂非分裂纯内形式，记作 $G_n^-$. 为简便起见，令$G_n \in \{G_n^{\pm}\}$. 设 $\epsilon_{G_n} = -1$ 若 $G_n = G_n^-$ 且 $\epsilon_{G_n^+} = 1$，否则。我们预计，本文结果适用的群将比上述群更广泛。具体而言，我们预计，对于准分裂辛群、奇数维特殊正交群或偶数维正交群的纯内形式，也有类似结果；然而，关于局部 Arthur 包的必要预备结果尚未在所需的一般性下建立（见注记 2.21）。

**2.1. 局部 Arthur 包。** 在本小节中，我们回顾一些关于局部 Arthur 包的结果。回想一下，$\mathbf{O}_{2n}$ 是不连通的。因此，我们考虑单位连通分支 ${}^L G_n$ 的 L 群：$= {}^L G_n^{\circ}$. 我们用 $\widehat{G}_n(\mathbb{C})\widehat{\ }$表示当 $G_n$ 连通时通常的对偶群，否则令 $\mathbf{O}_{2n} := \mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C})$。

**定义 2.1。** $G_n$ 的局部 Arthur 参数是一个同态

$$\psi : W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L G_n$$

它可以表示为不可约表示的直和

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{r} \phi_i |\cdot|^{x_i} \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i}, \tag{2.1}$$

并满足以下条件：

*(1)* $\phi_i(W_F)$ 有界且由半单元素构成，并且 $\dim(\phi_i) = d_i$; *(2)* $x_i \in \mathbb{R}$ 和 $|x_i| < \frac{1}{2}$; *(3)* $\psi$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的两个副本上的限制都是代数的，$S_k$ 表示$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的唯一 $k$维不可约表示，并且我们有$\sum_{i=1}^{r} d_i a_i b_i = N$，其中若 $G_n$ 不是辛的，则 $N = 2n$，否则为 $N = 2n+1$。

两个 $G_n$ 的局部 *Arthur* 参数称为等价，如果它们在 $\widehat{\ }$下共轭， $G_n(\mathbb{C})$。我们记 $\Psi^+(G_n)$ 为局部 *Arthur* 参数等价类的集合。我们不区分局部 *Arthur* 参数 $\psi$及其等价类。我们记 $\Psi(G_n)$ 为有界局部亚瑟参数等价类的子集，即满足以下条件的 $\psi$ ：对于任意 $x_i = 0$ $i = 1$、.....、 $r$，在分解 (2.1)中。

根据 $\mathrm{GL}_d(F)$ 的局部朗兰兹对应，任意有界表示 $\phi$ 的 $W_F$ 都对应于一个不可约酉超尖表示$\rho$，其属于 $\mathrm{GL}_d(F)$（[8, 13, 18]）。因此，我们将（2.1）认作

$$\psi = \bigoplus_{\rho} \left( \bigoplus_{i \in I_\rho} \rho |\cdot|^{x_i} \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i} \right), \tag{2.2}$$

其中，第一个求和遍历 $\mathrm{GL}_d(F)$ 上的一个不可约酉超尖表示有限集 $\rho$，其中 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。

对于局部 Arthur 参数 $\psi \in \Psi(G_n)$，Arthur 证明了存在一个有限多重集 $\Pi_\psi$，称为局部亚瑟簇，由 $G_n$ 的不可约酉表示组成，并满足某些扭曲端oscopic特征标恒等式（[1, 定理 2.21]；另见 [5]）。我们不回顾 $\Pi_\psi$ 的精确定义。就本文目的而言，只需回顾使用扩展多段对 $\Pi_\psi$ 进行的参数化（见定理 2.7）。

Mœglin 证明了，对 $\Pi_\psi$ 的计算可以归约到“良好奇偶性”情形（见下文定理 2.3 ）。我们先回顾这一约化。

**定义 2.2**。设 $\psi$ 是如 (2.2) 中的局部 *Arthur* 参数。我们称$\psi$ 具有 良好奇偶性，如果 $\psi \in \Psi(G_n)$，即对所有 $i$，且每个直和项$\rho \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i}$ 都是自对偶的，并且与 $\psi$具有相同的类型。记 $\Psi_{gp}(G_n)$ 为 $\Psi^+(G_n)$ 中由具有良好奇偶性的局部 *Arthur* 参数组成的子集。

我们进一步阐明这一条件。考虑 $\rho|\cdot|^x \otimes S_a \otimes S_b$ 的一个不可约直和项 $\psi$，如 2.2 中所示。该直和项是自对偶且正交的，当且仅当 $x = 0$， $\rho$ 是正交的（分别为辛的），且 $a_i + b_i$ 是偶的（分别为奇的）。它是自对偶且辛的，当且仅当 $x = 0$， $\rho$ 是辛的（分别为正交的），且 $a_i + b_i$ 是偶的（分别为奇的）。

令 $\psi \in \Psi^+$（$G_n$）。由于 $\psi$ 是自对偶的，我们有一个分解 $\psi = \psi_{ngp} + \psi_{gp} + \psi_{ngp}^\vee$，其中 $\psi_{ngp}^\vee$ 表示 $\psi_{ngp}$的对偶， $\psi_{gp} \in \Psi_{gp}$（$G_n$），且 $\psi_{gp}$ 对于此分解是极大的，即如果按照（2.2）分解 $\psi_{ngp} + \psi_{ngp}^\vee$，则任意不可约直和项 $\rho|\cdot|^x \otimes S_a \otimes S_b$ 都不具有良好奇偶性。注意， $\psi_{gp}$ 由此分解唯一确定，但 $\psi_{ngp}$ 不一定唯一。Mœglin 证明了，局部亚瑟簇 $\Pi_\psi$ 可以由 $\Pi_{\psi_{gp}}$.构造。

**定理 2.3** （[16, 命题 5。1]）。设 $\psi \in \Psi^+$（$G_n$） 具有上述分解 $\psi = \psi_{ngp} + \psi_{gp} + \psi_{ngp}^\vee$。那么，存在 $\tau \in \Pi$（$\mathrm{GL}_d$（$F$）（由 $\psi_{ngp}$确定），使得对于任意 $\pi_{gp} \in \Pi_{\psi_{gp}}$，规范化抛物诱导 $\tau \rtimes \pi_{gp}$ 是不可约的，并且 $\Pi_\psi = \{\tau \rtimes \pi_{gp} \mid \pi_{gp} \in \Pi_{\psi_{gp}}\}$.

2.2. **扩展多重线段**。定理2.3 将问题1.1 归约到良好奇偶性的情形。本节中，我们回顾了使用扩展多重线段对 $\Pi_\psi$ 进行 $\psi \in \Psi_{gp}(G_n)$ 参数化的结果（定理 2.7）。此外，我们还

回顾了 [11, 12] 中关于局部 Arthur 包交叉理论的一些结果。

在本节中，我们固定使用以下记号。设 $\psi \in \Psi_{gp}(G_n)$，其分解为

$$\psi = \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{i \in I_\rho} \rho \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i}.$$

对于 $i \in I_\rho$，我们将 $A_i = \frac{a_i+b_i}{2} - 1$ 和 $B_i = \frac{a_i-b_i}{2}$ 设为

如果总序 $>_\psi$ 满足以下条件，则称其在 $I_\rho$ 上是 可容许的：

$$(P) \qquad \text{For } i, j \in I_\rho, \text{ if } A_i > A_j \text{ and } B_i > B_j, \text{ then } i >_\psi j.$$

有时我们考虑满足以下条件的 $>_\psi$ 上的序：

$$(P') \qquad \text{For } i, j \in I_\rho, \text{ if } B_i > B_j, \text{ then } i >_\psi j.$$

注意，$(P')$蕴含$(P)$。为简洁起见，当我们明确是在固定的可容许序下讨论时，常用 $>$ 代替 $>_\psi$。

现在假设我们已为 $\psi$. 固定了一个可容许序。我们将 $\psi$ 的支撑 定义为以下有序多重集的集合

$$\mathrm{supp}(\psi) := \cup_\rho \{[A_i, B_i]_\rho\}_{i \in (I_\rho, >)}.$$

注意，$\mathrm{supp}(\psi)$隐式依赖于固定的可容许序。

我们回顾扩展多重线段的定义。

**定义 2.4.**

*(1)* 一个扩展线段 是三元组$([A, B]_\rho, l, \eta)$，其中

- $[A, B]_\rho = \{\rho|\cdot|^A, \rho|\cdot|^{A-1}, \ldots, \rho|\cdot|^B\}$ 是某个$\mathrm{GL}_d(F)$的不可约酉超尖表示 $\rho$ 的线段；
- $l \in \mathbb{Z}$ 与 $0 \le l \le \frac{b}{2}$，其中 $b = \#[A, B]_\rho = A - B + 1$；
- $\eta \in \{\pm 1\}$。

*(2)* 对于 $G_n$ 的扩展多重线段 是由扩展线段构成的多重集的一个等价类（相对于下文定义的等价关系）

$$\mathcal{E} = \cup_\rho \{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i \in (I_\rho, >)}$$

使得

- $I_\rho$ 是一个带有固定容许全序 $>$ 的全序有限集；
- $A_i + B_i \ge 0$ 对所有 $\rho$ 和 $i \in I_\rho$；
- 我们有

$$\psi_{\mathcal{E}} = \bigoplus_{\rho} \bigoplus_{i \in I_\rho} \rho \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i},$$

其中$(a_i, b_i) = (A_i + B_i + 1, A_i - B_i + 1)$，是 $G_n$ 的良好奇偶性局部 *Arthur* 参数；

- 并且满足以下符号条件

$$\prod_{\rho} \prod_{i \in I_\rho} (-1)^{[\frac{b_i}{2}] + l_i} \eta_i^{b_i} = \epsilon_{G_n}. \tag{2.3}$$

*(3)* 扩展线段$([A, B]_\rho, l, \eta)$ 和$([A', B']_{\rho'}, l', \eta')$ 若弱等价，则

- $[A, B]_\rho = [A', B']_{\rho'}$；

- $l = l'$；并且
- $\eta = \eta'$ 当 $l = l' < \frac{b}{2}$ 时。两个扩展多重线段 $\mathcal{E} = \cup_\rho\{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}$ 和 $\mathcal{E}' = \cup_\rho\{([A'_i, B'_i]_\rho, l'_i, \eta'_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}$ 弱等价，当且仅当对于任意 $\rho$ 和 $i \in I_\rho$，扩展线段 $([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)$ 和 $([A'_i, B'_i]_\rho, l'_i, \eta'_i)$ 弱等价。

注意，如果 $l = \frac{b}{2}$，那么 $\eta$ 是任意的。在这种情形下，我们总是取 $\eta = 1$（除非另有明确说明，例如定义 2.14 中）。

*(4)* 我们将 $\mathcal{E}$ 的支撑 定义为有序多重集的集合

$$\mathrm{supp}(\mathcal{E}) = \cup_\rho\{[A_i, B_i]_\rho\}_{i\in(I_\rho,>)}.$$

我们默认将可容许序 $>$ 包含在 $\mathrm{supp}(\mathcal{E})$ 中。

*(5)* 如果 $\mathcal{E}$ 满足 $A_i \in \mathbb{Z}$ 对任意 $i \in I_\rho$ 及任意 $\rho$ 都成立，我们称其为整（或称其支撑在整数上）。*(6)* 我们用 $\mathrm{Eseg}(G_n)$ 表示 $G_n$ 的所有扩展多重线段在弱等价意义下的集合。此外，我们用 $\mathrm{Eseg}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 表示 $\mathrm{Eseg}(G_n)$ 的子集，该子集由在弱等价意义下的整扩展多重线段组成。

若上下文中可清楚判断可容许序 $>$，对于 $k \in I_\rho$，我们常将与 $k$ 相邻的唯一元素记为 $k+1 \in I_\rho$ 和 $k+1 > k$。

扩展多重线段中的数据若要逐一详细列出，可能会很繁琐。因此，我们按照[2, 第 3] 节中的相同方式，为每个扩展多重线段附上一个符号。下面举例说明。

**例 2.5.** 设 $\rho$ 是 $\mathrm{GL}_d(F)$ 的一个正交表示。该符号

$$\mathcal{E} = \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lhd & \lhd & \oplus & \ominus & \rhd & \rhd \\ & & & \lhd & \rhd & \\ & & & & & \ominus \end{array}_\rho$$

对应于 $\mathcal{E} = \{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i\in(1<2<3)}$ 的 $\mathrm{Sp}_{44d}(F)$，其中数据如下所示。

- $([A_1, B_1]_\rho, [A_2, B_2]_\rho, [A_3, B_3]_\rho) = ([4, -1]_\rho, [3, 2]_\rho, [4, 4]_\rho)$ 指定每一行的“支撑”。
- $(l_1, l_2, l_3) = (2, 1, 0)$ 统计每一行中的三角形对数。
- $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (1, 1, -1)$ 记录每一行中第一个圆圈的符号。注意，令 $\eta_2 = \pm 1$ 会得到弱等价的扩展多重线段。

相应的局部 *Arthur* 参数为

$$\psi_{\mathcal{E}} = \rho \otimes S_4 \otimes S_6 + \rho \otimes S_6 \otimes S_2 + \rho \otimes S_9 \otimes S_1.$$

记住上述符号后，我们常称扩展线段 $r = ([A, B]_\rho, l, \eta)$ 为 $\mathcal{E}$ 的一行，若 $r \in \mathcal{E}$. 此外，我们定义 $r$ 的支撑为 $\mathrm{supp}(r) = [A, B]_\rho$，并令 $A(r) = A$, $B(r) = B$, $a(r) = A(r) + B(r) + 1$, $b(r) = A(r) - B(r) + 1$, $l(r) = l$，以及 $\eta(r) = \eta$.

设 $\mathcal{E} \in \mathrm{Eseg}(G_n)$。我们通过 [12, Algorithm 5.18]（这是对 [9, Algorithm 6.3] 的改编）为 $G_n$ 附加一个表示 $\pi(\mathcal{E})$。我们有 $\pi(\mathcal{E})$ 为零，或者 $\pi(\mathcal{E}) \in \Pi(G_n)$。此处不再重述完整构造，因为就我们的目的而言，回顾定义的一些推论便已足够。

**注 2.6**。 我们指出， [12, Algorithm5.18] 与 *Atobe* 在 [2, §32] 中给出的定义一致，适用于分裂辛群和奇数维特殊正交群。相较于 [12, Algorithm5.18]， [2, §32] 的优点在于，它只要求局部朗兰兹对应，因此适用范围比 [2, §32] 更广；后者要求具备 [6]中所述的导数理论。特别是， [12, Algorithm5.18] 对准分裂偶数正交群是良定义的。

E扩展多重线段为局部 Arthur 包提供了一种参数化 ts.

**定理 2.7**。 设 $\psi = \bigoplus_\rho \bigoplus_{i\in I_\rho} \rho \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i}$ 是一个良好奇偶性的局部 *Arthur* 参数，对应于假设为准分裂的 $G_n$ 。对每个满足以下条件的 $\rho$，在 $I_\rho$ 上选取一个可容许序 $>$：若对某个 $i \in I_\rho$有 $P'$，则——

$$\bigoplus_{\pi\in\Pi_\psi} \pi = \bigoplus_{\mathcal{E}} \pi(\mathcal{E}),$$

其中 $\mathcal{E}$ 遍历所有满足 $\mathrm{supp}(\mathcal{E}) = \mathrm{supp}(\psi)$ 且$\pi(\mathcal{E}) \neq 0$的扩展多重线段。

对于分裂辛群和奇数维特殊正交群，上述定理最早由 Atobe 通过 [2,§3.2]中的构造 $\pi(\mathcal{E})$ 证明（[2, 定理 3.3]）。随后， [9, 算法 6.3] 提供了另一种计算 [2, §3.2] 中给出的表示 $\pi(\mathcal{E})$的方法，该方法仅使用局部朗兰兹对应。最后，在 [12, 定理 6.10], 中，上述定理被证明适用于准分裂偶数正交群（假设存在如 [4] 中所述的局部朗兰兹对应）。

Mœglin 证明了局部 Arthur 包是无重数的（[17]）。因此，我们有以下推论。

**推论 2.8**。 令 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathrm{Eseg}(G_n)$，并假设 $\mathrm{supp}(\mathcal{E}_1) = \mathrm{supp}(\mathcal{E}_2)$。若$\frac{a_i-b_i}{2} < 0$ 对某个 ~~$i \in$~~ $I_\rho$成立，则我们还要求 $I_\rho$ 上的序为 $(P')$。若$\pi(\mathcal{E}_1) = \pi(\mathcal{E}_2) \neq 0$，则 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.

回顾一下，$\mathrm{supp}(\mathcal{E})$ 隐含地记录了 $\mathcal{E} \in \mathrm{Eseg}(G_n)$ 上的可容许序。因此，上述推论中的假设 $\mathrm{supp}(\mathcal{E}_1) = \mathrm{supp}(\mathcal{E}_2)$ 也断言 $\mathcal{E}_1$ 与 $\mathcal{E}_2$ 上的可容许序一致。

2.3. **交集**。 本小节中，我们回顾 [11, 12] 所发展的局部 Arthur 包的交叉理论。我们先回顾用于对这些交集进行分类的各种算子（见定理 2.18）， 以及其他一些有用算子及其性质。

我们注意到，算子的作用通常只取决于一个固定的 $\rho$. 为简化算子的定义，我们引入以下记号。

**定义 2.9.** 设 $\mathcal{E} = \cup_\rho \{([A_i, B_i]_\rho,\ l_i,\ \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)} \in \mathrm{Eseg}(G_n)$。 我们定义

$$\mathcal{E}_\rho = \{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)},\ \mathcal{E}^\rho = \cup_{\rho'\ncong\rho}\{([A_i, B_i]_{\rho'}, l_i, \eta_i)\}_{i\in(I_{\rho'},>)}.$$

我们令 $\mathrm{Vseg}(G_n)$ 表示形如 $\mathcal{F} = \cup_{\rho'}\mathcal{E}_{\rho'}$ 的元素集合，其中并集遍历一个由不可约自对偶超尖表示组成的有限集$\rho'$ ，其属于 $\mathrm{GL}_d(F)$ $d \geq 1$，并且 $\mathcal{E} \in \mathrm{Eseg}(G_n)$。 本质上， $\mathcal{F}$ 是某个群的扩展多段，只是我们不强制要求符号条件 (2.3)。我们称 $\mathcal{F}$ 为一个 虚拟扩展多段。

我们还令 $Vseg_\rho(G_n)$ 表示形如 $\mathcal{E}_\rho$ 的元素集合，其中 $\mathcal{E}$ ∈取遍某个$G_n$ $Eseg(G_n)$，并令 $Vseg^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 表示 $\mathcal{F}=\cup_{\rho'}\mathcal{E}_{\rho'}$ 的集合，其中 $\mathcal{E}\in$ 取遍某个 $^{\mathbb{Z}}$ $Eseg^{\mathbb{Z}}(G_n)$。我们令 $Vseg^{\mathbb{Z}}_\rho(G_n)=Vseg_\rho(G_n)\cap Vseg^{\mathbb{Z}}(G_n)$。良好奇偶性要求可能导致 $Vseg^{\mathbb{Z}}_\rho(G_n)$ 为空；因此当我们书写它时，默认假设 $\rho$的取值使其非空。

我们还回顾一下符号的定义。

**定义 2.10**。符号是由扩展线段组成的多重集

$$\mathcal{E}=\cup_\rho\{([A_i,B_i]_\rho,l_i,\eta_i)\}_{i\in(I_\rho>)},$$

它满足定义 2.4(2) 中的相同条件，但省略条件 $0\le l_i\le \frac{b_i}{2}$，对每个 $i\in I_\rho$。

任意可容许序的变换，都可以由行交换算子 $R_k$ 的复合导出；我们在 [11, 定义 3.15]中回顾过这些算子。

**定义 2.11** (行交换)。设 $\mathcal{E}$ 是一个符号，其中

$$\mathcal{E}_\rho=\{([A_i,B_i]_\rho,l_i,\eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}.$$

对于 $k<k+1\in I_\rho$，令 $\gg$ 为 $I_\rho$ 上的全序，由 $k\gg k+1$ 定义；若$(i,j)\neq(k,k+1)$，则当且仅当 $i>j$.时，$i\gg j$

若 $\gg$ 不是 $I_\rho$上的可容许序，则定义 $R_k(\mathcal{E})=\mathcal{E}$。否则，定义

$$R_k(\mathcal{E}_\rho)=\{([A_i,B_i]_\rho,l'_i,\eta'_i)\}_{i\in(I_\rho,\gg)},$$

其中，对于给定的 $i\neq k$、$k+1$，$(l'_i,\eta'_i)=(l_i,\eta_i)$ 以及$(l'_k,\eta'_k)$和$(l'_{k+1},\eta'_{k+1})$如下给出：记 $\epsilon=(-1)^{A_k-B_k}\eta_k\eta_{k+1}$。

情形 1. $[A_k,B_k]_\rho\supset[A_{k+1},B_{k+1}]_\rho$: *I*

*n th*属于情形时，我们令 $(l'_{k+1}\ \eta'_{k+1})=(l_{k+1},(-1)^{A_k-B_k}\eta_{k+1})$，并且

*(a)* 若 $\epsilon=1$ 且 $b_k-2l_k<2(b_{k+1}-2l_{k+1})$，则

$$(l'_k,\eta'_k)=(b_k-(l_k+(b_{k+1}-2l_{k+1})),(-1)^{A_{k+1}-B_{k+1}}\eta_k).$$

*(b)* 若 $\epsilon=1$ 且 $b_k-2l_k\ge 2\ (b_{k+1}-2l_{k+1})$，则

$$(l'_k,\eta'_k)=(l_k+(b_{k+1}-2l_{k+1}),(-1)^{A_{k+1}-B_{k+1}+1}\eta_k).$$

*(c)* 若 $\epsilon=-1$，则

$$(l'_k,\eta'_k)=(l_k-(b_{k+1}-2l_{k+1}),(-1)^{A_{k+1}-B_{k+1}+1}\eta_k).$$

情况 2. $[A_k,B_k]_\rho\subset[A_{k+1},B_{k+1}]_\rho$;

*In this case, we set* $(l'_k,\eta'_k)=(l_k,(-1)^{A_{k+1}-B_{k+1}}\eta_k)$, *and*

*(a) If* $\epsilon=1$ *and* $b_{k+1}-2l_{k+1}<2(b_k-2l_k)$, *then*

$$(l'_{k+1},\eta'_{k+1})=(b_{k+1}-(l_{k+1}+(b_k-2l_k)),(-1)^{A_k-B_k}\eta_{k+1}).$$

*(b) If* $\epsilon=1$ *and* $b_{k+1}-2l_{k+1}\ge 2(b_k-2l_k)$, *then*

$$(l'_{k+1},\eta'_{k+1})=(l_{k+1}+(b_k-2l_k),(-1)^{A_k-B_k+1}\eta_{k+1}).$$

*(c) If* $\epsilon=-1$, *then*

$$(l'_{k+1},\eta'_{k+1})=(l_{k+1}-(b_k-2l_k),(-1)^{A_k-B_k+1}\eta_{k+1}).$$

最后，我们定义 $R_k(\mathcal{E})=\mathcal{E}^\rho\cup R_k(\mathcal{E}_\rho)$。

我们指出， [2, 第 4 节2]中还给出了另一种行交换的定义；不过，当 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$. 这些定义是一致的。接下来要回顾的算子称为并交。

**定义 2.12** (并交)。 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{Eseg}(G)$。对于 $k < k+1 \in I_\rho$，我们定义一个称为并交的算子 $ui_k$，作用于 $\mathcal{E}$，如下所示。记

$$\mathcal{E}_\rho = \{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}.$$

记 $\epsilon = (-1)^{A_k - B_k}\eta_k\eta_{k+1}$. 若 $A_{k+1} > A_k$、 $B_{k+1} > B_k$，且满足以下任一情形：

情形 *1*. $\epsilon = 1$ 和 $A_{k+1} - l_{k+1} = A_k - l_k$，情况 *2*. $\epsilon = 1$ 和 $B_{k+1} + l_{k+1} = B_k + l_k$，情形*3*. $\epsilon = -1$ 和 $B_{k+1} + l_{k+1} = A_k - l_k + 1$.

我们定义

$$ui_k(\mathcal{E}_\rho) = \{([A'_i, B'_i]_\rho, l'_i, \eta'_i)\}_{i\in(I_\rho,>)},$$

其中 $([A'_i, B'_i]_\rho、\ l'_i、\ \eta'_i) = ([A_i, B_i]_\rho、\ l_i、\ \eta_i)$ 对于 $i \neq k、\ k+1、\ [A'_k, B'_k]_\rho = [A_{k+1}, B_k]_\rho、$ $[A'_{k+1}, B'_{k+1}]_\rho = [A_k, B_{k+1}]_\rho$，以及 $(l'_k、\ \eta'_k、\ l'_{k+1}、\ \eta'_{k+1})$，分别按以下情形给出：

(1) 在情形 *1* 中，$(l'_k, \eta'_k, l'_{k+1}, \eta'_{k+1}) = (l_k, \eta_k, l_{k+1} - (A_{k+1} - A_k), (-1)^{A_{k+1}-A_k}\eta_{k+1})$;

(2) 在情况 *2* 中，若 $b_k - 2l_k \geq A_{k+1} - A_k$，则

$$(l'_k, \eta'_k, l'_{k+1}, \eta'_{k+1}) = (l_k + (A_{k+1} - A_k), \eta_k, l_{k+1}, (-1)^{A_{k+1}-A_k}\eta_{k+1}),$$

若 $b_k - 2l_k < A_{k+1} - A_k$，则

$$(l'_k, \eta'_k, l'_{k+1}, \eta'_{k+1}) = (b_k - l_k, -\eta_k, l_{k+1}, (-1)^{A_{k+1}-A_k}\eta_{k+1});$$

(3) 在情形*3*中，若 $l_{k+1} \leq l_k$，则

$$(l'_k, \eta'_k, l'_{k+1}, \eta'_{k+1}) = (l_k, \eta_k, l_{k+1}, (-1)^{A_{k+1}-A_k}\eta_{k+1}),$$

若 $l_{k+1} > l_k$，则

$$(l'_k, \eta'_k, l'_{k+1}, \eta'_{k+1}) = (l_k, \eta_k, l_k, (-1)^{A_{k+1}-A_k+1}\eta_{k+1});$$

(3′) 在情形*3*中，若 $l_k = l_{k+1} = 0$，则我们从$ui_k(\mathcal{E}_\rho)$中删除$([A'_{k+1}, B'_{k+1}]_\rho, l'_{k+1}, \eta'_{k+1})$。

否则，我们定义 $ui_k(\mathcal{E}_\rho) = \mathcal{E}_\rho$。无论如何，我们定义 $ui_k(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^\rho \cup ui_k(\mathcal{E}_\rho)$。我们称 $ui_k$ 适用于 $\mathcal{E}$或 $\mathcal{E}_\rho$，若 $ui_k(\mathcal{E}) \neq \mathcal{E}$。若 $\mathcal{E}_\rho$ 属于情形 *1*（分别为情形 *2*、*3*、*3'*），则称此 $ui_k$为类型 *1*（分别为类型 *2*、*3*、*3'*）。

我们还考虑如下行交换与并交算子的复合。

**定义 2.13**。 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{Eseg}(G)$ 并记 $\mathcal{E}_\rho = \{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}$.给定 $i, j \in I_\rho$，我们定义 $ui_{i,\ j}(\mathcal{E}_\rho) = \mathcal{E}_\rho$ 除非

*1*. 我们有 $A_i < A_j$、 $B_i < B_j$，且 $(j, i, >')$ 对于 $I_\rho$ 上的某个可容许序 $>'$ 是一个相邻对，并且 *2*. $ui_i$ 适用于 $\mathcal{E}_{\rho,>'}$

在此情形中，我们定义 $ui_{i,j}(\mathcal{E}_\rho) := (ui_i(\mathcal{E}_{\rho,>'}))_>$，使得 $ui_{i,j}(\mathcal{E}_\rho)$ 与 $\mathcal{E}_\rho$ 的可容许序相同。（若 $ui_i$ 为类型 3'，则我们删除第 $j$ 行。）最后，我们定义 $ui_{i,j}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^\rho \cup ui_{i,j}(\mathcal{E}_\rho)$。

我们称$ui_{i,\ j}$ 在 $\mathcal{E}$ 上可用，当且仅当$ui_{i,\ j}(\mathcal{E}) \neq \mathcal{E}$。此外，如果操作$ui_{i,\ j}$的类型为 1、2、3 或 3′，也就是说，定义 $ui_i$ 2.12 中的操作的类型分别为 1、2、3 或 3′。

下一个算子称为对偶算子。

**定义 2.14** (对偶)。设 $\mathcal{E} = \cup_\rho \{([A_i, B_i]_\rho, l_i, \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}$ 是一个扩展多段，且其上的可容许序 $>$ 满足$(P')$ 对所有 $\rho$均成立。我们定义

$$dual(\mathcal{E}) = \cup_\rho \{([A_i, -B_i]_\rho, l'_i, \eta'_i)\}_{i\in(I_\rho,>')}$$

如下：

(1) 当且仅当 $j > i$.时，序 $>'$ 由 $i >' j$ 定义

(2) 我们设

$$l'_i = \begin{cases} l_i + B_i & \text{if } B_i \in \mathbb{Z}, \\ l_i + B_i + \frac{1}{2}(-1)^{\alpha_i}\eta_i & \text{if } B_i \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

and

$$\eta'_i = \begin{cases} (-1)^{\alpha_i+\beta_i}\eta_i & \text{if } B_i \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{\alpha_i+\beta_i+1}\eta_i & \text{if } B_i \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

其中 $\alpha_i = \sum_{j\in I_\rho,\ j<i} a_j$, 以及 $\beta_i = \sum_{j\in I_\rho,\ j>i} b_j$, $a_j = A_j + B_j + 1$, $b_j = A_j - B_j + 1$.

(3) 当 $B_i \notin \mathbb{Z}$ 和 $l_i = \frac{b_i}{2}$ 时,–我们令 $\eta_i = (-1)^{\alpha_i+1}$.

若 $\mathcal{F} = \mathcal{E}_\rho$，我们定义 $dual(\mathcal{F})$: $= (dual(\mathcal{E}))_\rho$。

作为简写，对每个 $i \in I_\rho$，令 $r_i = ([A_i, B_i]_\rho,\ l_i,\ \eta_i)$。然后我们用 $\widehat{r_i}$ 表示对偶算子作用于此行上的 $\mathcal{E}$ 所产生的结果，即，

$$\widehat{r_i} = ([A_i, -B_i]_\rho, l'_i, \eta'_i).$$

注意，若 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$，则 $\pi(dual(\mathcal{E}))$ 是 $\pi(\mathcal{E})$ 的 Aubert-Zelevinsky 对偶（[2, 定理 6.2] 若 $G_n = \mathrm{Sp}_{2n}(F)$，以及 [12, 命题 6.11] 若 $G_n = \mathrm{O}^{\pm}_{2n}(F)$）。就我们的目的而言，使用以下直接推论就足够了。

引理 2.15. 设 $\mathcal{E} \in Eseg(G_n)$ 满足 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$. 则 $\pi(dual(\mathcal{E})) \neq 0$。此外，若 $\mathcal{E}' \in Eseg(G_n)$ 满足 $\pi(\mathcal{E}') = \pi(\mathcal{E})$，则 $\pi(dual(\mathcal{E}')) = \pi(dual(\mathcal{E}))$。

由 [11, 12], ，我们理解并交的逆算子不属于类型 3'。

**引理 2.16.** 若 $ui$ 不属于类型 3'，则其逆算子具有同一类型的形式 $dual \circ ui \circ dual$。

为了完善局部 Arthur 包的交叉理论，还需要另一种算子，称为部分对偶算子，记作 $dual_k$ (参见 [11, 定义 6。5]) 。不过，我们的主要结果（定理3.7）并不需要它，因为当 $\mathcal{E} \in \mathrm{Vseg}^{\mathbb{Z}}(G_n)$时它不适用。

我们将区分一些在局部 Arthur 包的交集中起关键作用的算子（见下文定理 2.18 ）。我们定义

$$\Psi(\pi)=\{\psi\in\Psi(G_n)\mid \pi\in\Pi_\psi\}.$$

**定义 2.17.** 算子 $dual\circ ui\circ dual$、 $ui^{-1}$和 $dual_k^-$ 称为升算子。给定局部 *Arthur* 参数 $\psi_1$、 $\psi_2\in\Psi(\pi)$，若存在一列升算子$(T_i)_{i=1}^l$ 使得

$$\mathcal{E}_1=(T_l\circ T_{l-1}\circ\cdots\circ T_1)(\mathcal{E}_2),$$

其中 $\mathcal{E}_j\in\mathrm{Eseg}(G_n)$ 满足 $\psi_{\mathcal{E}_j}=\psi_j$，且 $\pi(\mathcal{E}_j)=\pi$，其中 $j=1,\ 2$。

升算子完全决定局部 Arthur 包的交集。

**定理 2.18.** 设 $\mathcal{E}\in\mathrm{Eseg}(G_n)$ 满足 $\pi(\mathcal{E})\neq 0.$。则有以下结论。

*(1)* 若 $T$是升算子或其逆算子，则 $\pi(\mathcal{E})=\pi(T(\mathcal{E}))$。*(2)* 若 $\mathcal{E}'$是一个扩展多重线段，且 $\pi(\mathcal{E})=\pi(\mathcal{E}')$，则 $\mathcal{E}$和$\mathcal{E}'$ 可通过升算子、其逆算子及行交换的有限次复合相互关联。*(3)* $\geq_O$ 在 $\Psi(\pi)$上定义一个偏序。此外，关于 $\geq_O$ .， $\Psi(\pi)$ 存在唯一的极大元和极小元。我们分别将这两个元素记为 $\psi^{max}(\pi)$ 和 $\psi^{min}(\pi)$。

上述定理已在 [11, 定理 1.4、1.7] 中针对准分裂辛群和奇数维特殊正交群得到证明，并在 [12, 定理 6.13、6.15、7.3] 中针对准分裂偶数正交群得到证明。鉴于上述定理，对于$\mathcal{E}$，$\mathcal{E}'\in$Eseg($G_n$)，我们记作 $\mathcal{E}\sim\mathcal{E}'$，并称它们是（强）等价的，如果 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 可通过升算子及其逆算子的有限次复合相互关联。

设 $\mathcal{E}\in$ Eseg($G_n$)，并记 $\mathcal{E}=\cup_\rho\{([A_i,B_i]_\rho,\ l_i,\ \eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)\cdot}$。若对于任意 $i\in I_\rho$ 以及任意 $\rho.$，都有 $B_i\geq 0$，则称 $\mathcal{E}$ 为非负。现在陈述非消失定理：该定理已在 [2, 定理 3.6、4.4] 中针对 $G_n=\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ 得到证明，并在 [12, 定理 6.17] 中针对 $G_n=\mathrm{O}_{2n}^{\pm}(F)$ 得到证明。

**定理 2.19**。 设 $\mathcal{E}\in\mathrm{Eseg}(G_n)$，使得对于任意 $\rho$，若存在 $i\in I_\rho$ 使得$B_i<0$，则 $I_\rho$ 上的可容许序满足（$P'$）。

*(i)* 写作 $\mathcal{E}=\cup_\rho\{([A_i,B_i]_\rho,l_i,\eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)\cdot}$我们有 $\pi(\mathcal{E})\neq 0$当且仅当 $\pi(sh^d(\mathcal{E}))\neq 0$对于满足 $d\gg 0$的任意 $sh^d(\mathcal{E})$:$=\cup_\rho\{([A_i+d,B_i+d]_\rho,l_i,\eta_i)\}_{i\in(I_\rho,>)}$为非负，并且对所有$\rho$ 和 $i\in I_\rho$满足以下条件

$$(*)\qquad B_i+l_i\geq\begin{cases}0 & if\ B_i\in\mathbb{Z},\\ \frac{1}{2} & if\ B_i\notin\mathbb{Z}\ and\ \eta_i=(-1)^{\alpha_i+1},\\ -\frac{1}{2} & if\ B_i\notin\mathbb{Z}\ and\ \eta_i=(-1)^{\alpha_i},\end{cases}$$

其中

$$\alpha_i:=\sum_{j<i}A_j+B_j+1.$$

*(ii)* 若 $\mathcal{E}$ 非负，则 $\pi(\mathcal{E})\neq 0$ 当且仅当任意相邻对$(i,j,\gg)$满足 [2, 命题 4.1] 的组合条件。

定理 2.19 提供了一种纯组合地确定 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$ 的方法。若 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$, 则称 $\mathcal{E} \in$ 为 Rep($G_n$)。类似地，我们令 VRep($G_n$) 表示满足 $\mathcal{E} \in$Rep($G_n$) 的 $\mathcal{F} = \cup_{\rho'} \mathcal{E}_{\rho'} \in$ Vseg($G_n$) 的集合。将定理 2.19 应用于 $\mathcal{E}$，可知 $\mathcal{F} \in$ VRep($G_n$) 当且仅当 $\mathcal{F}$ 在形式上满足定理 2.19 中的组合非消失条件。此外，我们定义 VRep$_\rho$($G_n$) $= \{\mathcal{E}_\rho \mid \mathcal{E} \in$ VRep($G_n$)$\}$、VRep$^{\mathbb{Z}}$($G_n$) $=$ VRep($G_n$) $\cap$Vseg$^{\mathbb{Z}}$($G_n$), 以及 VRep$^{\mathbb{Z}}_\rho$($G_n$) $=$ VRep$_\rho$($G_n$) $\cap$ Vseg$^{\mathbb{Z}}$($G_n$)。同样，$\mathcal{E} \in$VRep$_\rho$($G_n$) 当且仅当 $\mathcal{E}$ 在形式上满足定理 2.19 中的组合非消失条件。另外，由于良宇称条件, VRep$^{\mathbb{Z}}_\rho$($G_n$) 可能为空。我们采用如下约定：选择 $\rho$，使得 VRep$^{\mathbb{Z}}_\rho$($G_n$) 非空。

2.4. **温和表示**。本小节回顾一些与温和表示相关的结果。令 $\Pi_{temp}(G)$ 表示 $\Pi(G)$ 中由温和表示构成的子集。首先回顾 Arthur 根据局部朗兰兹对应给出的 $\Pi_{temp}(G)$ 的参数化。

若 $\psi \in \Psi_{gp}(G)$ 且 $\psi$ 在第二个 SL$_2(\mathbb{C})$ 上平凡，则称局部 Arthur 参数 $\psi \in \Psi^+(G)$ 为温和的，也就是说，若 $\psi = \bigoplus_{i=1}^r \rho_i \otimes S_{a_i} \otimes S_{b_i}$，则对任意 $i = 1,$ ……, $r.$。令 $\Psi_{temp}(G)$ 表示由温和局部 Arthur 参数构成的 $\Psi^+(G)$ 的子集。

**定理 2.20** ([1,定理 1.5。1])。我们有

$$\Pi_{temp}(G) = \bigcup_{\psi \in \Psi_{temp}(G)} \Pi_\psi.$$

此外，若 $\psi_1, \psi_2 \in \Psi_{temp}(G)$ 且 $\psi_1 \neq \psi_2$，则 $\Pi_{\psi_1} \cap \Pi_{\psi_2} = \emptyset.$

换言之，与温和局部 Arthur 参数相关联的局部 Arthur 包划分 $\Pi_{temp}(G)$。定理 2.3 将温和局部 Arthur 包的计算归结为计算良好奇偶性的温和 Arthur 参数所对应的包。着眼于定理 2.7，我们称 $\mathcal{E} \in$Rep$(G)$ 是温和的，当且仅当 $\psi_{\mathcal{E}}$ 是温和的。我们指出，$\mathcal{E} \in$Eseg$(G)$ 是温和的，当且仅当

$$\mathcal{E} = \cup_\rho \{([A_i, A_i]_\rho, 0, \eta_i)\}_{(i \in I_{\rho,>})} \in \mathrm{Eseg}(G),$$

其中，对任意 $i, j \in I_\rho$ 满足 $A_i = A_j$的情形，我们有 $\eta_i = \eta_j$。在此设定下，对于 $i \in I_\rho$, 我们将 $\eta_\rho(A_i) := \eta_i$ 作为简写。注意，即使 $\mathcal{E}$ 不是温和的， $\pi(\mathcal{E})$ 也可能是温和的。我们的目标是：给定某个$\mathcal{E} \in$Rep$^{\mathbb{Z}}$($G_n$) 的 $\pi = \pi(\mathcal{E})$，确定所有满足 $\pi(\mathcal{E}') = \pi(\mathcal{E})$.的 $\mathcal{E}' \in$Rep$^{\mathbb{Z}}$($G_n$)。

**注 2.21**。利用扩展多段及其相应交叉理论对局部 *Arthur* 包进行参数化，预计在更一般的情形下也成立。固定一个辛群、奇数维特殊正交群或偶数维正交群的准分裂形式 $G_n^+$，令 $G_n^-$ 表示其非平凡纯内形式（若存在）。然后我们设定 $\epsilon_{G_n} = \pm 1$，若 $G_n = G_n^{\pm}.$。此时的理论预计大体类似；然而，我们还必须要求，当 $G_n \in \{G_n^{\pm}\}$ 非准分裂时，所取的局部 *Arthur* 参数应与 $G_n.$ 相容。对于准分裂酉群、一般自旋群（或一般针群）以及元辛群的纯内形式，也可预期有类似结果。

将这一理论推广的一大关键障碍在于，目前非准分裂群的局部 *Arthur* 包是否存在仍是一个未解决的问题。

## 3. Statement of results

给定 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$，我们通常写作 $\mathcal{E} = \{([A_i, B_i],\ \ell_i,\ \eta_i)\}_{i\in I}$，其中我们隐式地将 $I = \{1, \dots, k\}$ 与序 $1 < 2 < \cdots < k.$ 等同。也就是说，我们在记号中省略 $\rho$，并将可容许序与通常的序等同。

为方便起见，我们采用如下定义。首先，我们按如下方式记录附加于扩张多线段的符号的第一列与最后一列（见例2.5）。

**定义 3.1.** 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$。我们令 $c_{\min} = \min_{r\in\mathcal{E}} B(r)$ 与 $c_{\max} = \max_{r\in\mathcal{E}} A(r)$。我们称 $\mathcal{E}$ 始于列 $c_{\min}$，且 $c_{\min}$ 为第一列，类似地，$\mathcal{E}$ 终于列 $c_{\max}$，且 $c_{\max}$ 为最后一列。

我们尤其关注 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 是温和的情形，因此对于任意一行 $r \in \mathcal{E}$，$\mathrm{supp}(r)$ 都是单元素集。在这种情形下，我们还会如下记录各列的重数。

**定义 3.2.** 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$，并固定 $c \in \mathbb{Z}$。我们用 $m_c$ 的重数 $c$ 在 $\mathcal{E}$ 中表示其重数，定义为对任意 $\eta$，有序对 $([c, c], 0, \eta)$ 在 $\mathcal{E}$ 中出现的次数。

在后续的结果和猜想中，我们将用到 $\mathcal{E}$ 的一种分解，将其分成作为论证构件的“块”。

**定义 3.3.** 设 $\mathcal{E} = \{([A_i, B_i], \ell_i, \eta_i)\}_{i\in I} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 是一个温和的扩展多重线段（因此 $A_i = B_i$ 且 $\ell_i = 0$）。块 是一个多重子集 $\mathcal{B} = \{([A_i, B_i], \ell_i, \eta_i)\}_{i\in J}$，其中 $J \subset I$，满足

- 若 $([A, A], 0, \eta_1) \in \mathcal{B}$ 且 $([A + 1, A + 1], 0, \eta_2) \in \mathcal{B}$，则 $\eta_1 = -\eta_2$，
- 若对于某个 $\eta \in \{\pm 1\}$，我们有 $([A, A], 0, \eta) \in \mathcal{B}$ 且 $([A+2, A+2], 0, \eta) \in \mathcal{B}$，那么 $([A + 1, A + 1], 0, -\eta) \in \mathcal{B}$，
- 若 $([A, A], 0, \eta) \in \mathcal{B}$，则它以奇重数出现，

并且 $\mathcal{B}$ 在这些性质下是极大的（即，如果 $\mathcal{B}' = \{([A_i, B_i], \ell_i, \eta_i)\}_{i\in J'}$ 满足这些条件，且 $J' \supset J$ 也满足这些条件，那么 $J = J'$）。

若 $\mathcal{B}$ 满足前两个条件，并且对所有 $([A, A], 0, \eta)$ 满足第三个条件（但当 $A$ 是 $\mathcal{B}$ 中出现的所有 $([A, A], 0, \eta)$ 中的极大者时，可能例外），则称 $\mathcal{B}$ 为一个几乎块。

更一般地，如果存在某个 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 使得 $\mathcal{B}$ 是一个块，我们就称 $\mathcal{B}$ 为一个块（或几乎块）。我们用 $\mathrm{Block}_\rho(G)$ 和 $\mathrm{ABlock}_\rho(G)$ 分别表示所有块和几乎块组成的集合。

以下事实显然易证。

**引理 3.4**。 任意温和的 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n(G)$ 都可以唯一分解为不相交的块。

我们将此分解记为 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中每个 $\mathcal{B}_i$ 都属于 $\mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$。于是，$\mathcal{E} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ 由 $\mathcal{B}_1$ 的各行组成，接着是

$\mathcal{B}_2$ 的各行，依此类推。注意，此分解是有序的，即 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \neq \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_1$。

我们定义删列算子。

**定义 3.5.** 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 是温和的。我们定义删列算子$\mathrm{rc}_k$，它删去 $\mathcal{E}$ 的第 $k$ 列。更确切地说，$\mathrm{rc}_k(\mathcal{E})$ 由 $\mathcal{E}$ 的所有扩展线段组成，但不包括对任意 $\eta$ 具有$([k,k]$、0、$\eta)$ 形式的扩展线段。如果不存在这样的扩展线段，则$\mathrm{rc}_k(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$。

设 $\mathcal{B} \in \mathrm{ABlock}(G)$。我们用 $\Psi(\pi(\mathcal{B}))$ 表示形式局部Arthur参数 $\psi_{\mathcal{F}}$ 的集合，其中 $\mathcal{F} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 满足 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{B}$ 可通过升算子及其逆算子的有限复合相互关联。我们将在下述定理中确定该集合的基数。

**定理 3.6** (块的计数)。 设 $\mathcal{B}$ 是一个块，并定义

$$\mathcal{B}' := \mathrm{rc}_{c_{\max}}(\mathcal{B})$$
$$\mathcal{B}'' := \mathrm{rc}_{c_{\max}-1}(\mathcal{B}')$$

若 $c_{min} = 0$，则

$$|\Psi(\pi(\mathcal{B}))| = \begin{cases} 3|\Psi(\pi(\mathcal{B}'))| & if\ m_{c_{\max}-1} = 1 \\ 4|\Psi(\pi(\mathcal{B}'))| - |\Psi(\pi(\mathcal{B}''))| & if\ m_{c_{\max}-1} = 3, 5, \ldots. \end{cases} \tag{3.1}$$

另一方面，若 $c_{min} > 0$，则

$$|\Psi(\pi(\mathcal{B}))| = \begin{cases} 2|\Psi(\pi(\mathcal{B}'))| & if\ m_{c_{\max}-1} = 1 \\ 3|\Psi(\pi(\mathcal{B}'))| - |\Psi(\pi(\mathcal{B}''))| & if\ m_{c_{\max}-1} = 3, 5, \ldots. \end{cases} \tag{3.2}$$

接下来，我们说明如何根据块分解，确定包含给定温和表示的局部 Arthur 参数的数量。

**定理 3.7** (温和表示的计数)。 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 是温和的。假设 $\mathcal{E}$按顺序分解为块 $\mathcal{B}_1$、...、 $\mathcal{B}_k$。那么

$$|\Psi(\pi(\mathcal{E}))| = |\Psi(\pi(\mathcal{B}_1))| \cdot \prod_{i=2}^{k} |\Psi(\pi(sh^1(\mathcal{B}_i)))|.$$

我们将在定理 7.14中证明上述定理。

**注记3.8**。 注意，利用定理 *3.6*，我们可以计算 $|\Psi(\pi(\mathcal{B}_1))|$ 以及 $|\Psi(\pi(sh^1(\mathcal{B}_i)))|$ ；因此，上述定理共同给出了$|\Psi(\pi(\mathcal{E}))|$的完整计算，对任意温和的 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$均成立。

注意，如果 $\mathcal{E} \in \mathrm{Rep}^{\mathbb{Z}}(G) = \mathrm{Rep}(G) \cap \mathrm{Vseg}^{\mathbb{Z}}(G)$，那么 $\mathcal{E}$ 有唯一的分解 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rho_1} \cup \cdots \cup \mathcal{E}_{\rho_k}$，其中 $\rho_i \neq \rho_j$ 对任意 $i \neq j$. 均成立。此外，我们有 $\Psi(\pi(\mathcal{E})) = \prod_{i=1}^{k} \Psi(\pi(\mathcal{E}_{\rho_i}))$。由此观察和定理 3.7，我们得到一个公式，用于计算任意温和的 $\mathcal{E} \in \mathrm{Rep}^{\mathbb{Z}}(G)$ =$\mathrm{Rep}(G) \cap \mathrm{Vseg}^{\mathbb{Z}}(G)$ 的 $\Psi(\pi(\mathcal{E}))$。也就是说，定理 3.7（加上定理 2.3）蕴含定理 1.2。

**注记3.9**。 考虑到注记 *2.21* ， 我们预计定理*3.6* 和*3.7* 可以更一般地成立。

## 4. Basic notions and lemmas

本节将介绍一些基本概念和引理，它们有助于证明我们的结果。首先，我们记录算子之间若干显式关系，这些关系稍后会派上用场。

**引理 4.1.** 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{Eseg}(G_n)$，并假设 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$. 若 $\frac{a_i - b_i}{2} < 0$ 对某个$i \in I_\rho$成立，则我们还要求下面关于 $I_\rho$ 的可容许序满足 $(P')$。则有以下结论：

*(1)* 设 $i, j, k, l \in I_\rho$。那么 $(R_i \circ R_j)(\mathcal{E}) = (R_k \circ R_l)(\mathcal{E})$，前提是所得的可容许序一致。*(2)* 设 $i, j \in I_\rho$。那么 $(dual \circ R_i)(\mathcal{E}) = (R_j \circ dual)(\mathcal{E})$，前提是所得的可容许序一致。*(3)* 设 $i, j \in I_\rho$。那么 $(ui_i \circ R_j)(\mathcal{E}) = (R_j \circ ui_i)(\mathcal{E})$，前提是所得的可容许序一致。

证明。 这些结论的证明遵循相同的思路。为简洁起见，我们仅详细证明第 (2) 部分：若 $(dual \circ R_i)(\mathcal{E}) = (R_j \circ dual)(\mathcal{E})$，且所得的可容许序相同。

由引理 2.15 和定理 2.18(1)，可得 $\pi((dual \circ R_i)(\mathcal{E})) = \pi((R_j \circ dual)(\mathcal{E}))$。此外，$\mathrm{supp}((dual \circ R_i)(\mathcal{E})) = \mathrm{supp}((R_j \circ dual)(\mathcal{E}))$。若所得的可容许序相同，则由推论 2.8 可得 $(dual \circ R_i)(\mathcal{E}) = (R_j \circ dual)(\mathcal{E})$。第 (2) 部分的证明至此完成。□

我们将引理 4.1(1) 作进一步推广。

**引理 4.2** (行交换的交换性)。 设 $\mathcal{E} = (r, r_1, r_2) \in \mathrm{VRep}(G_n)$。进一步假设，$r$, $r_1, r_2$ 的支撑的次序彼此包含或被彼此包含。那么，将 $r$ 交换到第三行，然后交换 $r_1$ 和$r_2$，所得结果与先交换 $r_1$ 和 $r_2$，再将 $r$ 交换到第三行的结果相同。形式上，$R_1(R_2(R_1(\mathcal{E}))) = R_2(R_1(R_2(\mathcal{E})))$。

证明。 由于 $\pi(\mathcal{E}) \neq 0$，根据定理 2.19，我们有 $\pi(sh^d(\mathcal{E})) \neq 0$，其中存在 $d \gg 0$使得 $sh^d(\mathcal{E})$ 是非负的。根据定义，我们注意到行交换与平移算子可交换。因此，由引理 4.1(1)，可得

$$\begin{aligned} sh^d(R_1(R_2(R_1(\mathcal{E})))) = R_1(R_2(R_1(sh^d(\mathcal{E})))) &= R_2(R_1(R_2(sh^d(\mathcal{E})))) \\ &= sh^d(R_2(R_1(R_2(\mathcal{E})))). \end{aligned}$$

因此，我们得到 $R_1(R_2(R_1(\mathcal{E}))) = R_2(R_1(R_2(\mathcal{E})))$。 □

我们还验证某些算子是“局部”算子。

**引理 4.3**。 假设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho(G_n)$。那么，操作 $ui$和 $dual \circ ui \circ dual$ 是“局部”操作。更具体地说，如果某一行未参与并交或任何行交换，那么这些操作会保持该行不变。

证明。 对于操作 $ui$，根据定义 2.13，结论立即成立。特别地，对于 $ui.$ 的逆算子，结论也成立。现在假设我们考虑算子 $dual \circ ui \circ dual$，其中 $ui$ 不是类型 3’。那么$dual \circ ui \circ dual$ 是某个 $ui$ 算子（类型相同）的逆算子，这由 [11, 推论 56] 可知，因此结论成立。对于 $dual \circ ui \circ dual$ 类型 3’的情形，结论可由

直接计算得出（注意，应用 $ui$ 的行必须满足 $a_i + b_i \equiv a_j + b_j$ 模 2，因为 $ui$ 的类型为 3'）。□

接下来给出一个关于行交换与并交算子之间某种关系的引理。

引理 *4.4.* 设 $\mathcal{E} = (r_1, r_2, r_3) \in VRep^{\rho}(G_n)$，并假设对于任意 $r \in \mathcal{E}$，都有 $supp(r_1) \supseteq supp(r)$，且 $ui_2$ 可应用于 $\mathcal{E}$.。设 $\mathcal{F} = ui_2(\mathcal{E}) = (r_1, s_2, s_3)$，并考虑在 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$. 中将 $r_1$ 行交换至底行的操作。将所得的虚拟扩展多线段记为 $\mathcal{E}' = (r_2', r_3', r_1')$ 和 $\mathcal{F}' = (s_2', s_3', r_1'')$。那么 $r_1' = r_1''$.

证明。 证明可直接由定义 2.11 和 2.12得出。 □

以下结果将在后文的若干技术论证中用于某些约化。

**推论 4.5.** 假设 $r$ 是 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 中的一行，其后紧接着若干连续行，构成一个子多段 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$， $\mathcal{E}_2$ 是一个与 $\mathcal{E}_1$等价的扩展多段。进一步假设，对于任意 $s \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$，$\mathrm{supp}(r) \supseteq \mathrm{supp}(s)$ 。那么，将 $r$ 与 $\mathcal{E}_1$ 交换后所得的结果，与将 $r$ 与 $\mathcal{E}_2$交换后所得的结果相同。

证明。在证明该断言之前，我们先回顾一个算子，称为幻影出现（消失）算子，由 Atobe 定义于（[3, 定义 3。4]）。设 $k$ 为一个整数， $P_k$表示将（$[k-1, -k]_{\rho}$， $\underline{k}$，1）作为虚拟扩展多段的第一行形式上附加上去的算子（仅当 $k > 0$时允许），或将（$[k-\frac{1}{2}, -k-\frac{1}{2}]_{\rho}$， $k$，1）形式上附加上去的算子（仅当 $k \geq 0$时允许）。具体选择由良宇称条件决定。对于分裂辛群和奇数维特殊正交群，Atobe 证明了任意两个等价扩展多段都可通过有限次复合$P_k$算子、并交、行交换及其逆算子相互关联（[3, 定理 1。4]）。这一结果等价于定理 2.18（见 [11, 注 10。5]），因此同样的结果也适用于准分裂偶数正交群。

我们回到该断言的证明。为简单起见，我们可以假设$\mathcal{E} = \{r\} \cup \mathcal{E}_1$.令 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1' \cup \{r'\}$表示通过将 $r$ 与 $\mathcal{E}_1$. 中的每条线段进行行交换而得到的虚拟扩展多线段。同样，我们考虑 $\{r\} \cup \mathcal{E}_2$，并令$\mathcal{E}_2' \cup \{r''\}$ 表示通过将 $r$ 与 $\mathcal{E}_2$. 中的每条线段进行行交换而得到的虚拟扩展多线段。我们必须证明 $r' = r''$.

此外，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{E}_2$ 是由 $\mathcal{E}_1$ 通过并交，或通过 $P_k$ 与并交的复合得到的。前一种情形由引理4.4 处理，因此我们接下来考虑后一种情形。

令 $s$ 表示对应的形式添加元素（$[k-1, -k]_{\rho}, k, 1$）（回忆一下， $A(r) \in \mathbb{Z}$, 因此必定如此）。我们注意到，形式上交换 $r$ 和 $s$ 的行不会改变这两条线段。事实上，将 $r$ 与 $s$进行行交换，总属于定义 2.11 的情形 1(b) 或 1(c)，并且形式上$b(s) - 2l(s) = 0$。因此，将 $r$ 交换到$\{r\} \cup \{s\} \cup \mathcal{E}_1$ 的最后一行，其效果与将 $r$ 交换到 $\{r\} \cup \mathcal{E}_1$的最后一行相同。接着，仿照引理 4.4 的证明即可得出结论。□

4.1. **交错符号条件**。 本节中，我们定义并研究交错符号条件。首先，我们给出一个定义，用于计算与扩展线段相关联的符号中圆圈的数量（见例 2.5）。

**定义 4.6.** 设 $r = ([A, B]_\rho, l, \eta)$ 为一行。我们将 $r$ 中的圆圈数记为 $C(r)$，其定义如下：

$$C(r) := b - 2l.$$

对于 $\mathcal{E}$ 一个虚拟扩展多段，我们将 $C(\mathcal{E})$ 记为 $\mathcal{E}$中的圆圈总数，其定义如下：

$$C(\mathcal{E}) := \sum_{r \in \mathcal{E}} C(r).$$

注意， $C(r) + 1 \equiv A - B$ 模 2。 接下来，我们给 $\mathcal{E}$.附加一个符号

**定义 4.7.** 我们将扩展多段 $\mathcal{E}$ 的符号 $\eta(\mathcal{E})$ 定义为

$$\eta(\mathcal{E}) := \eta(r_1),$$

其中 $r_1$ 是在可容许序中 $\mathcal{E}$ 的第一行。

交错符号条件是关于两行的一项重要条件，它影响它们在特定操作下的相互作用方式。

**定义 4.8**。 设 $r_1, r_2$ 是按某个可容许序排列的行，且 $r_1 < r_2$ 属于其中。我们称 $r_1$ 和 $r_2$ （按此顺序）满足交错符号条件，如果

$$\eta(r_2) = (-1)^{C(r_1)} \eta(r_1).$$

如果扩展多段 $\mathcal{E}$ 的任意两个连续行都满足交错符号条件，则称其为交替的 。

用符号表示（见例 2.5），交错符号条件表示第一行的最后一个圆圈 $r_1$ 与第二行的第一个圆圈 $r_2$ 符号相反。

**定义 4.9**。 设 $r$ 为一行。我们称 $(-1)^{C(r)-1}\eta(r)$ 为 $r$. 最后一个圆圈的符号

请注意，即使在图示中 $r$ 不含任何圆圈，上述定义仍然有意义。现在我们要证明满足交错符号条件的行的一些性质。首先，需要以下引理。

**引理 4.10**。 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_\rho^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 且 $r \in \mathcal{E}$ 为一行。设 $\widehat{r}$ 是 $r$在 *dual* （见定义 *2.14*）下的像。那么

$$\eta(\widehat{r}) = (-1)^{C(\mathcal{E}) - C(r)} \eta(r).$$

证明。 设 $r = r_i$ 是 $i$的第 $\mathcal{E}$ 行。由于 $B \in \mathbb{Z}$ 对每一行都成立，根据定义 2.14，$\eta(\widehat{r}) = (-1)^{\alpha_i + \beta_i}\eta(r)$，其中 $\alpha_i = \sum_{j<i} a_j$ 且 $\beta_i = \sum_{j<i} b_j$.由于 $\mathcal{E}$ 是整的，对任意 $j$，我们有 $a_j \equiv b_j$ 模 2，因此

$$\alpha_i + \beta_i \equiv \sum_{j \neq i} b_j \equiv \sum_{j \neq i} C(r_j) \equiv C(\mathcal{E}) - C(r_i) \bmod 2. \qquad \square$$

我们使用上述引理来验证 *dual* 保持交错符号条件。

**引理 4.11**。令 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$。

*(1)* 若 $r_1 < r_2$ 是满足交错符号条件的 $\mathcal{E}$ 中的两行，则 $\widehat{r_2} < \widehat{r_1}$ 在 $dual(\mathcal{E})$ 中也满足交错符号条件。特别地，若 $\mathcal{E}$ 是交替的，则 $dual(\mathcal{E})$ 也是交替的。*(2)* 若 $\mathcal{E}$ 是交替的，则 $\eta(\mathcal{E}) = \eta(dual(\mathcal{E}))$。

证明。由引理 4.10 以及 $r_1$ 和 $r_2$ 满足交错符号条件这一事实，可得

$$\begin{aligned}\eta(\widehat{r_1}) = (-1)^{C(\mathcal{E})-C(r_1)}\eta(r_1) &= (-1)^{C(\mathcal{E})-C(r_1)}\left((-1)^{C(r_1)}\eta(r_2)\right)\\ &= (-1)^{C(\mathcal{E})}\eta(r_2)\\ &= (-1)^{C(\mathcal{E})}\left((-1)^{C(\mathcal{E})-C(r_2)}\eta(\widehat{r_2})\right)\\ &= (-1)^{C(r_2)}\eta(\widehat{r_2}).\end{aligned}$$

由于 $C(r_2) = C(\widehat{r_2})$，这表明 $\widehat{r_2}$ 和 $\widehat{r_1}$ 依次满足交错符号条件。这就证明了第 (1) 部分。

对于第 (2) 部分，令 $r$ 为 $\mathcal{E}$ 的第一行，并令 $s$ 为 $\mathcal{E}$ 的最后一行。由于 $\mathcal{E}$ 是交替的，反复应用交错符号条件可得 $\eta(s) = (-1)^{C(\mathcal{E})-C(s)}\eta(r)$。由引理 4.10，得到 $\eta(\widehat{s}) = (-1)^{C(\mathcal{E})-C(s)}\eta(s)$。结合这两式可得 $\eta(\widehat{s}) = \eta(r)$。由于 $\widehat{s}$ 是 $dual(\mathcal{E})$ 的第一行，这表明 $\eta(\mathcal{E}) = \eta(dual(\mathcal{E}))$。□

**4.2. 关于行交换的引理**。回想一下，我们的目标是对所有与温和扩展多段 $\mathcal{E}$ 等价的扩展多段 $\mathcal{E}'$进行分类。这类扩展多段 $\mathcal{E}'$中出现的一种扩展线段具有以下形式。

**定义 4.12**。帽 是形如 $([A, B]_{\rho}, l, \eta)$ 的扩展线段，其中$B = -l$。

接下来证明的大部分实质内容，都取决于理解帽在某些行交换下如何变化。下面几个引理将有助于分析帽在这类操作的特殊情形下的行为。

**引理 4.13**。设 $r_1 < r_2$ 为满足交错符号条件的连续行，且有 $\mathrm{supp}(r_1) \supset \mathrm{supp}(r_2)$。那么，若 $r_2' < r_1'$ 是$r_1$ 和 $r_2$ 经过行交换后的像，则有：

$$\begin{aligned}(l(r_1'), \eta(r_1')) &= (l(r_1) - C(r_2), (-1)^{C(r_2)}\eta(r_1))\\ (l(r_2'), \eta(r_2')) &= (l(r_2), (-1)^{C(r_1)+1}\eta(r_2)).\end{aligned}$$

此外，$r_2' < r_1'$ 不满足交错符号条件。

证明。首先，我们计算得

$$\epsilon = (-1)^{A(r_1)-B(r_1)}\eta(r_1)\eta(r_2) = (-1)^{C(r_1)-1}\eta(r_1)\eta(r_1)\cdot(-1)^{C(r_1)} = -1.$$

因此，行交换属于定义 2.11中的情形 1(c)。$l(r_i')$ $\eta(r_i')$ 的公式可由给定的公式立即得出。为了说明这些行不满足交错符号条件，我们注意到，由于行交换保持

支撑，$b(r_2) = b(r_2')$，因此 $C(r_2) \equiv C(r_2')$ 模 2。应用这一事实并利用上述公式，

$$\eta(r_2') = (-1)^{C(r_1)+1}\eta(r_2) = -\eta(r_1) = -(-1)^{C(r_2')}\eta(r_1'). \qquad \square$$

将较大的行向上交换时，情况则相反。

**引理 4.14.** 假设 $r_1 < r_2$ 是不满足交错符号条件的连续行，且 $\mathrm{supp}(r_1) \subset \mathrm{supp}(r_2)$，并假设 $C(r_2) \geq 2C(r_1)$。那么，如果$r_2' < r_1'$ 是 $r_1$ 和 $r_2$ 经过行交换后得到的像，则有：

$$(l(r_1'), \eta(r_1')) = (l(r_1), (-1)^{C(r_2)+1}\eta(r_1))$$
$$(l(r_2'), \eta(r_2')) = (l(r_2) + C(r_1), (-1)^{C(r_1)}\eta(r_2)).$$

此外，$r_2'$ 和 $r_1'$ 满足交错符号条件。

证明。由于 $r_1$ 和 $r_2$ 不满足交错符号条件，因此得到 $\epsilon = 1$(见定义 2.11中的记号)。此外，由于 $\mathrm{supp}(r_1) \subset \mathrm{supp}(r_2)$ 且$C(r_2) \geq 2C(r_1)$，我们属于定义 2.11的情形 2(b)。这些公式由已知公式立即得出。最后，$r_2'$ 和 $r_1'$ 满足交错符号条件，因为

$$\eta(r_1') = (-1)^{C(r_2)+1}\eta(r_1) = (-1)^{C(r_1)+C(r_2)}\eta(r_2) = (-1)^{C(r_2')}\eta(r_2'). \qquad \square$$

我们将引理 4.13 和 4.14 加以推广，以分析将一行与一系列满足交错符号条件的连续行交换时会发生什么。

**引理 4.15.** 设 $r_0 < r_1 < \cdots < r_k$ 为满足交错符号条件的连续行，且对于 $i > 0$，有 $\mathrm{supp}(r_0) \supset \mathrm{supp}(r_i)$。令 $r_1' < \cdots < r_k' < r_0^{(k)}$ 为经过 $r_0$ 次行交换后它们的像。则有

$$(l(r_0^{(k)}), \eta(r_0^{(k)})) = \left(l(r_0) - \sum_{i=1}^{k} C(r_i), (-1)^{\sum_{i=1}^{k} C(r_i)}\eta(r_0)\right),$$
$$(l(r_i'), \eta(r_i')) = (l(r_i'), (-1)^{C(r_0)+1}\eta(r_i)) \ for \ i > 0.$$

此外，行交换后，除了 $r_k'$ 和 $r_0^{(k)}$ 之外，每对相邻行都满足交错符号条件。

证明. 我们对 $r_0$ 被交换的次数进行归纳。基础情形是 $r_0$ 未被交换，此时结论显然成立。设 $r_0$ 被交换 $i$ 次后结论成立，得到 $r_1' < \cdots < r_i' < r_0^{(i)} < r_{i+1} < \cdots < r_k$。那么，由归纳假设可知，$(r_i', r_0^{(i)})$ 不满足交错符号条件，而 $r_i$ 和 $r_{i+1}$ 满足交错符号条件，因此有

$$\eta(r_0^{(i)}) = (-1)^{C(r_i')+1}\eta(r_i') = (-1)^{C(r_i)+1}\left((-1)^{C(r_0)+1}\eta(r_i)\right)$$
$$= (-1)^{C(r_0^{(i)})}\eta(r_{i+1}).$$

因此，$r_0^{(i)}$ 和 $r_{i+1}$ 满足交错符号条件。所以，我们可以应用引理 4.13。交换这两行后，得到 $l(r_0^{(i+1)}) = l(r_0^{(i)}) - C(r_{i+1})$ 和$\eta(r_0^{(i+1)}) = (-1)^{C(r_{i+1})}\eta(r_0^{(i)})$，这些就是所需的值（应用归纳假设后）。与此同时，$l(r_i') = l(r_i)$ 和

$$\eta(r_{i+1}') = (-1)^{C(r_0')+1}\eta(r_{i+1}) = (-1)^{C(r_0)+1}\eta(r_{i+1})$$

如所需。最后，为了证明关于交错符号条件的断言，我们注意到 $r_i'$ 和 $r_{i+1}'$ 分别与 $r_i$ 和 $r_{i+1}$ 相同，只是符号不同；它们都乘以相同的量 $(-1)^{C(r_0)+1}$。由于 $r_i$ 和$r_{i+1}$ 满足交错符号条件，因此 $r_i'$ 和 $r_{i+1}$也满足该条件。另外，根据引理4.13， $r_{i+1}'$ 和 $r_0^{(i+1)}$ 不交替。这就完成了归纳步骤。 □

**引理 4.16.** 设 $r_1 < \cdots < r_k < r_0$ 是连续行，其中除 $r_k$ 和 $r_0$ 外，任意一对连续行都满足交错符号条件。进一步设，对于 $i > 0$，$\mathrm{supp}(r_0) \supset \mathrm{supp}(r_i)$，且 $C(r_0) \geq 2\sum_{i=1}^{k} C(r_i)$。设在将 $r_0$ 向上交换 $k$ 次后，它们的像为 $r_0^{(k)} < r_1' < \cdots < r_k'$。那么：

$$(l(r_0^{(k)}), \eta(r_0^{(k)})) = \left( l(r_0) + \sum_{i=1}^{k} C(r_i), (-1)^{\sum_{i=1}^{k} C(r_i)} \eta(r_0) \right)$$

$$(l(r_i'), \eta(r_i')) = (l(r_i), (-1)^{C(r_0)+1} \eta(r_i)) \text{ for } i > 0.$$

此外，经过行交换后，每一对相邻行都满足交错符号条件。

证明。 证明与引理4.15的证明完全类似，区别在于我们不应用引理 4.14，而是应用引理4.13。 □

最后，我们证明以下两个引理，它们说明了交换行 $h$ 与两行 $h_1$ 和 $h_2$ 时， $h$ 保持不变的情形。这些结果将使我们能够在后续证明中，通过从虚拟扩展多段中移除这类行对 $h_1$ 和 $h_2$ 来简化证明。

引理 *4.17.* 假设 $h < h_1 < h_2$ 是连续行，且 $\mathrm{supp}(h) \supset \mathrm{supp}(h_1)$、$\mathrm{supp}(h_2)$。进一步假设 $C(h) \neq 0$，并且 $C(h_1) = C(h_2) = 1$、$l(h_1) = l(h_2)$，以及 $\eta(h_1) = \eta(h_2)$。那么 $h$ 与 $h_1$ 和 $h_2$ 交换后保持不变。此外， $h_1$ 和 $h_2$ 也保持不变，只是它们的符号乘以 $(-1)^{C(h)+1}$。

证明。 注意，由于 $\mathrm{supp}(h) \supset \mathrm{supp}(h_1)$、$\mathrm{supp}(h_2)$，且行的支撑在行交换下保持不变，因此两次行交换都属于定义2.11中的情形 1。我们用 $h_1' < h' < h_2'$ 和 $h_1' < h_2' < h''$ 表示行交换的结果。关于 $h_1'$ 和 $h_2'$ 符号的第二个结论可由定义立即得出。注意，由于 $C(h_1) = 1$，我们有 $2l(h_1) + 1 = 2b(h_1)$，对于 $h_2$. 也同理。对于第一个结论，我们分三种情形讨论。

首先，假设第一行交换属于定义 2.11 的情形 1(a)。那么 $l(h') = b(h) - l(h) - 1$且 $\eta(h') = \eta(h)$。由于 $A(h') = A(h)$、 $B(h') = B(h)$，且 $\eta(h) = \eta(h')$，又根据假设，第一行交换具有$(-1)^{A(h)-B(h)}\eta(h)\eta(h_1) = 1$，因此我们得到第二行交换也具有 $\epsilon = 1$。现在注意到

$$C(h') = C(h) + 2(l(h) - l(h')) = C(h) + 2(2l(h) - b(h) + 1) = 2 - C(h).$$

由于第一行交换属于情形 1(a)， $C(h) < 2$。由于 $C(h) \neq 0$，我们必有 $C(h) = 1$，因此第二行交换将属于情形 1(a)。于是 $l(h'') = b(h') - l(h') - 1 = b(h) - (b(h) - l(h) - 1) - 1 = l(h)$ 且$\eta(h'') = \eta(h') = \eta(h)$. 至此完成该情形的证明。

其次假设第一行交换属于情形 1(b)。则 $l(h') = l(h)+1$ 且 $\eta(h') = -\eta(h)$。由于第一行交换的 $\epsilon$ 为 1，且 $\eta(h') = -\eta(h)$，我们得出第二行交换的 $\epsilon$ 为 $-1$，因此它属于情形 1(c)。于是$l(h'') = l(h') - 1 = l(h)$ 且 $\eta(h'') = -\eta(h') = \eta(h)$。至此完成该情形的证明。

最后，假设第一行交换属于情形 1(c)。那么 $l(h') = l(h) - 1$ 且 $\eta(h') = -\eta(h)$。因此，按照与前面类似的推理，$\epsilon$ 第二行交换的符号为 1。不过请注意，第二行交换不可能属于情形 1(a)，因为 $C(h') = C(h) + 2 \geq 2$，所以不可能有 $C(h') < 2C(h_2) = 2$。因此，第二行交换属于情形 1(b)，此时公式给出 $l(h'') = l(h') + 1 = l(h)$ 以及 $\eta(h'') = -\eta(h') = \eta(h)$。这就完成了此情形下的证明，从而证明了该引理。□

引理 *4.18.* 假设 $h_1 < h_2 < h$ 是连续行，且 $supp(h) \subset supp(h_1), supp(h_2)$。进一步假设 $C(h) \neq 0$，并且 $C(h_1) = C(h_2) = 1$，$l(h_1) = l(h_2)$，以及 $\eta(h_1) = \eta(h_2)$。那么，$h$ 与 $h_1$ 和 $h_2$ 交换后保持不变。此外，$h_1$ 和 $h_2$ 保持不变，唯一区别是它们的符号乘以 $(-1)^{C(h)}$。

证明。该证明与引理的证明完全类似4.17，只不过我们处于情况 2，即定义 2.11，而非情形 1。□

4.3. **关于帽的引理。** 交错符号条件有助于提供一个关于连续帽能否彼此相互作用的重要判据。

**引理 4.19。** 给定两个连续帽 $h_1 < h_2$，按$(P')$ 顺序排列，其中 $h_1 =([A_1, -B_1], B_1, \eta_1)$ 以及 $h_2 = ([A_2, -B_2], B_2, \eta_2)$，可以施加非平凡的$dual \circ ui \circ dual$于 $h_1$和 $h_2$，当且仅当 $A_2 = B_1 - 1$、$h_1$和 $h_2$满足交错符号条件。该结果仅有一行，其形式为

$$h = ([A_1, -B_2], B_2, \eta_1).$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$证明。在应用 $dual$之后，相应的对偶行 $h_2 < h_1$ 将为 $h_2 =([A_2, B_2],\ 0,\ (-1)^{C(\mathcal{E})+C(h_2)}\eta_2)$ 与 $\widehat{h_1} = ([A_1, B_1],\ 0,\ (-1)^{C(\mathcal{E})+C(h_1)}\eta_1)$。

由于这些行完全由圆圈组成，唯一非平凡的 $ui$ 是类型 3' 的。由于 $h_1$ 和 $h_2$ 按 $(P')$ 的顺序排列，$B_1 > B_2$。因此，这样的 $ui$ 可以应用$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$当且仅当 $B_1 = A_2 + 1$ 并且 $h_2$和 $h_1$ 满足交错符号条件。根据引理 4.11，第二个条件等价于 $h_1$ 和 $h_2$ 满足交错符号条件。应用 $ui$ 得到一行新行

$$\widehat{h} = ([A_1, B_2], 0, (-1)^{C(\mathcal{E})+C(h_2)}\eta_2).$$

取对偶后得到一行新行，其形式为 $h = ([A_1, -B_2]、\ B_2、\ \eta)$，其中 $\eta$.

为了计算 $\eta$ 的新值，我们注意到 $C(h') = C(h'_1) + C(h'_2)$，并且对偶化保持每一行中圆的数量不变。因此，$C(h') = C(h_1) + C(h_2)$，且 $C(\mathcal{E}) = C(dual(\mathcal{E}))$。现在，我们可以利用引理 4.10 进行计算：

$$\begin{aligned}\eta = (-1)^{C(dual(\mathcal{E}))-C(\widehat{h})}\left((-1)^{C(\mathcal{E})+C(h_2)}\eta_2\right) &= (-1)^{C(\mathcal{E})-C(h_1)-C(h_2)+C(\mathcal{E})+C(h_2)}\eta_2 \\ &= (-1)^{C(h_1)}\eta_2 \\ &= \eta_1.\end{aligned}$$

□

**定义 4.20**。 我们将对两个连续帽执行 $dual \circ ui \circ dual$ 类型 *3'* 的 $h_1$操作， $h_2$ 如上所述，称为合并这些帽。若两个帽满足引理*4.19*中的条件，则称它们可合并。我们将合并后的帽记为 $h_1 * h_2$.

由引理 4.19 可知， $C$ 在合并下具有可加性。形式化地说，若$h_1$ 和 $h_2$ 是两个帽，则 $C(h_1 * h_2) = C(h_1) + C(h_2)$。 由引理 4.16 中的公式立刻可知，行交换与合并帽的作用可交换。我们在下面的推论中对此作出形式化表述。

**推论 4.21**。 设 $r_1 < r_2 < r_3$ 是虚拟扩展多段中的三行连续行。

- 设 $r_2$ 和 $r_3$ 是可合并的帽，并设 $\mathrm{supp}(r_2)$、$\mathrm{supp}(r_3) \subset \mathrm{supp}(r_1)$。则将 $r_1$ 与 $r_2$ 和 $r_3$ 交换后所得的像，与将 $r_1$ 与 $r_2 * r_3$ 交换后所得的像相同。
- 设 $r_1$ 和 $r_2$ 是可合并的帽，并设 $\mathrm{supp}(r_1)$、$\mathrm{supp}(r_2) \subset \mathrm{supp}(r_3)$。则将 $r_3$ 与 $r_2$ 和 $r_1$ 交换后所得的像，与将 $r_3$ 与 $r_1 * r_2$ 交换后所得的像相同。

## 5. Individual Blocks

本节中，我们令 $\mathcal{B} \in$ 块$_\rho(G)$。回想一下，我们的目标是确定 $\Psi(\pi(\mathcal{B}))$ 的大小。这个问题分为两种情形，即块是否从零开始（见定理 3.6）。

### 5.1. 由 $\mathcal{S}$-数据构造虚拟扩展多段。

令$\mathcal{B} \in$块$_\rho(G)$。我们旨在对与 $\mathcal{B}$ 等价的扩展多段进行分类（见定理 5.17）。

我们先引入一些记号。回顾定义 3.1， $c_{\min} = \min_{r \in \mathcal{B}} B(r)$ 和 $c_{\max} = \max_{r \in \mathcal{B}} A(r)$ 分别是 $supp(\mathcal{B})$ 的起点和终点。另回顾定义 3.2， $m_c$ 表示 $\mathcal{B}$ 中支撑为 $[c, c]$ 的行数，我们称其为列 $c$ 的重数。我们用元组 $\mathcal{M}_\mathcal{B} = (m_{c_{\min}}, m_{c_{\min}+1}, \ldots, m_{c_{\max}})$ 表示 $\mathcal{B}$. 中所有行的重数。如果 $\mathcal{B}$ 固定，为简洁起见，我们只写 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mathcal{B}$。注意，根据定义 3.3， $\mathcal{M}$ 中所有数都是正奇整数。更一般地，我们固定两个整数 $c_{\min}, c_{\max} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$， 满足 $c_{\max} \geq c_{\min}$。我们称一个元组

$$\mathcal{M}(c_{\min}, c_{\max}) = (m_{c_{\min}}, m_{c_{\min}+1}, \ldots, m_{c_{\max}}) \in \mathbb{Z}^{c_{\max}-c_{\min}+1}$$

是一个块元组， 当且仅当每个 $m_i$ 都是正奇整数。注意，如果 $\mathcal{B}$ 是一个块，那么 $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ 就是一个块元组。

**定义 5.1**。 对于块元组 $\mathcal{M}(c_{\min}, c_{\max})$， 我们将满足以下条件的子集元组 $\mathcal{S}$ 称为有效 元组：该元组为$(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k)$， 其各项均为 $\{c_{\min}, \ldots, c_{\max}\}$ 的子集。
*(1)* 每个 $\mathcal{S}_i \subset \{c_{\min}, \ldots, c_{\max}\}$ 都是一个非空的连续整数集合。*(2)* $\bigcup_i \mathcal{S}_i = \{c_{\min}, \ldots, c_{\max}\}$.*(3)* 若 $i < j$ 且 $s_i \in \mathcal{S}_i$， 则 $s_j \in \mathcal{S}_j$。*(4)* 若 $i < j$ 且 $c \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$， 则 $j - i = 1$、 $|\mathcal{S}_j| \geq 2$， 且 $m_c > 1$.*(5)* 若 $i \geq 2$、$|\mathcal{S}_i| \geq 2$， 且 $c =$ 最小值 $\mathcal{S}_i$ 具有 $m_c > 1$， 则 $c \in \mathcal{S}_{i-1}$.

固定一个块 $\mathcal{B} \in \mathrm{Block}_\rho(G_n)$，并令 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mathcal{B}$. 对于 $\mathcal{M}$ 的每个有效元组 $\mathcal{S}$，我们按以下方式将其关联到一个虚拟扩展多段 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$。

**定义 5.2**。令 $\mathcal{M} = (m_{c_{\min}}, m_{c_{\min}+1}, \ldots, m_{c_{\max}})$ 为一个块元组。给定一个符号 $\eta \in \{\pm 1\}$ 以及 $\mathcal{M}$的一个有效元组 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k)$，我们定义一个虚拟扩展多段 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$，它由以下各行组成。

*(1)* 对每个 $\mathcal{S}_i$，我们加入一行圆圈（即包含 $l = 0$ 的一行），其支撑为 $[$最大值 $\mathcal{S}_i$，最小值 $\mathcal{S}_i]$. 我们将这些行称为链。*(2)* 对每个 $c \in \{c_{\min}, \ldots, c_{\max}\}$，我们添加 $m_c - |\{i \mid c \in \mathcal{S}_i\}|$ 个支撑为 $[c, c]$. 的圆圈行副本。我们将这些行称为倍数。

这些行按$(P')$ 次序排列，使得若 $A(r) < A(r')$，则 $r < r'$。在 $r$ 和 $r'$ 都具有 $supp(r) = supp(r') = [c, c]$，但 $r$ 是一条链而 $r'$ 是一个倍数的情形下，我们选择次序，使得 $r < r'$.

符号 $\eta$ 被选为“奇交替的”：即满足以下条件。

*(1)* $\eta(\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)) = \eta$.*(2)* 如果 $r_i$ 和 $r_{i+1}$ 是连续行，且两者都不是倍数，那么 $r_i$ 和$r_{i+1}$) 满足交错符号条件（见定义 *4.8*）。*(3)* 如果 $r_i$ 和 $r_{i+1}$ 是连续行，且 $r_{i+1}$ 是倍数，那么 $r_i$ 和 $r_{i+1}$不满足交错符号条件。*(4)* 如果 $r_i$ 和 $r_{i+1}$ 是连续行，且只有 $r_i$ 是倍数，那么 $r_i$ 和$r_{i+1}$ 满足交错符号条件，当且仅当 $B(r_{i+1}) > B(r_i)$。

**注 5.3.** 注意，倍数的数量 $m_c - |\{\mathcal{S}_i \mid c \in \mathcal{S}_i\}|$ 经过选取，使得列 $c$ 中的圆圈数量始终等于 $m_c$.

我们引入一些术语，用于研究虚拟扩展多段 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$。

**定义 5.4.** 如果两条链 $r$ 和 $r'$ 与 $\mathcal{S}_i$ 和 $\mathcal{S}_{i+1}$ 相关联，且$\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset$，那么我们称 $r'$ 是一个 $z$-链。示例见图*1*。

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\begin{array}{cccc} \oplus & \ominus & & \\ & \ominus & & \\ & \ominus & \oplus & \ominus \end{array}\right) \end{array}$$

FIGURE 1.上述多重线段的$\mathcal{S}$ 数据为（$\{0,1\}$，$\{1,2,3\}$）。由于 $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{1\}$，支撑为 $[3,1]$的链是一个 $z$-链。

**定义 5.5.** 如果两条链 $r_1$ 和 $r_2$ 分别与两个连续集合 $\mathcal{S}_i$ 和 $\mathcal{S}_{i+1}$相关联，我们称它们为连续链 。

**定义 5.6.** 设 $r_1$ 和 $r_2$ 是连续链。若 $r_3$ 是一个倍数，且满足$r_1 < r_3 < r_2$，则称 $r_3$ 属于 $r_1$.

**注 5.7.** 由定义 *5.2* 中的符号条件可知，属于某条链 $r$ 的所有倍数都具有相同符号 $\eta(r) \cdot (-1)^{C(r)-1}$.

**注 5.8.** 设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$ 如定义 5.2中那样。设 $\mathcal{E}$ 的圆圈按顺序逐行读出，则符号 $\oplus$ 或 $\ominus$总是连续出现奇数次。例如，在图1中，有一个 $\oplus$，然后三个 $\ominus$，然后一个 $\oplus$，然后再一个 $\ominus$.

事实证明，对于块 $\mathcal{B}$ 从零开始的情形（即 $c_{\min} = 0$），我们需要指定更多数据，才能描述所有与 $\mathcal{B}$.等价的虚拟扩展多段。特别是，一些与 $\mathcal{B}$ 等价的虚拟扩展多段，其行是帽，但定义5.2 中的构造只会生成行具有 $l = 0$的虚拟扩展多段。因此，我们对构造 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$作如下修改，定义一个新参数$\mathcal{T}$.

**定义 5.9**。 假设 $\mathcal{B}$ 从零开始，并令 $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 为相应的块元组。令 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k)$ 为 $\mathcal{M}$ 的一个有效元组。那么，如果对每个 $\mathcal{S}_i$ 的划分构成如下形式：$(\mathcal{T}_i^0, \mathcal{T}_i^1, \ldots, \mathcal{T}_i^{\ell_i})$，则称这一组划分为有效，当且仅当

*(1)* 每个 $\mathcal{T}_i^j$ 都是非空的连续整数集合；*(2)* 若 $j < j'$ 且 $t_j \in \mathcal{T}_i^j$, $t_{j'} \in \mathcal{T}_i^{j'}$，则 $t_j \le t'_j$；*(3)* 若 $|\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_{i+1}| \ge 1$，则 $|\mathcal{T}_{i+1}^0| \ge 2$。

一个有效元组 有效 $(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ 是指满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 均有效的元组。

**注 5.10.** 作为一种简写方式，我们将通过给每个 $\mathcal{T}_i^j$ 加上上划线来表示子集 $\mathcal{T}_i^j \subset \mathcal{S}_i$，其中 $j > 0$。例如，假设 $\mathcal{S}_i = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，并且 $\mathcal{T}_i^0 = \{2, 3, 4\}$, $\mathcal{T}_i^1 = \{5, 6\}$, $\mathcal{T}_i^2 = \{7\}$, $\mathcal{T}_i^3 = \{8, 9\}$. 。作为简写，我们写作

$$\mathcal{S}_i = \{2, 3, 4, \overline{5, 6}, \overline{7}, \overline{8, 9}\}.$$

**定义 5.11.** 设 $\mathcal{M} = (m_{c_{\min}}, \ldots, m_{c_{\max}})$ 是一个块元组，且满足 $c_{\min} = 0$。给定有效的 $(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ 以及一个符号 $\eta \in \{\pm 1\}$，我们按如下方式关联一个虚拟扩展多段 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$。

*(1)* 对于每个带有 $j \ge 1$ 的 $\mathcal{T}_i^j$，我们加入一个支撑为 [最大值 $\mathcal{T}_i^j$, –最小值 $\mathcal{T}_i^j$]. 的帽。*(2)* 对于每个 $\mathcal{T}_i^0 \subset \mathcal{S}_i$，我们加入一行圆圈，其支撑由 [最大值 $\mathcal{T}_i^0$, 最小值 $\mathcal{T}_i^0$]. 给出。*(3)* 对于每个 $c \in \{c_{\min}, \ldots, c_{\max}\}$，我们加入 $m_c - |\{i \mid c \in \mathcal{S}_i\}|$ 份圆圈行，其支撑为 $[c, c]$，其中某个 $\eta_i \in \{\pm 1\}$.

各行的顺序以及每一行的符号，完全遵循定义 5.2 中的相同规则。

和之前一样，我们把属于情形 (2) 的行称为 链，把属于情形 (3) 的行称为倍数。我们也沿用之前关于 $z$-链（定义 5.4）以及属于某条链的倍数（定义 5.6）的完全相同概念。注意，按照这些定义，虚拟扩展多段 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$ 的构造，是 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$ 构造的特例，其中每个 $\mathcal{T}_i^0 = \mathcal{S}_i$ 和 $\ell_i = 0$。

**定义 5.12.** 我们说 $\mathcal{E}$ 属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$，如果它具有形式 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$，且$(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ 有效，或者 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \eta)$，且$(\mathcal{M}, \mathcal{S})$有效。

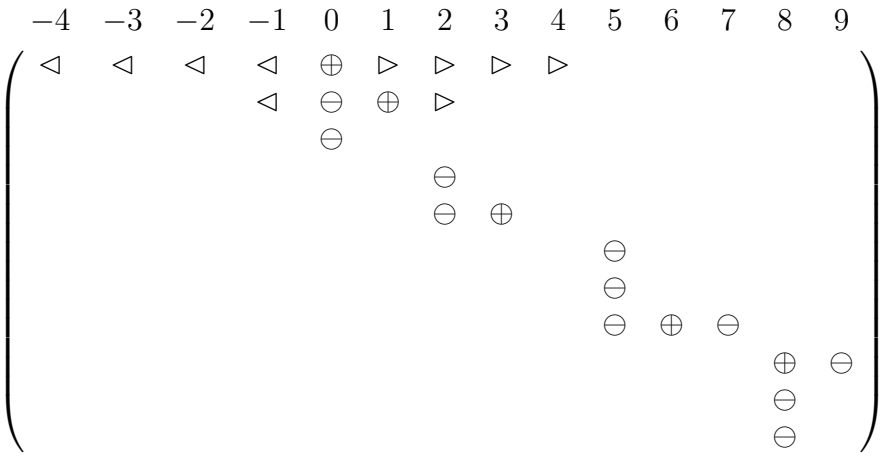
**定义 5.13.** 如果 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，那么我们将相关的 $\mathcal{S}$ （或在适用时的 $\mathcal{S}$ 和$\mathcal{T}$）称为 $\mathcal{E}$.的 $\mathcal{S}$-数据

由于上述构造相当复杂，我们给出一个类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的虚拟扩展多段示例。

**例 5.14.** 令 $n = 9$, $\mathcal{M} = (1,1, 3, 1, 1, 3,1, 3, 1)$,

$$\mathcal{S}_1 = \{0, \overline{1,2}\}, \mathcal{S}_2 = \{2, 3, \overline{4}\}, \mathcal{S}_3 = \{5\}, \mathcal{S}_4 = \{5, 6, 7\}, \mathcal{S}_5 = \{8, 9\}.$$

且 $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5\}$. 于是，相应的多重线段 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ 与$\eta(\mathcal{E}) = 1$ 为：




这里，支撑为 $[2, 2]$ 的行是属于支撑为 $[0, 0]$ 的链的一个倍数，而支撑为 $[8, 8]$ 的倍数属于支撑为$[8, 9]$. 的链。与此同时，支撑为 $[5, 5]$ 的第一行是一条链，而第二个这样的行是属于它的一个倍数。

**例 5.15.** 设 $\mathcal{B}$ 是一个块。那么 $\mathcal{B}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}$，其中 $\mathcal{S}_i = \{i\}$（若 $\mathcal{B}$ 从零开始，则还包括 $\mathcal{T}_i^0 = \{i\}$）。

类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 的虚拟扩展多段有一项重要性质，如下引理所示。

**引理 5.16。** 若 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，则 $\eta(\mathcal{E}) = \eta(dual(\mathcal{E}))$。

证明。 设 $r$ 为 $\mathcal{E}$. 的最后一行。那么引理 4.10 推出

$$\eta(dual(\mathcal{E})) = \eta(\widehat{r}) = (-1)^{C(\mathcal{E})-C(r)}\eta(r),$$

其中 $\widehat{r}$ 是 $r$ 在 $dual$. 下的像。注意，备注 5.8适用于所有类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的多重线段，即使其中 $\mathcal{M}$ 从零之后开始也是如此。因此，按顺序列出符号 $\oplus$ 和 $\ominus$ 会得到奇重数的连续段。因此，可以从 $\mathcal{E}$ 中移除偶数个圆圈，使得每个连续段都只剩一个圆圈；也就是说，使 $\mathcal{E}$ 成为交替的。这样做不会改变符号 $(-1)^{C(\mathcal{E})-C(r)}\eta(r)$。因此，结论由引理 4.11 得出。□

类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 的定义旨在证明以下定理。

**定理 5.17。** 令 $\mathcal{B} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 为一个重数为 $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. 的块。那么，集合 $\Psi(\pi(\mathcal{B}))$ 恰好是 $\psi_{\mathcal{E}}$ 的集合，其中 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 属于类型$Y_{\mathcal{M}}$，且 $\eta(\mathcal{E}) = \eta(\mathcal{B})$。

我们将在第5.4节证明此定理。

5.2. **类型** $X_k$。 在本节中，我们定义类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的虚拟扩展多段的一种特殊情形，并称之为类型 $X_{k\cdot}$。我们将利用这个简单情形，证明存在四种作用于类型为 $X_k$ 的虚拟扩展多段 $\mathcal{E}$ 的基本算子组合，它们都会将这类多段映射为其他类型为 $X_k$ 的多段。

**定义 5.18**。 我们称虚拟扩展多段 $\mathcal{E}$ 为类型 $X_k$，如果对于一个从0 开始且所有重数均为1的块元组 $\mathcal{M}$， $\mathcal{E}$ 属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$。

这里，我们列出类型为$X_{k\cdot}$的虚拟扩展多段的一些性质。

**引理 5.19**。 设 $\mathcal{E}$ 属于类型 $X_{k\cdot}$。那么，

*(1)* $\mathcal{E}$ 是交替的，*(2)* $C(\mathcal{E})$ $= k+1$，并且 *(3)* $dual(\mathcal{E})$ 也属于类型 $X_{k\cdot}$

证明。 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M},\ \mathcal{S},\ \mathcal{T},\ \eta)$。 由于 $\mathcal{E}$的所有重数均为 1， $\mathcal{E}$没有倍数。因此，引理的第 (1) 部分由定义 5.2的符号条件推出。

由于 $\mathcal{E}$ 的所有重数均为 1，根据定义 5.1的条件（4），所有 $\mathcal{S}_i$ 均不重叠。每个 $\mathcal{S}_i$ 贡献的行总共包含 $|\mathcal{S}_i|$个圆圈，因此

$$C(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{\ell} |\mathcal{S}_i| = \left|\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{S}_i\right| = |\{0,1,\ldots,k\}|,$$

这就证明了引理的第 (2) 部分。

对于第（3）部分，我们首先证明 $dual(\mathcal{E})$ 具有类型为 $X_k$ 的虚拟扩展多段的支撑。支撑为 $[\max\ \mathcal{T}_i^j, -\min\ \mathcal{T}_i^j]$ 的帽，其对偶是支撑为 $[\max\ \mathcal{T}_i^j, \min \mathcal{T}_i^j]$ 的圆圈行。支撑为 $[\max\ \mathcal{T}_i^0, \min\ \mathcal{T}_i^0]$ 的圆圈行，其对偶是支撑为 $[\max\ \mathcal{T}_i^0, -\min\ \mathcal{T}_i^0]$ 的帽；但当 $\min\ \mathcal{T}_i^0 = 0$ 时例外，此时它仍然是圆圈行。因此， $dual(\mathcal{E})$ 的支撑与 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}', \mathcal{T}', \eta)$ 的支撑相同，其中 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{T}'$ 通过以下过程构造。 $\mathcal{S}'$ 的元素为

- 对于所有 $i$ 以及所有 $0 < j < \ell_i$，集合 $\mathcal{T}_i^j$，其对应的划分仅由集合 $\mathcal{T}_i^j$ 构成，
- 对所有带有 $\ell_i > 0$ 的 $i$，取 $\mathcal{T}_i^{\ell_i}$ 与所有满足以下条件的 $\mathcal{T}_j^0$ 的并集：对所有 $i < k \le j$， $\ell_k = 0$；相应的划分依次由集合 $\mathcal{T}_i^{\ell_i}$、 $\mathcal{T}_{i+1}^0$、.....组成；或者
- $\mathcal{T}_1^0$，相应的划分仅由集合 $\mathcal{T}_1^0$ 组成。

显然，所有这些集合的并集与$\mathcal{S}_i$的并集相同，而且它们互不重叠。我们只需对它们排序，使其满足定义5.1的条件（3）。条件（4）和（5）不适用。我们只需对这些分拆排序，使其满足定义5.9 的条件（2）；条件（3）不适用。因此，这确实是有效的。此外，我们看到，除了 $\mathcal{T}_1^0$之外，每个 $\mathcal{T}_i^j$ （其中 $j > 0$对应于一个帽）都是某个 $\mathcal{T}'^{j'}_{i'}$ （其中 $j' = 0$对应于一行圆圈）的 $\mathcal{T}_i^j$；同样，每个 $j = 0$（其中 $\mathcal{T}'^{j'}_{i'}$ 对应于一行圆圈）都是某个 $j' > 0$（其中 $\mathcal{E}$对应于一个帽）的 $\mathcal{M}$。因此， $\mathcal{S}'(\mathcal{T}', \eta,,)$ 的支撑确实正确。

接下来，我们检查 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}', \mathcal{T}', \eta)$ 与 $dual(\mathcal{E})$ 的顺序相同。注意，对 $\mathcal{E}$ 应用 $dual$ 会将每一行替换为其对偶，并反转它们的顺序。因此，如果$\mathcal{E}$按 $(P')$ 顺序排列，那么 $dual(\mathcal{E})$ 也如此。此外，由于这些 $\mathcal{S}_i$互不重叠， $\mathcal{E}$ 的每一行都从不同的列开始， $dual(\mathcal{E})$ 也同样如此。因此，$(P')$ 条件足以精确确定顺序。但 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}', \mathcal{T}', \eta)$ 也满足 $(P')$，所以它们的顺序相同。

最后，我们检查符号。根据引理 4.11， $dual(\mathcal{E})$ 是交替的，并且$\eta(dual(\mathcal{E})) = \eta$。由于 $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}', \mathcal{T}', \eta)$ 也具有交替性，且符号为 $\eta$，两边的符号一致，因此证明完成。□

我们旨在证明以下结果，为更一般的定理 5.17 做准备。

**定理 5.20**。 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$ 是类型为 $X_k$ 、符号为 $\eta(\mathcal{E})$的温和表示。那么，集合 $\Psi(\pi(\mathcal{E}))$就是 $\psi_{\mathcal{F}}$ 的集合，其中 $\mathcal{F} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$ 的类型为 $X_k$，且 $\eta(\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{E})$。</output>

我们将在本小节末尾证明这个定理。为了证明这个定理，我们将完整分类类型为 $X_k$. 的虚拟扩展多段上所有可能的升算子。首先，我们证明类型为 $X_k$ 的虚拟扩展多段的两个非常重要操作的存在性。

**引理 5.21.** 假设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $X_k$，且 $h = ([A, -B], B, \eta)$ 是 $\mathcal{E}$中的一个帽。设 $c$ 为一个正整数，并假设 $C(h) > c$。则存在对 $\mathcal{E}$ 的一系列操作，得到一个新的虚拟扩展多段 $\mathcal{E}'$，使得：

- $\mathcal{E}'$ 具有形式为 $h' = ([A - c, -B], B, \eta)$的帽，
- $\mathcal{E}'$ 有一行支撑为 $[A, A - c + 1]$的 $c$ 个圆圈，
- $\mathcal{E}'$ 的其余线段与 $\mathcal{E} - \{h\}$的线段完全相同，只是符号可能不同，

- $\eta(\mathcal{E}') = \eta(\mathcal{E})$，和
- $\mathcal{E}'$ 的类型为 $X_k$.

证明。我们先证明 $A = k$. 所述情形下的命题。我们将要证明其存在的操作由以下几步组合而成：

(1) 行交换 $h$ ，直到它成为最后一行 $\mathcal{E}_{\cdot}$。(2) 执行一个类型 3’ 的 $ui^{-1}$ ，将 $c$ 圆圈与底行分开。(3) 将倒数第二行一路行交换到最上方。

根据推论 4.21 和引理 4.1(3)，我们知道这些行交换与合并帽以及类型 3’ 的 $ui$可交换。因此，为了确定行交换作用下 $h$ 的像，我们可以假设 $\mathcal{E}$ 完全未合并：即每一行 $r \in \mathcal{E}$ 都有 $C(r) = 1$。

因此，行 $h$后面紧跟着 $k+1-C(h)$ 行 $r_1$，……， $r_{k+1-C(h)}$，它们都满足交错符号条件。通过分析 $\mathcal{S}$-数据可清楚看出， $\mathcal{E} - \{h\}$属于 $X_{k-C(h)}$类型；因此，$\mathrm{supp}(h)$ 包含其他所有行的支撑。因此，根据引理4.15，将 $h$下移到底部，我们得到一行 $h'$使得

$$l(h') = l(h) - (k + 1 - C(h)) = B - k - 1 + (k - B + 1) = 0,$$

$$\eta(h') = (-1)^{k+1-C(h)}\eta(h).$$

因此， $h'$ 是一行圆圈。由于 $c < C(h) = k - B + 1$，我们有$B \leq k - c$，这意味着可以使用一个 $ui^{-1}$ 将最后的$c$ 个圆圈分离出来，组成新的一行。我们将所得的两行记为 $h_1$， $h_2$.

引理 4.15 表明，像 $r'_1 < \cdots < r'_{k+1-C(h)}$ 是交替的，但（$r'_{k+1-C(h)}$， $h'$）不满足交错符号条件。这意味着（$r'_{k+1-C(h)}$， $h_1$）也不满足交错符号条件。同样， $supp$（$h_1$） $= [k-c, B]$ 仍包含所有行的支撑 $r'_i$. 因此，引理 4.16 告诉我们，将$h_1$移到多重线段的顶部会得到满足交错符号条件的新行 $h'_1 < r''_1 < \cdots < r''_{k+1-C(h)}$。特别地，我们有

$$l(h'_1) = \eta(h_1) + k + 1 - C(h) = 0 + l(h) = B$$

and

$$\begin{aligned}\eta(h'_1) = (-1)^{k+1-C(h)}\eta(h_1) = (-1)^{k+1-C(h)}\eta(h') = (-1)^{k+1-C(h)}(-1)^{k+1-C(h)}\eta(h)\\ = \eta(h).\end{aligned}$$

这些等式表明，所得的行 $h'_1$ 是一个形如（$[A\ -c$， $-B]$， $B$， $\eta$） 的帽。特别地，若将所得的虚拟扩展多段记为 $\mathcal{E}'$，则 $\eta(\mathcal{E}) = \eta(\mathcal{E}')$。最后，我们需要检验这一对（$r''_{k+1-C(h)}$， $h_2$）是否满足交错符号条件：

$$\eta(h_2) = (-1)^{C(h_1)+c}\eta(h_1) = (-1)^{C(h)+c}(-1)^{k+1-C(h)}\eta(h') = (-1)^{k+1+c}\eta(h).$$

与此同时，我们有

$$\eta(r''_{k+1-C(h)}) = (-1)^{C(h)-c}(-1)^{C(h)}\eta(r_{k+1-C(h)}) = (-1)^c\eta(r_{k+1-C(h)}).$$

但由于原始行 $h < r_1 < \cdots < r_{k+1-C(h)}$ 是交替的，我们得到

$$(-1)^c\eta(r_{k+1-C(h)}) = (-1)^c(-1)^{k-C(h)}(-1)^{C(h)}\eta(h) = -\eta(h_2),$$

并且由于 $C(r_{k+1-C(h)}) = 1$，这足以证明这一对是交替的。现在，很明显，$\mathcal{E}' - \{h'_1, h_2\}$ 与 $\mathcal{E} - \{h\}$ 具有相同的线段，至多符号不同。由于它是交替的，我们看到 $\mathcal{E}' - \{h'_1, h_2\}$ 属于类型$X_{k-C(h)}$. 。由此可得， $\mathcal{E}'$ 本身就是 $X_k$.

现在，我们转向更一般的情形，其中 $k \geq A$. 。由于 $\mathcal{E}$ 属于类型 $X_k$，以 $h$为第一行的子虚扩展多线段 $\mathcal{E}_A$ 属于类型$X_A$。正如我们所见，对 $\mathcal{E}_A$ 执行上述操作会得到一个线段 $\mathcal{E}'_A$ ，它具有相同的符号，且属于类型 $X_A$。正如通过加入交替的合并后的帽和圆行，由 $\mathcal{E}_A$构造出 $\mathcal{E}$ 一样， $\mathcal{E}'$ 也以同样的方式由 $\mathcal{E}'_A$.构造。因此，要证明 $\mathcal{E}'$属于类型 $X_k$，只需证明它是交替的。

特别地，只需证明 $h'_1$ 及其前面的那一行满足交错符号条件，并且 $h_2$ 及其后面的任意一行满足交错符号条件。前者由 $h$ 与$h'_1$ 具有相同符号这一事实得出。对于后者，我们注意到 $C(\mathcal{E}_A) = C(\mathcal{E}'_A)$。因为 $\mathcal{E}$ 满足交错符号条件，块 $\mathcal{E}'_A$之后的行应具有符号 $\eta(\mathcal{E}_A)(-1)^{C(\mathcal{E}_A)}$. 这等于 $\eta(\mathcal{E}'_A)(-1)^{C(\mathcal{E}'_A)}$, 因此它具有

在 $\mathcal{E}'$中同样正确的符号。因此， $\mathcal{E}'$是 $X_k$. $\eta(\mathcal{E}') = \eta(\mathcal{E})$是显然的，因为 $h$ 之前的任何行都不受影响。□

接下来，我们证明有时可以对类型为 $X_k$.的某些虚拟扩展多段恰好执行一次 $dual \circ ui \circ dual$

**引理5.22.** 假设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $X_k$，且 $h = ([k, -B], B, \eta)$ 是第一行。则可以恰好执行一次涉及行 $h$.的 $dual \circ ui \circ dual$ 。此操作保持其为类型 $X_k$ 的性质以及符号 $\eta(\mathcal{E})$。

证明. $h$ 在 $dual(\mathcal{E})$中的像是圆圈行 $h = ([k, B], 0, \eta')$. 由于$\mathcal{E} - \{h\}$ 的类型为 $X_{k-C(h)}$, $dual(\mathcal{E})$的其他行的支撑都不与 $[k, B]$. 相交。因此， $dual(\mathcal{E})$中涉及 $h$ 的唯一可能的 $ui$ 是类型 3'。因此， $ui$ 必须涉及唯一行 $r \in \mathcal{E}$ 的像，其支撑终止于 $A(r) = B - 1$. 。存在终止于 $B - 1$ 的一行是有保证的，因为 $\mathcal{E} \setminus \{h\}$ 的类型为 $X_{k-C(h)} = X_{B-1}$.

有两种可能的情形。第一种情形是，以 $B - 1$ 结尾的行 $r \in \mathcal{E}$ 紧接在 $h$ 之后的帽，在这种情况下，涉及 $h$ 的唯一 $dual \circ ui \circ dual$ 是合并帽的算子。第二种情形是，以 $B - 1$ 结尾的行 $r \in \mathcal{E}$ 是 $\mathcal{E}$. 底部的一行圆圈。在 $dual$（$\mathcal{E}$）中，像 $\hat{r}$ 是第一个帽，其支撑仍然在 $B - 1$. 处结束。断言可以在 $\hat{r}$ 和 $h$ 之间执行 $ui$，等价于断言可以撤销引理 5.21 中的 $ui^{-1}$ 操作。这种操作保持符号以及属于类型 $X_k$ 这一性质的事实，由引理 4.10 和 5.21 得出。□

在更一般的情形下， $h =$ （$[A, -B]$， $B$， $\eta$）不是 $\mathcal{E}$ 的第一行，我们仍有一些类型为 $X_A$ 的子多段 $\mathcal{E}_A$，其中 $h$ 是第一个帽。这意味着始终可以对任意帽执行 $dual \circ ui \circ dual$，尽管该操作可能并不唯一。为了保持唯一性，我们将结果重新表述如下：

**引理 5.23.** 假设 $\mathcal{E}$ 是类型为 $X_k$ 的，且 $h = ([A, B], -B, \eta) \in \mathcal{E}$ 是任意一个帽。那么，存在唯一的方法对行对 $(h, r)$ 应用 $dual \circ ui \circ dual$，其中 $A(r) < A$.

同样，此操作分为以下两种情形之一：(1) $r$ 是一个帽，且该操作是合并；(2) $r$ 是一行圆圈。为简洁起见，我们将后一种操作称为将帽 $h$ 对偶化为 $r$。注意，支撑为 $[A, B]$ 的帽只能对偶化为支撑终止于 $-B - 1$. 的圆圈行 $r$

前述两种操作是可对类型为 $X_k$ 的虚拟扩展多段 $\mathcal{E}$ 执行的四种可能升算子中的两种。以下列出这四种可能的升算子。

**定义 5.24.**

- 通过类型 3' 的 $ui^{-1}$ 分离圆圈行，我们将其记为 $S$,
- 按照引理 *4.19*合并连续帽，记为 $M$,
- $ui^{-1}$ 按照引理 *5.21* （同样属于类型 3'），记为 $U$，以及
- 对一个帽取对偶 $h$ 如引理 *5.23*中所述，我们将其记为 $D$。

注意，算子 $S$ 与 $M$ 在某种意义上互为逆对偶；具体而言， $M$ 可通过取对偶 $\mathcal{E}$ 并施行 $S$的逆算子得到。这些操作与另外两种不同，因为它们涉及连续行的交互。 $U$ 与 $D$ 同样是逆对偶，且二者都涉及非连续交互：将 $U$ 或 $D$ 作用于靠近 $\mathcal{E}$顶部的帽，会在 $\mathcal{E}$. 底部附近出现圆圈。这些操作总结于下表。

| | 连续 | 不连续 |
|---|---|---|
| $ui^{-1}$ | $S$ | $U$ |
| $dual \circ ui \circ dual$ | $M$ | $D$ |

接下来，我们将为上述算子引入更复杂的记号，使随后的证明更加精确。

**定义 5.25**。

- 令 $S_{r,c}$ 为从一行 $r$.中分离出圆圈的算子
- 令 $U_{h,c}$ 为从帽 $h$.中移除圆圈的 $ui^{-1}$ 算子 $c$
- 设 $M_{h_1,\ h_2}$ 为合并帽的算子 $h_2$， $h_2$.
- 设 $D_{h,\ r}$ 为将帽 $h$ 对偶化为行 $r$.的算子

事实证明，算子 $S$， $M$， $U$和 $D$完全刻画了类型 $X_k$.的虚拟扩展多重线段之间的等价关系

**引理 5.26**。 设 $\mathcal{E}$ 为类型 $X_k$. 。那么，唯一可应用于 $\mathcal{E}$ 的升算子或降算子是形式为 $S$、$M$、 $U$、 $D$ 的算子及其逆算子。

证明。所有升算子要么是 $dual \circ ui \circ dual$ ，要么是 $ui^{-1}$. 。我们已由引理 5.23 得知，唯一可能的 $dual \circ ui \circ dual$是 $M$或 $D$。将类型 3'的 $ui^{-1}$ 应用于圆圈行，必然是一个 $S$ 操作。将类型 3'的 $ui^{-1}$ 应用于帽时，需要进行行交换，直到该帽成为圆圈行；这必然是一个 $U$ 操作（回想一下，根据引理 2.16，非类型 3'的 $ui^{-1}$ 必须具有 $dual \circ ui \circ dual$ 的形式）。与此同时，若 $T$是作用于 $\mathcal{E}$上的降算子，那么 $dual \circ T \circ dual$ 就是作用于 $dual(E)$上的升算子，因此必定是 $S$、 $M$、 $U$、 $D$之一。由于这些操作成对构成互逆的对偶算子， $T$ 必定是它们的逆算子之一。□

**推论 5.27**。 如果 $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$和 $\mathcal{E}$具有类型 $X_k$，那么 $\mathcal{E}'$也具有类型 $X_k$.此外， $\eta(\mathcal{E}) = \eta(\mathcal{E}')$。

证明。 只需验证这些操作 $S$、 $M$、 $U$、 $D$及其逆算子都保持类型 $X_k$ 这一性质，同时也保持符号。对于 $S$ 和$M$及其逆算子，这一点显而易见。对于 $U$ 和 $D$，这分别由引理 5.21 和 5.23 得出。对于 $U^{-1}$ 和 $D^{-1}$，这由以下事实得出： $U$ 和 $D$ 互为逆对偶，再结合引理 5.16 和 5.19。 □

现在，我们终于可以证明定理 5.20中的分类了。

定理 *5.20* 的证明。 假设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 是温和的，类型为 $X_k$，符号为 $\eta(\mathcal{E})$。引理 5.27表明，所有与 $\mathcal{E}' \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 等价的 $\mathcal{E}$ 也都是类型 $X_k$ ，且符号相同。反过来，若 $\mathcal{E}'$ 是类型 $X_k$，则对 $D_{h_i}$ 的每个帽应用 $\mathcal{E}'$ ，可得到一个仅由圆圈构成的等价虚拟扩展多段

依次应用 $S$ 后，得到一个与 $\mathcal{E}$ 重数相同的温和线段。符号保持保证该多重线段与 $\mathcal{E}$. 相同 □

**5.3. 类型为 $Y_{\mathcal{M}}$的操作**。在本节中，设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{M}$ 是由奇整数组成的块元组。本节的目标是描述并分类可在 $\mathcal{E}$上实现的行操作。这些操作类似于类型为 $X_k$时所见的操作 $S$、$M$、$U$以及 $D$，但通常更为复杂。此外，通过这些算子对 $\mathcal{E}$. 的 $\mathcal{S}$数据所产生的影响，可以很好地理解它们。请注意，关于 $S$ 算子的讨论适用于所有类型为 $Y_{\mathcal{M}}$的多段，而其他算子仅涉及从零开始的虚拟扩展多段。

首先，我们考虑操作 $S$。对于类型为 $X_k$的多重线段，对圆行应用操作 $ui^{-1}$ 很简单：所有操作$S_{r,\ c}$ 都可以实现，而且不需要进行行交换。然而，对于一般的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$. 的多重线段，情况并非总是如此。下面的引理描述了一种可以应用 $S$的情形。

**引理 5.28** (S 的存在性)。假设 $\mathcal{E}$的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，$r=([A,B],0,\eta)$ 是 $\mathcal{E}$中的一条链，并且 $k<C(r)$ 是一个整数。那么存在一系列保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 的操作，将 $\mathcal{S}_i=\{B,\dots,A,\dots\}$ 分成两个集合

$$\mathcal{S}_i^1=\{B,\dots,A-c\}\ and\ \mathcal{S}_i^2=\{A-c+1,\dots,A,\dots\}.$$

证明。我们将进行以下一系列操作。

- 将 $r$ 向下移动，越过所有支撑始于 $A-c$ 或更早位置的行。所得的行 $r'$ 将等于 $r$.
- 应用$S_{r,\ c}$.
- 将结果的第一行向上移回 $r$.的原始位置

我们断言，支撑始于 $A-c$ 或更早位置的行只有倍数。这等价于断言不存在始于 $B-c$或更早位置的链；这必定成立，因为两条链最多只能重叠一个圆。现在，所有这些倍数都必须属于链 $r$，而且由于它们与任何其他链都不重叠，因此每种倍数的个数必为偶数。因此，根据引理4.17，行 $r$ 与这些行交换后保持不变。同时，每个倍数的符号都乘以 $(-1)^{C(r)-1}$.

现在，$r$ 之后的行恰好是支撑至少从$A-c+1$处开始的行，因此我们可以将 $r$ 拆分成两行：

$$r_1=([A-c],0,\eta),\ r_2=([A,A-c+1],0,\eta^{C(r_1)}).$$

然后再次将 $r_1$ 向上交换所有重数后，依据 $r_1$ 引理4.17，$=(-1)^{C(r_1)}-1)^{C(r)-1-c}.$，所有重数的符号均乘以（$=(-1)^{C(r)-1-c}.$，所得的多重线段显然与 $\mathcal{S}$-数据相同，$\mathcal{E}$但已被拆分为 $\mathcal{S}_i=\{B,\dots,A,\dots\}$和 $\{B,\dots,A-c\}$与 $\{B-c+1,\dots,A,\dots\}.$。还需验证该多重线段是奇交替的，正如定义5.2所述。

在 $\mathcal{E}$，所有重数都属于 $r$，因此符号为 $\eta(-1)^{C(r)-1}$.这些行交换使它们的符号改变了 $(-1)^k$，所以新符号为

$\eta(-1)^{C(r)-c-1} = \eta(-1)^{C(r_1)-1}$. 这符合奇交替条件。在 $r_1$ 被向上交换之前，数对 $(r_1, r_2)$ 符合交错符号条件，因此行交换后， $r_2$ 必须与它前面的重数交替：由于重数的个数为偶数，这就是交替的。最后，属于 $r_2$ 的重数恰好是原本属于 $r$ 、但现在不再属于 $r_1$. 的那些重数。这些重数的符号仍为

$$\eta(-1)^{C(r)-1} = \eta(-1)^{C(r_1)}(-1)^{C(r_2)-1} = \eta(r_2)(-1)^{C(r_2)-1},$$

因此它们满足交错符号条件。 □

我们继续将引理 5.28 中所述的操作称为 $S_{r,\ c}$.

**注5.29**。 $S$ 操作中可能出现一个小小的细微问题。假设我们将$S_{r,\ k}$应用于链 $r = ([A, B], 0, \eta)$，使得 $A - B = k$ 且 $r$ 是一个 $z$-链。随后分离 $k$ 圆圈，会留下一个与 $\mathcal{S}_i^1$. 相关联的单圆行$([B, B], 0, \eta)$。然而，属于 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型的条件要求 $|\mathcal{S}_i^1| \geq 2$。也就是说，我们希望将其计为倍数，而不是链。为了解决这个记号问题，我们不再说将 $\mathcal{S}_i$ 分成两个集合$\mathcal{S}_i^1 = \{B\}$ 和 $\mathcal{S}_i^2 = \{B+1, \ldots, A\}$，而是直接舍弃 $\mathcal{S}_i^1$，仅用$\mathcal{S}_i^2$替换 $\mathcal{S}_i$。如果 $A \geq B + 2$，则对应于 $\{B+1, \ldots, A\}$ 的链必须在支撑为 $[B+1, B+1]$.的（偶数个）倍数下方进行行交换

总而言之，我们可以如下描述 $S$ 对 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{S}$-数据的影响：

**注5.30**。 令 $r =$ （$[A, B]$、$0$、$\eta$）。我们有如下两种情形。

- 如果 $c = A - B$ 和 $r$ 是一个 $z$-链，那么应用 $S_{r,\ c}$ 会替换：
$$\{B, \ldots, A, \ldots\} \longrightarrow \{B+1, \ldots, A, \ldots\}.$$
- 否则，应用$S_{r,\ c}$ 会替换：
$$\{B, \ldots, A, \ldots\} \longrightarrow \{B, \ldots, A-c\}, \{A-c+1, \ldots, A, \ldots\}.$$

**定义5.31**。 我们将 $k = A - B$和 $r$ 为 $z$-链的情形称为 $S^2$，而将另一种情形称为 $S^1$.

我们注意到，这个 $S$ 操作仍然与行交换可交换。更准确地说，以下推论可由引理 4.1的第(1)和(3)部分立即得到。

**推论 5.32.** 令 $R$ 表示将某一行 $r$ 与一系列行 $r_i < r_{i+1} < \cdots < r_j$. 互换的操作。令 $S$ 为涉及行 $r_i < r_{i+1} < \cdots < r_j$. 的一种类型为 $S$ 的 $ui^{-1}$。则 $R \circ S = S \circ R$。

对于本节讨论的其余操作 $M$， $U$，和 $D$，我们假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$ 从零开始。可以在 $\mathcal{E}$ 上实现的最简单操作是 $M$，即帽的合并。

**引理 5.33**。 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$ 从零开始，且具有由 $\mathcal{T}_i^j$ 和 $\mathcal{T}_{i'}^{j'}$. 得到的帽 $h_1 < h_2$。那么，当且仅当 $i = i'$ 和 $j = j' + 1$. 时， $h_1$ 和 $h_2$ 可以合并

证明。假设 $h_1 = ([A_1, -B_1], B_1, \eta_1)$ 和 $h_2 = ([A_2, -B_2], -B_2, \eta_2)$。那么必有 $\mathcal{T}_i^j = \{B_1, \dots, A_1\}$ 和 $\mathcal{T}_{i'}^{j'} = \{B_2, \dots, A_2\}$，且这些集合必须互不相交，才能使 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 有效。由于 $h_1 < h_2$，必有 $B_1 > A_2.$。因为 $\mathcal{E}$ 是奇交替的，且按 $(P')$ 的顺序排列，所以根据引理 4.19，当且仅当 $B_1 = A_2 + 1$ 时， $h_1$ 和 $h_2$ 可以合并。

我们证明，若 $B_1 = A_2 + 1$，则 $i = i'$ 和 $j = j' + 1$，因为反向显然成立。反设 $i \neq i'$，在这种情形下 $i > i'$，因为 $B_1 > A_2.$。但由于 $A_2 = B_1 - 1 \in \mathcal{S}_{i'}$ 且 $|\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_{i'}| \leq 1$，我们必有 $\min \mathcal{S}_i = B_1$，或者 $A_2.$。但由于 $j \geq 1$，这将意味着 $\mathcal{T}_i^0 \subset \{A_1\}$，与条件 $|\mathcal{T}_i^0| \geq 2.$ 矛盾。因此，我们得出结论 $i = i'$。事实 $j = j' + 1$ 可由事实 $B_1 = A_2 + 1.$ □得出。

**注记 5.34**。有了这个引理，我们注意到，操作 $M$ 可以用 $\mathcal{E}.$ 的 $\mathcal{S}$ 数据作出简洁的描述。若 $\mathcal{T}_i^j$ 和 $\mathcal{T}_i^j$ 是与 $h_1$ 和 $h_2$相关联的集合，那么合并 $h_1 * h_2$ 就对应于将这些集合替换为$\mathcal{T}_i^j \cup \mathcal{T}_i^{j+1}.$

换言之，将 $M_{h_1,h_2}$ 应用于 $h_1 = ([A, -B], B, \eta_1)$ 和 $h_2 = ([-B + 1, C], -C, \eta_2)$，会替换

$$\{\dots \overline{C, \dots, B-1}, \overline{B, \dots, A}, \dots\} \longrightarrow \{\dots \overline{C, \dots, B-1, B, \dots, A}, \dots\}.$$

接下来，我们证明可以对帽进行对偶化。

**引理 5.35 (** $D$的存在性。 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$ 中 $\mathcal{M}$ 从零开始，且 $h = ([A, -B], B, \eta)$ 是 $\mathcal{E}$中的一个帽。假设 $r_1, r_2, \dots, r_k$ 是支撑包含 $B - 1.$ 的圆圈行。以下结论成立。

*(1)* 行 $r_k$ 终止于 $B - 1$，并且可以在 $h$和 $r_k$之间执行一次 $dual \circ ui \circ dual$，记作 $D_{h,r_k}$.我们有 $D_{h,r_k}(\mathcal{E})$ 也属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$，且具有相同符号。*(2)* 假设 $r = r_i$ 是一行圆圈，且 $k - i \in 2\mathbb{Z}$。那么可以在 $h$ 和 $r$之间执行一次 $dual \circ ui \circ dual$，记作 $D_{h,r}$.*(3)* 如果 $\mathcal{E}'$ 是 $\mathcal{E}$ 在第 *(1)* 部分或第 *(3)* 部分中的此类 $dual \circ ui \circ dual$ 下的像，那么 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{E}'$对于相同的 $\mathcal{M}.$属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$。此外， $\eta(\mathcal{E}) = \eta(\mathcal{E}')$。*(4)* $\mathcal{E}$ 等价于一个类型为 $Y_{\mathcal{M}}$.的温和虚拟扩展多段

在证明这个引理之前，我们注意到，如上所述，操作 $D_{h,\ r}$ 与行交换（若存在）可交换。

**引理 5.36.** 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$ 从零开始。设 $r \in \mathcal{E}$ 是一行，且 $r_1$ 和 $r_2$ 是使操作 $D_{r_1,\ r_2}$ 有效的行。假设 $supp(r)$包含从 $r_1$ 到 $r_2$ （含端点）的各行的支撑。那么，将$r$ 向下与行 $r_1 < \cdots < r_2$ 交换，所得的 $r'$ 与将 $r$ 与这些行在 $D_{r_1,\ r_2}$. 下的像交换所得的结果相同。

证明。 我们对 $r_1$ 下方帽的数量进行归纳，以证明该结果。作为归纳假设的一部分，我们可以假设 $r_1$ 之后的所有帽都可以对偶化，且不影响 $r'$ 在行交换下的像。因此，$r_1$ 与 $r_2$ （不包括 $r_1$，但包括 $r_2$）之间的行全都是圆行。根据引理5.32，我们可以假设 $r_1$ 与 $r_2$ 之间的所有链都完全未合并，因此从 $r_1$ 到 $r_2$ （不含）这些行构成一个温和多段。

于是，由引理 4.17 和 4.18，我们可以假设不存在倍数，因此行 $r_1 < \cdots < r_2$ 由一个类型为 $X_k$ 的多重线段构成，其中 $k$.于是，这些行必定交替出现，因此引理 4.15 表明 $r'$ 仅取决于这些行中圆的总数，而该数量在 $D_{r_1}$ 下保持不变，$r_2$. □

有了上述引理，我们来证明引理 5.35。

引理 *5.35* 的证明。 我们先验证 $r_k$ 终止于 $B-1$。为导出矛盾，假设并非如此。那么 $r_k$ 的支撑必须包含 $B$，因此 $B \in \mathcal{T}_i^0$对于某个 $i$. 这是不可能的，因为 $B$ 位于帽 $h$ 中，所以 $B \in \mathcal{T}_{i'}^{j'}$ 对于某个$j \geq 1$. 那么必有 $|\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_{i'}| \geq 2$，这就产生了矛盾。

我们在同一个归纳论证中一并证明第（1）和（4）部分。在第 (1) 部分中，我们断言可以进行以下一系列操作：

- 对偶化 $\mathcal{E}$，使得像 $\widehat{r_k}$ 是一个帽，而 $h$ 是 $C(h)$ 个圆圈的一行，位于$dual(\mathcal{E})$ 中。

- 向下交换 $\widehat{r_k}$ 在 $dual(\mathcal{E})$ 中，直到其像 $\widehat{r_k}'$ 成为紧邻 $\widehat{h}$. 之前的一行
- 在 $\widehat{r_k}'$ 和 $\widehat{h}$.之间进行一次类型 3’ $ui$
- 对所得的行进行行交换，直到它位于 $\widehat{r_k}$原来的位置。

首先，显然，除了 $h$ 和 $r_k$之间的行以外，其他行都与这些操作是否存在无关（因为它们只能将 $h$ 和 $r_k$ 之间各行的符号统一乘以同一个因子），因此只需在 $h$是 $\mathcal{E}$ 的第一行且 $r_k$ 是最后一行的情形下证明该引理。我们通过归纳假设， $h$之后的所有帽都已对偶化；根据引理 $h$ ，我们可以对这些帽进行对偶化，而不影响5.36上的拟议操作。根据推论5.32，还可以将问题归约到以下情形：在$r_k$ 之前的所有链都恰好有一个圆。因此，我们通过归纳假设，$\mathcal{E} \setminus \{h, r_k\}$是一个温和虚拟扩展多段。现在，我们分别考虑以下两种情形。

第一种情形是 $m_{B-1} \geq 3$，在这种情形下， $r_k$ 是形如（$[B-1, B-1]$，0，$\eta'$）的倍数。 那么 $\mathcal{E} \setminus \{h\}$ 也是温和的，因为它的所有行都恰好有一个圆。因此我们有

$$\mathcal{E} \setminus \{h\} = \bigcup_{i=1}^{B-1} \bigcup_{j=1}^{m_i} ([i, i], 0, (-1)^i \eta(\mathcal{E})).$$

这意味着

$$dual(\mathcal{E}) \setminus \{\widehat{h}\} = \bigcup_{i=1}^{B-1} \bigcup_{j=1}^{m_i} ([i, -i], i, \eta_i').$$

然而，根据引理 4.17，要证明此结果适用于 $\mathcal{E}$，等价于证明它适用于一个已移除所有倍数的虚拟扩展多段。于是我们假设

$$\mathcal{E} \setminus \{h\} = \bigcup_{i=1}^{B-1} ([i, i], 0, (-1)^i \eta(\mathcal{E})),$$

这恰好是这样的情形： $\mathcal{E}$ 属于类型 $X_k$，因此第 (1) 部分由引理5.23得出。若 $\mathcal{E} - \{h\}$ 是温和的，则运用这一 $dual \circ ui \circ dual$ 将 $h$

以及 $r_k$ 合并成单行 $r'$，然后使用连续操作 $S_{r'_k,\,1}$ 表明$\mathcal{E}$ 本身等价于一个温和多段，从而证明了此情形下的第 (4) 部分。

第二种情形是 $m_{B-1}=1$，在此情形下，$r_k=([C,B],\ 0,\ \eta')$ 是一条链。根据 $r_k$ 是否在 $C$ 处与另一条链重叠，我们有

$$\mathcal{E}\setminus\{h,r_k\}=\bigcup_{i=1}^{C}\bigcup_{j=1}^{m'_i}([i,i],0,(-1)^i\eta(\mathcal{E})),$$

其中

$$m'_i:=\begin{cases}m_i-2 & \text{if } i=C \text{ and } r_k \text{ overlaps with another chain,}\\ m_i-1 & \text{if } i=C \text{ and } r_k \text{ does not overlap with another chain,}\\ m_i & \text{otherwise.}\end{cases}$$

再次地，在将行 $\widehat{r_k}$ 与 $dual(\mathcal{E})$ 的其他行进行行交换时，重数不会影响像 $\widehat{r_k}'$，这是由于引理 4.17。因此，我们可以假设每个 $m_i$ 都等于 0 或 1，于是归约到 $\mathcal{E}$ 为 $X_k$. 类型的情形。再次地，这足以证明第 (1) 部分。对 $h$ 取对偶并应用 $S$ 足以证明第 (4) 部分。

我们注意到，第 (2) 部分可以通过类似地只考虑 $h$ 与 $r_i$. 之间的行而归约到第 (1) 部分。由于 $r_i$ 和 $r_k$ 具有相同的奇偶性，这样的多重线段仍然是 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型，证明仍然成立。

类似地，只需证明 $i=k$. 情形下的第（3）部分。符号 $\eta(\mathcal{E})$ 在 $dual\circ ui\circ dual$ 操作下保持不变这一事实，源于当 $\mathcal{E}$ 为 $X_k$. 类型时符号保持不变这一事实。这是因为重数的存在不会在行操作下导致符号发生累积变化。为证明 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型保持不变，我们注意到该操作不会影响任何重数；只需证明奇-交替条件保持不变即可。

我们注意到，将 $\widehat{r}$ 向下交换，直到它位于 $dual(h)$ 之前的那一行，会使所有中间行的符号变为 $(-1)^{C(r)-1}$；而将合并后的行换回上方，则会使所有符号变为 $(-1)^{C(r)+C(h)-1}$（引理 4.15 和 4.16）。因此，所有中间行的净符号变化为 $(-1)^{C(h)}$. 。连续的中间行都满足与之前相同的符号条件。同时，由引理 5.23 的证明可知，行块 $h<\cdots<r$ 的第一个圆和最后一个圆的符号在 $D_h$、$r$ 操作下保持不变。于是，$r'$ 必须满足定义 5.2 规定的与其后一行之间的符号条件。同时，$r$ 之前一行的符号变为 $(-1)^{C(h)-1}$，$\widehat{r}'$ 的最后一个圆的符号也如此，因此 $r'$ 也必须满足与其前一行之间的适当符号条件。□

上述引理足以推出以下结果。

**推论 5.37**。任意两个具有相同 $\eta$ 的 $Y_{\mathcal{M}}$ 多段，在算子 $S$、$D$及其逆算子作用下等价。

证明。首先，我们假设 $\mathcal{M}$ 从零开始。引理 5.35 的第 (4) 部分 $Y_{\mathcal{M}}$ 所有具有相同 $\mathcal{M}$ 和 $\eta$ 的多段都等价于一个温和的

类型为 $Y_{\mathcal{M}}$.的多段。第 (1) 部分保证这个温和的多段始终具有相同的 $\mathcal{M}$和 $\eta$.

若 $\mathcal{M}$ 始于零，则任意类型的 $Y_{\mathcal{M}}$ 多重线段都没有帽，并且可以通过 $S$ 操作分解为一个温和多段。根据引理5.28，这个多重线段仍必须具有相同的 $\mathcal{M}$ 和 $\eta$. □

将问题归结为 $\mathcal{E}$ 属于类型 $X_k$的情形后，我们已经证明，操作$D$ 具有与类型 $X_k$时相同的结构性质。也就是说，若$\mathcal{E}' = D_{h,\ r}(\mathcal{E})$，且 $r'$是所得的行，则：

- $\mathcal{E} \setminus \{h, r\}$ 和 $\mathcal{E}' \setminus \{r'\}$ 的行相同，只差一个符号变化。
- 若 $r$ 是支撑为 $[A, B]$的圆圈行，则 $r'$ 是支撑为 $[A + C(h)\ B]$.的圆圈行

**注 5.38**。 引理 *5.35* 及上述描述只涉及 $r = r_i$的情形，此时 $i$ 和 $k$ 具有相同的奇偶性。我们可能会想知道，若将 $h$对偶化为某个倍数 $r_i$，使得 $i$ 和 $k$ 具有不同的奇偶性，会发生什么情况。事实上，这是可行的，而引理 *4.1* 说明，若 $r_i = r_j$，则 $D_{h,\ r_i}$和 $D_{h,\ r_j}$ 在经过行交换后等价。

事实上，将一个帽 $h$ 对偶化到一个与 $k$ 奇偶性不同的倍数 $r_i$，总会产生一行，其中含有 $l \geq 1$.。为说明这一点，设 $r_1 = ([B, B], 0, \eta)$ 和$r_2 = ([A, B], 0, \eta)$ 是两条符号相同的连续行。公式表明，行交换后， $r_1$ 保持不变，只是其符号变为 $(-1)^{C(r_2)}$；而 $l(r_2)$ 则增加 *1*。无论 $r_1$ 和 $r_2$. 的顺序如何，情形都是如此。

由于将帽对偶化到哪个倍数并不重要，约定总是对偶化到最后一个倍数 $r_k$.

下一个引理利用这样一个观察来确定对给定帽进行对偶化有多少种方式：对偶化到各个倍数所产生的多重线段，在行交换意义下都相同。

**引理 5.39**。 设 $h = ([A, -B], B, \eta)$ 是 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta')$中的一个帽。
*(1)* 若 $m_{B-1} = 1$，则存在唯一的 $dual \circ ui \circ dual$，涉及 $h$ 以及低于 $h$.的行*(2)* 若 $m_{B-1} \geq 3$ 且 $\mathcal{T}_i^0 = \{B - 1\} \subset \mathcal{S}_i$ 对某个 $i$成立，则恰好存在一个 $dual \circ ui \circ dual$，在行交换意义下唯一，涉及 $h$ 以及低于 $h$.的行*(3)* 否则，在行交换意义下，恰好存在两个涉及 $h$ 以及低于 $h$的行的 $dual \circ ui \circ dual$。

证明。 对于第 (1) 部分，若 $m_{B-1} = 1$，则恰好存在一行 $r$，其支撑终止于 $B - 1$. 若 $r$ 是一个帽，则它必须是紧接在 $h$ 之后的那一行，因此唯一的 $dual \circ ui \circ dual$ 是 $M_{h,\ r}$. 若 $r$ 是一个圆圈行，则该操作为 $D_{h,\ r}$ 由引理 5.35。

对于第 (2) 部分，若 $m_{B-1} \geq 3$，则有 $m_{B-1}$ 行，其支撑终止于$B - 1$. 由于存在某个 $\mathcal{T}_i^0 = \{B - 1\}$，这些行中没有一行可以是帽。相反，其中一行是支撑为 $[B - 1, B - 1]$ 的链，其余行都是倍数。因此，所有这些 $m_{B-1}$ 行彼此相邻且相等。根据引理5.35， $h$ 可以对偶化为它们中的每一行，但根据注记 5.38这些行在行交换意义下都等价。

对于第（3）部分，若 $m_{B-1} \geq 3$ 且不存在任何 $\mathcal{T}_i^0 = \{B-1\}$，则 $B$包含于某个 $\mathcal{S}_i = \{\dots, B-2, B-1, B, \dots, A, \dots\}$. 中。由于 $\mathcal{S}$ 中的两个元素的交集大小至多为一，因此对于任意 $j \neq i$， $B-1 \notin \mathcal{S}_j$。现在，以下情况必有一种成立。

- 若 $B-1$ 包含在一个帽中，则此帽 $h'$ 和 $m_{B-1}$ 支撑的倍数 $[B-1, B-1]$ 恰好是 $m_{B-1}$ 支撑终止于 $B-1$. 的各行。一个 $dual \circ ui \circ dual$ 由合并 $h * h'$. 得到。另一个则由对 $h$取对偶得到，它可以是任意一个倍数。根据注记 5.38，由于这些倍数彼此相等，这些对偶化在行交换意义下相同。
- 若 $B-1$ 不包含在一个帽中，则它必定包含在一个长度为 $\geq 2$的链中，否则就会存在某个 $\mathcal{T}_i^0 = \{B-1\}$。那么，一个 $dual \circ ui \circ dual$ 是通过对该链取对偶 $h$ 得到的，另一个则是通过对它取任意一个倍数的对偶得到的。

由此可见，这两个 $dual \circ ui \circ dual$不会产生与相同 Arthur 参数相关联的虚拟扩展多段。这是因为这些多重线段的支撑不同。事实上，由第二种情形得到的那个包含一行，其支撑为 $[B, B-1]$；而由第一种情形得到的那个不可能包含这样一行。□

总之，当 $m_{B-1} \geq 3$，帽有时可以通过两种方式进行对偶化：要么变成一条链，要么变成一个倍数。尽管这些操作非常相似，但它们对 $\mathcal{S}$-数据的影响 $\mathcal{E}$ 却截然不同。因此，我们将分别用 $D^1$ 表示对偶化为链，用 $D^2$.表示对偶化为倍数。

**注5.40**。这些对偶化会按如下方式改变 $\mathcal{S}$-数据。

- 将 $D^1_{h,\ r}$应用于 $h = ([A, -B],\ B,\ \eta_1)$ 和 $r = ([B-1, C],\ 0,\ \eta_2)$，将其替换为$\{C, \dots, \cancel{B-1, B}, \dots, A, \dots\} \longrightarrow \{C, \dots, B-1, B, \dots, A, \dots\}.$
- 将 $D^2_{h,\ r}$应用于 $h = ([A, -B],\ B,\ \eta_1)$和一个倍数 $r = ([B-1, B-1],\ 0,\ \eta_2)$，将其替换为 $\{\dots, B-1, B, \dots, A, \dots\} \longrightarrow \{\dots, B-1\}$、$\{B-1, \dots, A, \dots\}$，从而生成一条 $z$-链。

最后，我们证明，操作 $U$ 可以以与 $\mathcal{E}$ 属于类型 $X_k$.时在结构上相同的方式应用于 $\mathcal{E}$

**引理 5.41 (**存在性 $U$)。 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \eta)$从零开始，并且 $h = ([A, -B], B, \eta)$ 是 $\mathcal{E}$ 中的一个帽，满足 $C(h) > c$。那么，存在一系列作用于 $\mathcal{E}$ 的操作，可得到一个新的虚拟扩展多段 $\mathcal{E}'$，其类型为$Y_{\mathcal{M}}$，并满足以下条件

- $\mathcal{E}'$有一个形如 $h' = ([A-c, -B], B, \eta)$的帽，
- $\mathcal{E}'$有一行支撑为 $[A, A-c+1]$的 $k$个圆圈，
- $\mathcal{E}'$的其余线段与 $\mathcal{E} - \{h\}$的线段完全相同，只是符号可能不同，并且
- $\eta(\mathcal{E}') = \eta(\mathcal{E})$。

证明。 再一次，我们先证明在以下情形下的命题： $h = ([k, -B], B, \eta)$,其中 $k = c_{\max}$. 这包括证明以下操作组合是有效的。

- 行交换 $h$ ，直到像 $h'$ 位于多重线段的底部。$h'$ 应为一行圆圈。
- 应用$S_{h',\ c}$.
- 将所得圆圈的第一行通过行交换移回顶部。

由引理5.35可知， $\mathcal{E} \setminus \{h\}$ 等价于经过一系列行操作得到的温和表示；根据推论5.32 和引理5.36，这些行操作都与行交换可交换。因此，我们可以假设 $\mathcal{E} \setminus \{h\}$ 是温和的。此外，由引理4.17，我们可以假设 $\mathcal{E} \setminus \{h\}$ 没有倍数。因此，我们已化归为类型 $X_k$ 情形，结论由引理5.21得出。

显然， $\eta(\mathcal{E})$保持不变，因为 $h$ 的符号在整个行交换过程中不变：向下交换和向上交换引起的符号变化由引理4.15 和4.16相互抵消。这些引理还表明，与 $h$ 交换的各行，其符号都变为原来的$(-1)^c$，因此它们仍满足原先的相同符号条件；所以该多重线段仍为奇数交替的。显然， $h$ 在执行 $U$ 操作后与其下方的行交替，当且仅当行操作前二者交替，因为 $C(h)$也减少了 $c$.

最后，断开的行 $c$ 圆圈与前一行交替这一事实，可分两种情形看出。如果前一行是一条链，那么证明与类型 $X_k$ 情形完全相同（参见引理的证明 5.21）。如果前一行是一个支撑为 $[C, C]$ 的倍数，那么它与其所属链的最后一个圆具有相同符号。由于 $C \leq A - c < A$，不可能有多个 $C$属于同一个 $\mathcal{S}_i$，因此这样的倍数有偶数个。于是，根据引理 4.17将问题化归到不存在这些倍数的情形后，显然， $c$ 圆圈这一行与该链交替，因此也必与该倍数交替。由此可见，这个 $U$ 操作的像是奇交替的，因此属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$. □

**注 5.42**。 至于 $\mathcal{S}$-数据，将$U_{h,\ c}$应用于 $h = ([A, -B], B, \eta)$ 会替换

$$\{\ldots \overline{B, \ldots, A}, \ldots\} \longrightarrow \{\ldots \overline{B, \ldots, A - c}\}, \{A - c + 1, \ldots, A, \ldots\}.$$

与其他算子一样， $U$ 该算子与行交换可交换。具体而言，由引理 4.1 的第 (1) 部分和第 (3) 部分可推出以下推论。

**推论 5.43.** 令 $R$ 表示将某一行 $r$ 与一系列行 $r_i < r_{i+1} < \cdots < r_j$. 交换的操作。令 $T$为涉及这些行$r_i < r_{i+1} < \cdots < r_j$. 的某种 $U$操作。那么 $R \circ T = T \circ R$。

5.4. **线段上算子的穷尽** $Y_{\mathcal{M}}$ 。 现在我们旨在证明定理 5.17。根据推论 5.37，我们知道所有符号相同的类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 多重线段彼此等价。因此，只需证明：如果 $\mathcal{E}$ 是类型为 $Y_{\mathcal{M}}$、符号为 $\eta$的虚拟扩展多段，那么任何与之等价的虚拟扩展多段 $\mathcal{E}$ 也具有 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型，且符号为 $\eta$. 。首先我们将证明 $\mathcal{E}^{min}$ 是

类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 且符号为 $\eta.$。然后我们将说明，类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的虚拟扩展多段上的所有可能升算子都会保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 和符号不变。由于所有等价的虚拟扩展多段都可以通过对 $\mathcal{E}^{min}$ 应用升算子得到，因此这足以完成证明。我们从下面这个关于行交换的简单技术引理开始。

**引理 5.44.** 设 $h_1$ 和 $h_2$ 是阶为 $h_1 < h_2$的帽，并假设 $C(h_1) = C(h_2) = 1$ 且 $\eta(h_1) = \eta(h_2)$。那么，在对调 $h_1$ 和 $h_2$后，我们有$h'_1 = h_1$ 和 $h'_2 = h_2$。

证明。注意，由于 $C(h_i) = 1$，我们有 $A(h_i) \equiv B(h_i)$ 模 2。因此，行交换满足 $\epsilon = (-1)^{A(h_1)-B(h_1)}\eta(h_1)\eta(h_2) = 1$, $b(h_1) - 2l(h_1) = 1$，且 $2(b(h_2) - 2l(h_2)) = 2$，所以它属于定义 2.11 的情形 1(a)。因此 $l(h'_2) = l(h_2)$，$\eta(h'_2) = \eta(h_2)$，$l(h'_1) = A(h_1) - B(h_1) + 1 - (l(h_1) + 1) = l(h_1)$，且$\eta(h'_1) = (-1)^{A(h_2)-B(h_2)}\eta(h_1) = \eta(h_1)$。所以这些行保持不变。□

现在，我们根据 $\mathcal{S}$-数据对 $\mathcal{E}^{\min}$ 进行分类，并根据 $\mathcal{M}$ 是否从零开始分情形讨论。

**引理 5.45.** 假设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，且 $\mathcal{M}$ 在零之后开始。假设 $\mathcal{S}$-数据满足 $\mathcal{S}$ 包含一些 $\mathcal{S}_i = \{c_{\min}, \ldots, c_{\max}\}.$。那么 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\min}.$

证明。我们来验证在 $\mathcal{E}.$ 上不可能施加任何降算子。有两种情形：要么是 $\mathcal{S} = （S_i）$，要么是 $\mathcal{S} = （\{c_{\min}\}，\mathcal{S}_i）$。在第一种情形中，$\mathcal{E}$ 由一条链以及包含在这条链支撑内的若干倍数组成。显然，不可能施加涉及这条链的算子。所有倍数上的圆圈符号相同，因此不可能应用类型 3'的 $ui$。在第二种情形中，有两条链，第二条链包含所有其他行，而这些行各有一个圆圈。同样显然，不存在 $ui$ 算子。

不那么显而易见的是，在 $\mathcal{E}.$ 上不存在 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 算子。为此，注意到 $dual$（$\mathcal{E}$）由三种不同类型的行组成

- 一个帽 $h$，支撑为 $[c_{最大}\ -c_{最小}]$,
- 下方有偶数个（可能为零个）帽，$h$ 支撑为 $[c_{最小}\ -c_{最小}]$, 或
- 上方有许多帽，每个帽上有一个圆 $h$ 对应于属于该链的倍数，支撑为 $[c_{最大}\ c_{最小}]$.

由于 $c_{\min} > 0$，这些行均不含 $l = 0$。为了执行类型 3' 的 $ui^{-1}$，我们必须通过行交换得到一行含有 $l = 0$。然而，$h$ 上方的行不能与 $h$或 $h$ 下方的行交换，因为不存在这样的行对，使其中一行的支撑包含另一行。根据引理 5.44，$h$ 上方的行不会因彼此之间的任何行交换而发生变化。此外，仅涉及 $h$ 下方行的行交换不会改变 $dual$（$\mathcal{E}$）。因此，唯一可能产生 $l = 0$的行交换，必须涉及 $h$。但是，$h$只能与下方的帽交换；由于这些帽各自都只有一个相同符号的圆，根据引理 4.17，我们只需考虑将 $h$ 与这些行中的任意一行交换后的情况，因为进行两次行交换会使$h$ 保持不变。由于 $h$ 与其下方的行不满足交错符号条件，这次行交换会使 $l$（$h$）增加一，并使第二行保持不变（至多发生符号变化）。因此，行交换不会产生圆圈行，所以不可能进行类型 3' 的 $ui^{-1}$。□

**引理 5.46**。 假设 $\mathcal{E}$ 属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{M}$ 从零开始，带有 $\mathcal{S}$ 数据（$\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\ldots,\overline{k}\}$）。那么 $\mathcal{E}=\mathcal{E}^{min}$.

证明。 注意到， $\mathcal{E}$由帽（$[A,-A]$， $A$， $\eta_A$）、 $A\in\{1,\ldots,k\}$， 一条单链（$[0,0]$，$\mathbf{0}$， $\eta_0$），以及若干倍数组成。我们检查在 $\mathcal{E}$.上不存在可能的降算子

首先，我们检查类型 3’ 的降算子；也就是说，涉及类型 3’ 的 $ui$ 或 $ui^{-1}$ 的降算子。显然，类型 3’ 的唯一 $ui$ 是 $S^{-1}$ 和 $U^{-1}$：由于所有倍数的符号都与单链相同，无法应用 $S^{-1}$；由于只有一条链，也无法应用 $U^{-1}$。与此同时，$\mathcal{E}$ 上不存在可能的类型 3’ 的 $dual\circ ui^{-1}\circ dual$ 操作，因为 $\mathcal{E}$ 中的每一行 $r$ 都有 $C(r)=1$：因此， $dual(\mathcal{E})$ 也是如此，所以无法执行 $ui^{-1}$。

唯一一个非类型 3’ 的降算子是一个 $ui.$。我们注意到，不存在非类型 3’ 的 $ui$ 算子，因为没有支撑相交但互不包含的行。这是因为所有帽的支撑彼此包含，而其他所有行的支撑都只有一个圆。□

显然，任意 $\mathcal{E}$ 类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的对象都等价于引理5.45或引理5.46中所述形式的虚拟扩展多段，因为所有 $Y_{\mathcal{M}}$ 相同符号的多段经由$S$操作后，都等价于同一个温和块。因此，给定类型为 $Y_{\mathcal{M}}$的 $\mathcal{E}$, 其 min 总是类型为 $Y_{\mathcal{M}}$且符号为 $\eta(\mathcal{E})$。

现在，只需检查作用于 $\mathcal{E}$ 的所有升算子是否都保持符号和类型$Y_{\mathcal{M}}$ 形式。此类升算子必属于以下三种形式之一

- $ui^{-1}$ 类型为 3’,
- $dual\circ ui\circ dual$ 其中 $ui$ 类型为 3’，或
- $dual\circ ui\circ dual$ 其中 $ui$ 不属于类型 3’。

对于第一种情况，显然 $S$ 和 $U$ 是仅有的类型 3’的 $ui^{-1}$ 操作。对于第二种情况，当 $\mathcal{M}$ 从零开始时，任何类型 3’的 $dual\circ ui\circ dual$ 都必须涉及一行帽（否则这些行的对偶会相交）。如果另一行也是帽，那么该操作为 $M$，如果另一操作是一行圆圈，那么该操作为 $D$.。当 $\mathcal{M}$从零之后开始时，显然不存在类型 3’的 $dual\circ ui\circ dual$操作，因为 $dual(\mathcal{E})$的各行都是帽，因此支撑相交，因为它们都包含零。

由于操作 $S$、 $M$、 $U$、以及 $D$ 都保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 和 $\eta$，显然我们只需考虑 $dual\circ ui\circ dual$中非类型 3’ 的操作。我们将通过以下两个引理证明此类操作保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$ 和 $\eta$。引理5.47 将涵盖两个均非帽的行之间的所有此类 $dual\circ ui\circ dual$ 操作。引理 5.48 将涵盖两个行之间的 $dual\circ ui\circ dual$ 操作（当 $\mathcal{M}$从零开始），其中至少一行是帽。

**引理 5.47**。 假设 $T$ 是一个非类型 3’ 的 $dual\circ ui\circ dual$。假设 $T$涉及两行 $r_1<r_2$，且这两行都不是帽。那么 $T$ 保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$和 $\eta(\mathcal{E})$。

证明。 假设 $supp(r_1)=[A_1,B_1]$ 和 $supp(r_2)=[A_2,B_2]$. 由于 $r_1<r_2$，我们假定 $B_1\le B_2$. 那么， $\widehat{r_1}$ 和 $\widehat{r_2}$ 分别具有支撑 $[A_1,-B_1]$ 和 $[A_2,-B_2]$，在这些行之间出现一个非类型 3’的 $ui$，只有当 $-B_2<$

$-B_1 \le A_2 < A_1$. 这意味着 $B_1 < B_2 \le A_2 < A_1$，因此 $supp(r_1) \supsetneq supp(r_2)$。所以，$r_2$ 必须是属于 $r_1$ 的一个倍数，并且我们有 $B_2 = A_2 < A_1$.由于 $A_2 \neq A_1$，$r_2$ 不可能包含在除 $r_1$.之外的任何链的支撑中。这样的倍数有偶数个，利用 $dual \circ ui \circ dual$ 将 $r_1$与其中任意一个倍数结合，可得到在行交换下等价的多段。因此，我们假定 $r_2$ 是这些倍数中的最后一个。

应用这样的 $ui$于 $\widehat{r_1}$ 和 $\widehat{r_2}$，会将它们替换为支撑为$[A_1, -A_2]$ 和 $[A_2, -B_1]$, 的行，顺序如上。应用对偶后，得到支撑为$[A_2, B_1]$ 和 $[A_1, A_2]$, 的行，顺序如上。所得各行的顺序和支撑与通过对 $\mathcal{E}$的 $\mathcal{S}$数据实施以下变换所得到的多重线段相同

$$\{B_1, \dots, A_1, \dots\} \longrightarrow \{B_1, \dots, A_2\}, \{A_2, \dots, A_1, \dots\}.$$

由此变换得到的多重线段 $\mathcal{S}$数据等价于 $\mathcal{E}$，而后者等价于 $T \circ \mathcal{E}$.因此，推论2.8表明 $T(\mathcal{E})$ 等于此多重线段，因此具有类型 $Y_{\mathcal{M}}$并满足 $\eta(T(\mathcal{E})) = \eta(\mathcal{E})$. □

**引理 5.48.** 假设 $T$ 是一个非类型 *3'*的 $dual \circ ui \circ dual$ 。假设 $T$涉及两行 $h < r$，其中 $h$ 是一个帽。那么 $T$ 保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$，且 $\eta(\mathcal{E})$。

证明。 如果 $h = ([A, -B],\ 0,\ \eta)$，那么 $h$是一行支撑为 $[A, B]$. 的圆圈。注意，如果 $h$与集合 $\mathcal{T}_i^j$相关，那么 $\mathcal{T}_i^j = \{B, \dots, A\}$. 。由于所有 $\mathcal{T}_i^j$ 对于 $j \ge 1$ 都是不相交的，我们得出：如果 $r$ 是一个帽，则 $\mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(\widehat{r}) = \emptyset$, 从而使操作 $T$ 不可能。因此，$r$ 必须是某一行支撑为 $[C, D]$, 的圆圈，并且其对偶化为一个支撑为 $[C, -D]$. 的帽。为了应用 $T$，我们需要有 $B \le C < A$. 。根据集合 $\mathcal{S}_i$的交集条件，这只有在 $r$ 是一个支撑为 $[C, C]$. 的倍数时才可能。我们注意到，由于 $C \in \{B, \dots, A\}$, 等于 $r$.的倍数必定有偶数个。由于对每个这样的倍数执行 $dual \circ ui \circ dual$ 在行交换意义下都是等价的，我们假定 $r$ 是最后一行。

我们断言，执行 $T$ 会将 $h$替换为一个相同符号的帽，即 $([C, -B],\ B,\ \eta)$, 并将 $r$ 变为支撑为 $[A, C]$. 的链。这保证了 $\eta(\mathcal{E})$ 得以保持。与此同时，线段仍将保持奇交替。根据这一断言，我们看到 $T$ 实现了 $\mathcal{S}$数据的如下变化：

$$\{\dots, \overline{B, \dots, A}, \dots\} \longrightarrow \{\dots, \overline{B, \dots, C}\}, \{C, \dots, A, \dots\},$$

这是有效的。因此，该断言意味着 $T$ 保持类型 $Y_{\mathcal{M}}$。

为证明该断言，令 $\widehat{r} = ([C, -C],\ C,\ \eta_1)$，并令 $h = ([A, B],\ 0,\ \eta_2)$。如果这些行之间可能存在一个$ui$，它们就会被支撑为 $[A, -C]$ 和 $[C, B]$, 的行所替代；为了满足 $P'$ 顺序，这些行将分别处于与 $\widehat{r}$和 $h$ 相同的位置。取对偶还原后，我们得到一个顺序和支撑均与 $\mathcal{E}$ 相同的多重线段，除了：

- 行 $r$ 被替换为支撑为 $[A, C]$. 的行
- 帽 $h$ 被替换为支撑为 $[C, -B]$. 的行

这种虚拟扩展多段的支撑和次序，与由定理中所述数据的变化所产生的多重线段完全相同。 $\mathcal{S}$这些虚拟扩展多段对应于相同的非零温和块，因此推论 2.8 足以证明它们相等。 □

既然我们已经看到，所有可能的 $dual \circ ui \circ dual$非情形3' 的变化都保持 $Y_{\mathcal{M}}$ 和$\eta(\mathcal{E})$， 我们便得出定理 5.17。

## 6. |Ψ(π(B))|

本节的目标是证明定理3.6。我们将通过对类型为 $Y_{\mathcal{M}}$. 的虚拟扩展多段计数来实现。为了归约到这种情形，我们必须建立 $\Psi(\pi(\mathcal{B}))$ 与类型为 $\mathcal{E}$ 的虚拟扩展多段之间的对应关系。尤其是，不同的类型 $Y_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}$. 多重线段若具有不同的 $Y_{\mathcal{M}}$ 数据，就应当对应于不同的虚拟扩展多段。这由以下引理保证。

**引理 6.1.** 如果 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 均为类型 $Y_{\mathcal{M}}$ ，且具有 $\eta(\mathcal{E}_1) = \eta(\mathcal{E}_2)$，那么$\psi(\mathcal{E}_1) = \psi(\mathcal{E}_2)$ 当且仅当 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.

证明。显然， $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ 推出 $\psi(\mathcal{E}_1) = \psi(\mathcal{E}_2)$。另一方面，如果 $\psi(\mathcal{E}_1) =\psi(\mathcal{E}_2)$, 那么这些虚拟扩展多段必定具有相同的支撑。此外，它们各行的次序已预先规定，因此必须相同。由于 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 均为 $Y_{\mathcal{M}}$ ，且具有 $\eta(\mathcal{E}_1) = \eta(\mathcal{E}_2)$，所以必有 $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_2$. 推论 2.8 足以证明所需结果。□

6.1. **从零开始的块**。我们考虑任意 $\rho$ 在 $\mathcal{E}$ 为 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型且 $\mathcal{M}$ 从零开始的情形下的一个“提升”，如下所示。

**定义 6.2**。设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 为 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型，且 $\mathcal{M}$ 从零开始。由定理 *5.17* 可知，存在一个温和的虚扩展多线段 $\mathcal{E}_{temp}$ ，它与 $\mathcal{E}$. 等价。进一步假设 $\mathcal{E}_{temp}$ 从 *0* 开始。

我们定义

$$\Theta_1(\mathcal{E}) = \left\{ \left( [c_{\max}+1, -c_{\max}-1]_{\rho}, c_{\max}+1, -\eta(\mathcal{E}) \right) \right\} \cup \mathcal{E}.$$

我们指出，添加的扩展线段应以这样的方式插入，使其成为可容许序中的第一个扩展线段。

**注记6.3**。上述 $\Theta_1(\mathcal{E})$ 的定义，源于对 $\pi(\mathcal{E})$ 在上升塔中首次出现时的 ***theta*** 提升（对于辛-偶正交对偶对）的计算。这将在 [10] 中加以利用。

设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 是温和的 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型，符号为 $\eta(\mathcal{E})$。从定义显然可知，$\Theta_1(\mathcal{E})$ 是 $Y_{\mathcal{M}'}$ 类型，且 $\eta(\Theta_1(\mathcal{E})) = -\eta(\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{M}' = (m_0, \ldots, m_k, 1)$。

我们将证明以下定理，这些定理将帮助我们证明定理 3.6。

**定理 6.4**。设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{M} =$（$m_0$，……， $m_{c_{\max}-1}$，1）。则以下结论成立。

*(1)* 我们可以对 $\Theta_1(\mathcal{E})$ 的第一行进行一次 $dual \circ ui \circ dual$，得到一个虚拟扩展多段，记作 $\Theta_2(\mathcal{E})$。我们还可以对 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 的第$(c_{\max}+1)$列再进行一次 $ui^{-1}$，从而得到另一个虚拟扩展多段，记作 $\Theta_3(\mathcal{E})$。*(2)* 我们有如下关系

$$\Psi(\Theta_1(\mathcal{E})) = \{\psi_{\Theta_i(\mathcal{E}')} \mid \mathcal{E}' \sim \mathcal{E}; i = 1, 2, 3\}.$$

**定理 6.5.** 设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{M}=(m_0,\dots,m_{c_{\max}})$ 且 $m_{c_{\max}}>1$.。则有以下结论。

*(1)* 我们可以对涉及第一行的 $dual\circ ui\circ dual$执行两次类型 *3'*操作$\Theta_1(\mathcal{E})$：一次使用支撑终止于 $c_{\max}$ 的第一行，另一次使用支撑终止于 $c_{\max}$. 的最后一行。我们将所得线段称为$\Theta_2(\mathcal{E})$ 和 $\Theta_4(\mathcal{E})$，并且$\psi_{\Theta_2(\mathcal{E})}=\psi_{\Theta_4(\mathcal{E})}$ 当且仅当 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{S}$-数据含有某个 $\mathcal{S}_i=\{c_{\max}\}$. 。我们可以对 $\Theta_2$和 $\Theta_4$ 再执行一次 $ui^{-1}$，从支撑终止于 $c_{\max}+1$ 的行中移除一个圆的一行，从而得到相同的 $\Theta_3(\mathcal{E})$。

*(2)* 我们有如下关系

$$\Psi(\pi(\Theta_1(\mathcal{E})))=\{\psi_{\Theta_i(\mathcal{E}')}\mid \mathcal{E}'\sim\mathcal{E};i=1,2,3,4\}.$$

我们先根据算子 $D,U,$ 和 $S$.的存在性，证明定理 6.4的第 (1) 部分。

定理*6.4* 第 *(1)* 部分的证明。设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，其最终重数为 $m_{c_{\max}}=1$.我们知道 $\Theta_1(\mathcal{E}):=h\cup\mathcal{E}$，其中

$$h:=([c_{\max}+1,-c_{\max}-1],c_{\max}+1,-\eta(\mathcal{E})).$$

引理 5.39 断言，恰有一个 $dual\circ ui\circ dual$ 涉及 $h$. 有两种情形。

- 首先，$\Theta_2(\mathcal{E})=D_{h,\ r}\circ\Theta_1(\mathcal{E})$，对于某条链 $r$. 在这种情形下，我们令

$$\Theta_3(\mathcal{E}):=S_{r',1}\circ\Theta_2(\mathcal{E}),$$

其中 $r'$ 是 $r$ 在 $D_{h下的r}$.像

- 其次，$\Theta_2(\mathcal{E})=M_{h,\ h'}\circ\Theta_1(\mathcal{E})$，其中 $h'$ 是 $\mathcal{E}$.的第一个帽。这里，我们令

$$\Theta_3(\mathcal{E}):=U_{h*h',1}\circ\Theta_2(\mathcal{E}).$$ □

定理6.5 的第 (1) 部分的证明类似。为了完成证明，我们将利用下面的引理，它讨论了两种不同的操作 $D^1$ 与$D^2$ 之间的关系。

**引理 6.6.** 假设 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，且有一个帽 $h=([A,B],-B,\eta)$。假设 $m_{B-1}\geq 3$, 并令 $r_1$和$r_2$ 分别为终止于 $B-1$.的第一行和最后一行

*(1)* 若 $r_1$ 是帽，则

$$U_{h*r_1,C(h)}\circ M_{h,r_1}=S_{r_2',C(h)}\circ D^2_{h,r_2}.$$

*(2)* 若 $r_1$ 是链，则

$$S_{r_1',C(h)}\circ D^1_{h,r_1}=S_{r_2',C(h)}\circ D^2_{h,r_2}.$$

这里，$r_1'$ 和 $r_2'$ 表示 $r_1$ 和 $r_2$ 在带有 $h$. 的 $dual\circ ui\circ dual$ 下的像

证明。对于第 (1) 部分，设 $r_1=([C,-B+1],B-1,\eta_1)$ 并设 $r_2=([B-1,B-1],0,\eta_2)$。那么，进行 $U_{h*r_1,C(h)}\circ M_{h,r_1}$ 会改变 $\mathcal{S}$ 的数据，如下所示（见注释 5.34 和 5.42 ）。

$$\begin{aligned}\{\dots\overline{C,\dots,B-1},\overline{B,\dots,A},\dots\}&\longrightarrow\{\dots\overline{C,\dots,B-1,B,\dots,A},\dots\}\\&\longrightarrow\{\dots\overline{C,\dots,B-1}\},\{B,\dots,A,\dots\}.\end{aligned}$$

同时，应用 $S_{r_2',C(h)} \circ D^2_{h,r_2}$ 会得到如下变化（见注释 5.30 和5.40）：

$$\{\dots\overline{C,\dots,B-1},\overline{B,\dots,A},\dots\} \longrightarrow \{\dots\overline{C,\dots,B-1}\},\{B-1,B,\dots,A,\dots\}$$
$$\longrightarrow \{\dots\overline{C,\dots,B-1}\},\{B,\dots,A,\dots\},$$

其中，最后一个箭头是由于备注5.29中讨论的例外情况而成立的。对于第 (2) 部分，设 $r_1 = ([C,B-1],\ 0,\ \eta_1)$。然后应用 $S_{r_1',\ C(h)} \circ D^1_{h,\ r_1}$，得到：

$$\{C,\dots,B-1,\overline{B,\dots,A},\dots\} \longrightarrow \{C,\dots,B-1,B,\dots,A,\dots\}$$
$$\longrightarrow \{C,\dots,B-1\},\{B,\dots,A,\dots\}.$$

同时，应用 $S_{r_2',\ C(h)} \circ D^2_{h,\ r_2}$，得到如下变化：

$$\{C,\dots,B-1,\overline{B,\dots,A},\dots\} \longrightarrow \{C,\dots,B-1\},\{B-1,B,\dots,A,\dots\}$$
$$\longrightarrow \{C,\dots,B-1\},\{B,\dots,A,\dots\},$$

这足以完成证明。 □

定理 6.5 第 (1) 部分的证明。根据引理 5.39，给定任意一个 $\Theta_1(\mathcal{E})$，其中 $m_{c_{\max}} \geq 3$，可以进行两种不同的类型 3' $dual \circ ui \circ dual$，它们都涉及帽 $h = ([c_{\max}+1,-c_{\max}-1],c_{\max}+1,-\eta(\mathcal{E}))$，分别得到虚拟扩展多段 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 和 $\Theta_4(\mathcal{E})$。引理 5.39 指出，$\Theta_2(\mathcal{E})$ 和$\Theta_4(\mathcal{E})$ 通过行交换等价，当且仅当 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{S}$-数据包含$\{c_{\max}\}$。

现在，我们考虑两种情形。如果多重线段 $\mathcal{E}$ 有一个帽 $h'$，其支撑包含 $c_{\max}$，那么与 $h$ 相关联、分别产生 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 和 $\Theta_4(\mathcal{E})$ 的两个 $dual \circ ui \circ dual$ 分别是 $M_{h,h'}$ 和 $D^2_{h,r}$，其中 $r$ 是一个倍数。对 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 应用 $U_{h*h'},1$，可以得到另一个虚拟扩展多段；对 $\Theta_4(\mathcal{E})$ 应用 $S_{r'},1$，也可以得到另一个虚拟扩展多段，其中 $r'$ 是 $r$ 在 $D^2_{h,r\cdot}$ 下的像。引理 6.6 的第 (1) 部分表明，这两个 $ui^{-1}$ 产生相同的虚拟扩展多段，我们将其记作 $\Theta_3(\mathcal{E})$。

如果产生 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 和 $\Theta_4(\mathcal{E})$ 的两个算子分别是 $D^1$ 和$D^2$，那么我们可以执行一个 $ui^{-1}$ 形式的 $S$，以从每一个中分离出位于 $c_{\max}+1$处的一个圆。引理6.6 的第 (2) 部分保证，所得的两个多重线段相同；我们仍将其记作 $\Theta_3(\mathcal{E})$. □

接下来我们想要证明，只要 $\mathcal{E}$ 属于 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型且最终重数$m_{c_{\max}} = 1$，集合 $\{\Theta_i(\mathcal{E}') \mid i \in \{1,2,3\}$ 中的任意两个元素；$\mathcal{E}' \sim \mathcal{E}\}$ 其局部 Arthur 参数都不相同。为此，我们只需证明这些扩展多重线段具有不同的支撑。具体而言，我们希望证明如下结论。

**L引理 6.7**。设 $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_2$ 属于 $Y_{\mathcal{M}}$类型，且 $\mathcal{M}$ 从零之后开始。则

$$supp(\Theta_i(\mathcal{E}_1)) = supp(\Theta_j(\mathcal{E}_2)) \Rightarrow i = j, \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2.$$

证明。从 $m_{c_{\max}} = 1$, 的情形开始，令 $\mathcal{E}$ 为类型 $Y_{\mathcal{M}}$，并考虑 $i \in \{1,2,3\}$. 的某个多重线段 $\Theta_i(\mathcal{E})$。令 $r \in \Theta_i(\mathcal{E})$ 为其支撑包含 $c_{\max}+1$. 的唯一一行。那么我们必定属于以下情形之一：

- If $r = ([c_{\max}+1,-c_{\max}-1],c_{\max}+1,\eta)$ for some $\eta \in \{\pm 1\}$, then $i = 1$.

- 如果 $C(r) > 1$ （即 $r$ 是合并后的帽或合并链），那么 $i = 2$.
- 如果 $r = ([c_{\text{最大}} + 1, c_{\text{最大}} + 1], 0, \eta)$, 对于某个 $\eta \in \{\pm 1\}$, 那么 $i = 3$.

这证实了 $supp(\Theta_i(\mathcal{E}_1)) = supp(\Theta_j(\mathcal{E}_2)) \Rightarrow i = j$，因此只需证明多重线段 $\mathcal{E}$ 可由 $\Theta_i(\mathcal{E})$ 唯一确定。在 $i = 1$的情形下，这显然成立，因为根据定义 6.2, $supp(\mathcal{E}) = supp(\Theta_1(\mathcal{E}) \setminus \{r\})$；注意，支撑足以确定 $\mathcal{E}$，见引理 6.1。对于 $i = 3.$，命题 $supp(\mathcal{E}) = supp(\Theta_1(\mathcal{E}) \setminus \{r\})$ 也显然成立。在情形$i = 2$下，可以确定 $\mathcal{E}$，因为可以确定 $\Theta_3(\mathcal{E})$：从 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 到 $\Theta_3(\mathcal{E})$ 的操作是唯一的。

同时，在 $c_{\max} > 1$, 令 $\mathcal{E}$ 为类型 $Y_{\mathcal{M}}$. 。任何多重线段$\Theta_i(\mathcal{E})$ 必属于以下略有不同的某一种情形:

- 若对于某个 $\eta \in \{\pm 1\}$，，有 $r = ([c_{\text{最大}} + 1, -c_{\text{最大}}], k, \eta)$，则 $i = 1$.
- 若 $C(r) > 1$ 且 $|\{\mathcal{S}_i \mid c_{\text{最大}} \in \mathcal{S}_i\}| = 1$，则 $i(\mathcal{E}) = 2$.
- 若 $C(r) > 1$ 且 $|\{\mathcal{S}_i \mid c_{\text{最大}} \in \mathcal{S}_i\}| = 2$，则 $i(\mathcal{E}) = 4$.
- 若 $r = ([c_{\text{最大}} + 1, c_{\text{最大}} + 1], 0, \eta)$，则 $i = 3$.

再次，这表明 $\Theta_i(\mathcal{E})$ 的支撑决定了 $i$，但包含 $c_{\max} + 1$ 且支撑为 $[c_{\max} + 1, c_{\max}]$ 的唯一链所在的情形除外。这种情形对于 $\Theta_2(\mathcal{E})$ 和 $\Theta_4(\mathcal{E})$, 都可能发生，但只有当 $\mathcal{E}$ 中包含 $c_{\max}$ 且支撑为 $[c_{\max}, c_{\max}]$. 的唯一链存在时才会发生。然而，这恰恰是 $\Theta_2(\mathcal{E}) = \Theta_4(\mathcal{E})$的情形。与此同时，利用与 $m_{c_{\max}} > 1$. 情形相同的方法，也可以从 $\Theta_i(\mathcal{E})$ 确定 $\mathcal{E}$。这足以完成证明。□

现在，我们证明定理 6.4 的第 (2) 部分。引理 6.7 表明，元素$\{\psi_{\Theta_i(\mathcal{E}')} \mid i = 1,2,3; \quad \mathcal{E}' \sim \mathcal{E}\}$彼此不同，因此现在只需证明，任何满足 $\mathcal{F} \sim \Theta_1(\mathcal{E})$ 的 $\psi_{\mathcal{F}}$ 都属于此集合。为此，我们考察$\mathcal{S}$-数据。

定理 6.4 第 (2) 部分的证明。设 $\mathcal{F} \sim \Theta_1(\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 属于 $Y_{\mathcal{M}}$ 类型，且 $\mathcal{M} = (m_0, \ldots, m_{c_{\max}})$。那么，定理 5.17 和定理 6.4 的第 (1) 部分推出，$\mathcal{F}$ 必须是 $Y_{\mathcal{M}'}$ 类型，其中 $\mathcal{M}' = (m_0, \ldots, c_{\max}, 1)$。考察 $\mathcal{F}$. 的 $\mathcal{S}$-数据。由于$m_{c_{\max}} = m_{c_{\max}+1} = 1$, 我们注意到 $c_{\max}$ 只能属于一个集合 $\mathcal{S}_i$，$c_{\max} + 1$. 也同样如此。

令 $\mathcal{E}' := \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{S}', \mathcal{T}', \eta(\mathcal{E})$，其中 $(\mathcal{S}', \mathcal{T}')$ 是从 $(k+1, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ 中移除 后得到的。根据定理 5.17，可得 $\mathcal{E}' \sim \mathcal{E}$.有以下几种情形。

- 如果 $k$ 和 $k + 1$ 都属于同一个集合 $\mathcal{S}_\ell = \{\ldots, k, k + 1\}$，那么显然 $\mathcal{F} = \Theta_2(\mathcal{E}')$。
- 如果 $k$ 和 $k + 1$ 都属于 $\mathcal{S}_\ell = \{\ldots, k, \overline{k + 1\}}$，那么 $\mathcal{F} = \Theta_2(\mathcal{E}')$。
- 如果 $k$ 和 $k + 1$ 都属于 $\mathcal{S}_\ell = \{\ldots, k, \overline{k + 1\}}$，那么 $\mathcal{F} = \Theta_1(\mathcal{E}')$。
- 如果 $k$ 和 $k + 1$ 都属于 $\mathcal{S}_\ell = \{\ldots, k, \overline{k + 1\}}$，那么 $\mathcal{F} = \Theta_2(\mathcal{E}')$。
- 如果 $k + 1$ 属于其自身的集合 $\mathcal{S}_\ell = \{k + 1\}$，那么 $\mathcal{F} = \Theta_3(\mathcal{E}')$。 □

定理第 (2) 部分的证明6.5 非常相似，因为根据引理6.7，我们仍只需证明任意 $\mathcal{F} \sim \Theta_1(\mathcal{E})$ 都具有如下形式 $\Theta_i(\mathcal{E}')$，其中某个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$和 $\mathcal{E}' \sim \mathcal{E}$.

定理 6.5 第 (2) 部分。设 $\mathcal{F} \sim \Theta_1(\mathcal{E})$。那么，定理 5.17 和定理 6.4 的第 (1) 部分再次推出 $\mathcal{F}$ 必定属于类型 $Y_{\mathcal{M}'}$，其中 $\mathcal{M}' = (m_0, \ldots\ldots, c_{\max}, 1)$。考虑 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{F}$. 由于 $m_{k+1} = 1$, $k + 1$只能

属于一个集合 $\mathcal{S}_i$. 然而， $k$ 至多可以属于两个 $\mathcal{S}_i$，但只有当后一个集合有 $\mathcal{T}_i^0 = \{k, k+1\}$. 在这种情形下，显然有 $\mathcal{F} = \Theta_4(\mathcal{E}')$，其中 $\mathcal{E}'$ 的定义与定理 6.4第 (2) 部分证明中的定义相同。对于 $k$只属于一个 $\mathcal{S}_i$ 的情形，可以完全按照定理 ($\mathcal{E}'$) 第 (2) 部分证明中的相同方式，将其与各种 6.4 相对应。 □

定理6.4 和6.5得证后，我们终于可以证明定理3.6对于从零开始的块 $\mathcal{B}$ 。为此，我们需要以下引理。

**引理 6.8**。假设 $\mathcal{E}$是类型为 $Y_{\mathcal{M}}$的对象，其中 $\mathcal{M} = (m_0, \ldots, m_{c_{\max}})$。令 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$和

$$\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cup \bigcup_{i=1}^{k} ([c_{\max}, c_{\max}], 0, \eta')$$

是通过将支撑为 $[c_{\max}, c_{\max}]$的圆行 $k$ 添加到 $\mathcal{E}$. 而得到的扩展多段。此处，符号 $\eta'$ 的选取与 $\mathcal{E}$. 的最后一个圆上的符号一致。于是，当且仅当 $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \bigcup_{i=1}^{k} ([c_{\max}, c_{\max}], 0, \eta')$时，多重线段 $\mathcal{E}_1'$与 $\mathcal{E}'$等价，其中 $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}$.。特别地，我们得到 $|\Psi(\pi(\mathcal{E}'))| = |\Psi(\pi(\mathcal{E}))|$.

证明。根据定理 5.17 的证明，我们已经看到，作用于 $\mathcal{E}$的升算子恰好是 $S$、$M$、 $U$、 $D$，以及某些非类型 3'的 $dual \circ ui \circ dual$；我们已证明，这些算子等价于 $S$、 $M$、 $U$、 $D$的某种组合及其逆算子（引理 5.47 和 5.48）。根据 $S$、$M$、 $U$、 $D$的定义，显然所有这些算子及其逆算子仍可作用于 $\mathcal{E}$，因为将其视为 $\mathcal{E}'$. 的子虚扩展多线段时，这些算子及其逆算子仍可执行。这就证明了所需结论的正向。为证明反向，我们断言这些是唯一可作用于 $\mathcal{E}.'$的算子。

为导出矛盾，我们反设存在一个可作用于 $\mathcal{E}'$、但不可作用于 $\mathcal{E}.$的算子 $T$。由于 $r_i$ =的任何倍数（$[c_{\max}, c_{\max}]$， 0， $\eta'$）都不会使 $\mathcal{E}$的其他行以新的方式相互作用，因此这样的算子 $T$ 必定涉及这些倍数之一 $r_i$. 。我们逐一考察所有可能的算子。 $T$ 不可能是一个 $dual \circ ui \circ dual$，因为 $dual(r_i)$的支撑为 $[c_{\max}, -c_{\max}]$， 而 $dual(\mathcal{E}')$中的所有其他行都包含在这个支撑内。 $T$ 也不可能是类型 3'的 $ui^{-1}$ ，因为这些行只有一个圆。与此同时，显然， $T$ 不可能是类型 3'的 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ ，因为这些倍数各自都只有一个圆。

唯一剩下的可能性是， $T$ 是一个 $ui$，在这种情形下，它必定是类型 3'，因为行 $r_i$ 只有一个圆。 $T$ 必须与$r$合并，该行以 $c_{\max} - 1$. 结尾。考虑包含 $c_{\max} - 1$ 或 $c_{\max}$. 的集合 $\mathcal{S}_i$ 。如果我们有集合 $\{\ldots, c_{\max} - 1, c_{\max}\}$，那么 $T$是不可能的，因为以 $k-1$ 结尾的行 $r$都是倍数，它们必须与支撑为 $[c_{\max}, c_{\max}]$. 的行具有相同符号。如果我们有集合$\{\ldots, c_{\max} - 1, \overline{c_{\max}}\}$，那么 $r_i$的符号已选定，因此可以将其视为属于 $r$ 的倍数，从而与 $c_{\max} - 1$处的圆具有相同符号，因此 $T$ 不可能。如果我们有$\{c_{\max} - 1\}$， $\{c_{\max}\}$，那么应用 $T$合并 $r$ 和 $r_i$， 等同于应用该操作，将 $c_{\max}$ 与支撑为 $[c_{\max}, c_{\max}]$的链合并，而这已在 $\mathcal{E}.$中定义

我们得出结论： $\mathcal{E}'$的虚拟扩展多段等价类（按行交换视为等价）与等价于$\mathcal{E}$的虚拟扩展多段（按行交换视为等价）一一对应。特别是，这意味着 $\Psi(\pi(\mathcal{E}))$ 与 $\Psi(\pi(\mathcal{E}'))$. □之间存在一一对应关系

现在，我们可以证明3.6 对于从 0 开始的块。我们在此重述该结果。

**定理 6.9**。设 $\mathcal{E}$ 是一个温和几乎块，其列从 0 到 $c_{\max} \geq 2$。令 $\mathcal{E}_k$ 表示仅由支撑包含于 $[k, 0]$ 的行组成的扩展多重线段。那么，

$$|\Psi(\mathcal{E})| = \begin{cases} 3 \cdot |\Psi(\pi(\mathcal{E}_{c_{\max}-1}))| & \text{if } m_{c_{\max}-1} = 1, \\ 4 \cdot |\Psi(\pi(\mathcal{E}_{c_{\max}-1}))| - |\Psi(\pi(\mathcal{E}_{c_{\max}-1}))| & \text{if } m_{c_{\max}-2} \geq 3. \end{cases}$$

证明。设 $\mathcal{E}'$ 是从 $\mathcal{E}$ 中移除除一行以外的所有支撑为 $[c_{\max}, c_{\max}]$. 的行后得到的扩展多重线段。则 $\mathcal{E}'$ 是某个类型为 $Y_{\mathcal{M}}$、终止于 $c_{\max}$. 的块，其中 $\mathcal{M}$。由引理 6.8 可得 $|\Psi(\pi(\mathcal{E}))| = |\Psi(\pi(\mathcal{E}'))|$.。因此，为了证明结论，我们可以假设 $\mathcal{E}$ 是一个满足 $m_{c_{\max}} = 1$. 的块。在这种情形下，除去适当超尖点表示的扭曲，我们有 $\mathcal{E} = \Theta_3($ $\mathcal{E}_{c_{\max}-1})$。若 $m_{c_{\max}-1} = 1$，则由定理 6.4 的第（2）部分，立即可得 $|\Psi(\pi(\mathcal{E}))| = 3 \cdot |\Psi($ $\pi(\mathcal{E}_{c_{\max}-1}))|$ 。

与此同时，定理6.5 的第 (2) 部分表明，如果 $m_{c_{\max}-1} > 1$，那么

$$|\Psi(\pi(\mathcal{E}))| = 4 \cdot |\Psi(\pi(\mathcal{E}_{c_{\max}-1}))| - R,$$

其中 $R$ 是集合 $\{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{c_{\max}-1}, \Theta_2(\mathcal{E}) = \Theta_4(\mathcal{E})\}$. 根据定理6.5的第 (2) 部分，这些恰好是其 $\{k-1\}$数据中含有 $\mathcal{S}$的多段。

再次应用引理6.8，我们可以假设每个 $\mathcal{E} \in \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{c_{\max}-1}, \ \Theta_2(\mathcal{E}) = \Theta_4(\mathcal{E})\}$ 都有 $m_{c_{\max}-1} = 1$. 在这种情形下，这些恰好是等于 $\Theta_3(\mathcal{E}'')$ 的多重线段，其中 $\mathcal{E}'' \sim \mathcal{E}_{k-2}$. 该集合的基数恰好为 $|\Psi(\pi(\mathcal{E}_{c_{\max}-2}))|$. □

6.2. **不从零开始的块**。 在本小节中，我们使用定理5.17 推导定理3.2中的公式（3.6），为方便起见，我们在下面重述该公式。

**定理 6.10** （不以零开头的块的计数）。 设 $\mathcal{B}$ 是一个从 $c_{min}$ 开始、到 $c_{max}$ 结束的块，并假设 $c_{min} > 0$。令 $\mathcal{B}' := \mathrm{rc}^{c_{max}}(\mathcal{B})$ ，并令 $\mathcal{B}'' := \mathrm{rc}^{c_{max}-1}(\mathcal{B}')$ 。那么

$$|\Psi(\pi(\mathcal{B}))| = \begin{cases} 2|\Psi(\pi(\mathcal{B}'))| & \text{if } m_{c_{max}-1} = 1, \\ 3|\Psi(\pi(\mathcal{B}'))| - |\Psi(\pi(\mathcal{B}''))| & \text{if } m_{c_{max}-1} = 3, 5, \ldots. \end{cases}$$

证明。首先考虑 $m_{c_{max}-1} = 1$ 的情形。由定理 5.17，集合 $\Psi(\pi(\mathcal{B}))$ 与块元组 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 对应的有效 $\mathcal{S}$ 集合之间存在双射；对于集合 $\Psi(\pi(\mathcal{B}'))$，也有类似结论。为了证明该公式，我们将 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 对应的有效 $\mathcal{S}$ 集合划分为两个集合 $\Psi_1$ 和 $\Psi_2$，其中每个集合都与 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 对应的有效 $\mathcal{S}'$ 集合之间存在双射。根据定理 5.17， $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 对应的有效 $\mathcal{S}'$ 集合又与 $\Psi(\pi(\mathcal{B}'))$ 之间存在双射，因此这足以证明该公式。

第一组 $\Psi_1$ 由有效的 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k)$ 构成，且满足 $\mathcal{S}_k = \{c_{max}\}$。在这种情形下，若令 $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_{k-1}) := (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{k-1})$, 则我们断言 $\mathcal{S}'$ 有效

对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$。为证明这一点，我们只需逐一检验定义 5.1中的各个条件。条件（1）显然成立。由于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'} = (m_{c_{min}}, \ldots, m_{c_{max}-1})$，条件（2）成立。最后，与 $\mathcal{S}$ 相比，条件（3）、（4）和（5）对于 $\mathcal{S}'$ 而言严格较弱。

此外，我们声称，给定对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 有效的 $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1、\ldots\ldots、\mathcal{S}'_{k-1})$，

$$\mathcal{S} := (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_{k-1}, \{c_{max}\})$$

对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$有效。定义5.1 的条件（1）、（2）显然成立。条件（3）成立，因为任意 $\mathcal{S}'_i$ 中的每个元素都不大于 $c_{max}-1$，因为 $\mathcal{B}'$ 终止于$c_{max}-1$。条件（4）显然成立，因为我们只需在$j = k$的情形下检查，但 $\mathcal{S}_k$ 与其他任何 $\mathcal{S}_i$都不相交。最后，条件（5）显然成立，因为 $|\mathcal{S}_k| < 2$，并且它对 $\mathcal{S}'$成立。

第二个集合 $\Psi_2$ 由所有其他有效的 $\mathcal{S}$组成。在这种情形下，由定义5.1的条件（3），必有 $c_{max} \in \mathcal{S}_k$。由于 $\mathcal{S} \notin \Psi_1$， $\mathcal{S}_k$ 并非仅由 $c_{max}$组成，因此我们有 $|\mathcal{S}_k| \geq 2$。在这种情形下，若令

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_k) := (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{k-1}, \mathcal{S}_k \setminus \{c_{max}\}),$$

那么我们声称 $\mathcal{S}'$ 对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$有效。条件（1）成立，因为 $|\mathcal{S}_k| \geq 2$，所以$\mathcal{S}'_k \neq \emptyset$。条件（2）和（3）显然成立，条件（4）和（5）成立的理由与之前相同：对于 $\mathcal{S}'$，它们比对于 $\mathcal{S}$要弱得多。

此外，我们声称，给定对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$有效的 $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1、\ldots\ldots、\mathcal{S}'_k)$，

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_{k-1}, \mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\})$$

对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$有效。条件（1）、（2）、（3）显然成立。条件（4）显然成立，因为我们只需检查 $\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}$ 与其他 $\mathcal{S}'_i$相交的情形；但由于 $c_{max} \notin \mathcal{S}'_i$，必然有 $\mathcal{S}'_i$ 和 $\mathcal{S}'_k$ 的交集非平凡，因此可得 $k - i = 1$、$|\mathcal{S}'_k| \geq 2$和 $m_c > 1$，其中 $c \in \mathcal{S}'_i \cap \mathcal{S}'_k$。所以当然也有$|\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}| \geq 2$。对于条件（5），只需检查这样的情形：$\mathcal{S}'_k$ 不满足 $\mathcal{S}'$ 中条件（5）的假设，但 $\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}$ 满足这些假设。由于 $|\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}| \geq 2$，而 $|\mathcal{S}'_k| < 2$，必然有$\mathcal{S}'_k = \{c_{max}-1\}$。但根据假设，$m_{c_{max}-1} = 1$，因此不满足条件（5）的假设，所以该条件成立。至此完成了定理 6.10 中 $m_{c_{max}-1} = 1$ 情形下的双射。

其次，我们考虑以下情形：$m_{c_{max}-1} > 1$。我们将有效 $\mathcal{S}$（对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$）划分为三个集合 $\Psi_1$、$\Psi_2$和 $\Psi_2$。前两个集合都与有效 $\mathcal{S}'$（对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$）的集合存在双射。第三个集合 $\Psi_2$ 则与有效 $\mathcal{S}'$（对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$）的集合的一个子集存在双射，而该子集的补集与有效 $\mathcal{S}''$（对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}$）的集合存在双射。结合定理5.17，即可证明该公式。

这三个集合 $\Psi_1$、$\Psi_2$、$\Psi_3$如下。设 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \ldots\ldots, \mathcal{S}_k)$是 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$的有效表示。我们有 $\mathcal{S}$

若 $\mathcal{S}_k = \{c_{max}\}$，则• 属于 $\Psi_1$，
若 $c_{max}-1$ 在多个 $\mathcal{S}_i$中出现，则• 属于 $\Psi_2$；或者
若 $c_{max}-1$ 恰好在一个 $\mathcal{S}_i$中出现，设为 $\mathcal{S}_{i_0}$，并且 $c_{max} \in \mathcal{S}_{i_0}$，则• 属于 $\Psi_3$。

注意，这三个集合构成了有效 $\mathcal{S}$的划分。显然 $\Psi_2 \cap \Psi_3 = \emptyset$。若 $\mathcal{S} \notin \Psi_2 \cup \Psi_3$，则 $c_{max}-1$ 恰好出现在一个 $\mathcal{S}_i$中，设为 $\mathcal{S}_{i_0}$，且 $c_{max} \notin \mathcal{S}_{i_0}$。根据定义5.1的条件（3），集合 $\mathcal{S}_{i_0+1}$ 只能包含 $c_{max}$。根据

条件（4），不可能再有其他集合 $\mathcal{S}_j$ 满足 $j > i_0 + 1$。因此 $k = i_0 + 1$，并且我们有 $\mathcal{S}_k = \{c_{max}\}$，所以 $\mathcal{S}$ 属于第一个集合。

现在我们构造双射。对于 $\Psi_1$ 的双射与之前完全相同，因为 $m_{c_{max}-1} = 1$，而我们并未用到这一事实。

对于 $\Psi_2$，设 $\mathcal{S}$ 对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 有效。如果 $c_{max} - 1$ 出现在多于一个 $\mathcal{S}_i$ 中，那么根据条件（3），它恰好出现在两个中，记作 $\mathcal{S}_{i_0}$ 和 $\mathcal{S}_{i_0+1}$。根据条件（4），我们有 $|\mathcal{S}_{i_0+1}| > 1$，因此 $\mathcal{S}_{i_0+1} = \{c_{max} - 1, c_{max}\}$。按照之前相同的推理，不可能再有其他满足 $j > i_0 + 1$ 的集合 $\mathcal{S}_j$；换言之，$k = i_0 + 1$。接下来我们声称

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_{k-1}) := (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{k-1})$$

对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 有效。条件（1）显然成立。条件（2）由 $c_{max} - 1 \in \mathcal{S}'_{k-1}$ 这一事实推出，相应条件对 $\mathcal{S}$ 也成立。条件（3）、（4）、（5）都直接由 $\mathcal{S}$ 的相应条件推出。

此外，我们声称，若 $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1, \ldots\ldots, \mathcal{S}'_{k-1})$ 对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 有效，则

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_{k-1}, \{c_{max} - 1, c_{max}\})$$

对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 有效。条件（1）、（2）、（3）显然成立。对于条件（4），只需检查 $\{c_{max} - 1, c_{max}\}$ 与其他某个 $\mathcal{S}'_i$ 之间的重叠。由于该条件对 $\mathcal{S}'$ 成立，唯一可能的此类重叠是与 $\mathcal{S}'_{k-1}$ 的重叠，其交集为 $\{c_{max} - 1\}$。那么，确实有 $|\{c_{max} - 1, c_{max}\}| \geq 2$ 和 $m_{c_{max}-1} > 1$。最后，对于条件（5），再次只需检查 $\{c_{max} - 1, c_{max}\}$ 是否满足该条件，而它确实满足这些假设。我们有 $c_{max} - 1 \in \mathcal{S}'_{k-1}$，因为 $\mathcal{S}'$ 对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 有效，因此满足条件（2）、（3）。

最后，我们构造 $\Psi_3$ 与有效 $\mathcal{S}' =$ 的一个子集之间的双射，其中 $\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_k$，且对应 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$。该子集由满足以下性质的那些 $\mathcal{S}'$ 构成。

(Q) $$\text{If } \min(\mathcal{S}'_k) = c_{max} - 1, \text{then } c_{max} - 1 \in \mathcal{S}'_{k-1}.$$

首先，假设我们有一个对应于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 且属于 $\Psi_3$ 的有效 $\mathcal{S}$。如果 $c_{max} - 1$ 只出现在 $\mathcal{S}_{i_0}$ 和 $c_{max} \in \mathcal{S}_{i_0}$ 中，那么令 $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_k) := (\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{k-1}, \mathcal{S}_k \setminus \{c_{max}\})$.同样显然，使 $\mathcal{S}'$ 对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 有效的条件严格弱于使 $\mathcal{S}$ 对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 有效的条件。我们还注意到，$\mathcal{S}'$ 总是具有性质（Q），因为如果 $\min(\mathcal{S}_k \setminus \{c_{max}\}) = c_{max} - 1$，那么由于 $m_{c_{max}-1} > 1$，根据条件（5），我们有 $c_{max} - 1 \in \mathcal{S}'_{k-1}$。

此外，假设我们有 $\mathcal{S}'$，它对于满足性质（Q）的 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 是有效的。于是我们声称，$\mathcal{S} = (\mathcal{S}'_1, \ldots\ldots, \mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\})$ 对于 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ 是有效的。条件（1）、（2）、（3）显然成立。对于条件（4），只需检查其中一个集合为 $\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}$ 的情形。由于 $\mathcal{S}'$ 有效，它与 $\mathcal{S}'_{k-1}$ 只能有非空交集。若 $c$ 是这个交集，则 $m_c > 1$ 这一事实可由条件（4）对 $\mathcal{S}'$ 成立推出。此外，$|\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}| \geq 2$。最后，对于条件（5），只需检查集合 $\mathcal{S}'_k \cup \{c_{max}\}$。若 $\min(\mathcal{S}'_k) < c_{max} - 1$，则此集合满足条件（5）的假设等价于 $\mathcal{S}'$ 中 $\mathcal{S}'_k$ 的假设。因此，$\mathcal{S}$ 的条件也得到满足。若 $\min(\mathcal{S}'_k) = c_{max} - 1$，则条件（5）可由 $\mathcal{S}'$ 具有性质（Q）这一事实推出。

为完成该证明，我们在不满足性质（Q）的 $\mathcal{S}'$ 与对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}$有效的 $\mathcal{S}''$ 之间构造一个双射。给定不满足性质（Q）的 $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_k)$，我们断言 $\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}'_1, \ldots, \mathcal{S}'_{k-1})$对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}$有效。由于 $\mathcal{S}'$并不

满足性质（Q），我们有 $\min(\mathcal{S}'_k) = c_{max} - 1$ 与 $c_{max} - 1 \notin \mathcal{S}'_{k-1}$。因此条件（2）成立。条件（1）、（3）、（4）、（5）由$\mathcal{S}'$ 有效这一事实显然可得。

此外，给定对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}$ 有效的 $\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}''_1$、.....、$\mathcal{S}''_{k-1})$，我们声称

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S}''_1, \ldots, \mathcal{S}''_{k-1}, \{c_{max} - 1\})$$

对 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}$ 有效。条件（1）、（2）、（3）显然成立。注意，将条件（4）和（5）应用于 $\mathcal{S}'$ 不会施加任何额外约束，因为 $\{c_{max} - 1\}$ 不可能与任何其他 $\mathcal{S}''_i$ 相交，而且其大小不至少为 2。最后，注意此映射是前一个映射的逆映射，因为 $\mathcal{S}'$ 不满足性质（Q）意味着 $\mathcal{S}'_k = \{c_{max} - 1\}$。□

## 7. 块之间的相互作用

在本节中，我们考虑温和的 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 可能由多个块组成的情形（根据引理 3.4，我们总能将温和的$\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 分解为互不相交的块）。

7.1. **块上操作的存在性**。在本小节中，我们研究块上的算子所产生的影响。直观而言，虚拟扩展多段中一个块上的有效操作，与将该块视为其自身的虚拟扩展多段时的有效操作相同。（若扩展多段不是温和的，且我们考虑其分解中的某一部分，也有类似的结论。）唯一的例外是，对于第一个块之后的块，其行为如同它们并非从零开始，即使它们实际上是从零开始的。引理 7.2 阐述的正是这一点。引理 7.6 和 7.7表明所有这些操作都是有效的，这与直观图景相符（只需作上述额外调整）。

下面的定义将这样一种块的概念形式化：它从零开始，却表现得仿佛并非从零开始。

**定义 7.1**。设 $\mathcal{E}$ 是一个从零开始、类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的块，其中 $\mathcal{M} = (m_0, \ldots, m_{c_{\max}})$。若对于某个类型为 $Y_{\mathcal{M}'}$ 的 $\mathcal{E}'$，有 $\mathcal{E}$ $\mathcal{E} = sh^{-1}(\mathcal{E}')$，其中 $\mathcal{M}' = (m'_1, \ldots, m'_{c_{\max}+1})$ 且满足 $m'_i = m_{i-1}$，则称 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$。（当 $\mathcal{E}$ 是一个不从零开始、类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的块时，此条件自动成立，因此我们也称 $\mathcal{E}$ 的类型为 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$。）

**引理 7.2**。设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 等价于一个温和虚拟扩展多段 $\mathcal{E}_{temp}$。假设 $\mathcal{E}_{temp}$ 有块分解 $\mathcal{B}_{1,temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k,temp}$，其中 $k > 1$，且 $\mathcal{E}$ 有分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中 $\mathcal{B}_i$ 等价于 $\mathcal{B}_{i,temp}$。进一步假设 $\mathcal{B}_k$ 的类型为 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$。我们断言如下结论。

*(1)* 对 $\mathcal{E}$ 的每个操作，只要该操作也是对 $\mathcal{B}_k$ 的操作（即仅涉及 $\mathcal{B}_k$ 中的行），就都类似于对扩展多段 $sh^1(\mathcal{B}_k)$ 的操作，具体如下：

- 对 $r_1$ 中的行 $ui$ 和 $r_2$ 的操作，对应于在 $sh^1(\mathcal{B}_k)$ 中对行 $sh^1(r_1)$ 和 $sh^1(r_2)$ 的操作 $ui$ ；
- 对 $\mathcal{E}$ 的操作 $dual$，对应于对 $sh^1(\mathcal{B}_k)$ 的操作 $dual$ ；
- 以及对 $\mathcal{E}$ 进行的 $ui^{-1}$ 类型 *3'*操作（ $sh^1$（$\mathcal{B}_k$）），即从第 $r$ 行分离出 $k$ 圆圈的操作，对应于类型 *3'*操作，即从$sh^1$（$r$）中分离出 $k$ 圆圈的操作。

（2）对 $\mathcal{E}$ 进行任何操作后，只要该操作是对 $\mathcal{B}_k$的操作， $\mathcal{B}_k$ 仍属于$Y_{\mathcal{M}}^{>0}$类型。

证明。 除 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 操作外，证明与 §5.4 中的穷尽证明类似。主要区别在于，这里我们证明了一个稍强的断言，即刻画每一步可能出现的算子，而不是刻画所有等价扩展多重线段。因此，我们不再寻找关于可容许序的最小扩展多重线段，所以在穷尽步骤中还必须考虑降算子。

对于 $dual \circ ui \circ dual$ 形式的操作，前面相同的支撑论证（参见引理 5.47 之前的讨论）表明，除链与属于该链的倍数之间的操作外，不可能有其他操作。在这种情形下，$dual \circ ui \circ dual$ 操作只涉及该链与相应倍数之间的行。特别是，它只涉及 $\mathcal{B}_k$ 中的行。因此，按照引理 5.47 证明中的相同推理，该操作保持类型 $Y_{\mathcal{M}}^{>0}$。

对于形如 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 且其中 $ui^{-1}$ 为类型 3' 的操作，我们断言此类操作不可能发生。首先，假设行 $\hat{r}$ 在 $dual(\mathcal{E})$ 中向上交换。那么，此类操作只涉及 $dual(\mathcal{B}_k)$ 中的行，因此它会是对扩展多段 $\mathcal{B}_k$的有效操作。但根据与引理 5.45类似的推理，对链支撑中包含的每条链及其倍数逐一应用可知，此类操作不可能发生。

因此，我们只考虑在 $r$ 中的行 $\mathcal{E}$ 于 $dual(\mathcal{E})$ 中向下交换的情况。如果 $\mathcal{B}_k$ 不从零开始，那么同样可以仿照引理5.45的证明：简言之，在对偶中交换一行后，它总会具有 $l > 0$，因此不可能出现类型 3' 的 $ui^{-1}$ 。

另一方面，如果 $\mathcal{B}_k$ 从零开始，那么不可能进行 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 操作，但原因略有不同。设 $r$ 为最终应用$ui^{-1}$ 的 $\mathcal{E}$ 中的那一行。注意，由于 $\mathcal{B}_k$ 从零开始，我们必有 $k = 2$，并且 $\mathcal{B}_1$ 必须由第 0 列中的若干个圆组成。

我们首先断言，如果 $\hat{r}$ 没有在 $dual(\mathcal{E})$ 中交换到最后一行，就不可能进行 $ui^{-1}$ 。假设 $\hat{r}$ 被拆分为两行，即 $\hat{r_1}$ 和 $\hat{r_2}$，且 $\hat{r_1} < \hat{r_2}$ 处于所得的可容许序中。如果列 $c$ 位于 $\hat{r_1}$的支撑中，那么 $c$ 就不在 $\hat{r_2}$的支撑中，因此 $B(\hat{r_2}) > 0$。但是，由于 $\mathcal{B}_1$ 在第 0 列有一个圆，$dual(\mathcal{E})$ 的最后一行是在第 0 列的单个圆，并且它排在 $\hat{r_2}$之后。因此，该序不是可容许序。另一方面，如果 $\rho$ 不在 $\hat{r_1}$的支撑中，那么 $A(\hat{r_1}) < 0$，这显然是不可能的。因此， $ui^{-1}$ 操作无效。

然而，如果 $\hat{r}$ 在 $dual(\mathcal{E})$ 中被交换到最后一行，我们断言 $ui^{-1}$ 仍然是不可能的。由于一次 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 操作是 $D$ 操作的逆操作，根据与 $D$ 操作存在性类似的推理（引理5.35），但方向相反；又由于 $\mathcal{B}_2$ 属于 $Y_{\mathcal{M}}$类型，当 $\hat{r}$ 一路交换到 $dual(\mathcal{B}_2)$ 的最后一行时，它只含有圆圈。由于 $\mathcal{B}_1$ 含有奇数个圆圈，根据引理4.17，不失一般性地，我们可以假设它恰好含有一个圆圈。但这次行交换属于情形 1(b)，因此，在最后一次行交换之后，我们必须有 $l \geq 1$ ，所以不可能有 $ui^{-1}$ 。

对于形式为 $ui^{-1}$ 的类型 3'操作，它们必须属于类型 S，这些操作我们在上文已经讨论过。

最后，对于形式为 $ui$的操作，由于它们不依赖于列，在 $\mathcal{B}_k$ 上的有效 $ui$ 操作恰好是 $sh^1$（$\mathcal{B}_k$）上的有效 $ui$ 操作。根据定义，这些操作都保持类型 $Y^{\geq 0}_{\mathcal{M}}$。□

**注 7.3**。第二个块 $\mathcal{B}_2$ 之所以表现得与一个不从零开始的块相同，其直观原因在于，在这两种情形下，都不可能通过 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 操作形成帽。因此，唯一的扩展多重线段，是那些可以通过进行类型 3'的 $ui$并结合行交换而得到的扩展多重线段。

前一个引理使我们能够对分解的每一部分的支撑作出如下非常重要的观察。

**引理 7.4**。设 $\mathcal{E}_{temp}$具有块分解 $\mathcal{B}_{1,\ temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k,\ temp}$，且令$\mathcal{E}$与 $\mathcal{E}_{temp}$等价。假设 $\mathcal{E}$具有分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中 $\mathcal{B}_i$与 $\mathcal{B}_i$等价$_{,\ temp}$。则该分解具有如下性质：对于 $i_1 < i_2$以及行 $r_1 \in \mathcal{B}_{i_1}$、$r_2 \in \mathcal{B}_{i_2}$，有 $A(r_1) \leq B(r_2)$。

证明。注意，在 $\mathcal{E}_{temp}$ 中，对于 $i_1 < i_2$ 以及任意一行 $r_1 \in \mathcal{B}_{i_1,\ temp}$ 和 $r_2 \in \mathcal{B}_{i_2,\ temp}$，我们有 $0 \leq B(r_1) \leq A(r_1) \leq B(r_2) \leq A(r_2)$。由于 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{E}_{temp}$ 等价，且每个 $\mathcal{B}_i$ 都与 $\mathcal{B}_i$等价$_{,\ temp}$，我们可以对每个 $\mathcal{B}_i$应用提升操作及其逆算子，将其变为 $\mathcal{B}_i$，从而得到 $\mathcal{E}$。注意，对 $\mathcal{B}_{i_1}$ 应用提升操作及其逆算子不会改变各行 $r \in \mathcal{B}_{i_1}$中 $A(r)$ 的最大值。此外，在 $\mathcal{B}_{i_2}$ 上可能改变支撑最小值的唯一提升操作或其逆算子是 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 这一类型 3' 操作，但根据引理 7.2，我们知道这些操作是不可能的。因此，对于 $r_1 \in \mathcal{B}_{i_1}$ 和 $r_2 \in \mathcal{B}_{i_2}$，且 $i_1 < i_2$，我们有 $A(r_1) \leq B(r_2)$. □

**定义 7.5**。我们将引理7.4中上述阶梯性质称为分解的阶梯性质。在后续章节中，我们还将讨论以其他方式产生的其他类型的分解，并将同一性质称为阶梯性质。

接下来，我们证明块上的任意算子都会在虚拟扩展多段上诱导出一个算子。

**引理 7.6**。设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 是一个与温和扩展多段等价的扩展多段，且 $\mathcal{E}$ 具有分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，并满足与前文相同的条件。那么，将 $\mathcal{B}_1$ 视为自身的扩展多段时，其上的任意操作也是 $\mathcal{E}$上的有效操作。

证明。设 $T$ 是 $\mathcal{B}_1$上的一个升算子或其逆算子。任一升算子或其逆算子都是 $dual \circ ui \circ dual$、类型 3' 的 $ui^{-1}$、类型 3' 的 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$，或 $ui$ 之一。由于 $ui$ 的条件完全是局部的（见引理 4.3），若 $T$ 是并交，则它显然在 $\mathcal{E}$上也有效。同样，注意到 $dual(\mathcal{E}) = dual(\mathcal{B}_k) \cup \cdots \cup dual(\mathcal{B}_1)$，但各部分 $dual(\mathcal{B}_i)$ 上可能相差一个全局符号变更。因此，若 $T$ 是形式为 $dual \circ ui \circ dual$ 的操作，那么它在 $\mathcal{E}$上也有效，因为对 $dual(\mathcal{B}_1)$ 作全局符号变更，不会影响并交是否有效。

现在我们考虑 $ui^{-1}$ 属于类型 3' 的情形。设 $\mathcal{B}'_1$ 满足 $ui(\mathcal{B}'_1) = \mathcal{B}_1$，其中并交属于类型 3'。由于并交是局部的，因此总有 $ui(\mathcal{B}'_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k) = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k = \mathcal{E}$，除非 $\mathcal{B}'_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ 不处于

可容许序中。由于 $ui^{-1}$ 是作用于 $\mathcal{B}_1$ 的有效操作，我们看到 $\mathcal{B}'_1$ 处于可容许序中。此外，对于 $i>1$，每个 $\mathcal{B}_i$ 都处于可容许序中。因此，只需检查：对于来自 $\mathcal{B}'_1$ 的一行 $r_1$，以及对于 $i_2>1$ 来自 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的一行 $r_2$，$r_1$ 和 $r_2$ 是否处于可容许序中。由于 $r_2$ 位于 $r_1$ 之后，只有在 $A(r_1)>A(r_2)$ 且 $B(r_1)>B(r_2)$ 时才会失败。但由于该分解具有阶梯性质，我们总有 $B(r_2)\geq A(r_1)$。因此 $B(r_2)\geq B(r_1)$，所以该序是可容许的。由此我们得出，$ui^{-1}$ 是作用于 $\mathcal{E}$ 的有效操作。

最后，我们考虑 $dual\circ ui^{-1}\circ dual$ 的 $ui^{-1}$ 为类型 3' 的情形。此处完全相同的论证适用于 $dual(\mathcal{E})$。$ui^{-1}$ 成为有效操作的唯一可能障碍，是结果不符合可容许序。同样，只需检查 $dual(\mathcal{B}_1)$ 中来自 $r_1$ 的行，以及 $dual(\mathcal{B}_{i_2})$ 中来自 $r_2$ 的行是否满足 $i_2>1$。然而，$dual(\mathcal{B}_{i_2})$ 中的每一行的支撑都包含 $dual(\mathcal{B}_1)$ 中每一行的支撑，因为该分解具有阶梯性质。即使经过一次 $ui^{-1}$，这一点仍然成立，因此这些行不可能不满足可容许性条件。□

**引理 7.7.** 设 $\mathcal{E}_{temp}$ 是一个温和扩展多段，具有块分解 $\mathcal{B}_{1,temp}\cup\cdots\cup\mathcal{B}_{k,temp}$，并设 $\mathcal{E}$ 是任意一个与之等价的扩展多段，其分解为 $\mathcal{B}_1\cup\cdots\cup\mathcal{B}_k$。假设 $\mathcal{B}_k=\mathcal{B}_{k,temp}$，且设 $\mathcal{B}'_k$ 是一个与 $\mathcal{B}_k$ 等价、类型为 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$ 的扩展多段。那么存在一个操作序列，将 $\mathcal{E}$ 变为 $\mathcal{E}'=\mathcal{B}_1\cup\cdots\cup\mathcal{B}_{k-1}\cup\mathcal{B}'_k$。

证明。注意，在 $S$、$M$、$U$、$D^1$ 和 $D^2$ 这些算子中，只有一个适用于类型为 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$ 的扩展多重线段，即 $S$，因为这类扩展多重线段没有帽。根据推论 5.37，只需证明对 $S$ 和 $S^{-1}$ 的操作作用于 $\mathcal{B}_k$ 时，作为对 $\mathcal{E}$ 的操作是有效的；在这里我们只假设 $\mathcal{B}_k$ 的类型为 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$。然后我们可以反复应用 $S$ 或 $S^{-1}$ 操作，将 $\mathcal{E}$ 变为 $\mathcal{E}'$。

由于 $S$ 和 $S^{-1}$ 都是局部的，只需检查它们是否会产生违反可容许序条件的行。对于 $S^{-1}$，这一点显而易见，因为它是一个$ui$ 操作。

对于 $S$ 操作，由于 $\mathcal{B}_k$ 是分解的最后一部分，唯一可能发生这种情况的方式是它生成一行，其 $A$ 小于其上方某一行的对应值。但是，$ui^{-1}$ 操作不会改变 $\mathcal{B}_k$ 各行中 $A$ 的最小值，因此不会产生非容许序。

此外，$S$ 操作保持类型 $Y^{>0}_{\mathcal{M}}$，因为它是局部的；而且 $S$ 操作在 $sh^1(\mathcal{B}_k)$ 上也有效，因为它与列无关。因此，这可由单个块上 $S$ 的存在性推出（引理 5.28）。□

7.2. **块的独立性**。本小节将证明，温和的 $\mathcal{E}\in\mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 的块分解中出现的块（见引理3.4）决定 $\Psi(\pi(\mathcal{E}))$（见命题 7.13）。我们先给出一些引理。第一个引理使我们只需考虑某些行交换序列。

**引理 7.8**。令 $\mathcal{E}\in\mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$，并令 $\mathcal{E}'$ 为对 $\mathcal{E}$进行任意次数行交换后的结果。那么，$\mathcal{E}$ 中存在一行，使其单调地交换（即始终向上或始终向下），直到它成为第 $i$ 行；此时它与 $\mathcal{E}'$ 的第 $i$ 行相同。

证明。设 $r$ 是 $\mathcal{E}$ 中经行交换后变为第 $i$行的那一行 $\mathcal{E}'$。根据行交换的交换性（引理 4.2），在进行

将 $\mathcal{E}$ 变为 $\mathcal{E}'$ 的行交换时，我们可以等价地先进行所有涉及 $r$ 的行交换，再进行其他行交换。由于其他行交换不涉及 $r$，且最后进行，因此不会影响第 $i$ 行，所以不失一般性，我们可以省略这些交换。这样一来，只剩下一系列仅涉及 $r$ 的行交换。由于行交换是自身的逆算子，去除成对出现且互为逆算子的行交换后，我们可以假设这一系列行交换要么使 $r$ 单调向上移动，要么单调向下移动。因此，如果我们只对 $r$ 单调地进行行交换，那么 $i$ 行与 $i$ 行相同。□

我们的第二个引理涉及类型为 $Y_{\mathcal{M}}$ 的块内的行交换，并可由第 5 节中的定理推出。

**引理 7.9**。 设 $\mathcal{B}$ 是任意一个与块 $\mathcal{B}_{temp}$ 等价的虚拟扩展多段。

*(1)* 假设 $\mathcal{B}$ 从 0 开始。假设存在一行 $r$，可以通过行交换将其移至最后一行，并设 $r'$ 是经过这些行交换后的像。那么 $l(r') = 0$。此外，$\mathcal{B}$ 中最后一个圆的符号与 $r'$ 中最后一个圆的符号相同。*(2)* 假设 $\mathcal{B}$ 不从 0 开始。假设存在一行 $r$，可以通过行交换将其移至第一行，并设 $r'$ 是它的像。那么 $l(r') = 0$，且 $\mathcal{B}$ 中第一个圆圈的符号与 $r'$ 中第一个圆圈的符号相同。

证明。 对于第 (1) 部分，首先假设 $\mathcal{B}_{temp}$ 从 0 开始并以 $k$ 结束。那么 $\mathcal{B}$ 的类型为 $Y_{\mathcal{M}}$，由定理 5.17 得出。

若 $r$ 是一个帽，则我们采用与引理 5.21 的证明类似的推理。特别地，可以假设 $r$ 之后的所有行都具有 $C = 1$。此外，由引理 4.17 可知，可以假设 $\mathcal{B}_{temp}$ 中的每一列的重数均为 1。因此不失一般性，$\mathcal{B}_{temp}$ 的类型为 $X_k$. 若$r$ 交换到底部后，其像为 $r'$，则由引理 5.21 的证明可得，$l(r') = 0$。根据交错符号条件，$\eta(r) = \eta(\mathcal{B}) \cdot (-1)^{\sum_{s<r} C(s)}$。引理 4.15 表明，$r'$ 中最后一个圆的符号为

$$\eta(r) \cdot (-1)^{\sum_{s>r} C(s)} \cdot (-1)^{C(r')-1}.$$

除去 $r$，$\mathcal{B}$ 中有 $k+1-C(r)$行 $s$，每行都具有 $C(s) = 1$，因此最后一个圆的符号为

$$\eta(\mathcal{B})(-1)^{\sum_{s\in\mathcal{B}-\{r\}} C(s)}(-1)^{C(r')-1} = (-1)^{k+C(r')-C(r)}\eta(\mathcal{B}).$$

但是，由于 $r$ 和 $r'$ 具有相同的支撑，$C(r') - C(r)$为偶数，因此符号为$(-1)^k\eta(\mathcal{B})$，这恰好是 $\mathcal{B}$.中最后一个圆的符号

若 $r$ 不是帽子，那么 $r$ 就是一条链或一个倍数。同样，只有当 supp$(r)$ 包含其后各行的支撑时，才能将 $r$ 与其后的行交换；这意味着所有行 $s > r$ 都必须是倍数。我们假设 $r$ 是一条链，否则 $r$ 与相同倍数进行行交换显然不会改变。由于 $r$之后没有链，因此每种倍数都必须出现偶数次；于是，根据引理4.17，将 $r$ 与这些行交换后，$r$ 保持不变，所以 $l(r') = l(r) = 0$，如所求。$r'$ 的最后一个圆的符号与最后一个圆相同

属于 $r$ 的最后一个圆，其符号与 $\mathcal{B}_{temp}$ （以及 $\mathcal{B}$）中最后一个圆的符号相同，这是奇交替条件所致。

对于第 (2) 部分，如果 $\mathcal{B}_{temp}$ 是一个不从零开始的块，我们分为两种情形。首先假设 supp($r$) 的长度至少为 2。那么它必定是一条链。此外，它的支撑不可能包含在它之前某一行的支撑中，因为根据 $\mathcal{S}$-数据（定义 5.2）的公理，任意两个支撑的交集大小至多为 1。由于我们可以将 $r$ 一路交换到最顶端，supp($r$) 必须包含它之前每一行的支撑。出于同样的原因，这意味着 $r$ 之前的每一行都必须是单个圆。由于 $r$ 是一条链，根据 $Y_{\mathcal{M}}$类型的公理，所有圆都必须位于第 $B(r)$ 列，并且与 $\eta(r)$ 具有相同符号，而且圆的数量必须为偶数。因此根据引理 4.17， $r$ 交换到最顶端后保持不变。因此，它的符号与 $\mathcal{B}$的符号相同。

其次，假设 supp($r$) 的长度为 1。如果 supp($r$) 包含其上方所有行的支撑，那么它必定是长度为 1 的链的倍数。由于这些符号都相同，行交换不会产生影响。否则，supp($r$) 包含在其上方所有行的支撑中，这意味着它属于一条长度至少为 2 的链 $s$ 。由于 supp($r$) 包含在其上方所有行的支撑中，因此除 $r$ 之外，所有排在 $s$ 之前的行都必须是同一列中 $r$的另一个倍数。因此，不失一般性地， $r$ 紧接在链 $s$之后。然后，根据定义 2.11 可计算得出 $l(r') = 0$和 $\eta(r') = \eta(s)$，利用 $\mathcal{B}$ 是奇交替的这一事实。 □

最后，我们需要以下引理；在考虑涉及行交换的操作时，它们会很有帮助。这个引理允许我们通过截断扩展多段，将行交换视为相关行已被一路交换到顶部/底部。

**引理 7.10.** 设 $\mathcal{E}$ 属于类型 $Y_{\mathcal{M}}$，且 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$ 是一个截断的虚拟扩展多段，包含 $\mathcal{E}$ 中除最前面的 $i$ 行以外的所有行。那么无论 $i$ 如何，扩展多段 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$ 都等价于一个温和的虚拟扩展多段，其中每一列的重数至多等于 $\mathcal{E}_{temp}$ 中对应的重数。此外，实现此等价的操作可以在 $\mathcal{E}$ 上进行。

证明。 注意到， $\mathcal{E}$ 可以通过两种操作变换为 $\mathcal{E}_{temp}$ ： 去对偶化帽和拆分圆圈行（推论 5.37）。去对偶化一个帽只涉及帽与其所对偶化到的行之间的那些行。特别地，对于 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$中的任意一个帽，由于截断会移除顶部的行，对应的行也属于 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$。因此，在 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$上进行去对偶化是有效操作。类似地，拆分圆圈行只会涉及一行圆圈及其后续各行，因此这同样是在 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$上的有效操作。于是，我们可以对 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$中的所有帽进行去对偶化（如果有的话），然后不断拆分圆圈行，直到结果变为温和的。

执行完所有这些操作后，剩下的是截断行，后面紧接着一个等价于 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$ 的温和虚拟扩展多段。将这个虚拟扩展多段变为 $\mathcal{E}_{temp}$ 的操作只会增加每一列的重数，因为去对偶化帽会增加重数，而拆分圆圈行则使其保持不变。因此，

等价于 $\mathcal{E}^{\mathrm{tc}}$ 的扩展多段中每一列的重数至多等于 $\mathcal{E}_{temp}$ 中对应列的重数。□

现在我们可以开始证明块的独立性了。一个关键观察是，由于块的极大性，相邻块之间只可能出现少数几种构型。以下对类型 1、类型 2 和类型 3 边界的定义将对此加以形式化。

**定义 7.11.** 假设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}^{\mathbb{Z}}_{\rho}(G_n)$ 等价于一个温和的虚拟扩展多重线段 $\mathcal{E}_{temp}$，并假设 $\mathcal{E}_{temp}$ 有一个块分解$\mathcal{B}_{1,temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k,temp}$。假设 $\mathcal{E}$有一个分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中 $\mathcal{B}_i$等价于 $\mathcal{B}_{i,temp}$。在此设定下，我们对$\mathcal{B}_k$ 可能以何种方式开始进行分类，这取决于其支撑与 $\mathcal{B}_{k-1}$的支撑如何重叠；我们将二者之间的关系称为边界 。令 $H_{col}$ 为 $\mathcal{B}_{k-1}$ 中最后一个非空列，并令 $N_{col}$ 为 $\mathcal{B}_k$中第一个非空列。

- 一个1 型边界 出现在 $N_{col} > H_{col} + 1$。
- 一个2 型边界 出现在 $N_{col} = H_{col}$。
- 一个3 型边界 出现在 $N_{col} = H_{col} + 1$。

请注意，在类型 2 边界的情形下，$\mathcal{B}_{k-1\text{中的}temp}$最后一个圆的符号必须与$\mathcal{B}_{k\text{中的}temp}$第一个圆圈的符号相同，因为$\mathcal{B}_{k\text{中的}temp}$ 开始了一个新的块。同样，在类型 3 边界的情形下，$\mathcal{B}_{k-1\text{中的}temp}$ 最后一个圆的符号必须与$\mathcal{B}_{k\text{中的}temp}$第一个圆圈的符号相同。见下方图2。

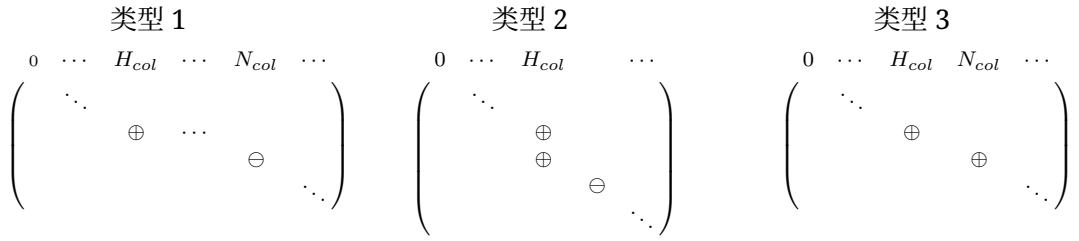



FIGURE 2. 边界类型

我们还对跨越边界的行交换作若干观察。行交换不能发生在类型 1 或类型 3 的边界两侧（即所涉虚拟扩展多段的各行之间），因为在这些情形中，两条扩展多重线段的支撑互不相交。

此外，注意在 2 型边界的情形下，例如边界位于 $\mathcal{E}_1$ 与$\mathcal{E}_2$之间时，跨越该边界最多只能发生一次行交换。设 $H_{col}$ 为 $\mathcal{E}_1$的最后一列，它也就是 $\mathcal{E}_2$的第一列，并设$\mathcal{E}_{1,temp}$ 和$\mathcal{E}_{2,temp}$ 为分别与 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$等价的温和扩展多段。注意，$\mathcal{E}_{2,temp}$ 在$\mathcal{E}_{2,temp}$的第一列中恰有一个圆圈，否则这些圆圈就会包含在$\mathcal{E}_{1,temp}$中。由于这些操作都不能增大一行的支撑，也不能将一行在某列上有支撑的情形变成两行在该列上都有支撑的情形，因此 $\mathcal{E}_2$ 在$\mathcal{E}_{2,temp}$的第一列上有支撑的行至多只有一行，而该行必为 $H_{col}$。类似地， $\mathcal{E}_1$ 中一行的支撑不可能延伸到 $H_{col}$之外。因此，唯一

发生行交换的方式，是在 $\mathcal{E}_2$中的 $H_{col}$ 处有一个单个圆；此后不会再发生其他行交换，因为 $\mathcal{E}_2$ 中的其他每一行的支撑都不包含 $H_{col}$。

现在我们可以陈述本小节的主要引理。

**引理 7.12.** 假设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)$ 等价于一个温和虚拟扩展多段 $\mathcal{E}_{temp}$。设 $\mathcal{E}_{temp}$ 具有块分解 $\mathcal{B}_{1,temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k,temp}$。假设 $\mathcal{E}$ 具有分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中 $\mathcal{B}_i$ 等价于 $\mathcal{B}_{i,temp}$。则 $\mathcal{E}$ 上的任何升算子 $T$ （或逆算子）都不能（即使通过行交换）同时涉及 $\mathcal{B}_{i_1}$ 和 $\mathcal{B}_{i_2}$ 中的行，对于 $i_1 < i_2$。

证明. 由定理 5.17 可知，任何与一个块等价的虚拟扩展多段都是类型 $Y_{\mathcal{M}}$，至多相差行交换。由于这些行交换不涉及分解中不同部分的行，我们可以不失一般性地假设每个 $\mathcal{B}_i$ 是类型 $Y_{\mathcal{M}}$。

我们有四种可能的操作：类型 3' 的 $ui^{-1}$、其中$ui^{-1}$ 为类型 3' 的 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$、$dual \circ ui \circ dual$以及 $ui$。

形式为 $ui^{-1}$ 的类型 3' 操作

首先，我们证明，不可能存在涉及 $ui^{-1}$ 中的一行和$\mathcal{B}_{i_1}$ 中的一行的类型 3' 操作。注意，一般的 $\mathcal{B}_{i_2}$类型 3' 操作由若干次行交换组成，随后进行 $ui^{-1}$，再进行逆行交换。因此，我们需要排除影响另一个块的行交换。假设 $ui^{-1}$作用于一行 $ui^{-1}$ 上。根据引理 $r$，只需考虑涉及7.8的单调行交换 $r$。

此操作若要涉及$\mathcal{B}_{i_1}$ 中的一行和 $\mathcal{B}_{i_2}$中的一行，唯一的可能是 $r$ 位于$\mathcal{B}_{i_1}$ 中，并被交换到$\mathcal{B}_{i_2}$中的某个位置，反之亦然。然而，我们知道，跨越 1 型边界和类型 3 的交换是不可能的，而跨越类型 2 的边界的唯一交换，是与 $H_{col}$中恰有一个圆圈的一行进行行交换。因此，假设发生了这种行交换。根据引理7.9，一行交换到某个$\mathcal{B}_i$的末端后，会变成圆圈行。要使行交换不是平凡的，$r$ 必须至少有两个圆圈，因为它是与恰有一个圆圈的一行交换。（否则，两行都只能支撑在同一列中，这意味着它们完全相同。）因此，我们处于定义2.11中的情形 1(b) 或情形 2(b)，这意味着行交换之后，$l(r') = 1$。特别地，不可能对 $ui^{-1}$ 进行类型 3' 操作 $r'$。

形式为 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 的类型 3'操作

其次我们证明不存在 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 涉及来自 $\mathcal{B}_{i_1}$的一行与来自 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的一行的操作。再次根据引理 7.8 只需考虑两种可能：要么一行 $\hat{r}$ 从 $dual(\mathcal{B}_{i_1})$ 向上交换到 $dual(\mathcal{B}_{i_2})$（回顾定义 2.14 可知顺序是相反的），或者一行 $\hat{r}$ 从 $dual(\mathcal{B}_{i_2})$向下交换到 $dual(\mathcal{B}_{i_1})$。

当 $r$ 位于 $\mathcal{B}_{i_1}$ 中且我们将 $\hat{r}$ 向上交换时，由于支撑的原因，不可能进行任何 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 操作。注意到 $\mathcal{E}$ 按（$P'$）顺序排列。这是因为每个 $\mathcal{B}_i$ 都属于 $Y_{\mathcal{M}}$类型，因此按（$P'$）顺序排列；并且块分解具有阶梯性质：对于位于 $\mathcal{B}_{i_1}$ 中的行 $r_1$ 以及位于 $\mathcal{B}_{i_2}$ 中的行 $r_2$，对于$i_1 < i_2$，有 $A(r_1) \leq B(r_2) \leq A(r_2)$。

由于 $\mathcal{E}$按（$P'$）顺序排列， $dual$（$\mathcal{E}$）也按此顺序排列。现在假设在 $ui^{-1}$ 发生之前， $\hat{r}$与某一行交换，例如与 $\hat{s}$交换。由于顺序为（$P'$），且根据假设 $\hat{r}$ 正在向上交换，因此必有 $B$（$\hat{s}$）$\leq B$（$\hat{r}$）。令 $\hat{r}'$ 为 $\hat{r}$ 经过行交换后的像，并令 $\hat{r_1}$ 和 $\hat{r_2}$ 为对 $\hat{r}'$应用 $ui^{-1}$操作的结果，其中 $B$（$\hat{r_1}$）$< B$（$\hat{r_2}$）。由于该操作只进行行交换$\hat{r_2}$，在 $ui^{-1}$ 操作之后，行 $\hat{r_1}$ 位于 $\hat{s}$之前。由于 $dual$ 要求扩展多段按（$P'$）顺序排列，因此必有 $B$（$\hat{r_1}$）$\leq B$（$\hat{s}$）。但是，$B$（$\hat{r_1}$）$= B$（$\hat{r}$），所以我们得出 $B$（$\hat{s}$）$= B$（$\hat{r}$）。然而，我们知道 $\hat{r_2}$ 与 $\hat{s}$ 之间的行交换是可能的。根据上述推理， $\hat{r}$ 的第一列位于 $\hat{s}$的支撑中，但显然不位于 $\hat{r_2}$的支撑中。因此产生矛盾。

当 $r$ 位于 $\mathcal{B}_{i_2}$ 中且我们向下交换 $\hat{r}$ 时，可以采用与引理 5.21 的证明中类似的分析，但这次该操作无法进行。通过截断扩展多段，我们可以假设 $\hat{r}$ 被交换到最后一行。根据引理 7.10，该截断等价于一个温和扩展多段。由于分解满足阶梯性质（引理 7.4），且 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的顺序为 ($P'$)（因为它是类型 $Y_{\mathcal{M}}$），$\hat{r}$ 的支撑必须包含其下方所有行的支撑。因此，根据推论 4.5，我们可以假设该截断确实是温和的，换句话说， $\hat{r}$ 与具有 $C = 1$ 的行交换。令 $\hat{r}'$ 为 $\hat{r}$ 经所有行交换后的像；若约化的第一列中的重数为偶数，则取经过除一次行交换之外的所有行交换后的像。考察行交换的各种情形可知，在这些情形中，每次行交换使 $l$ 至多减少 1。此外， $l$ 恰好减少 1 的情形只有情形 1(c)，或情形 1(a) 且 $C(\hat{r}) = 0$。由于两个具有相同宽度的帽之间的行交换不会改变 $\hat{r}$（引理 4.17），要使 $l(\hat{r}')$ 为 0，每次行交换（忽略重数）都必须使 $l$ 恰好减少 1。此外，必须与一行进行行交换，而该行的每个宽度都小于 $|B(\hat{r})|$。若 $\hat{r}$ 遇到 1 型边界，这就不可能。

对于类型 2 的边界，我们注意到，与 $H_{col}$ 中圆圈的对偶进行的行交换会使 $\hat{r}$ 保持不变。特别地，其净效果是，不会与宽度为 $H_{col}$ 的帽进行行交换。因此，我们再次得到矛盾。

对于类型 3 的边界，我们看到，由于 $H_{col}$ 和$N_{col}$ 中的圆圈不满足交错符号条件，它们在对偶中的相应帽也不满足交错符号条件（引理 4.11）。特别地，经过行交换后， $\hat{r}$ 的像将不满足与宽度为 $H_{col}$的帽对应的交错符号条件。为了使 $l(\hat{r}')$为 0，根据上述推理，这迫使行交换属于情形 1(a)，并且具有 $C(\hat{r})$ $= 0$。然而，后一种情况是不可能的，因为 $C(\hat{r})$一开始就非零，并且在每一步中只会增大。因此，在任何情况下， $\hat{r}$ 都不能跨越边界进行交换，同时仍使 $l(\hat{r}') = 0$。这表明不可能存在类型 3’ 的 $dual \circ ui^{-1} \circ dual$ 。

形式为 $dual \circ ui \circ dual$ 的操作

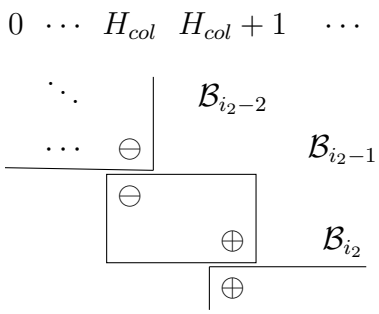
第三，我们证明在 $\mathcal{B}_{i_1}$ 和 $\mathcal{B}_{i_2}$ 中的行之间不会出现任何操作 $dual \circ ui \circ dual$。由于分解具有阶梯性质（引理 7.4），对于任意 $r_1 \in \mathcal{B}_{i_1,\ temp}$ 和 $r_2 \in \mathcal{B}_{i_2,\ temp}$，supp($\hat{r_2}$) $\supset$ supp($\hat{r_1}$)。因此，不同块之间不可能发生非平凡的并交。

形如 $ui$ 的操作

第四，我们证明在 $\mathcal{B}_{i_1}$ 中的一行 $r_1$ 与在 $\mathcal{B}_{i_2}$ 中的一行 $r_2$ 之间不可能发生 $ui$ 操作。根据 $i_1$.，我们分两种情形讨论。

**情形 1.** 首先，假设行 $r_1$ 位于 $\mathcal{B}_i$ 中，且对应于 $i < i_2 - 1$。请注意，对于 1 型或 3 型边界，第一个扩展多重线段中所有行的支撑的最大值，至少比第二个扩展多重线段中所有行的支撑的最小值小 1。此外，对于两个连续的 2 型边界，中间的扩展多重线段必须至少有两列，因为块是极大的。因此，第一个扩展多重线段中各行支撑的最大值，至少比第三个扩展多重线段中各行支撑的最小值小 1。为了使 $r_1$ 和 $r_2$ 具有有效的并交操作，必须有 $A(r_1) \geq B(r_2) - 1$。所以 $r_1$ 不能位于 $\mathcal{B}_i$ 中且对应于 $i < i_2 - 2$；如果 $r_1$ 位于$\mathcal{B}_{i_2-2}$ 中，那么 $\mathcal{B}_{i_2-2}$、$\mathcal{B}_{i_2-1}$ 之间的边界以及 $\mathcal{B}_{i_2-1}$、$\mathcal{B}_{i_2}$ 之间的边界，必须要么都是 2 型，要么一个是 2 型，另一个是 3 型。

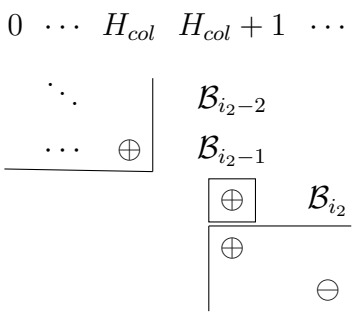
在两个边界都是类型 2 的情形下，$\mathcal{B}_{i_2-1}$ 必定恰好有两列，分别记为 $H_{col}$ 和 $H_{col} + 1$，如下所示。




由于支撑的原因，并交发生的唯一方式是：$r_1$在 $\mathcal{B}_{i_2-1}$中交换到第一个位置，而 $r_2$ 交换到其紧接着的位置。如果 $r_1$ 或 $r_2$ 只有一个圆，那么 $r_1$ 或 $r_2$ 的第一行交换是平凡的，因此该 $ui$等价于分解中相邻部分之间的一个 $ui$，这已包含在下面的情形中。但如果 $r_1$ 有多于一个圆，则与 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的第一行进行的行交换是定义2.11中的情形 1(b)，因为根据引理 7.9 ，$r_1$ 的最后一个圆的符号与 $\mathcal{B}_{i_2-2}$ 的最后一个圆的符号相同，$temp$ 而后者与 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的第一个圆的符号相同，$temp$ 又与 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的第一个圆的符号相同。因此，行交换后的结果（记为 $r_1'$）具有 $l(r_1') = 1$，所以不可能有 $ui$ 。

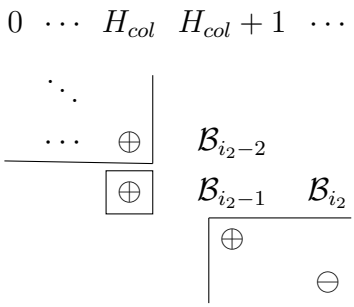
在其中一个边界为类型 2、另一个边界为类型 3 的情形中，首先假设 $\mathcal{B}_{i_2-2}$ 与 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 之间的边界为类型 3，而 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 与 $\mathcal{B}_{i_2}$ 之间的边界为类型 2。设 $\mathcal{B}_{i_2-2}$ 的最后一列为$H_{col}$。为使 $ui$ 成为可能，必须有 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 仅被支撑

于一列之中，即 $H_{col}+1$，如下图所示。




必须通过交换 $r_1$ 到$\mathcal{B}_{i_2-2}$ 的最后一行，并将 $r_2$ 交换到 $\mathcal{B}_{i_2-1}$的第一行来执行并交。根据引理 4.17，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 只有一个圆。根据引理 7.9，对$r_2$ 进行的行交换属于定义 2.11 中的情形 2(b)，因此结果 $r_2'$ 具有 $l(r_2')=1$，因此不可能出现 $ui$ 。

现在假设 $\mathcal{B}_{i_2-2}$ 与 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 之间的边界为类型 2，且 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 与$\mathcal{B}_{i_2}$ 之间的边界为类型 3。在这种情况下，为了使 $r_1$ 的支撑包含 $H_{col}-1$， $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 必须仅位于列$H_{col}-1$中。由于它紧随类型 2 的边界之后，因此它必须是单个圆。总之，我们得到以下情形：




在这种情形下，根据引理7.9，当行 $r_1$ 经过交换而取代 $\mathcal{B}_{i_2-2}$中的最后一行时，它必定是一行仅含圆圈、且末尾符号与 $\mathcal{B}_{i_2-2}$相同的行。再与 $\mathcal{B}_{i_2-1}$中仅有的一行进行一次行交换后，该行包含一对三角形。因此，不可能与行 $r_2$进行并交；根据引理7.9，经过行交换后，该行是一行从 $H_{col}+1$开始的圆圈。

**情况 2。** 其次，假设 $r_1$ 位于 $\mathcal{B}_{i_2-1}$中。若 $\mathcal{B}_{i_2-1}$与 $\mathcal{B}_{i_2}$ 之间的边界是类型 1 或类型 3，由于行交换无法跨越该边界发生，要使 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的一行与$\mathcal{B}_{i_2}$的一行发生并交，就必须将 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的一行交换到 $\mathcal{B}_{i_2-1}$的最后一行，并将 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的一行交换到 $\mathcal{B}_{i_2}$的第一行。令 $r_1'$ 为行交换后 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的最后一行的像，令 $r_2'$ 为行交换后$\mathcal{B}_{i_2}$ 的第一行的像。由引理 7.9， $l(r_1')=0$ 且 $l(r_2')=0$。然而，对于 1 型边界，由于 $B(r_2')>A(r_1')+1$，不可能有 $ui$ 。对于 3 型边界，出于支撑方面的原因， $ui$ 必须是类型 3’，因为 $A(r_1')=H_{col}$ 且$B(r_2')=H_{col}+1$。由引理 7.9，由于$\mathcal{B}_{i_2-1,temp}$ 的最后一个圆的符号是

与 $\mathcal{B}_{i_2,temp}$的第一个圆圈的符号相同， $r_1'$的最后一个圆的符号与 $r_2'$的第一个圆圈的符号相同。因此，不可能有类型 3'的 $ui$ 。

如果 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 与 $\mathcal{B}_{i_2}$ 之间的边界是类型 2，则并交可能以两种方式发生。第一， $r_1$ 跨越边界交换，这只有在它与 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的第一个圆圈交换时才可能发生。在这种情形下，由引理 7.9 可知，当这一行是 $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的最后一行时，其中只包含圆；然而，当它是 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的第一行时，其中包含一对三角形。不过，经过行交换后， $r_2$ 根据引理 7.9 是一行从 $H_{col}+1$ 开始的圆圈，因此不可能发生并交。第二， $r_1$ 没有跨越边界交换。经过行交换后， $r_1$ 和 $r_2$ 都只包含圆，分别记为 $r_1'$ 和 $r_2'$，因此唯一可能的 $ui$ 是类型 3'。然而， $\mathcal{B}_{i_2-1}$ 的最后一个圆的符号与 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的第一个圆圈的符号相同，因此根据引理 7.9， $r_1'$ 的最后一个圆的符号与 $r_2'$ 的第一个圆圈的符号相同。这意味着不可能发生并交。□

现在我们证明本小节的主要结果，即块分解中出现的块决定了温和虚拟扩展多段之间的等价关系。

**命题 7.13** (块的独立性)。 设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$ 等价于一个温和虚拟扩展多段 $\mathcal{E}_{temp}$。若 $\mathcal{E}_{temp}$ 有一个块分解 $\mathcal{B}_{1,\ temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k,\ temp}$，则存在一个分解 $\mathcal{E} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，使得对于所有 $i$， $\mathcal{B}_i$ 都等价于 $\mathcal{B}_{i,\ temp}$。

证明。 由于 $\mathcal{E}$ 等价于 $\mathcal{E}_{temp}$，存在一列升算子及其逆算子，将 $\mathcal{E}_{temp}$ 变为 $\mathcal{E}$。假设第一个操作将 $\mathcal{E}_{temp}$ 变为$\mathcal{E}_{(1)}$，那么第二个操作将 $\mathcal{E}^{(1)}$变为 $\mathcal{E}_{(2)}$，依此类推。注意，在 $\mathcal{E}_{temp}$上存在所需形式的分解，即分解为块。因此，只需证明：若 $\mathcal{E}^{(s)}$ 有一个所需形式的分解，那么在应用升算子或其逆算子后，仍能找到一个合适的分解。重复这一过程，便能为$\mathcal{E}$找到一个合适的分解。

因此，假设我们有一个作用在 $\mathcal{E}^{(s)}$ 上的升算子或逆算子 $T$，并假设 $\mathcal{E}^{(s)}$ 有一个分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中 $\mathcal{B}_i$ 等价于 $\mathcal{B}_{i,temp}$。根据引理 7.12， $T$ 不可能（通过并交或行交换）同时包含来自 $\mathcal{B}_{i_1}$ 的一行和来自 $\mathcal{B}_{i_2}$ 的一行，其中 $i_1 \neq i_2$。因此，对某个 $i_0$， $T$ 只包含来自 $\mathcal{B}_{i_0}$ 的行。根据引理 4.3，这意味着对于 $i \neq i_0$， $T$ 不会影响来自 $\mathcal{B}_i$ 的行。于是， $T(\mathcal{E}^{(s)}) = \mathcal{B}_i \cup \cdots \cup T'(\mathcal{B}_{i_0}) \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中 $T'$ 表示相应的操作。因此，我们找到了 $T(\mathcal{E}^{(s)})$ 的一个合适分解。□

我们以证明定理 3.7 结束本小节；定理陈述如下（记号略有不同）。

**定理 7.14** （温和表示的计数）。 考虑一个温和的虚拟扩展多段 $\mathcal{E}_{temp} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$ ，并假设 $\mathcal{E}_{temp}$ 按顺序分解为块 $\mathcal{B}_{1,temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k,temp}$。那么

$$|\Psi(\pi(\mathcal{E}_{temp}))| = |\Psi(\pi(\mathcal{B}_{1,temp}))| \cdot \prod_{i=2}^{k} |\Psi(\pi(sh^1(\mathcal{B}_{i,temp})))|.$$

证明。设 $\mathcal{E} \in \mathrm{VRep}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(G_n)(G)$ 是一个与 $\mathcal{E}_{temp}$ 等价的虚拟扩展多段。根据命题 7.13, $\mathcal{E}$ 有一个分解 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$，其中每个$\mathcal{B}_i$ 都与 $\mathcal{B}_{i,temp}$等价。我们声称，对于 $i > 1$，每个 $\mathcal{B}_i$ 都必须是 $Y_{\mathcal{M}}^{\geq 0}$类型。反过来，我们声称，对于每个与 $\mathcal{B}_{1,temp}$ 等价的 $\mathcal{B}_1$，以及每个与 $\mathcal{B}_{i,temp}$等价的 $Y_{\mathcal{M}}^{\geq 0}$ 类型的 $\mathcal{B}_i$，都存在一个与 $\mathcal{E}_{temp}$ 等价的 $\mathcal{E}$，其分解为 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$。

对于第一个断言，由于 $\mathcal{E}_{temp}$ 满足这些条件，只需证明应用任意升算子或逆算子后，扩展多段仍满足这些条件。设 $T$ 是作用于$\mathcal{E}$. 上的某个操作。令 $T$ 为与 $\mathcal{E}_{temp}$ 等价的某个扩展多段，且对于 $i > 1$，每个 $\mathcal{B}_i$ 都属于类型 $Y_{\mathcal{M}}^{\geq 0}$。根据引理 7.12，我们可以将 $T$ 视为作用于分解 $\mathcal{B}_i$中某一部分上的操作。如果 $T$ 是作用于 $\mathcal{B}_1$上的操作，则无需证明。否则，设 $T$ 是作用于 $\mathcal{B}_i$上的操作。于是，将引理 7.2 应用于截断后的扩展多段 $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_i$，可知应用 $T$后，$\mathcal{B}_i'$ 仍属于类型 $Y_{\mathcal{M}}^{\geq 0}$。注意，由于 $T$是作用于 $\mathcal{E}$上的有效操作，因此它仍然是作用于截断后扩展多段上的有效操作。

对于第二个断言，根据引理 7.6，我们可以将把 $\mathcal{B}_{1、\,temp}$变为 $\mathcal{B}_1$ 的操作应用于 $\mathcal{E}_{temp}$的第一个块。由于这些操作是局部的（见引理4.3），它们不会影响其他行，因此我们得到一个分解为 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{2、\,temp} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k、\,temp}$的等价扩展多段。根据引理 7.7，通过考察连续的截断，并将相关操作应用于每个截断的最后一部分，我们可以对其他每个块重复同样的推理。□

## References

1. James Arthur，《表示的端oscopic分类》，美国数学会 Colloquium Publications，第 61 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013，正交群与辛群。1, 4, 12 2. Hiraku Atobe，局部 $A$-包的构造，《J. Reine Angew. Math.》790 (2022)，1–51。2, 6, 7, 9, 10, 11 3.，包含给定表示的局部 A-包集合，《J. Reine Angew. Math.》804 (2023)，263–286。1, 16 4. Hiraku Atobe 和 Wee Teck Gan，偶正交群的局部朗兰兹对应与阿瑟猜想，《表示论》21 (2017)，354–415。7 5. Hiraku Atobe、Wee Teck Gan、Atsushi Ichino、Tasho Kaletha、Alberto M´ınguez 和 Sug Woo Shin，经典群的局部交织关系与共温和 $a$-包，2024，arXiv:2410.13504。4 6. Hiraku Atobe 和 Alberto M´ınguez，显式 Zelevinsky-Aubert 对偶，《Compos. Math.》159 (2023)，第 2 期，380–418。7 7. Wee Teck Gan、Benedict H. Gross 和 Dipendra Prasad，经典群的分支律：非温和情形，《Compos. Math.》156 (2020)，第 11 期，2298–2367。1, 2 8. Michael Harris 和 Richard Taylor，某些简单志村簇的几何与上同调，《Annals of Math. Studies》，第 151 卷，普林斯顿大学出版社，2001。4 9. Alexander Hazeltine、Dihua Jiang、Baiying Liu、Chi-Heng Lo 和 Qing Zhang，经典群的阿瑟表示与酉对偶，2024，arXiv:2410.11806v3。6, 7 10. Alexander Hazeltine、Aarya Kumar 和 Andrew Tung，超越 Adams 猜想，预印本。2, 42 11. Alexander Hazeltine、Baiying Liu 和 Chi-Heng Lo，经典群局部阿瑟包的交及其应用，2024，arXiv:2201.10539v3。1, 2, 5, 7, 8, 10, 11, 15, 16

12. , θ对应下局部Arthur参数包的交，2026年，预印本。1, 2, 5, 6, 7, 10, 11 13. Guy Henniart, 《Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL($n$) sur un corps p-adique》, 《数学发明》139 (2000)，第 2 期，439–455。4 14. Colette Mœglin, 《Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler g ´en ´eralis ´ee》, 《表示论》10 (2006)，86–129。1 15. , 《离散Arthur参数包 pour un groupe classique $p$-adique》, 《Automorphic forms and $L$-functions II. Local aspects》, 《当代数学》, 第 489 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009，第 179–257 页。1 16. , 《Image des op ´erateurs d'entrelacements normalis ´es et pˆoles des s ´eries d'Eisenstein》, 《数学进展》228 (2011)，第 2 期，1068–1134。4 17. , 《Multiplicit ´e 1 dans les paquets d'Arthur aux places $p$-adiques》, 《On certain $L$-functions》, 《克莱数学论文集》, 第 13 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011，第 333–374 页。7 18. Peter Scholze，p进域上 GL$_n$ 的局部朗兰兹对应，《数学发明》192 (2013)，第 3 期，663–715。4