K[$K[x]$/]/ τ-例外序列与例外序列：关于 Auslander 代数(x^t)

MAXIMILIAN KAIPEL

Abstract. 对于 $\mathscr{A}_t$ 的 Auslander 代数 $K[x]/(x^t)$，本文证明，每个由 $\mathscr{A}_t$ 模组成的完备例外序列都是完备的 τ-例外序列。此外，本文还证明，完备 τ-例外序列的突变是 $\mathscr{A}_t$ 模范畴中完备例外序列突变的推广。

arXiv:2602.13138v1 [math.RT] 13 Feb 2026

1. Introduction

例外序列是代数几何和表示论中的经典对象，由 Rudakov学派在研究向量丛时引入 [GR87,Gor88,Rud90]。这些序列存在于数学这些领域中自然出现的三角范畴，也就是有界导出范畴。它们由例外对象组成，即没有自扩张且自同态代数简单的对象。例外序列是对这类对象的一种排序，使得 Hom 和 Ext 在一个方向上消失。当例外序列生成整个环境三角范畴时，其显著作用最为明显；此时，该序列称为完备。完备例外序列导出三角范畴的半正交分解 [Bon90] ，并可用于构造三角范畴上的稳定性条件 [Mac07]。

因此，自 1970年代以来，寻找具有完备例外序列的三角范畴一直是研究者长期致力的课题 [Bei79, Kap88, CB93, Kaw06, PN17, CHS25]。完备例外序列也与最高权范畴和拟遗传代数理论密切相关 [Kra17]。这类拟遗传代数中特别重要的一个例子是代数闭域 $t \geq 1$ 上 $K[x]/(x^t)$ 的 Auslander 代数 $\mathscr{A}_t$ ，其中 K 表示一个代数闭域。研究线性群在旗上的作用时会出现这种有限维代数 [HR99, 第 4] 节；它还与光滑射影曲面上的 (-2)-曲线链有关 [HP19b, 第 3 节2]。文献 [BHRR99] 研究了代数 $\mathscr{A}_t$ 的倾斜模及其拟遗传结构，而文献 [HP19a] 则刻画了 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中的完备例外序列；$\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 是有限维右 $\mathscr{A}_t$-模的范畴。代数 $\mathscr{A}_t$ 还与 A [型的预投射代数密切相关14]。

受丛代数 [FZ02] 及其相关组合学的引入启发，借助 Auslander–Reiten理论 [AIR14]，有限维代数上的倾斜模理论得到了极大的拓展。在这一新的 τ-倾斜理论框架下，表示论中的许多经典概念已成功推广到所有有限维代数。尤其是，经典倾斜理论的组合学方面在遗传代数中表现最佳，但超出这一范围后通常便不再适用。在此，支撑 τ-倾斜模对倾斜模进行了推广，并解决了这一问题。

遗传代数上的模的完备例外序列确实存在 [CB93] ，但对于任意有限维代数，这类序列通常并不存在。为了确保完备序列始终存在， [BM21b] 的作者引入了 τ-例外序列，并证明这两个概念在遗传代数中一致。然而，与倾斜模和 τ-倾斜模之间的关系不同，完备例外序列（如果存在）未必是完备的 τ-例外序列，见注 3.8。事实上，除遗传代数之外，人们尚不了解这两类序列之间有什么实质性联系。唯一的例外是由有限维交换局部 K-代数构成的遗传路径代数的张量代数：其 τ-例外序列与遗传路径代数的例外序列之间存在双射 [Non25b]。本文的第一个主要定理为代数 $\mathscr{A}_t$ 建立了这样的联系。

定理 1.1。（定理 *3.6*）模 $\mathscr{A}_t$ 中的每个完备例外序列都是一个 τ-例外序列。更确切地说，存在一个显式双射

$$\Phi\colon \{\text{基本倾斜 } \mathscr{A}_t\text{-模}\} \longrightarrow \{\text{与模 } \mathscr{A}_t\text{}\}\text{中的完备例外序列之间，}$$

由 *th* 给出*MT2* 的 *TF* 有序 τ-倾斜模与完备 τ-例外序列之间的双射 *0].*

Maximilian Kaipel、 Fakultät für Mathematik、 Universität Bielefeld、 33501 Bielefeld、 Germany
E-mail address: mkaipel@math.uni-bielefeld。

以这一结果为出发点，自然会想到比较完备例外序列与完备 τ-例外序列的变异理论。两种变异操作都是通过对完备（τ-）例外序列中的两个相邻项，即所谓的（τ-）例外对，进行变异来定义的。例外序列的变异是经典的，但各种问题，尤其是关于其传递性的问题，直到最近才得到解决 [CHS25]。一般而言，模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中例外序列的变异并不会使其仍然成为 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中对象构成的序列，而是会成为有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod}\mathscr{A}_t)$ 中对象构成的序列。相比之下，τ-例外序列的变异始终留在 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中。因此，本文的比较仅限于例外序列在 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中变异后仍留在 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 的情形。τ-例外序列的变异最近在 [BHM24] 中被引入，并已激发了大量研究。其传递性已对一大类有限维代数得到证明 [BHM25]；而关于 τ-例外序列的变异是否满足辫群关系的研究也取得了颇有启发性的成果 [KT25, Non25a]。第二个主要定理证明，在 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中保持不变的完备例外序列变异，是完备 τ-例外序列变异的一种特殊情形。

定理 1.2。*(定理 4.15)* 设 $\mathcal{E}=(E_t,\dots,E_1)$ 是 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的一个完备例外序列，并设 $i\in\{2,\dots,t\}$。若将 $\mathcal{E}$ 作为例外序列进行左变异（在第 i 个位置）后得到的序列属于 模范畴 $\mathscr{A}_t$，那么该序列与将 $\mathcal{E}$ 作为 τ-例外序列进行左变异（在第 i 个位置）后得到的序列相同。

根据定理 1.1，倾斜模与完备例外序列之间存在双射；倾斜模也有自己的变异理论，而这一理论被支撑 τ-倾斜模的变异理论推广。事实证明，倾斜模的变异（即用另一个不可分解直和项替换倾斜模的一个不可分解直和项）是完备例外序列的变异在 Φ 的逆映射下的提升。换句话说，Φ与变异相交换。在 [Geu22，第 9] 节中也观察到了类似的现象。

命题 1.3。（命题 *4.17* 的简化表述）定理 *1.1* 的显式双射 Φ 与倾斜 $\mathscr{A}_t$-模的突变以及 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中完备例外序列的突变相容。

总结上述结果，令 $t\geq 2$，并令 $i\in\{2,\dots,t\}$。定理 1.1 建立了图 1 中的顶行。取一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模 T。如果存在另一个倾斜模 T'，它仅在一个直和项上不同于 T，或者等价地说，如果其对应的完备例外序列的突变属于模范畴 $\mathscr{A}_t$，那么定理 1.2 和命题 1.3 蕴含图 1 的整个交换图存在。在图 1 中，μ 表示倾斜模的突变，ψ 表示例外序列的突变，而 φ 表示 τ-例外序列的突变。这些陈述对左变异和右变异均成立，因为二者互为逆过程。

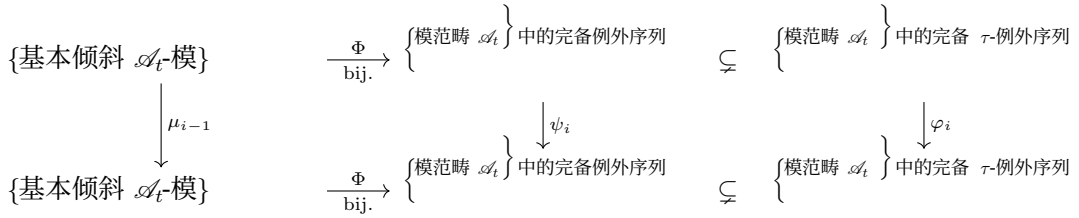


FIGURE 1. 模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中倾斜模、例外序列和 τ-例外序列及其突变之间关系的概述。

为明确说明这一现象，考虑以下例子。

例 1.4. 考虑 $t=2$ 的情形。$t=3$ 的情形将在第 5 节说明。代数 $\mathscr{A}_2$ 同构于有界路径代数

$$K\left(\begin{array}{ccc} 1 & \overset{a}{\curvearrowright} & 2 \\ & \underset{b}{\curvearrowleft} & \end{array}\right)/\langle ab\rangle.$$

该代数 $\mathscr{A}_2$ 在同构意义下有 5 个不可分解模，且它们都是单列模。因此它是一个中山代数，可以简单地计算其支撑（τ-）倾斜模和（τ-）例外序列。中山代数的 φ-例外序列的 τ左变异，已在 [BKT25, Thm. 1.3]中用简单的方式加以描述。在图 2 中，倾斜 $\mathscr{A}_2$-模是所有支撑 τ-倾斜模中以**紫色**标出的子集，而模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_2$中的完备例外序列则是所有完备 τ-例外序列中同样以**紫色**标出的子集。

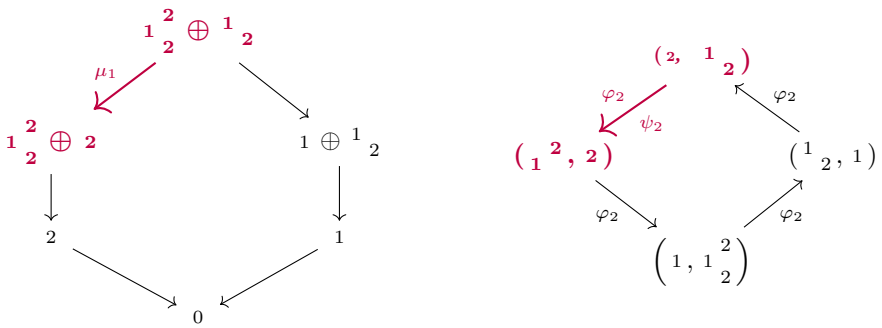


FIGURE 2. 支撑的哈斯图 τ-倾斜模（左），其中倾斜模以**紫色**标出，以及完备 τ-例外序列的左变异图（右），其中例外序列以**紫色**标出。

本文的结构如下：第 2 节回顾（τ-）倾斜理论的预备知识，并汇集倾斜 $\mathscr{A}_t$-模的一些特殊性质。例外序列和 τ-例外序列也在该节中定义。第 3 节相对简短，最后给出定理 1.1 的证明。接着，第 4 节介绍并比较三种不同的变异，最终证明定理 1.2 和命题 1.3。最后，第 5 节通过 $\mathscr{A}_3$ 展示所得到的结果。

致谢。作者感谢H˚avard U. Terland与其分享一个QPA程序，这对作者计算完备 τ-例外序列及其变异有很大帮助。作者感谢Iacopo Nonis仔细阅读了本稿的早期版本，这有助于提高本文的质量。作者感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）在SFB-TRR 191（项目编号281071066）以及SFB-TRR 358/1 2023（项目编号491392403）框架下提供的资助。

2. PRELIMINARIES

全文中，设 K 为代数闭域；对任意自然数 $t \geq 1$，令 $\mathscr{A}_t$ 表示 $K[x]/(x^t)$ 的 Auslander 代数。注意，对 $t = 1$，所有结果都显然成立。换言之，令$\mathscr{A}_t = \mathrm{End}(\bigoplus_{i=1}^{t} M(i))$，其中 $M(i)$ 是长度为 i 的不可分解 $K[x]/(x^t)$-模的同构类。代数 $\mathscr{A}_t$ 同构于箭图的带关系路径 K-代数

$$1 \underset{b_1}{\overset{a_1}{\leftrightarrows}} 2 \underset{b_2}{\overset{a_2}{\leftrightarrows}} \cdots \underset{b_{t-1}}{\overset{a_{t-1}}{\leftrightarrows}} t \ , \quad \text{with relations} \quad a_1 b_1 = 0, a_{i+1} b_{i+1} = b_i a_i, \text{ for } 1 \leq i \leq t-2.$$

作为表示有限代数的 Auslander 代数，代数 $\mathscr{A}_t$ 的整体维数至多为 2 [Aus74，定理 4.6]。有限维右 $\mathscr{A}_t$-模的范畴记为 $\mathsf{mod}\,\mathscr{A}_t$，并记作 $M \in \mathsf{mod}\,\mathscr{A}_t$；$M$ 的不可分解直和项的同构类数记为 $|M|$。存在一列不可分解投射 $\mathscr{A}_t$-模的包含关系

$$P(1) \subset P(2) \subset \cdots \subset P(t)$$

这在 $\mathscr{A}_t$上诱导出一个（唯一的）拟遗传结构。在本文中，若干特殊的$\mathscr{A}_t$-模族起着核心作用。本节将介绍这些模，并汇总其最相关的性质。

定义 2.1. 设 $T \in \mathsf{mod}\,\mathscr{A}_t$。若 T满足 $\mathrm{Ext}^1(T, T) = 0$对 $i \geq 1$成立，且 $\mathsf{pdim}\, T \leq 1$，则称其为部分倾斜。若还满足 $|T| = t$，则称其为倾斜。

对于代数 $\mathscr{A}_t$，研究其极大理想有助于深入理解其倾斜模。考虑极大理想 $I_i := \langle 1 - e_i \rangle \subseteq \mathscr{A}_t$，其中 $\{e_i\}_{i=1}^{t}$ 是 $\mathscr{A}_t$的一组本原正交幂等元，并令 $\langle I_1, \ldots, I_{t-1} \rangle$ 表示由极大理想 $\{I_i\}_{i=1}^{t-1} \subseteq \mathscr{A}_t$在乘法下生成的半群。

The定理 2.2. *[IZ20, 定理 1.1(1)]* 基本倾斜 $\mathscr{A}_t$模的集合由 $\langle I_1$、…、I_{t-} 给出 $_1\rangle$.

对于代数 $\mathscr{A}_t$，根据以下定理，其倾斜模的许多性质可以从其投射模的性质中推导出来。

定理2.3。*[BHRR99，定理 4]* 对于任意基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模 T，存在一个同构$\mathrm{End}(T) \simeq \mathscr{A}_t$。

这一结果也可见于 [IZ20，定理 3.6]。以下对基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模的枚举是证明定理 1.1 的关键组成部分。

定理 2.4。 *[BHRR99，定理 3]* 对称群 $\mathfrak{S}_t$ 与基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模的集合之间存在一个双射。因此，共有 $t!$ 个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。

值得注意的是，在 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ [HP19a] 中也有 $t!$ 个完备例外序列，这些双射也在 [Geu22，第 9]节中进行了讨论。有界同伦范畴$\mathscr{A}_t$ 中的广义倾斜复形在 [Geu22，Sau19]中得到了刻画。

定义 2.5。 设 $E \in \operatorname{mod}\mathscr{A}_t$，若 E满足 $\operatorname{Ext}^i(E,\ E) = 0$且 $\operatorname{End}(E) \simeq K$，则称其为例外 。由例外 $\mathscr{A}_t$-模组成的序列 $(E_r,\ \ldots\ldots,\ E_1)$ 若满足 $\operatorname{Hom}(E_i,\ E_j) = 0 = \operatorname{Ext}^\ell(E_i,\ E_j)$ for $1 \le i < j \le r$，则称为例外序列 。若 $r = t$，则称其为完备例外序列。

本文旨在比较这些经典概念与 τ-倾斜理论 [AIR14] 语境下的现代变体。贯穿 τ-倾斜理论的一条主线，是使用 Auslander–Reiten 平移 τ在模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中将 $\operatorname{Ext}^1(!,\ ?)$ 消失条件替换为 $\operatorname{Hom}(?\ \tau(!))$ 消失条件。

定义 2.6。 [AIR14] 设 $T \in$模范畴 $\mathscr{A}_t$，则 T称为 τ-刚性 ，如果 $\operatorname{Hom}(T,\ \tau T) = 0$；如果进一步满足 $|T| = t$，则称其为τ-倾斜 。若一个 τ-刚性模 T在某个幂等元 $e \in \mathscr{A}_t$下的 $\mathscr{A}_t/\langle e\rangle$中是 τ-倾斜的，则称其为 支撑 τ-倾斜 。由 $\mathscr{A}_t$-模组成的偶 $(T,\ P)$ 称为 τ-刚性 ，如果 T是 τ-刚性的且 $\operatorname{Hom}(P,\ T) = 0$。有时， τ-刚性偶 $(T,\ P)$ 记作 $T \oplus P[1]$。

众所周知，部分倾斜对象是 τ-刚性的，因此倾斜对象自然是 τ-倾斜的。

引理 2.7. 每个部分倾斜 $\mathscr{A}_t$-模都是 τ-刚性的。反过来，每个投射维数至多为 *1* 的 τ-刚性模都是部分倾斜的。

证明。 若 $\operatorname{pdim} T \le 1$，则 $\operatorname{Ext}^1(T,T) = 0$等价于 $\operatorname{Hom}(T,\tau T) = 0$，由 [ARS95，推论 IV.4.7] 可得。 □

根据 [AIR14，定理 0.5],，与每个 τ-刚性模 T（属于 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$）相关联的有一个挠类 生成子范畴 T及其对应的无挠类 $T^\perp$，它们是由以下条件定义的全子范畴

$$\operatorname{Gen} T := \{M \in \operatorname{mod}\mathscr{A}_t : \exists T^r \twoheadrightarrow M \to 0\}$$

$$T^\perp := \{M \in \operatorname{mod}\mathscr{A}_t : \operatorname{Hom}(T,M) = 0\}.$$

二者共同构成 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中的一个挠对 (生成子范畴 $T, T^\perp$)，并伴有两个对象映射 $t_T\colon \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ 和 $f_T\colon \operatorname{mod}\mathscr{A}_t \to \operatorname{mod}\mathscr{A}_t$，见 [Dic66]。这些映射满足：对于每个$M \in \operatorname{mod} A$，都存在唯一的（在同构意义下）短正合列

$$0 \to t_T(M) \to M \to f_T(M) \to 0$$

满足 $t_T(M) \in$生成子范畴 T和 $f_T(M) \in T^\perp$。满子范畴 ${}^\perp T$的定义与 $T^\perp$对偶。这导出了 τ-正交 子范畴 $J(T) := T^\perp \cap {}^\perp\tau T$。若 (T,P) 是 τ-刚性的，令 $J(T,P) := T^\perp \cap {}^\perp\tau T \cap P^\perp$。那么 $J(T,P)$ 是 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 的一个扩张封闭满子范畴，且为阿贝尔范畴，因此它具有 Auslander–Reiten 平移以及 τ-刚性模；这些模可能与 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_T$ 中的不同，参见 [Jas15]。

注记 2.8。 设 T 是 τ-刚性的。映射 $f_T(-)$ 定义了一个双射

$$\begin{aligned}\{\text{indecomposable } M \in \operatorname{mod}\mathscr{A}_t : M \oplus T \text{ is } \tau\text{-rigid in } \operatorname{mod}\mathscr{A}_t \text{ and } M \notin \operatorname{Gen} T\}\\ \to \{\text{indecomposable } N \in J(T) : N \text{ is } \tau\text{-rigid in } J(T)\}\end{aligned}$$

由 [BM21b，命题 4.5] 给出。略微滥用记号，将此双射的逆映射记为$f_T^{-1}(-)$。第 4 节中大量使用了这一记法；在该节的其他语境中，此记法均不用于指代这一双射。

注意到， τ-刚性模在 $J(T)$ 中未必在模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中也是 τ-刚性的，这一点是下述递归定义的基础。

定义 2.9。 [BM21b，定义 1.3] 由不可分解 $\mathscr{A}_t$-模组成的序列 $(M_r, \ldots, M_1)$ 称为τ-例外 序列，若 M_1在模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中是 τ-刚性的，且 $(M_r, \ldots, M_2)$ 是 $J(M_1)$ 中的 τ-例外序列。当 $r = t$ 时，该序列称为完备 。

特别地，模 $M_r,\ \ldots\ldots,\ M_2$在模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中不必是 τ-刚性的。要理解这些序列与 τ-刚性模之间的关系，需要下面的定义。

定义 2.10。 设 T是一个 τ-刚性模， $T_r \oplus \cdots \oplus T_1$ 是 T的一个由不可分解直和项组成的有序分解。若对 $2 \le i \le r$有 $T_i \notin \mathsf{Gen}(\bigoplus_{j=1}^{i-1} T_j)$，则称 $T_r \oplus \cdots \oplus T_1$ 为*TF*-有序分解 ，或称为*TF*-有序τ-刚性模。

利用注记 2.8 中的双射，可以在这些有序分解与τ-例外序列之间转换。

定理 2.11. *[MT20,* 定理 *5.1]*设 $T = T_r \oplus \cdots \oplus T_1$ 是一个 *TF*-有序的 τ-刚性模。则

$$\Phi(T) = \left(f_{\bigoplus_{i=1}^{r-1}(T_i)} T_r, \ldots, f_{T_1}(T_2), T_1\right)$$

是一个 τ-例外序列，长度为 r。此外，每个长度为 r 的 τ-例外序列都以这种方 *ay.*

为了充分说明其定义良好性，有必要指出 $J(T_2 \oplus T_1) = J^{J(T_1)}(f_{T_1} T_2)$，并且根据 [BM21a, 定理 1.4]，（另见 [BH23, 定理 6.4]），这一结论可推广到包含更多项的分解。由此定义子范畴

$$J(f_{T_1}(T_2), T_1) \coloneqq J(T_2 \oplus T_1),$$

并且对于 一个 τ-例外序列 $(M_r, \ldots, M_1)$，通过定理 2.11 类似地定义 $J(M_r, \ldots, M_1)$.

3. Comparing exceptional and τ-exceptional sequences

设 $e_1, \ldots, e_t$ 是 $\mathscr{A}_t$ 的本原正交幂等元，它们对应于 $K[x]/(x^t)$ 上的模 $M(i)$，并等价地对应于第 2 节所述箭图表示的顶点。利用这些幂等元，任意基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模 T 都有一个由不可分解模组成的有序分解 $T = e_t T \oplus \cdots \oplus e_1 T$，称为其拟遗传分解。全文将该有序分解记作 $T = T_t \oplus \cdots \oplus T_1$。以下结论是 IZ20 引理 4.3] 的对偶。

引理 3.1. 设 T 是一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。

(1) T_i 的最小右 $\mathrm{add}(\bigoplus_{j=1}^{i-1} T_j)$-逼近由 $h_{i-1}\colon T_{i-1} \to T_i$ 给出，它是箭图中箭 $b_i\colon i \to i-1$ 的左乘。这是一个单同态。*(2)* T_i 的最小右 $\mathrm{add}(\bigoplus_{j=i+1}^{t} T_j)$-逼近由 $h'_{i-1}\colon T_i \to T_{i-1}$ 给出，它是箭图中箭 $a_{i+1}\colon i+1 \to i$ 的左乘。

证明。 根据定理2.3，左乘定义了一个同构 $\mathscr{A}_t \to \mathsf{End}(T)$。这意味着 $\mathsf{Hom}(T, -)\colon \mathsf{add}(T) \to \mathsf{add}(\mathscr{A}_t)$ 是范畴等价。 $e_i\mathscr{A}_t$ 的最小右 $\mathsf{add}(\bigoplus_{j=1}^{i-1} e_j\mathscr{A}_t)$- 逼近为 $e_{i-1}\mathscr{A}_t \to e_i\mathscr{A}_t$，它由对 b_i 的左乘给出。第一个断言得证，第二个断言类似可证。由于对 b_i 的左乘给出了一个单同态$P(i-1) \to P(i)$，其限制 h_{i-1} 也为单同态。□

作为前一个引理的推论，可以得到无挠映射的如下简化形式。

引理 3.2。 设 T 是一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模，并设 $T = T_t \oplus \cdots \oplus T_1$ 是其 *TF*-有序分解。存在一个同构

$$f_{\bigoplus_{j<i} T_j}(T_i) \simeq T_i / T_{i-1}$$

for all $i \in \{2, \ldots, t\}$.

证明。 由引理 3.1(1)以及挠对 $(\mathsf{Gen}\ T,\ T^{\perp})$ 的定义性质，下面图表的实线部分存在

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & (\bigoplus_{j<i} T_j)^r & \overset{\gamma}{\dashrightarrow} & T_{i-1} & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & \swarrow{\scriptstyle \delta} & \downarrow{\scriptstyle h_{i-1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & t_{\bigoplus_{j<i} T_j}(T_i) & \overset{\beta}{\hookrightarrow} & T_i & \twoheadrightarrow & f_{\bigoplus_{j<i} T_j}(T_i) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

对于某个 $r \ge 1$，其中 h_{i-1} 是一个最小右 $\mathsf{add}(\bigoplus_{j<i} T_j)$-逼近，而 β 是一个最小右生成子范畴($\bigoplus_{j<i} T_j$)-逼近。由于 h_{i-1} 是一个右 $\mathsf{add}(\bigoplus_{j<i} T_j)$-逼近，且 $\beta \circ \epsilon$ 是从 $(\bigoplus_{j<i} T_j)^r$ 到 T_i的态射，因此存在一个映射 $\gamma\colon (\bigoplus_{j<i} T_j)^r \to T_{i-1}$，使得 $h_{i-1} \circ \gamma = \beta \circ \epsilon$。类似地，由于 β 是一个右生成子范畴($\bigoplus_{j<i} T_j$)-逼近，且 $T_{i-1} \in$ 生成子范畴$(\bigoplus_{j<i} T_j)$，可知存在 $\delta\colon T_{i-1} \to t_{\bigoplus_{j<i} T_j}(T_i)$，使得 $h_{i-1} = \beta \circ \delta$。由于 h_{i-1} 是一个单态射， δ 也必须是一个单态射。此外，可推出

$$\beta \circ \delta \circ \gamma = h_{i-1} \circ \gamma = \beta \circ \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \delta \circ \gamma = \epsilon$$

因为 β 是一个单态射。由于 ϵ 是一个满同态，这意味着 δ 必须是一个满同态。综上， δ 是一个同构，结论随之成立。□

以下内容是建立模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中例外序列与τ-例外序列之间关系的第一步。

引理 3.3。 设 T 是一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。那么，它的拟遗传分解是一个按 *TF* 排序的τ-倾斜模。

证明。 由引理 2.7 可知， T显然是一个 τ-倾斜模。反设对于某个 $i \in \{2, \dots, t\}$，有 $T_i \in \mathsf{Gen}(\bigoplus_{j=1}^{i-1} T_j)$。那么存在一个满同态 $g\colon (\bigoplus_{j=1}^{i-1} T_j)^r \to T_i$，其中某个 $r \geq 1$。然而，根据引理 3.1(1)， g 的每个分量 g_ℓ 都经由单同态 $h_{i-1}\colon T_{i-1} \to T_i$ 分解。因此，g 不可能是满同态。□

为了建立例外模与 τ-刚性模之间的联系，以下对例外模的刻画十分重要。回顾一下，若模 $M \in \operatorname{mod} \mathscr{A}_t$ 的维数向量中各项仅为 0 或 1，则称其为薄模。

定理 3.4. *[HP19a,* 定理 *2.2(1)]* 设 $M \in$ 模范畴 $\mathscr{A}_t$。那么， M 是例外的，当且仅当 M 不可分解、薄，且满足 $\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ M) = 1$。

前一定理中的最后一个条件与以下结果有关。

Lemm命题 3.5. 设 T是一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。那么，对于所有 $i \in \{1, \dots, t\}$，$\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ T_i) = i$。.

证明。 设 $i \in \{1, \dots, t\}$。根据定理 2.2 中 T作为理想半群元素的描述，可直接得出每个 T_i都是 $e_i\mathscr{A}_t = P(i)$ 的子模。不可分解投射模 $P(i)$ 满足：对于所有 $1 \leq i \leq t$，$\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ P(i)) = i$。因此， i是 $\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ T_i)$ 的上界。

注意，对于所有 $j \in \{1, \dots, t-1\}$， $e_t \in I_j$。由此可得 $T_t = P(t)$，这就证明了 $i = t$ 的情形。否则，令 $X = \langle e_t \rangle \subseteq \mathscr{A}_t$ 为由顶点 t 处的幂等元生成的理想。由此可得， X 是 T 的子模，且 e_iX 是 T_i 的子模。容易验证，$\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ e_iX) = i$，这意味着 i 也是 $\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ T_i)$ 的下界。结论得证。□

现在可以证明本文的第一个主要结果：$\operatorname{mod} \mathscr{A}_t$ 中的每个完备例外序列也是一个完备 τ-例外序列。

定理 3.6。 定理 *2.11* 的双射 Φ 限制后，在基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模的拟遗传分解与模范畴 $\mathscr{A}_t$中的完备例外序列之间构成一个双射：

$$\begin{array}{ccc} \{TF\text{-}ordered\ \tau\text{-}tilting\ \mathscr{A}_t\text{-}modules\} & \xrightarrow{bij.} & \left\{\begin{array}{c} complete\ \tau\text{-}exceptional \\ sequences\ in\ \operatorname{mod}\mathscr{A}_t \end{array}\right\} \\ \Phi: \quad \cup & & \cup \\ \left\{\begin{array}{c} quasi\text{-}hereditary\ decompositions\ of \\ tilting\ \mathscr{A}_t\text{-}modules \end{array}\right\} & \xrightarrow[bij.]{\Phi} & \left\{\begin{array}{c} complete\ exceptional \\ sequences\ in\ \operatorname{mod}\mathscr{A}_t \end{array}\right\} \end{array}$$

特别地，模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的每个完备例外序列都是一个完备的 τ-例外序列。

证明。 由引理 3.3， T 的拟遗传分解是一个 TF-有序的 τ-倾斜模，因此属于 Φ的定义域，其陪域为 τ-例外序列的集合。由于 $|T| = t$， T在 Φ 下的像因而是一个完备的 τ-例外序列。一旦证明 $\Phi(T)$ 是一个完备例外序列，结合定理 2.4 所述的基本倾斜模数量为 $t!$，以及由 [HP19a，引言定理] 得出的完备例外序列数量为 $t!$，便可知所有完备例外序列都必定以这种方式得到，因为 Φ 是一个双射。

剩下要证明的是， $\Phi(T_t \oplus \cdots \oplus T_1)$ 是一个完备例外序列。由引理 3.2，同构

$$f_{\bigoplus_{j=1}^{i-1} T_j}(T_i) \simeq T_i/T_{i-1}$$

对所有 $i \in \{2, \dots, t\}$ 都成立。由此可得

$$\Phi(T) = (T_t/T_{t-1}, \dots, T_2/T_1, T_1).$$

此外， T定义了一个滤链 $0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_{t-1} \subset T_t = P(t)$。结果 [HP19a，命题 3.5]随后指出 $\Phi(T)$ 是一个完备例外序列，当且仅当 (1) $\dim \operatorname{Hom}(P(t)\ T_i) = i$；(2) T_1 是一个例外模；

(3) 每个 T_i/T_{i-1} 对于 $i \in \{2, \dots, t\}$ 都是例外模。

由于（1）已在引理 3.5 中证明，剩下只需证明（2）和（3）。注意，不可分解投射模$P(1)$是薄的。因此，其子模 T_1 也薄，这意味着根据定理 3.4 和引理 3.5， T_1 是例外模。剩下只需证明（3）。

设 $i \in \{2, \dots, t\}$。根据定理 3.4，只需且必须证明每个 T_i/T_{i-1}均不可分解、薄，并且满足 $\dim \mathrm{Hom}(P(t) T_i/T_{i-1}) = 1$。考虑短正合列

$$0 \to T_{i-1} \xrightarrow{h_{i-1}} T_i \to T_i/T_{i-1} \to 0, \tag{3.a}$$

其中， h_{i-1} 是引理 3.1(1) 中 T_i 的 $\mathrm{add}(\bigoplus_{j=1}^{i-1} T_j)$-最小右逼近。对等式（3.a）应用 $\mathrm{Hom}(P(t), -)$，并利用（1），得到

$$\dim \mathrm{Hom}(P(t), T_i/T_{i-1}) = \dim \mathrm{Hom}(P(t), T_i) - \dim \mathrm{Hom}(P(t), T_{i-1}) = i - (i-1) = 1.$$

为证明每个 T_i/T_{i-1} 都是不可分解且薄的，从而完成证明，只需根据 HP19a，推论 2.4] 证明 T_i/T_{i-1} 满足 $\mathrm{End}(T_i/T_{i-1}) \simeq K$。将 $\mathrm{Hom}(T_{i-1}, -)$ 应用于式 (3.a)，得到正合列

$$\mathrm{Hom}(T_{i-1}, T_{i-1}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(T_{i-1}, h_{i-1})} \mathrm{Hom}(T_{i-1}, T_i) \to \mathrm{Hom}(T_{i-1}, T_i/T_{i-1}) \to \mathrm{Ext}^1(T_{i-1}, T_{i-1})$$

这意味着 $\mathrm{Hom}(T_{i-1}, T_i/T_{i-1}) = 0$，因为 $\mathrm{Hom}(T_{i-1}, h_{i-1})$ 是满射，这是由于 h_{i-1} 是右逼近；又因为 T 是倾斜的，所以 $\mathrm{Ext}^1(T_{i-1}, T_{i-1}) = 0$。因此，将 $\mathrm{Hom}(-, T_i/T_{i-1})$ 应用于式 (3.a)，得到正合列

$$0 \to \mathrm{End}(T_i/T_{i-1}) \to \mathrm{Hom}(T_i, T_i/T_{i-1}) \to \mathrm{Hom}(T_{i-1}, T_i/T_{i-1}) = 0. \tag{3.b}$$

存在一个范畴等价 $\mathrm{Hom}(T, -) : \mathrm{add}\, T \to \mathrm{add}\ \mathscr{A}_t$，这是因为左乘定义了一个同构 $\mathscr{A}_t \to \mathrm{End}(T)$，根据定理2.3。这意味着

$$\dim \mathrm{Hom}(P(i), P(i)) = i \quad \text{and} \quad \dim \mathrm{Hom}(P(i), P(i-1)) = i - 1$$

限制到 T_i 和 T_{i-1}。对等式 (3.a) 应用 $\mathrm{Hom}(T_i, -)$，并利用 $\mathrm{Ext}^1(T_i, T_{i-1}) = 0$，由于 T 是倾斜的，可得

$$\dim \mathrm{Hom}(T_i, T_i/T_{i-1}) = \dim \mathrm{End}(T_i, T_i) - \dim(T_i, T_{i-1}) = i - (i-1) = 1.$$

将此结果与等式 (3.b) 中的同构 $\mathrm{End}(T_i/T_{i-1}) \simeq \mathrm{Hom}(T_i, T_i/T_{i-1})$ 结合，得到所需的 $\mathrm{End}(T_i/T_{i-1}) \simeq K$。这就完成了 T_i/T_{i-1} 是例外的证明，从而也完成了该命题的证明。□

注 3.7. 并非模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的每个例外序列都是 τ-例外序列。从并非每个例外模都是 τ-刚性的这一事实，可以立即看出这一点。事实上，考虑例 1.4 中的情形$t = 2$。模$_{21}$，也可等价地写作 $P(2)/S(1)$，是例外的，但不是 τ-刚性的，这一点很容易验证。

注 3.8。 对于任意有限维 K-代数，并非每个完备例外序列都必然是 τ-例外序列。考虑代数

$$\Gamma = K(1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3)/\langle ab \rangle.$$

容易验证，$(P_2,\ P_1,\ S_1)$ 是一个完备例外序列，但不是 τ-例外序列，因为 $\mathrm{Hom}(P_2,\ \tau S_1) \neq 0$。

4. 比较突变

既然已经确定 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中的每个完备例外序列都是一个完备 τ-例外序列，那么比较它们的变异理论是很自然的。回顾一下，一般而言，完备例外序列的突变是 $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t)$中的一个运算，而完备 τ-例外序列的突变仍然属于 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$。设 $(E,\ F)$ 是一个由两个项组成的例外序列，也称为例外对。存在一个自然映射

$$\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_K E \to F, \quad \phi \otimes e \mapsto \phi(e)$$

对于每个整数 ℓ，定义了一个自然映射

$$\mathrm{Hom}(E[-\ell], F) \otimes_K E[-\ell] = \mathrm{Hom}(E, F[\ell]) \otimes_K E \to F.$$

取直和后，这定义了典范映射以及 $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t)$ 中的一个三角：

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, F) \otimes E \to F \to \mathcal{L}_E F \to \quad . \tag{4.a}$$

$(E,\ F)$ 的左变异，为与 τ-例外序列的突变相区别，后来称为左 ψ-变异，定义为例外对 $(\mathcal{L}_E F,\ E)$，参见 [Gor90，第 2.2] 节。对偶典范映射类似地给出一个三角：

$$\mathcal{R}_F E \to E \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E,F)^* \otimes E \to$$

在 $\mathcal{D}^b$(模范畴 $\mathscr{A}_t$) 中，它定义了 $(E,\ F)$ 的 ψ右-突变（$F,\ \mathcal{R}_F E$）。

定义 **n 4.1.** 设 $\mathcal{E} = (E_t,\ \ldots,\ E_1)$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的完备例外序列，且设 $i \in \{2,\ldots,t\}$。
定义 *left* ψ 在位置 i 处对 $\mathcal{E}$ 的突变为

$$\psi_i(\mathcal{E}) \coloneqq (E_t,\ldots,E_{i+1},\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1},E_i,E_{i-2},\ldots,E_1).$$

类似地，将 ψ右突变作用于 $\mathcal{E}$ 在（位置） i 定义为

$$\psi_i^{-1}(\mathcal{E}) \coloneqq (E_t,\ldots,E_{i+1},E_{i-1},\mathcal{R}_{E_{i-1}}E_i,E_{i-2},\ldots,E_1).$$

这种记号是合理的，因为根据 [Gor90，第 2.3] 节，这些运算互为逆运算。需要注意的是，$\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中完备例外序列的左、右 ψ突变，作用后在 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中不一定仍是完备例外序列。右 ψ突变的这一性质由 [HP19a，引理 4.7，推论 4.8] 刻画。为了证明左 ψ突变的相应结论以及其他若干结论，以下关于 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中完备例外序列的一组命题至关重要。

引理 4.2。设$(E_t,\ldots,E_1)$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$中的一个完备例外序列。以下结论成立：
(1) 对任意 $i > j$，$\dim\mathrm{Hom}(E_i,E_j) = 1 = \dim\mathrm{Ext}^1(E_i,E_j)$；*(2)* 对任意 $i > j$，$\mathrm{Ext}^2(E_i,E_j) = 0$；*(3)* 对所有 $i \in \{2,\ldots,t\}$，每个非零态射 $E_i \to E_{i-1}$ 都是单射或满射；*(4)* 若 $E_2 \to E_1$ 是单射，则 投射维数 $E_2 \leq 1$；*(5)* 若 $f\colon E_i \to E_{i-1}$ 对 $i \in \{2,\ldots,t\}$ 是单射，则 $\dim\mathrm{Ext}^1$(余核 f, E_i) $= 1$。

证明。 (1) 和 (2) 由 [HP19a, Cor. 3.7] 得出。(3) 对蠕虫图成立，见 [HP19a, Lem. 3.2], ; 蠕虫图与完备例外序列等价，见 [HP19a, 命题 3.3, Cor. 3.6]。(4) 例外模 E_1 是 P 的子模； $P(1)$ 是单列且薄的，其底为 $S(t)$。若 $E_2 \to E_1$ 是单射，则 E_2 也是单列且薄的，其底为 $S(t)$。注意，$\mathrm{top}(E_2) \not\simeq S(1)$，否则 $E_2 \simeq P(1)$ 会导致矛盾。设 $\mathrm{top}(E_2) \simeq S(j)$，其中 $j \in \{2,\ldots,t\}$。容易验证，其极小投射分解为

$$0 \to P(j-1) \to P(j) \to E_2 \to 0.$$

(5) 对定义余核 f 的短正合列应用 $\mathrm{Hom}(-,\ E_i)$，得到一个正合列 e

$$0 = \mathrm{Hom}(E_{i-1},E_i) \to \mathrm{Hom}(E_i,E_i) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{coker}\,f,E_i) \to \mathrm{Ext}^1(E_{i-1},E_i) = 0 \tag{4.b}$$

其中最外侧的项根据例外序列的定义性质为零。由于 E_i 是例外的，由等式 (4.b) 中的同构 $\mathrm{Hom}(E_i,E_i) \simeq \mathrm{Ext}^1$(余核 f, E_i) 可得 $\dim\mathrm{Hom}(E_i,E_i) = 1$ 成立，结论随之得证。□

HP19a、引理 4.7、推论 4.8] 的对偶很容易证明如下。

引理 4.3。 设 $\mathcal{E} = (E_t,\ldots,E_1)$ 是 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的一个完备例外序列，并设 $i \in \{2,\ldots,t\}$。以下命题等价：

(1) 任意非零态射 $f : E_i \to E_{i-1}$ 都是单射；*(2)* $\psi_i(\mathcal{E})$
是 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的一个完备例外序列 .
在此情形下， $\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1} \in$ 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 由短正合列定义

$$0 \to \mathrm{coker}\,f \to \mathcal{L}_{E_i}E_{i-1} \to E_i \to 0 \tag{4.c}$$

在 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中。

证明。 由于根据引理 4.2(1)，$\dim$ Hom$(E_i,\ E_{i-1}) = 1$，因此对于任意两个 $f_1,\ f_2 \in$Hom$(E_i,\ E_{i-1})$，coker $f_1 \simeq$coker f_2，该表述是明确无歧义的。
由等式 (4.a) 给出的定义 $\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}$的三角导出一个上同调长正合列

$$\begin{aligned} 0 = H^{-1}(E_{i-1}) \to H^{-1}(\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}) \to \mathrm{Hom}(E_i,E_{i-1}) \otimes E_i \to E_{i-1} \to H^0(\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}) \\ \to \mathrm{Ext}^1(E_i,E_{i-1}) \otimes E_i \to H^1(E_{i-1}) = 0 \end{aligned} \tag{4.d}$$

利用 E_{i-1} 在 $\mathcal{D}^b$(模范畴 $\mathscr{A}_t$) 中集中于零次这一事实，得到 $H^{\neq 0}(E_{i-1}) = 0$；利用引理 4.2(2) 得到 $\mathrm{Ext}^2(E_i,\ E_{i-1}) = 0$ 这一事实，以及由于 $\mathscr{A}_t$ 的整体维数为 2，$\mathrm{Ext}^{\geq 3}(E_i,\ E_{i-1}) = 0$ 这一事实，从而得出 $\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}$ 集中在 -1 次和 0 次。

此外，由引理 4.2(1)，由于 $\dim\mathrm{Hom}(E_i,\ E_{i-1}) = 1 = \mathrm{Ext}^1(E_i,\ E_{i-1})$，式 (4.d) 中的张量积可化简为，从而得到正合列

$$0 \to H^{-1}(\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}) \to E_i \to E_{i-1} \to H^0(\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}) \to E_i \to 0. \tag{4.e}$$

注意，$E_i \to E_{i-1}$ 在等式 (4.e) 中非零，因此由引理 4.2(3) 可知它要么是满射，要么是单射。若它是单射，则可得 $H^{-1}(\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}) = 0$，且 $\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1} \in$ 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 具有所需的描述，从而推出 $\psi_i(\mathcal{E})$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$中的完备例外序列。

反过来，若 $\psi_i(\mathcal{E})$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$中的完备例外序列，则特别有 $\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1} \in$ 模范畴 $\mathscr{A}_t$，从而推出 $H^{-1}(\mathcal{L}_{E_i}E_{i-1}) = 0$，因此 $f\colon\ E_i \to E_{i-1}$ 是单射。证明至此结束。□

鉴于前述命题及其对偶，参见 [HP19a，引理 4.7，推论 4.8]，，下文将始终采用以下简写记法。

定义 4.4。设 $\mathcal{E} = (E_t, \dots, E_1)$ 是模范畴 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中的完备例外序列，并设 $i \in \{2, \dots, t\}$。称

若任意非零的 $E_i \to E_{i-1}$ 都是单射，则称 $\bullet\ \mathcal{E}$ 可在（位置）i 处进行左 ψ-突变。
若任意非零的 $E_i \to E_{i-1}$ 都是满射，则称 $\bullet\ \mathcal{E}$ 可在（位置）i 处进行右 ψ-突变。

相应的在（位置）i 处进行的 ψ-突变定义见定义 4.1。

4.1. **的突变-例外序列**。在进一步讨论 τ-例外序列的突变并将其与例外序列的突变进行比较之前，需要引入更多记号。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 是一个满子范畴，且 $\mathcal{T}$ 是 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中的一个挠类。用 $\mathsf{T}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中包含 $\mathcal{C}$ 的最小挠类，并用 $\mathsf{P}(\mathcal{T}) \in \mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 表示一个基本模，它同构于 $\mathcal{T}$ 中所有不可分解 Ext-投射对象的直和。类似地，用 $\mathsf{P}_{\mathrm{s}}(\mathcal{C})$ 和 $\mathsf{P}_{\mathrm{ns}}(\mathcal{C})$ 分别表示 $\mathsf{P}(\mathcal{T})$ 的最大直和项，其中分别由分裂和非分裂 Ext-投射对象组成。

τ-例外序列的突变理论由 [BHM24] 引入。与例外序列的突变类似，突变是作用于 τ-例外对上的一种运算，也就是作用于长度为 2 的 τ-例外序列上。在 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中，τ-例外对的左突变和右突变分为两种情况。

定义 4.5. [BHM24，定义 3.11] 若 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中的 τ-例外对 $(B,\ C)$ 满足 C，则称其为左正则 is pr对象ive 在 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中，或若 $C \notin \mathsf{P}({}^{\perp}\tau(f_C^{-1}(B)))$。否则，称其为左不规则。

若 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中的 τ-例外对 $(B,\ C)$ 满足 $f_C^{-1}(B) \in \mathsf{P}({}^{\perp}\tau C)$，或满足 $C \notin$ 生成子范畴$(f_C^{-1}(B))$，则称其为右正则 。其 erwise, 称为右非正则。

需要指出的是，对于一般的有限维代数 Λ，可能存在（左或右非正则的）τ-例外序列，它们是（左或右）不可变的。然而，根据 [IZ20, 定理 1.2]，代数 $\mathscr{A}_t$只有有限多个基本 τ-倾斜模的同构类。因此，根据 [BHM24, 定理 0.2]，$\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中的每个 τ-例外对都可以进行左突变和右突变。为了描述这一过程，下面这个扩展注记 2.8 中所述双射的双射很重要，参见 [BM21b, 命题 5.6]和 [BH23, 第 3] 节。尽管本文余下证明中不会用到该双射的具体表达式，为求完整起见，仍将其列出。

定理 4.6。 *[BHM24, 定理 2.16]* 设 (T, P) 是 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$中的一个 τ-刚性对。那么存在一个双射

$$\begin{array}{c}\{\textit{indecomposable } M \in \mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t \sqcup \mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t[1] : M \oplus T \oplus P[1] \textit{ is a } \tau\textit{-rigid pair in } \mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t\} \\ \Big\downarrow \mathrm{E}_{T\oplus P[1]} \\ \{\textit{indecomposable } N \in J(T,P) \sqcup J(T,P)[1] : N \textit{ is a } \tau\textit{-rigid pair in } J(T,P)\}\end{array}$$

由.....给出

$$\mathrm{E}_{T\oplus P[1]}(M) = \begin{cases} \mathrm{P_s}(J(T,P) \cap {}^{\perp}J(T \oplus M \oplus P[1])) & \textit{if } M \in \mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t \textit{ or } M \notin \mathrm{Gen}\,T; \\ \mathrm{P_s}(J(T,P) \cap {}^{\perp}J(T \oplus M \oplus P[1]))[1] & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

设 (B, C) 是 $\mathrm{mod}\ \mathscr{A}_t$ 中的一个 τ-例外对，左突变和右突变的定义参照[BHM24，第 4] 节。假设 (B, C) 是左正则的。那么，(B, C) 的左变异（也称左 φ-突变，以区别于例外序列的 ψ-突变）是 τ-例外对 $\frown\ \frown\varphi(B, C) := (C, B)$，其中

$$\widehat{B} = \begin{cases} B & \text{if } C \text{ is projective;} \\ f_C^{-1}(B) & \text{otherwise;} \end{cases} \quad \text{and} \quad \widehat{C} = \begin{cases} \lfloor \mathrm{E}_B(C[1]) \rfloor & \text{if } C \text{ is projective;} \\ \lfloor \mathrm{E}_{\widehat{B}}(C) \rfloor & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 C 的表达式中，对象 $\mathrm{E}_B(C[1])$ 和 $\mathrm{E}_{\widehat{B}}(C)$ 可能是形如 $(0,P)$ 的 τ-刚性对，其中某个投射 $P\in\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$，而应用 $\lfloor-\rfloor$ 意味着将它们视为 τ-刚性模 $P\in\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$。请注意，本文证明主要结果时不需要对 C 作出描述。

现在假设 (B,C) 是左不规则的，并定义

$$X=\mathrm{P}_{\mathrm{s}}(\operatorname{Gen}\mathrm{P}_{\mathrm{ns}}(\mathrm{T}(J(f_C^{-1}(B)\oplus C))))\quad\text{and}\quad Y=\mathrm{P}_{\mathrm{ns}}(\mathrm{T}(J(f_C^{-1}(B)\oplus C)))/X.$$

在这种情况下，τ-例外对 (B,C) 的左 φ-变异定义为 $\varphi(B,C):=(f_Y(X)\ Y)$。

现在考虑 τ-例外序列的右变异。根据 [BHM24，定理 4.7]，，右变异是左变异的逆。假设 (B,C) 是右正则的。(B,C) 的右（φ-）变异定义为 $\varphi^{-1}(B,C)=(C,B)$，其中

$$\overline{C}=\begin{cases}\mathrm{E}_{\mathrm{E}_C^{-1}(B[1])}(C) & \text{if } B \text{ is projective in } J(C);\\ \mathrm{E}_{\overline{B}}(C) & \text{otherwise;}\end{cases}\quad\text{and}\quad \overline{B}=\begin{cases}|\mathrm{E}_C^{-1}(B[1])| & \text{if } B \text{ is projective in } J(C);\\ f_C^{-1}(B) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于代数 $\mathscr{A}_t$，借助以下引理，定义中 C 的第一种情况可以大幅简化。

引理 4.7。 设 $(E_t,\dots,E_1)$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的完备例外序列，且 E_2 是 $J(E_1)$ 中的投射对象。那么，对于某个 $?\in$ 模范畴 A_t，有 $\varphi^{-1}(E_2,E_1)=(E_1,?)$。

证明。首先，考虑上文定义的下标中出现的表达式 $X:=\mathrm{E}_{E_1}^{-1}(E_2[1])$。根据 E-映射的定义（例如参见 [BKT25，定义 3.5]，或 [BHM24，定义-命题 4.5], 的证明），需要考虑两种情况。第一种情况是 $X=P[1]$，其中 $P\in$ 是某个投射 $\mathscr{A}_t$ 模。在这种情况下，E-映射的定义直接给出 $\mathrm{E}_X(E_1)=E_1$，正如所需。

第二种情况是 $X\in\operatorname{Gen}E_1$。由 [BHM24，引理 1.12]，可得 $E_1\notin\operatorname{Gen}X$。E-映射的定义给出 $\mathrm{E}_X(E_1)=f_X(E_1)$。反设 $\operatorname{Hom}(X,E_1)\neq 0$。由于 $X\in\operatorname{Gen}E_1$，于是存在一个 E_1 的非同构自同态。这与 E_1 是例外矛盾。因此 $\operatorname{Hom}(X,E_1)=0$，由此可得 $f_X(E_1)=E_1$，进而得到所需结果。□

定义 右非正则 τ-例外对的右 φ-突变的定义被省略，因为本文证明主要结果时不需要 ot 它 d 来证明本文的主要结果。

定义 4.8. 设 $\mathcal{M}=(M_t,\dots,M_1)$ 是一个完备的 τ-例外序列。$\varphi_i(\mathcal{M})=(M_t,\dots,M_{i+1},M_{i-1},M_i,M_{i-2},\dots,M_1)$ 定义为 $i\in\{2,\dots,t\}$ 在位置处的 $\mathcal{M}$ 左 φ-突变，其中

$$(\widehat{M}_{i-1},\widehat{M}_i)=\varphi^{J(M_{i-2},\dots,M_1)}(M_i,M_{i-1})$$

是子范畴 $J(M_{i-2},\dots,,M_1)$ 中 τ-例外对的左 φ-突变。$\varphi_i^{-1}(\mathcal{M})=(M_t,\dots,M_{\underline{i+1}},M_{\underline{i-1}},M_i,M_{i-2},\dots,M_1)$ 定义为 $i\in\{2,\dots,t\}$ 在位置处的 $\mathcal{M}$ 右-突变，其中

$$(\overline{M}_{i-1},\overline{M}_i)=(\varphi^{-1})^{J(M_{i-2},\dots,M_1)}(M_i,M_{i-1}).$$

下述定理说明，本小节中所描述的 τ-例外序列的突变是良定义的。

定理 4.9. *[BHM24, 定理 0.1, 推论 0.4]* 在 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的完备 τ-例外序列的左 φ-突变，仍是 模范畴 $\mathscr{A}_t$中的完备 τ-例外序列。类似地，在 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的完备 τ-例外序列的右 φ-突变，仍是 模范畴 $\mathscr{A}_t$中的完备 τ-例外序列。此外，右 φ-突变是左 φ-突变的逆，反之亦然。

根据定理 3.6，每个完备例外序列也是完备的 τ-例外序列。因此，我们总会明确说明所讨论的是（例外序列的） ψ-突变，还是（ τ-例外序列的） φ-突变。

注意，唯一的投射例外 $\mathscr{A}_t$-模是 $P(1)$。因此，下述引理表明，在完备例外序列中出现且可以进行左 ψ-突变的大多数例外对，都是左不规则的 τ-例外对。尽管如此，在这种情况下，左 φ-突变与左 ψ-突变相同。

引理 4.10. 设 $\mathcal{E}=(E_t,\dots,E_1)$ 是 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的一个完备例外序列，且可以在位置 2 进行左ψ-突变。假设 (E_2,E_1) 是一个左正则 τ-例外对。那么 E_1 在 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中是投射的，并且 $\varphi_2(\mathcal{E})=\psi_2(\mathcal{E})$。

证明。由于 (E_2,E_1) 是左正则的，定义 4.5 指出，要么 E_1 是模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中的投射对象，要么 $E_1\notin\mathrm{P}({}^{\perp}\tau(f_{E_1}^{-1}(E_2)))$。现在证明 E_1 是 ${}^{\perp}\tau(f_{E_1}^{-1}(E_2))$ 中的投射对象。

记 $X = f_{E_1}^{-1}(E_2)$，并令 $Y \in {}^{\perp}\tau X$，使得 $\mathrm{Hom}(Y, \tau X) = 0$。由此可知，根据 ARS95，推论 I V.4.7]，$\mathrm{Ext}^1(X, Y) = 0$。由定理 3.6，例外序列 $\mathcal{E}$ 来自一个倾斜模 T，满足 $T_2 \oplus T_1 = X \oplus E_1$。因此，引理 3.2 表明 E_1 是 X 的子模，并给出一个短正合列

$$0 \to E_1 \to X \to E_2 \to 0.$$

对上式应用 $\mathrm{Hom}(-, Y)$ 得到一个正合列

$$0 = \mathrm{Ext}^1(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(E_1, Y) \to \mathrm{Ext}^2(E_2, Y),$$

其中 $\mathrm{Ext}^2(E_2, Y) = 0$，这是因为根据引理 4.2(4)以及（$E_2$, E_1）可以进行左 ψ变异的假设，$\mathrm{pdim}\, E_2 \leq 1$。由此可得 $\mathrm{Ext}^1(E_1, Y) = 0$。因此，$E_1$在 ${}^{\perp}\tau(f_{E_1}^{-1}(E_2))$中是投射的。consequently （$E_2$, E_1）是左正则 τ-例外对，当且仅当 E_1 在模范畴 $\mathscr{A}_t$中是投射的。

由于 E_1 在模范畴 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$中是投射的，左变异的公式给出

$$\psi_2(\mathcal{E}) = (E_t, \ldots, E_3, ?, E_2) \quad \text{and} \quad \varphi_2(\mathcal{E}) = (E_t, \ldots, E_3, !, E_2).$$

由引理 4.3，序列 $\psi_2(\mathcal{E})$是模范畴 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中的完备例外序列，因此根据定理 3.6，它也是一个完备 τ-例外序列。同样，$\varphi_2(\mathcal{E})$根据定理 4.9是一个完备 τ-例外序列。然而，两个至多相差一项的完备 τ-例外序列根据 [BM23，定理 2.1(a)], 相等；另见 [HT24，定理 8]。证明完毕。□

以下结果以类似方式描述右正则 φ-突变。

引理 4.11. 设 $\mathcal{E} = (E_t, \ldots, E_1)$ 是一个完备例外序列，且可以在位置 *2* 进行右 ψ-突变。假设(E_2, E_1) 是 $\mathscr{A}_t$ 的 模范畴 中的右正则 τ-例外对。那么 $f_{E_1}^{-1}(E_2)$ 在 ${}^{\perp}\tau E_1$ 中是投射的，且 $\varphi_2^{-1}(\mathcal{E}) = \psi_2^{-1}(\mathcal{E})$。

证明. 由于 (E_2, E_1) 是右正则的，定义 4.5 表明，要么 $E_1 \notin \mathrm{Gen}(f_{E_1}^{-1}(E_2))$ 成立，要么$f_{E_1}^{-1}(E_2) \in \mathrm{P}({}^{\perp}\tau E_1)$ 成立。显然，$E_2 \in \mathrm{Gen}(f_{E_1}^{-1}(E_2))$ 成立。根据假设，(E_2, E_1) 可以进行右ψ-突变，因此存在一个满射态射 $E_2 \to E_1$，从而 $E_1 \in \mathrm{Gen}\, E_2$ 成立。综上，$E_1 \in \mathrm{Gen}(f_{E_1}^{-1}(E_2))$，第一部分得证。

$f_{E_1}^{-1}(E_2)$ 在 ${}^{\perp}\tau E_1$ 中是投射的这一事实意味着 E_2 在 $J(E_1)$ 中是投射的，参见 [BHM24, 引理 2.17]。在这种情况下，由引理 4.7 可得

$$\psi_2^{-1}(\mathcal{E}) = (E_t, \ldots, E_3, E_1, ?) \quad \text{and} \quad \varphi_2^{-1}(\mathcal{E}) = (E_t, \ldots, E_3, E_1, !).$$

根据 [HP19a, 引理 4.7, 推论 4.8], , 序列 $\psi_2^{-1}(\mathcal{E})$ 是一个完备例外序列，因此根据定理 3.6，它也是一个完备 τ-例外序列。类似地，根据定理 4.9，$\varphi_2^{-1}(\mathcal{E})$ 是一个完备 τ-例外序列。然而，至多相差一项的两个完备 τ-例外序列相等，见 [BM23, 定理 2.1(a)],, 另见 [HT24, 定理 8]。证明完毕。□

已知当最右侧的例外对是一个正则 τ-例外对时，φ-突变与 ψ-突变一致，接下来只需考虑非正则情形。以下命题汇集了必要的结果，以证明非正则例外对也有类似结论。

命题 4.12. 设 $\mathcal{E} = (E_t, \ldots, E_1)$ 是 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中的完备例外序列，可以在位置 2 进行左ψ-突变。回顾记号 $\psi(E_2, E_1) = (\mathcal{L}_{E_2} E_1, E_2)$。设 $T = T_t \oplus \cdots \oplus T_1$ 是与 $\mathcal{E}$ 通过定理 *3.6* 建立双射的 *TF*-有序倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。以下结论成立：

(1) $T_2 \oplus E_1$ 和 $T_2 \oplus E_2$ 是部分倾斜模；*(2)* 存在一个同构 $f_{E_2}^{-1}(\mathcal{L}_{E_2} E_1) \simeq T_2$；
(3) $(\mathcal{L}_{E_2} E_1, E_2)$ 是 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中可进行右 ψ-突变的例外对；*(4)* $J(T_2 \oplus E_1) = J(T_2 \oplus E_2)$。

此外，假设 (E_2, E_1) 是 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}_t$ 中的左不规则 τ-例外对，则
(5) T_2 不是投射的；*(6)* $(\mathcal{L}_{E_2} E_1, E_2)$ 是一个右非正则的 τ-例外对。

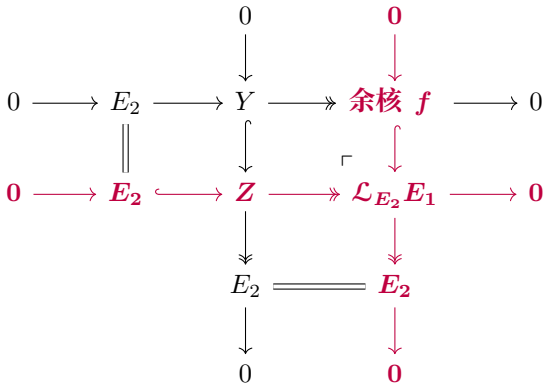
证明。 (1) 由定理 3.6 所蕴含的等式 $E_1 = T_1$，可立即得出 $E_1 \oplus T_2$ 是部分倾斜的。根据定义，E_2 关于 E_1 的泛余扩张 U 由以下短正合列确定

$$0 \to E_1 \to U \to \mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) \otimes_K E_2 \to 0.$$

注意，由于根据引理 4.2(1)，$\dim \mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) = 1$，模 T_2同构于 U。于是，结果 [HP14, 引理 3.2(a)] 表明，对于 $j \geq 1$，$\mathrm{Ext}^1(E_2, T_2) = 0 = \mathrm{Ext}^j(T_2, E_2)$。

由于 E_2 是例外的，而 T_2 是部分倾斜的，因此 $\operatorname{Ext}^1(E_2, E_2) = 0 = \operatorname{Ext}^1(T_2, T_2)$ 也成立。总之，$\operatorname{Ext}^1(E_2 \oplus T_2, E_2 \oplus E_2) = 0$。由引理 4.2(4)，不等式 $\operatorname{pdim}(E_2) \leq 1$ 成立，因此 $E_2 \oplus T_2$ 是所需的部分倾斜模。

(2) 根据假设 $\psi_2(\mathcal{E}) = (E_t, \dots, E_3, \mathcal{L}_{E_2}E_1, E_2)$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$中的完备例外序列。由定理 3.6 可知，它也是完备 τ-例外序列，因此表达式 $f_{E_2}^{-1}(\mathcal{L}_{E_2}E_1)$ 定义良好，见注记 2.8。令 $f : E_2 \to E_1$ 为一个非零单射态射；根据假设，此态射存在，见定义 4.4。考虑式 (4.c) 中的短正合列，以及 $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{L}_{E_2}E_1, E_1)$ 中的一个非分裂短正合列。根据引理 4.2(1)，该非分裂短正合列存在，且在同构意义下唯一。这些短正合列在下面的交换图中以 **紫色** 标出。



此图通过如下所示的 **紫色** 子图中的拉回构造而成。该拉回保证了图中各行的正合性与交换性 [Mit65, 命题 I.13。1]。由于余核 $f \hookrightarrow \mathcal{L}_{E_2}E_1$ 是单同态，根据 $Y \to Z$， [Mit65, 命题 I.7。1]。由于模范畴 $\mathscr{A}_t$ 是阿贝尔范畴，态射 $Z \twoheadrightarrow \mathcal{L}_{E_2}E_1$为满同态意味着 $Y \to$ 余核 f 是满同态 [Mit65, 命题 I.20。2]。此外，根据 [Mit65, 第 39 页，例 I。17]，拉回方块也是推出方块。因此，根据 [Mit65, 命题 I.7。1]的对偶，列的正合性与交换性也成立。

由引理 4.2(5)，$\dim \operatorname{Ext}^1(\operatorname{coker} f, E_2) = 1$，由此可得 $Y \simeq E_1$。由引理 4.2(1)，$\dim \operatorname{Ext}^1(E_2, E_1) = 1$，由此可得 $Z \simeq T_2$。由 (1) 和引理 2.7，模 $T_2 \oplus E_2$ 是 τ-刚性的，这显然使其成为模范畴 $\operatorname{mod} \mathscr{A}_t$ 中的 TF- 有序 τ- 刚性模。由于它在双射 Φ 下映到 $(\mathcal{L}_{E_2}E_1, E_2)$，由定理 2.11 可得所需的同构 $f_{E_2}^{-1}(\mathcal{L}_{E_2}E_1) \simeq T_2$。

(3) 由引理 4.3，存在一个非零满射 $\mathcal{L}_{E_2}E_1 \to E_2$。因此，根据引理 4.2(3)，从 $\mathcal{L}_{E_2}E_1$ 到 E_2 的所有非零态射都是满射。

(4) 由 (1) 可知，模 $T_2 \oplus E_1$ 和 $T_2 \oplus E_2$ 均为部分倾斜，特别是投射维数至多为 1。于是，由 [ARS95, Cor. IV.4.7] 可得

$$J(T_2 \oplus E_i) = \{X \in \operatorname{mod} \mathscr{A}_t : \operatorname{Hom}(T_2 \oplus E_i, X) = 0 = \operatorname{Ext}^1(T_2 \oplus E_i, X)\}$$

对于 $i = 1$，2。对短正合列应用 $\operatorname{Hom}(-, X)$ 得到的长正合列即可推出该结果

$$0 \to E_1 \to T_2 \to E_2 \to 0$$

由定理 3.6 导出。

(5) 由 [BHM24, Prop. 3.13(a)] 可立即得到，因为 $f_{E_1}^{-1}(E_2) = T_2$。

(6) 由 (3) 可知，$(\mathcal{L}_{E_2}E_1, E_2)$ 是模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的例外对，可以进行右 ψ-突变。完备例外序列 $\psi_2(\mathcal{E})$ 根据定理 3.6 也是一个完备 τ- 例外序列。这意味着 $(\mathcal{L}_{E_2}E_1, E_2)$ 是一个 τ- 例外对。

反设（$\mathcal{L}_{E_2}E_1$， E_2）是一个右正则的 τ-例外对。在这种情况下，由引理 4.11 可得

$$\varphi_2^{-1}(\psi_2(\mathcal{E})) = \psi_2^{-1}(\psi_2(\mathcal{E})) = \mathcal{E}.$$

由于（$\mathcal{L}_{E_2}E_1$， E_2）是右正则的， [BHM24，定义-命题 4.5] 推出 $\varphi_2^{-1}(\psi_2(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$ 在位置 2 是左正则的，也就是说，（E_2， E_1）是一个左正则的 τ-例外对。这就产生了矛盾。□

现在可以证明归纳证明的基例，即突变相同 e.

命题 4.13。 设 $\mathcal{E} = (E_t, \dots, E_1)$ 是 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的一个完备例外序列。若 $\mathcal{E}$ 可以在位置 2 进行左ψ-突变，则 $\psi_2(\mathcal{E}) = \varphi_2(\mathcal{E})$。

证明。 由定理 3.6 可知， $\mathcal{E}$ 也是一个完备的 τ-例外序列，因此这是良定义的。如果(E_2, E_1)是左正则的 τ-例外对，则结论由引理 4.10 得出。

若(E_2, E_1)是左不规则的 τ-例外对，考虑 $\psi(E_2, E_1) = (\mathcal{L}_{E_2}E_1, E_2)$。由命题 4.12(6)，这是一个右非正则的 τ-例外对。结合 [BHM24，命题 3.14(e)] 与命题 4.12(2)，可得

$$\tau(T_2 \oplus E_2) = \tau \mathrm{P}_{\mathrm{ns}}(\mathrm{T}(J(T_2 \oplus E_2))).$$

根据命题 4.12(5)，注意到 T_2 和 E_2 在模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$ 中不是投射对象。利用命题 4.12(4)并应用 τ^{-1}，得到

$$T_2 \oplus E_2 = \mathrm{P}_{\mathrm{ns}}(\mathrm{T}(J(T_2 \oplus E_1))).$$

由于 $E_2 \in$属于生成子范畴 Gen T_2，显然 $T_2 = \mathrm{P}_{\mathrm{ns}}$(Gen P_{ns}(T($J(T_2 \oplus E_1)$))，因此，根据左不规则 φ-突变的定义，$\varphi(E_2, E_1) = (f_{E_2}(T_2)\ E_2)$。由命题 4.12(2)可得 $f_{E_2}(T_2) \simeq \mathcal{L}_{E_2}E_2$，于是

$$\varphi_2(\mathcal{E}) = (E_t, \ldots, E_3, \mathcal{L}_{E_2}E_1, E_2) = \psi_2(\mathcal{E}) \tag{4.f}$$

成立。 □

这表明，在完备例外序列最右端的位置进行 ψ-突变与 φ-突变是相同的。为证明在其他位置进行突变时也有相同结论，下面的约化引理很有用。

引理 4.14. 设 $\mathcal{E} = (E_t, \ldots, E_1)$ 是模范畴 $\operatorname{mod}\mathscr{A}_t$中的一个完备例外序列。那么，对于所有 $, E_1)$ $i \in \{1, \ldots, t-1\}$，$J(E_i, \ldots$ 等价于 模范畴 $\mathscr{A}_{t-i}$。

证明。 由于 $J(E_i, \ldots, E_1)$ 的递归定义，只需证明 $i = 1$ 的情形，参见 [BM21a, 定理 1.4] 和 [BH23, 定理 6.4],。此外，注意到 $(E_t, \ldots, E_2)$ 是 $J(E_1)$ 中的完备例外序列，因为该子范畴是满的且扩张封闭。事实上，若 $J(E_i, \ldots, E_1) \simeq$模范畴 $\mathscr{A}_{t-i}$ 且 $i = 1$ 的情形成立，则由归纳法可得证明

$$J(E_{i+1}, E_i, \ldots, E_1) = J^{J(E_i, \ldots, E_1)}(E_{i+1}) \simeq J^{\operatorname{mod}\mathscr{A}_{t-i}}(E_{i+1}) = \operatorname{mod}\mathscr{A}_{t-i-1}$$

如所需。设 T 为倾斜 $\mathscr{A}_t$-模，使得 $\Phi(T) = \mathcal{E}$，这是由定理 3.6 得出的，并且满足 $E_1 = T_1$。考虑 $\mathscr{A}_t$-模 $T' = \mathrm{P}(^{\perp}\tau T_1)$，它是倾斜模，因为根据 [LZ15, 定理 A]，T_1 是部分倾斜的。显然，$e_1(T') = e_1T$，从而 $(T')_1 = T_1$ 属于 T' 的拟遗传分解。

根据定理2.3，T'的自同态代数满足 End(T') $\simeq \mathscr{A}_t$；根据引理 3.1(1)，模 T_1到 T' 的任意其他直和项都有一个单同态。这意味着 Hom(T', T_1) 是 End(T')-模的不可分解投射模，且它是每个其他不可分解投射模的子模。换言之，Hom(T', T_1) 同构于第 2 节开头给出的 $\mathscr{A}_t$ 的表示中顶点 1 处的投射模。从这个表示可以看出 $\mathscr{A}_t/\langle e_1\rangle \simeq \mathscr{A}_{t-1}$。因此

$$J(E_1) \simeq \operatorname{mod}(\operatorname{End}(T')/[\operatorname{Hom}(T', T_1)]) \simeq \operatorname{mod}\mathscr{A}_t/\langle e_1\rangle \simeq \operatorname{mod}\mathscr{A}_{t-1},$$

其中第一个同构由 Jas15，定理 3.8] 得出。这就完成了证明。 □

前面的引理为以下证明中的归纳步骤提供了依据。

定理 4.15。 设 $\mathcal{E} = (E_t, \ldots, E_1)$ 是 模范畴 $\mathscr{A}_t$ 中的一个例外序列，并设 $i \in \{2, \ldots, t\}$。若 $\mathcal{E}$ 可以在位置 i 进行左 ψ-突变，则 $\psi_i(\mathcal{E}) = \varphi_i(\mathcal{E})$。

证明。 根据定理 3.6，$\mathcal{E}$ 也是一个完备的 τ-例外序列，因此这一定义良好。若 $i = 2$，则结论即为命题 4.13。若 $i \in \{3, \ldots, t\}$，则根据引理 4.14，$J(E_{i-2}$，……，$E_1) \simeq$模范畴 $\mathscr{A}_{t-i+2}$。由此可得

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\mathcal{E}) &= (E_t, \ldots, E_{i+1}, \varphi^{J(E_{i-2}, \ldots, E_1)}(E_i, E_{i-1}), E_{i-2}, \ldots, E_1) \\
&= (E_t, \ldots, E_{i+1}, \psi^{J(E_{i-2}, \ldots, E_1)}(E_i, E_{i-1}), E_{i-2}, \ldots, E_1) \\
&= (E_t, \ldots, E_{i+1}, \psi(E_i, E_{i-1}), E_{i-2}, \ldots, E_1) \\
&= \psi_i(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个等式根据定义成立；第二个等式是子范畴 $J(E_{i-2}$、……、$E_1) \simeq$模 $\mathscr{A}_{t-i+2}$ 中的命题 4.13。第三个等式由以下事实得出：$J(E_{i-2}$、……、$E_1)$ 是模 $\mathscr{A}_t$ 的一个宽子范畴，这由 [BST19, Cor. 3.25]，得知；也就是说，它对核、余核和扩张封闭。因此，式 (4.c) 的短正合列属于这个子范畴。证明至此完成。□

4.2. 与（τ-）倾斜模突变的关系。本文的最终结果揭示了倾斜 $\mathscr{A}_t$-模的突变与模 $\mathscr{A}_t$中的（τ-）例外序列突变之间的密切关系。首先，有必要证明以下结果，这也再次为证明的归纳步骤作准备。

引理 4.16. 设 T是一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。则 $T_t/T_1 \oplus \cdots \oplus T_2/T_1$ 是$J(T_1)$中的一个基本倾斜对象。

证明。 首先，$\dim \mathrm{Hom}(T_1, P(1)) = 1 = \dim \mathrm{Hom}(P(1)\ P(i))$ 蕴含 $\dim \mathrm{Hom}(T_1, P(i)) = 1$；又由于 $\mathrm{Hom}(P(1)\ P(i))$ 和 $\mathrm{Hom}(T_1, P(1))$ 中的任意非零态射都是单同态，因此对于所有 $i \in \{1, \ldots, t\}$，从 T_1 到 $P(i)$ 的任意非零态射都是单同态。

由与引理 3.2 完全类似的证明可知，对于每个直和项 $T_i \in \mathrm{add}\ T$，包含映射 $\alpha_i \colon T_1 \to T_i$ 是一个最小右生成子范畴 $\mathrm{Gen}(T_1)$-逼近。因此，对于所有 $i = \{2, \ldots, t\}$，$f_{T_1}(T_i) \simeq T_i/T_1$。

由 [DR92, 引理 7.1],可知，由（拟遗传代数） $\mathscr{A}_t$ 的标准模滤过的模构成的类对子模封闭，且包含所有投射 $\mathscr{A}_t$-模。由 [BHRR99, 引理1], 可知，这类模等价于投射维数至多为 1 的 $\mathscr{A}_t$-模类。特别地，投射 $\mathscr{A}_t$-模的每个子模的投射维数都至多为 1。

由包含链 $T_1 \subset T_i \subset T_t = P(t)$ 可知，对于所有 $i \in \{2, \ldots, t\}$，$f_{T_1}(T_i) = T_i/T_1$ 是 $f_{T_1}(T_t) = T_t/T_1$ 的子模。由 [BM21b, 命题 4.5], 可知，模 T_i/T_1 和 T_t/T_1 在 $J(T_1)$ 中是 τ-刚性的。此外，由于 $T_t = P(t)$ 是投射的，它在 ${}^{\perp}\tau T_1$ 中也是投射的，因此根据 [Jas15, 命题 3.14], ，T_t/T_1 在 $J(T_1)$ 中是投射的；另见 [BM21b, 引理 4.9]。由上可知，T_i/T_1 因此是 $J(T_1)$ 中某个投射对象的子对象。由于根据引理 4.14，$J(T_1) \simeq$ 模范畴 $\mathscr{A}_{t-1}$，因此对于所有 $i \in \{2, \ldots, t\}$，T_i/T_1 在 $J(T_1)$ 中的投射维数至多为 1。因此，它是 $J(T_1)$ 中的部分倾斜模，结论得证。□

前面的引理使得本文最后一个结果的证明成为可能，该结果确立了不同类型突变之间的相容性。

命题 4.17. 设 T 是一个基本倾斜 $\mathscr{A}_t$-模，且设 $i \in \{2, \ldots, t\}$。假设完备例外序列 $\Phi(T)$ 在位置 i 处可作左 ψ-突变。那么存在一个倾斜 $\mathscr{A}_t$-模 $T' \in$生成子范畴 T，它与 T 仅在直和项 T_{i-1} 上不同，并且满足

$$\Phi(T') = \psi_i(\Phi(T)) = \varphi_i(\Phi(T)).$$

反过来，假设存在一个倾斜 $\mathscr{A}_t$-模 T'，它与 T 仅在直和项 T_{i-1} 上不同，并且满足 $T' \in$生成子范畴 T。那么 $\Phi(T)$ 在位置 i 处可作左 ψ-突变。

证明。 假设 $\Phi(T)$ 在位置 i 处可作左 ψ-突变。先考虑情形 $i = 2$。反设 $T_1 \in \mathrm{Gen}(T/T_1)$。那么引理 3.1(2) 蕴含存在一个满同态 $f \colon T_2 \twoheadrightarrow T_1$。回忆由定理2.3诱导的范畴等价 $\mathrm{add}(T) \simeq \mathrm{add}(\mathscr{A}_t)$，由此可得

$$\dim \mathrm{Hom}(T_2, T_1) = \dim \mathrm{Hom}(P(2), P(1)) = 1, \tag{4.g}$$

用 ℓ表示态射的复合

$$T_2 \xrightarrow{\ell_1} f_{T_1}(T_2) \xhookrightarrow{\ell_2} T_1\ ,$$

其中存在一个非零的 ℓ_2，因为 $\Phi(T)$在位置 2 是左 ψ-可变的；并且存在一个非零的 ℓ_1，因为根据引理 3.1(1)，T_1 是 T_2 的真子模。由式 (4.g)，存在某个非零的 $\lambda \in K$ 使得 $f = \lambda\ell$。然而，由于 f 是满同态，态射 ℓ_2 也必定是满同态，这就产生了矛盾。因此，$T_1 \notin$属于生成子范畴 $\mathrm{Gen}(T/T_1)$，于是由 [AIR14，命题 2.22]可得 ${}^{\perp}\tau(T/T_1) \subseteq {}^{\perp}\tau T_1$。

考虑一个短正合列

$$0 \to T_1 \xrightarrow{g} T_2 \to T_2/T_1 \to 0$$

其中，根据 [IZ20，引理 4.3(2)]，g是 T_1的一个最小左 $\mathrm{add}(T/T_1)$-逼近。由于 ${}^{\perp}\tau(T/T_1) \subseteq {}^{\perp}\tau T_1$，可以应用 [AIR14，定理 2.30]，从而得到模

$$T' \coloneqq T_t \oplus \cdots \oplus T_2 \oplus T_2/T_1$$

是一个基本的 τ-倾斜 $\mathscr{A}_t$-模，称为在 T_1 处对 T 作左（AIR-）突变。显然 $T' \in$ 生成子范畴 T。由引理 4.2(4) 可知，$\mathrm{pdim}(T_2/T_1) \leq 1$，因此 $\mathrm{pdim}\ T' \leq 1$，从而由引理 2.7 可得 T' 是一个倾斜 $\mathscr{A}_t$-模。此外，由引理 3.2 可得

$$\Phi(T') = (T_t/T_{t-1}, \ldots T_3/T_2, f_{T_2/T_1}(T_2), T_2/T_1).$$

根据定理定理 3.6，这是一个（τ-）例外序列，与（τ-）例外序列不同

$$\psi_2(\Phi(T)) = (T_t/T_{t-1}, \dots, T_3/T_2, \mathcal{L}_{T_2/T_1}T_1, T_2/T_1)$$

至多在一个位置不同。根据 [BM23，定理 2.1(a)], 另见 [HT24，定理 8], ，它们因此相同。总之

$$\Phi(T') = \psi_2(\Phi(T)) = \varphi_2(\Phi(T)).$$

$i \in \{3, \dots, t\}$ 的一般情形完全类似地在子范畴 $J(T_{i-2} \oplus \cdots \oplus T_1)$ 中成立；根据引理 4.14，该子范畴与 mod $\mathscr{A}_{t-i+2}$ 同构。对 $T/(T_{i-2}\oplus\cdots\oplus T_1)$ 的每个直和项应用 $f_{T_{i-2}}$，并反复调用引理 4.16，可得该子范畴中的一个倾斜对象；关于这一过程的结合性，参见 [BM21a，推论 1.7] 。由此得到 $i = 2$ 情形的设定。在这种情形下，假设$T_{i-1} \in \mathrm{Gen}(T/T_{i-1})$ 意味着存在一个满同态 $\epsilon\colon T_{i-2} \oplus T_i \to T_{i-1}$，由引理 3.1 可知。注意，$f_{T_{i-2}}$ 是一个函子，因此给出一个满同态 $f_{T_{i-2}}(\epsilon)\colon f_{T_{i-2}}T_i \to f_{T_{i-2}}T_{i-1}$。由此，证明在子范畴 $J(T_{i-2} \oplus \cdots \oplus T_1)$ 中完全可以照前述方式进行。

反过来，假设存在一个倾斜 $\mathscr{A}_t$-模 $T' \in \mathrm{Gen}\ T$，它与 T 仅在直和项 T_{i-1} 上不同。先考虑 $i = 2$ 的情形。假设 $\Phi(T)$ 无法在位置 2 进行 ψ-突变。由引理 4.2(1) 和 (3) 可知，存在一个非零满射 $T_2/T_1 \to T_1$。这意味着 $T_1 \in \mathrm{Gen}\ T_2 \subseteq \mathrm{Gen}(T/T_1)$。然而，由于 $T' \in \mathrm{Gen}\ T$ 也蕴含 $\mathrm{Gen}\ T' \subseteq T$，于是得到以下包含链

$$\mathrm{Gen}\, T' \subseteq \mathrm{Gen}\, T \subseteq \mathrm{Gen}(T/T_1) \subseteq \mathrm{Gen}(T').$$

因此，$\mathrm{Gen}\ T' = \mathrm{Gen}\ T$，由 AIR14，定理 2.7] 可推出 $T = T'$，因为 T 和 T' 都是 (τ-)倾斜模。矛盾。对于一般情形，迭代应用引理 4.16，便可在子范畴 $J(T_{i-2} \oplus \cdots \oplus T_1)$ 中使用同样的论证。由引理 4.14，该子范畴与 mod $\mathscr{A}_{t-i+2}$ 同构。证明完毕。□

5. Example

本节以 $t = 3$ 为例，阐述本文的主要定理。回顾第 2 节，代数 $\mathscr{A}_3$ 同构于

$$K\left(\ 1 \underset{b_1}{\overset{a_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{b_2}{\overset{a_2}{\rightleftarrows}} 3\ \right)/\langle a_1b_1, a_2b_2 - b_1a_1\rangle.$$

图 3 和图 4 中，不可分解 $\mathscr{A}_3$-模通过其合成列表示。首先，考虑图 3 中以 $\mathscr{A}_3$-倾斜模为醒目标出的**紫色**部分。由引理 2.7，这些模也是τ-倾斜模，并且嵌入到 τ-倾斜对的交换箭图中，如图 3 所示。在图 3 中，当满足 $\mathrm{Gen}\ T' \subset \mathrm{Gen}\ T$时，从一个 τ-倾斜对 $T \oplus P$到另一个 τ-倾斜模对 $T' \oplus P'$绘制一条箭头。

此外，定理 3.6 表明，可以从每个基本倾斜 $\mathscr{A}_3$-模通过定理 2.11 的双射 Φ 构造出模范畴 mod $\mathscr{A}_3$ 中的一个完备例外序列。此外，模范畴 mod $\mathscr{A}_3$ 中的每个完备例外序列都以这种方式得到；根据 Φ的定义，这些完备例外序列全都是 τ-例外序列。定理 4.15 表明，模范畴 mod $\mathscr{A}_t$ 中完备例外序列的（ψ-）变异是（φ-）例外序列变异的特殊情形。如图 4 所示，例外序列以**紫色**标出，箭头表示（τ-）例外序列之间的左变异。

比较这两幅图可以看出，与倾斜模和例外序列分别对应的子集形状相同。这说明了命题 4.17 所确立的行为。

References

[AIR14] T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten，《τ-倾斜理论》。《 *Compos. Math.*》，第 150 卷，第 3 期，第 415–452 页，2014 年。[ARS95] M. Auslander、I. Reiten 和 S. O. Smalø，《 *Representation theory of Artin algebras*》，剑桥高等数学研究丛书，第 36 卷。剑桥：剑桥大学出版社，1995 年。[Aus74] M. Auslander，《Artin 代数表示论。II》。《 *Commun. Algebra*》，第 1 卷，第 269–310 页，1974 年。[Bei79] A. A. Beilinson，《 $\mathbb{P}^n$ 上的相干层与线性代数问题》。《 *Funct. Anal. Appl.*》，第 12 卷，第 214–216 页，1979 年。[BH23] A. B. Buan 和 E. J. Hanson，《 τ 252, 959 984, -正交宽子范畴》。《 *Nagoya Math. J.*》，第 卷，第 – 页。2023 [BHM24] A. B. Buan、E. J. Hanson 和 B. R. Marsh，《 τ-例外对与序列的突变》，2024 年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/ 2402 10301 。BHM A. B. Buan、E. J. Hanson 和 B. R. Marsh，《 τ-倾斜有限情形下 τ-例外序列突变的传递性》。《 2025 [ ] 2506 21372 》。在线。网址：https://arxiv.org/abs/ 。[25] BHRR T. Brustle、L. Hille、C. M. Ringel 和 G. Rohrle，《 $k[t]/\langle t^n\rangle$的 Auslander 代数中无自扩张的 -滤过模》。《 *Algebr. Represent. Theory*》，第 2 卷，第 3 期，第 295–312 页，1999 年。[99] ¨ ¨ ∆

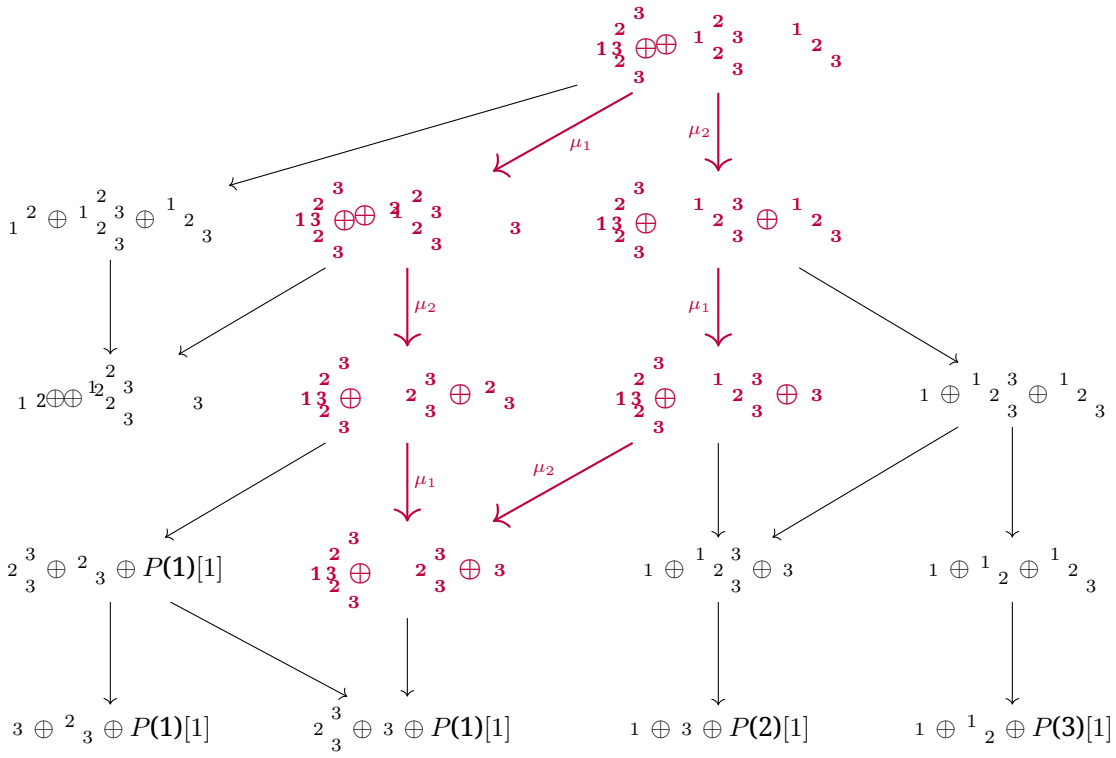


FIGURE 3. 倾斜模的嵌入 $\mathscr{A}_3$-模（紫色）进入 τ-倾斜对在模范畴 $\mathscr{A}_3$ 的交换箭图的一部分。倾斜模以其拟遗传分解的形式书写。

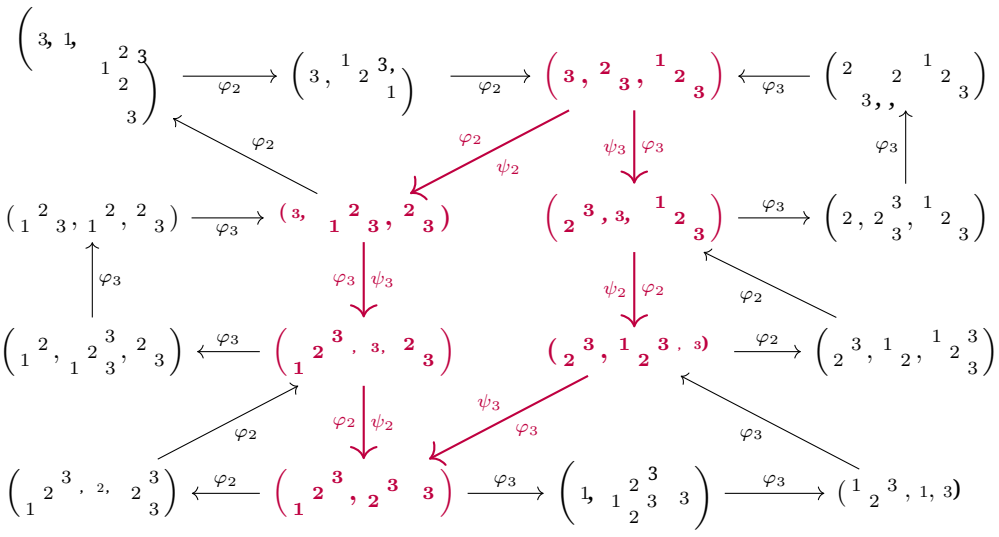


FIGURE 4. 模范畴中完备 τ例外序列的一个子集 $\mathscr{A}_3$，其中箭头对应左 φ突变。完备例外序列的集合及其在模范畴中的对应 ψ突变 $\mathscr{A}_3$ 构成一个子集，在**紫色**中突出显示。

[BKT25] A. B. Buan、M. Kaipel 和 H. U. Terland，《突变有序 τ-刚性模，并将其应用于中山代数》，2025 [ ] 2501 13694。在线版。可查阅：https://arxiv.org/abs/。[21]
BM a A. B. Buan 和 B. R. Marsh，《宽子范畴的一个范畴》，*Int. Math. Res. Not.*，第 2021 卷，第 13 期，第 10 278–10 338 页，2021 年。[BM21b] A. B. Buan 和 B. R. Marsh，《τ-例外序列》，*J. Algebra*，第 585 卷，第 36–68 页，2021 年。[BM23] A. B. Buan 和 B. R. Marsh，《突变带符号的 τ-例外序列》，*Glasg. Math. J.*，第 65 卷，第 3 期，第 716–729 页，2023 年。

[Bon90] A. I. Bondal, 《结合代数与相干层的表示》, *Math. USSR, Izv.*, 第 34 卷, 第 1 期, 第 23–42 页, 1990 年。[BST19] T. Br ¨ *Adv.* ustle、*Math.* 354, 31, 2019, 106746 D. Smith 和 H. Treffinger, 《有限维代数的墙与室结构》, , 第 p. id/No 卷。[CB93] W. Crawley-Boevey, 《箭图表示的例外序列》, 载于 *Representations of algebras.*, *(Ottawa, ON, 1992)* 14 1993, 117 124 CMS Conf. Proc. 丛书, 第 卷。美国数学会, 美国罗得岛州普罗维登斯, 第 – 页。[CHS25] W. Chang、F. Haiden 和 S. Schroll, 《分歧覆盖上的辫群作用与满例外序列》, *Adv. Math.*, 第 472 卷, 第 24 页, 2025 年, id/No 110284。[Dic66] S. E. Dickson, 《阿贝尔范畴的一种挠理论》, *Trans. Am. Math. Soc.*, 第 121 卷, 第 223–235 页, 1966 年。[DR92] V. Dlab 和 C. M. Ringel, 《拟遗传代数的模论方法》, 载于 *Representations of algebras and related topics. Proceedings of the Tsukuba international conference held in Kyoto Japan 1990*, , , 。剑桥: 剑桥大学出版社, 1992 年, 第 200–224 页。[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky, 《丛代数 I: 基础》, *J. Am. Math. Soc.*, 第 15 卷, 529, 2002 年 2, 497第。页 – 。[Geu22] J. Geuenich, 《 $k[x]/(x^n)$ 的 Auslander 代数的倾斜模》, *Commun. Algebra*, 第 50 卷, 第 1 期, 第 82–95 页, 2022 年。[Gor88] A. L. Gorodentsev, 《移动反典范类曲面上的例外丛》, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 第 卷, 第 *Ser. Mat.* 52, 4, 740 757, 895, 1988 期, 第 – 页。[Gor90] A. L. Gorodentsev, 《导出范畴中的例外对象与变异》, 《螺旋与向量丛》, Rudakov 研讨会论文集, 伦敦数学会讲义丛书 148, 57–73, 1990 年。[GR87] A. L. Gorodentsev 和 A. N. Rudakov, 《射影空间上的例外向量丛》, *Duke Math. J.*, 第 54 卷, 第 1 期, 第 115–130 页, 1987 年。[HP14] L. Hille 和 M. Perling, 《有理曲面上的倾斜丛与拟遗传代数》, *Ann. Inst. Fourier*, 第 64 卷, 第 2 期, 第 625–644 页, 2014 年。[HP19a] L. Hille 和 D. Ploog, 《 $k[x]/(x^t)$ 的 Auslander 代数的例外序列与球形模》, *Pac. J. Math.*, 第 302 卷, 第 2 期, 第 599–625 页, 2019 年。[HP19b] L. Hille 和 D. Ploog, 《有理曲面上负曲线的倾斜链》, *Nagoya Math. J.*, 第 235 卷, 第 26–41 页, 2019 年。[HR99] L. Hille 和 G. R ¨ ohrle, 《经典群中在幺幂根基上只有有限个轨道的抛物子群分类》, *Transform. Groups*, 第 4 卷, 第 1 期, 第 35–52 页, 1999 年。[HT24] E. J. Hanson 和 H. Thomas, 《 τ-例外序列的一种唯一性》, *Algebr. Represent. Theory*, 第 27 卷, 第 1 期, 第 461–468 页, 2024 年。[IZ20] O. Iyama 和 X. Zhang, 《 τ $k[x]/\ x^n$ *J. Math. Soc.* -倾斜模的分类: 关于 ( ) 的 Auslander 代数》, , 第 卷, 第 期, 第 – 页。[Jas15] G. Jasso, 《 τ-倾斜模与挠对的约化》, *Int. Math. Res. Not.*, 第 2015 卷, 第 16 期, 第 7190–7237 页, 2015 年。[Kap88] M. M. Kapranov, 《关于某些齐性空间上相干层的导出范畴》, *Invent. Math.*, 第 92 卷, 第 3 期, 第 479–508 页, 1988 年。[Kaw06] Y. Kawamata, 《托里克簇的导出范畴》, *Mich. Math. J.*, 第 54 卷, 第 3 期, 第 517–535 页, 2006 年。[Kra17] H. Krause, 《最高权范畴与拼接》, *Ann. Inst. Fourier*, 第 67 卷, 第 6 期, 第 2679–2701 页, 2017 年。[KT25] M. Kaipel 和 H. U. Terland, 《具有辫群作用于 τ-例外序列上的中山代数的分类》, 2025 [ ] 2507 07608 。在线。网址: https://arxiv.org/abs/。[15] LZ S. Li 和 S. Zhang, 《-倾斜理论的一些应用》, 2015 年。 [Online]。网址: https: // arxiv.org/abs/ 1512 03613 。Mac E. Macr1, 《曲线上的稳定性条件》, *Math. Res. Lett.*, 第 14 卷, 第 4 期, 第 657–672 页, 2007 年。[Mit65] B. Mitchell, 《 *Theory of categories*》, Pure Appl. Math. 丛书, 学术出版社。纽约和伦敦: 学术出版社, 1965 年, 第 17 卷。[MT20] O. Mendoza 和 H. Treffinger, 《通过 τ 25, 701 720, -倾斜理论研究分层系统》, *Doc. Math.*, 第 卷, 第 – 页。[Non25a] I. Nonis, 《局部代数上无圈箭图的 τ-例外序列的变异》, 2025 年。 [Online]。网址: https://arxiv.org/abs/ 2505 22770 。Non b I. Nonis, 《局部代数上箭图表示的-例外序列》, 2025 年。 [Online]。网址: https://arxiv.org/abs/ [25] τ 2502 15417 。PN N. Prabhu-Naik, 《托里克 Fano 四维簇上的倾斜丛》, *J. Algebra*, 第 471 卷, 第 348–398 页, 2017 年。[Rud90] A. N. Rudakov, 编, 《 *Helices and vector bundles: seminaire Rudakov. Transl. by A. D. King P. Kobak and A.* 》, , 伦敦 *Maciocia* 数学会讲义丛书。剑桥大学出版社, 剑桥。伦敦数学会, 伦敦, 1990 年, 第 148 卷。[RZ14] C. M. Ringel 和 P. Zhang, 《从子模范畴到预投射代数》, *Math. Z.*, 第 278 卷, 第 1-2 期, 第 55–73 页, 2014 年。[Sau19] J. Sauter, 《关于截断多项式环的 Auslander 代数的倾斜复形》, 2019 年。 [Online]。网址: https://arxiv.org/abs/1907.04949 [17]