arXiv:2602.13144v1 [cs.LO] 13 Feb 2026

幂集单子上的唯一分配律就是你所知道的那个

Sergey Goncharov[1][0000−0001−6924−8766]、Dirk Hofmann[2][0000−0002−1082−6135]、Pedro Nora[3][0000−0001−8581−0675]、Lutz Schröder[4][0000−0002−3146−5906]和Paul Wild[4][0000−0001−9796−9675]

[1] 英国伯明翰大学[2] 葡萄牙阿威罗大学 CIDMA[3] 德国杜伊斯堡-埃森大学[4] 德国埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学

摘要。 众所周知，集合函子在幂集单子上的分配律（也称为幂集单子的 Kleisli 定律）与将集合函子扩张为集合与关系范畴上的函子一一对应。我们研究此类分配律的存在性与唯一性问题。我们的主要结果表明，一个可达集合函子存在幂集单子上的分配律，当且仅当它保持弱拉回；在这种情况下，所谓的幂律（它诱导出 Barr 扩张）是唯一的。此外，我们证明幂集函子在幂集单子上恰好有三种分配律，这表明对于非可达函子，唯一性可能不成立。

1 引言

函子与单子之间的分配律在范畴论及其在语义学、代数和余代数中的应用中发挥着核心作用。尤其是，幂集单子上的（自）函子的分配律——也称为幂集单子的 *Kleisli* 律——等价于将函子从集合与函数范畴扩张到幂集单子的 Kleisli范畴，也等价于扩张到集合与关系范畴。这类扩张是关系语义学、余代数模态逻辑 [13], 和自动机理论 [9], 的基础，在这些领域中，非确定性是通过幂集单子建模的。相应地，扩张（或分配律）的存在性已得到广泛研究 [1,10,9]；尤其是，已知保持弱拉回的函子可以典范地扩张到关系，这种扩张称为 Barr 扩张 [1]。另一方面，关于扩张唯一性的问题受到的关注相对较少。

本文的主要贡献是系统研究幂集单子的 Kleisli 律的存在性与唯一性。我们的首个主要结果表明，一大类重要的函子——严格包含可达函子——只有在保持弱拉回时，才存在关于幂集单子的分配律（如上所述，反向蕴含对所有函子都成立

）。此外，在这种情况下，分配律是唯一的，并且与众所周知的 幂律 [9], 一致；该幂律将 Barr 扩张到关系上。这为 Barr 扩张在余代数语义学中的普遍应用提供了清晰的概念性解释。

我们的第二个主要结果表明，在可达情形之外，唯一性可能不成立。具体而言，我们证明，幂集函子本身恰好存在三种不同的、关于幂集单子的分配律（请注意，这与幂集单子 关于自身的分配律形成鲜明对比：后者并不存在 [12]）。这个例子表明，保持弱拉回虽然能够确保幂集单子的 Kleisli 分配律存在，但仅凭这一点不足以保证唯一性；可达性在我们的刻画中起着至关重要的作用。

许多奠基性著作都强调了幂集单子的分配律的重要性，其中包括对分配律及其语义学应用的通用研究。特别是，Jacobs 等人 [10,9] 强调了关系扩张在余代数逻辑、模态语义以及行为等价概念中的作用。我们的结果通过确定这类提升具有唯一性的精确条件，进一步完善并拓展了这条研究路线。

相关工作。 众所周知，函子的 Barr 扩张具有函子性，当且仅当该函子保持弱拉回 [1,20]。我们的结果补充了这一结论的“仅当”方向，尤其表明，只需假设存在某种扩张（而非特指 Barr 扩张），前提是该函子可达（或者事实上满足更弱的条件）。

近期有若干研究在不同情形下证明了分配律的不可能性定理 。Zwart 和 Marsden [21] 利用代数表示研究单子之间的分配律，并得出一般性的不可能性结果。Kupke 和 Seidel [11] 证明了从余单子到单子的分配律不可能性定理，其中包括多项式函子不存在到非空幂集单子的分配律这一结果。此后，这些结果又借助代数方法得到了进一步扩展 [16],。与之相反，我们的方法并不基于代数表示，而是着眼于可达性、保持弱拉回等范畴性质。

与我们的研究背景更为接近的是，Kurz 和 Velebil [14]研究了函子到关系的扩张，并明确将唯一性问题留作开放问题。我们的结果对此问题给出了普遍意义上的否定答案，同时指出了一大类确实具有唯一性的函子。

Bílková 等人 [3] 在局部单调性假设下，证明了从预序与单调映射范畴到相应的分配子范畴的函子扩张具有唯一性。此结果后来被推广到 $\mathcal{V}$-范畴 [4]。研究表明，函子存在扩张当且仅当它保弱拉回；这一结果并不与我们的结果矛盾，因为*op. cit.* 中的整体设定意味着只考虑局部单调扩张。

Schubert 和 Seal [17,18] 使用单子态射构造松弛扩张，将集合单子扩张到集合与关系范畴；这些单子经由完备格与保上确界映射范畴分解，而松弛扩张将函子性要求弱化为只需满足一个包含映射。

2 预备知识

我们假设读者对范畴论有基本了解。全文中，我们在集合与函数范畴 Set 和集合与关系范畴 Rel 中工作。我们关注 Set 上的自函子及其向 Rel 的扩张；除非另有说明，文中提到的函子和扩张均指此意。

可达函子。给定一个正则基数 λ，函子 F 是 λ-可达的 [15]，如果它保持 λ-滤过余极限；等价地，对于每个集合 X，

$$FX = \bigcup \{Fi_A[FA] \mid |A| < \lambda\}, \tag{1}$$

其中 $i_A\colon A \rightarrowtail X$ 是将 A 包含到 X中的包含映射。特别地， ω-可达函子称为有限性的。函子是可达的，如果它是 λ-可达的，其中某个正则基数为 λ。每个函子 F 都有一个典范的 λ-可达子函子 F_λ，其在集合上的作用由（1）右侧给出；我们将 F_ω 称为有限性部分。

例 *2.1*。以下函子都是可达的：
1. 每个多项式函子（$FX = \sum_{i\in I} A_i \times X^{B_i}$ 用于集合 I， A_i， B_i）。 2. 有限幂集函子 $\mathcal{P}_\omega$，以及通过将基数限制为至多 n ($\mathcal{P}_n X = \{A \in \mathcal{P}_\omega X \mid |A| \leq n\}$) 而得到的 $\mathcal{P}_\omega$ 的每个子函子 $\mathcal{P}_n$。 3. 离散分布函子 $\mathcal{D}$，其在集合 X 上定义为 $\mathcal{D}X = \{\mu\colon X \to [0,1] \mid \sum_{x\in X} \mu(x) = 1\}$。 4. 幺半群值函子 $M^{(-)}$，其在集合 X 上定义为

$$M^{(X)} = \{f\colon X \to M \mid f(x) = 0 \text{ for all but finitely many } x\},$$

对于交换幺半群 $M = (M, +, 0)$。实例包括多重集函子 $\mathbb{N}^{(-)}$（自由交换幺半群）和函子 $\mathbb{Z}^{(-)}$（自由阿贝尔群）。

例 *2.2.* 以下函子不可达：

1.（全）幂集函子 $\mathcal{P}$。2. 邻域函子 $\mathcal{N}$，其在集合 X 上的定义为 $\mathcal{N}X = 2^{(2^X)}$，在映射 f 上的定义为 $\mathcal{N}f = 2^{(2^f)}$。也就是说， $\mathcal{N}$是双重反变幂集，我们将 $\mathcal{N}X$ 的元素视为 X的子集系统，称为邻域系统。3. 单调邻域函子 $\mathcal{M}$，它是 $\mathcal{N}$ 的一个子函子，限制为单调的邻域系统，即关于子集包含向上封闭。

4. 滤子函子 $\mathcal{F}$，它是 $\mathcal{M}$ 的一个子函子，限制为滤子型的单调邻域系统，也就是说，对有限交封闭。5. 超滤子函子 $\mathcal{U}$，它是 $\mathcal{F}$ 的一个子函子，限制为超滤子，也就是说，限制为非平凡的滤子（即不包含 $\varnothing$）且极大的滤子。

关系、扩张与 Kleisli 定律。从 X 到 Y 的关系，即子集 $r \subseteq X \times Y$，记作 $r\colon X \nrightarrow Y$，其逆关系记作 $r^{\circ}\colon Y \nrightarrow X$；给定关系 $r\colon X \nrightarrow Y$ 和 $s\colon Y \nrightarrow Z$，它们的复合记作 $s \cdot r\colon X \nrightarrow Z$（明确地说，$s \cdot r = \{(x,z) \mid \exists y.\, (x,y) \in r \wedge (y,z) \in s\}$）。如果 $r\colon X \nrightarrow Y$ 是一个关系且 $A \subseteq X$，那么 A 在 r 下的关系像为 $r[A] = \{y \in Y \mid \exists x.(x,y) \in r\}$。我们通常用 $\leq$ 表示关系之间的子集包含，用 $x\ r\ y$ 表示 $(x,y) \in r$。若函子 $F\colon \mathsf{Rel} \to \mathsf{Rel}$ 使下图交换（其中竖直箭头表示图函子），则称其为函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 的扩张：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Rel} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathsf{Rel} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathsf{Set} & \xrightarrow[F]{} & \mathsf{Set}. \end{array}$$

换句话说，F 的扩张由映射组成

$$(r\colon X \nrightarrow Y) \longmapsto (\tilde{F}r\colon FX \nrightarrow FY)$$

使得对于所有关系 $r\colon X \nrightarrow Y$, $s\colon Y \nrightarrow Z$，以及每个函数 $f\colon X \to Y$，

- $\tilde{F}s \cdot \tilde{F}r = \tilde{F}(s \cdot r)$,
- $\tilde{F}f = Ff$,

其中，函数通过其图像被解释为关系。若 $r \leq r'$ 蕴含 $Fr \leq Fr'$，则扩张 $F\tilde{}$ 是局部单调的。众所周知，函子 F 的扩张与幂集单子 [2,19]上的 Kleisli 分配律一一对应，其中 F。幂集单子（$\mathcal{P}$、η、μ）由幂集函子 $\mathcal{P}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 以及两个自然变换组成：单位 $\eta\colon \mathsf{Id} \to \mathcal{P}$，由 $\eta(x) = \{x\}$给出；乘法 $\mu\colon \mathcal{P}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 则对集合系统取并。我们回顾一下，Rel 范畴与 Kleisli 范畴 $\mathsf{Set}_{\mathsf{P}}$同构；该范畴以所有集合为对象，并以映射 $X \to \mathcal{P}Y$ 作为态射 $X \to Y$。在同构 $\mathsf{Rel} \simeq \mathsf{Set}_{\mathsf{P}}$下，我们将与关系 r 对应的函数记为 $r^{\sharp}\colon X \to \mathcal{P}Y$。函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 关于幂集单子的分配律是一个自然变换 $\sigma\colon F\mathcal{P} \to \mathcal{P}F$，它与单位和乘法相容：

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & F\mathcal{P} \\ & \searrow^{\eta F} & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ & & \mathcal{P}F \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} F\mathcal{P}^2 & & \xrightarrow{\quad F\mu \quad} & & F\mathcal{P} \\ {\scriptstyle \sigma\mathcal{P}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathcal{P}F\mathcal{P} & \xrightarrow[\mathcal{P}\sigma]{} & \mathcal{P}^2F & \xrightarrow[\mu F]{} & \mathcal{P}F. \end{array}$$

˜由 σ 诱导的 F 的扩张 F，用 Kleisli态射来描述最为恰当：它将 Kleisli态射 $f\colon X \to \mathcal{P}Y$ 映射为 Kleisli态射 $\sigma_Y \cdot Ff\colon FX \to \mathcal{P}FY$，即 ˜。反过来， F的扩张 F会如下诱导出一个分配律 σ ： 恒等映射 $\mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ 对应于关系⊇: $\mathcal{P}X \nrightarrow X$; 由此我们得到关系 $F\ni\colon F\mathcal{P}X \nrightarrow FX$，它对应于 Kleisli态射 $\sigma_X\colon F\mathcal{P}X \to \mathcal{P}FX$。

我们的主要目标是证明，可达函子至多有一个扩张，而这个扩张恰好就是广为人知的 Barr 扩张 [1]。一般而言，¯我们如下定义函子 F 的 Barr 扩张 F 。给定一个关系r： $X \nrightarrow Y$以及映射 $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ 的一个分解 $r = g \cdot f^{\circ}$，令 $\bar{F}r = Fg \cdot (Ff)^{\circ}$。可以证明，这个定义是良定的，也就是说，它与 r 的分解无关；并且 r 有一个典范分解 $r = \pi_2 \cdot \pi_1^{\circ}$，该分解由跨图 $X \xleftarrow{\pi_1} R \xrightarrow{\pi_2} Y$ 导出，其中 R 就是作为 Set 中一个对象的关系 r，而 π_1、π_2 是投影函数。正如前文所述，Barr 扩张可能并非真正的扩张。事实上，众所周知，当且仅当函子保持弱拉回时，这种构造所得到的扩张才是局部单调的 [1,20]。

例*2.3*。 例 2.2 中的所有函子**P**都具有单子结构。我们已经讨论过幂集单子 $F \in \{\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}\}$。对于其他每个函子 e^F， $x \mapsto \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ 单位是将每个元素映射到其主超滤子的映射，而相应的乘法定义如下：m^F: $\Phi \mapsto \{A \subseteq X \mid \{U \in FX \mid A \in U\} \in \Phi\}$ 我们通常用粗体字母表示这些单子; 例如，$\mathbf{M} = (\mathcal{M},\ e^{\mathcal{M}},\ m^{\mathcal{M}})$ 是单调邻域单子，其他函子也类似。

弱拉回 一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

如果对于每个竞争方块 $f \cdot p' = g \cdot q'$，都存在唯一的态射 k，使得 $p \cdot k = p'$ 和 $q \cdot k = q'$ 成立，那么它就是一个拉回方块。弱拉回方块的定义方式相同，只是不要求 k 唯一。若一个函子保持弱拉回，则它会将弱拉回方块映射为弱拉回方块；若它保持逆像，则它会将余跨图中包含单射的拉回方块映射为拉回方块。由于保持弱拉回意味着保持单射，因此保持弱拉回比保持逆像更强。

例 *2.4*。 以下函子保持弱拉回。

1. 每个多项式函子。2. 幂集函子 $\mathcal{P}$。
3. 有限幂集函子 $\mathcal{P}_{\omega}$。

4. 滤子函子 $\mathcal{F}$。5. 超滤子函子 $\mathcal{U}$。6. 离散分布函子 $\mathcal{D}$。7. 幺半群值函子 $\mathrm{N}^{(-)}$。

例 *2.5*。 以下函子不保持弱拉回。

1. 在集合上由 $(-)_2^3$ 给出 X 的函子 $(X)_2^3 = \{(x,\ y,\ z) \in X^3 \mid |\{x,y,z\}| \leq 2\}$。2. 对于 $1 < n < \omega$ 的受限幂集函子 $\mathcal{P}_n$。3. 单调邻域函子 $\mathcal{M}$ 及其有限性部分 $\mathcal{M}_\omega$。4. 邻域函子 $\mathcal{N}$ 及其有限性部分 $\mathcal{N}_\omega$。5. 幺半群值函子 $\mathrm{Z}^{(-)}$。

本节最后，我们给出几个 Barr 扩张的例子。

例 *2.6*。设 $r\colon\ X \nrightarrow Y$。

1. 设 $F = (-)^2$ 为平方函子，并设 $\bar{F}$ 为 F 的 Barr 扩张。那么 $(x,y)\ Fr\ (x',y')$ 当且仅当 $x\ r\ x'$ 且 $y\ r\ y'$。2. 幂集函子 $\mathcal{P}$ 的 Barr 扩张 $\mathcal{P}$ 是 Egli-Milner 扩张；也就是说，$A\ Pr\ B$ 当且仅当对于每个 $x \in A$，存在 $y \in B$ 使得 $x\ r\ y$，反之亦然。3. 离散分布函子 $\mathcal{D}$ 的 Barr 扩张 $\mathcal{D}$ 描述如下：两个分布 $\mu \in \mathcal{D}X$、$\nu \in \mathcal{D}Y$ 在 $\mathcal{D}r$ 下相关，当且仅当存在一个 $\rho \in \mathcal{D}r$，它是 μ、ν 的耦合，即在 r（作为集合）上的一个分布 ρ，其边缘分布为 μ、ν，也就是说，对于如上所述的 π_1、π_2，$\mathcal{D}\pi_1(\rho) = \mu$，$\mathcal{D}\pi_2(\rho) = \nu$。

3 .....它就是 Barr 扩张

接下来，我们将介绍一类函子，它们具有一种我们称为逐元素有界性的性质。这一类包括所有可达函子（也称为有界函子）。我们将证明，如果这类函子存在扩张，那么该扩张就是 Barr 扩张。

在本节余下部分，我们固定一个函子 $F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$，以及一个 F 的扩张 $\tilde{F}\colon \mathrm{Rel} \to \mathrm{Rel}$。我们先记录一些初步观察。

引理 3.1。 以下陈述成立。

1. 对每个单射函数 $i\colon X \to Y$，$(Fi)^\circ \leq F(i^\circ)$。*2.* 对每个满射函数 $e\colon X \to Y$，$F(e^\circ) \leq (Fe)^\circ$。*3.* F 完全由其对单射和满射逆关系的作用所确定。

证明。

1. 设 $i\colon X \to Y$ 是一个单射。则 $i^\circ \cdot i = 1_X$。因此，$(Fi)^\circ = \tilde{F}(i^\circ \cdot i)\ \cdot (Fi)^\circ = \tilde{F}(i^\circ)\ \cdot Fi \cdot (Fi)^\circ \leq F(i^\circ)$。

幂集单子上唯一的分配律就是你所熟知的那个 7

2. 设 $e\colon X \to Y$是一个满射。则 $e \cdot e^\circ = 1_Y$ $F\ e^\circ \leq$。因此，$(F e)^\circ \cdot Fe \cdot F(e^\circ) = (Fe)^\circ \cdot F(e \cdot e^\circ) = (Fe)^\circ$。

3. 设 $r\colon X \nrightarrow Y$是一个关系，其典范分解为 $\rho \cdot \pi^\circ$；设 $\pi = i \cdot e$ 是 π 的像分解。那么，$F(\rho \cdot e^\circ \cdot i^\circ) = F\rho \cdot F(e^\circ) \cdot F(i^\circ)$。因此，$Fr$ 完全由 $F(i^\circ)$ 和 $F(e^\circ)$ 确定，且 e 是满射，i是单射。□

现在我们转向局部单调扩张。下文中，给定一个集合 X，令$\nabla_X\colon X + X \to X$ 表示余对角映射，并令 $\rho_1\colon X \to X + X$和 $\rho_2\colon X \to X + X$ 分别表示到第一和第二个分量中的单射。

在下一个结果中，我们将看到，可以通过检查扩张对单射逆关系的作用，或对满射逆关系的作用，来判断局部单调性。

引理 3.2。 以下命题等价：

1. 扩张 F 是局部单调的。2. 对每个关系 $r\colon X \nrightarrow X$, $r \leq 1_X \Rightarrow Fr \leq 1_{FX}$. 3. 对每个关系 $r\colon X \nrightarrow X$, $r \geq 1_X \Rightarrow Fr \geq 1_{FX}$. 4. 对每个单射函数 $i\colon X \to Y$, $F(i^\circ) = (Fi)^\circ$. 5. 对每个满射函数 $e\colon X \to Y$, $F(e^\circ) = (Fe)^\circ$. 6. 对每个集合 X, $F\rho_1 \leq F(\nabla_X^\circ)$。

证明。 我们先证明 $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$，然后证明 $4 \Rightarrow 6 \Rightarrow 2$，以及$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$。

$1 \Rightarrow 2$ 显然。

$2 \Rightarrow 4$ 设 $i\colon X \to Y$ 是一个单射。由引理 3.1 可得$(Fi)^\circ \leq F(i^\circ)$。为说明逆命题成立，注意到 $i \cdot i^\circ \leq 1_X$。因此，$Fi \cdot F(i^\circ) = F(i \cdot i^\circ) \leq F1_X = 1_{FX}$。所以，$F(i^\circ) \leq (Fi)^\circ \cdot Fi \cdot F(i^\circ) \leq (Fi)^\circ$。

$4 \Rightarrow 1$ 设 r，$s\colon X \nrightarrow Y$是满足 $r \leq s$的关系，并设 $X \xleftarrow{\pi_r} R \xrightarrow{\rho_r} Y$和 $X \xleftarrow{\pi_s} S \xrightarrow{\rho_s} Y$ 分别是与 r 和 s的典范分解相对应的跨图。那么，由于 $r \leq s$, $\pi_r = \pi_s \cdot i$ 和 $\rho_r = \rho_s \cdot i$，其中 $i\colon R \hookrightarrow S$表示包含映射。因此，$Fr = F(\rho_r \cdot \pi_r^\circ) = F\rho_r \cdot F(\pi_r^\circ) = F\rho_s \cdot Fi \cdot F(i^\circ) \cdot F(\pi_s^\circ)$。所以，由于 $F(i^\circ) = (Fi)^\circ$ 和 $Fi \cdot (Fi)^\circ \leq 1_S$，

$$Fr \leq F\rho_s \cdot F(\pi_s^\circ) = Fs。$$

$4 \Rightarrow 6$设 X是一个集合。根据定义，$1_X = \nabla_X \cdot \rho_1$，这意味着 $1_X = \rho_1^\circ \cdot \nabla_X^\circ$。因此，$F\rho_1 = F\rho_1 \cdot F\ \rho_1^\circ \cdot \nabla_X^\circ = F\rho_1 \cdot F\ \rho_1^\circ \cdot F\ \nabla_X^\circ = F\rho_1 \cdot F\rho_1{}^\circ \cdot F\ \nabla_X^\circ \leq F(\nabla_X^\circ)$，其中，最后一个等式根据假设成立，因为 ρ_1是单射。

$6 \Rightarrow 2$设 $r\colon X \nrightarrow X$是一个满足 $r \leq 1_X$的关系。考虑函数$\phi\colon X \to X + X$，它在 $x\ r\ x$时将 $x \in X$映射到 $\rho_1(x)$，否则映射到 $\rho_2(x)$。那么，$\phi^\circ \cdot \rho_1 = r$且 $\nabla_X \cdot \phi = 1_X$。因此，$F(\phi^\circ) \cdot F\rho_1 = Fr$且 $F(\phi^\circ) \cdot F(\nabla_X^\circ) = 1_{FX}$。因此，根据假设，$Fr \leq 1_{FX}$。

$1 \Rightarrow 3$ 显然。

$3 \Rightarrow 5$ 设 $e\colon X \to Y$ 是一个满射。由引理 3.1 可得$F(e^\circ) \leq (Fe)^\circ$。为证明反向不等式也成立，注意到 $e^\circ \cdot e \geq 1_X$。因此，$F(e^\circ) \cdot Fe = F(e^\circ \cdot e) \geq F1_X = 1_{FX}$。所以，$F(e^\circ) \geq F(e^\circ) \cdot Fe \cdot (Fe)^\circ \geq (Fe)^\circ$。

5 ⇒ 6 设 X 是一个集合。由于 ∇_X 是满射且 $\nabla_X \cdot \rho_1 = 1_X$，根据假设，$(F\rho_1)^\circ \cdot F(\nabla_X^\circ) = (F\rho_1)^\circ \cdot (F\nabla_X)^\circ = 1_{FX}$。因此，根据伴随性，$F\rho_1 \leq F(\nabla_X^\circ)$。□

因此，我们得到以下由 Carboni 等人提出的结果 [5]（另见 [14]）。

定理 3.3. 一个函子存在局部单调扩张，当且仅当它保弱拉回；在这种情况下，该扩张是唯一的，即其 *Barr* 扩张。

证明。 在引理3.1中我们已经看到，每个扩张都完全由其对单射映射和满射映射的逆关系的作用所确定；而在引理3.2中我们已经看到，每个局部单调扩张在此类关系上的取值都与 Barr 扩张一致，而 Barr 扩张只适用于保弱拉回的函子。

□

要为保弱拉回的函子构造多个扩张，可以考虑对其 Barr 扩张稍作修改。事实上，在类似的情形下，已有结果表明，可以稍微扩大指数函子的 Barr 扩张，从而得到其他正规松弛扩张 [7]。然而，这对（严格）扩张行不通，因为不存在与 Barr 扩张可比的其他扩张（除其自身外），这里的可比性是相对于逐点序而言的。

推论 *3.4. </style}*假设 F 保弱拉回。若 $F \leq F$ 或 $F \geq F$，则 $F = F$。

证明。 假设 $F \leq F$ 3 1, e $Fe^\circ =$。那么，根据引理 。对每个满射， $()F(e^\circ) \leq F(e^\circ) \leq (Fe)^\circ$。因此，根据引理 3.2， F是局部单调的，由此我们得出结论：根据定理 3.3，它与 Barr 扩张一致。另一种情况可类似证明。□

这表明，找到存在多个扩张的函子实例可能并不容易。事实上，我们将看到，接下来介绍的这大类函子至多存在一个扩张。我们先固定一些记号。

我们使用花体字母（如 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{J}$）表示以 Set 为指标的集合族；但常值族例外，它们可以用决定它们的集合表示。如果 $\mathcal{K}$ 的每个分量都包含映射到 $\mathcal{J}$ 中，我们记作 $\mathcal{K} \leq \mathcal{J}$。此外，给定 X 的一个子集 A 以及一个元素 $a \in FX$，我们用 $a \in FA$ 表示 $a \in Fi_A[FA]$，其中 $i_A \colon A \rightarrowtail X$ 是相应的包含映射。集合 $\{0,1\}$ 记作 2。

定义 3.5。 设 $\mathcal{K}$ 为以集合为指标的集合族，使得 $2 \leq \mathcal{K}$。若对每个集合 X 及每个 $a \in F(X \times \mathcal{K}_X)$，都存在一个集合 $A \subseteq X \times \mathcal{K}_X$，满足 $a \in FA$，且对任意 $x \in X$， A均不包含 $\{x\} \times \mathcal{K}_X$，则函子 F是逐元素 $\mathcal{K}$-有界的 。若函子 F 对某个族 $\mathcal{K}$是逐元素 $\mathcal{K}$-有界的，则称其为逐元素有界的 。

直观来说，我们认为 $X \times \mathcal{K}_X$ 提供了每个元素$x \in X$的 $\mathcal{K}_X$ 个副本。那么，如果给定一个集合 X， F 就是逐元素 $\mathcal{K}$-有界的：$F(X \times \mathcal{K}_X)$ 中的每个元素都可以构造出来，而无需用尽任何元素 X的所有副本。

注记 *3.6.* 定义逐元素有界性的条件在空集上真空成立。

例 *3.7.* 以下函子都是逐元素有界的。

1. 每个常值函子 S 都是逐元素 2-有界的，因为对于每个集合 X， $S(X \times 2)$ 中的每个元素都属于 $F\varnothing$。2. 每个指数非空的可指数化函子 $(-)^S$ 都是逐元素 $(S+1)$-有界的，因为对于每个集合 X，从 S 到 $X \times (S+1)$ 的每个函数至多选取 $|S|$ 个每种元素的副本。3. 每个“与固定集合 S 的和”函子 $(- + S)$ 都是逐元素 2-有界的，因为对于每个集合 X， $X \times 2 + S$ 中的每个元素都属于空集或单点集在 $(-) + S$ 下的像。4. 每个保二元余积的函子都是逐元素 2-有界的。为此，注意给定集合 X，由于 $X \times 2 \simeq X + X$，若 F 保余积，则 $F(X \times 2)$ 中的每个元素要么属于 $F(X \times \{0\})$，要么属于 $F(X \times \{1\})$。特别地，每个函子 $A \times (-)$“与固定集合的乘积”都是逐元素 2-有界的；超滤子函子虽然不可达，也是逐元素 2-有界的。5. 每个 λ-可达函子都是逐元素 λ-有界的。确实，假设 F 是 λ-可达的。令 X 为一个集合。那么，对于 $a \in F(X \times \lambda)$ 中的每个元素，都存在 $A \subseteq X \times \lambda$，使得 $|A| < \lambda$，并且 $a \in FA$。此外，由于 $|A| < \lambda$，对于每个 $x \in X$，都有 $\{x\} \times \lambda \not\subseteq A$。特别地，例 2.1 中的所有函子都是逐元素有界的。

例3.7 表明，用于余代数建模的大多数函子都是逐元素有界的， κ κ其界为某个集合。在许多情况下，逐元素有界性可由一个固定基数实现：

命题 3.8。 考虑以下陈述。

1. F 是逐元素有界的。*2.* 存在一个基数大于一的集合 κ，使得对每个 $a \in F\kappa$，都存在 $A \subsetneq \kappa$，满足 $a \in FA$。

那么， *1* $\Rightarrow$ *2*；并且，当 F 保持二元积或逆像时， *2* $\Rightarrow$ *1*，此时 F 是逐元素 κ-有界的。

证明。 第一个断言可由逐元素有界性的定义直接应用于 $X = 1$ 得出。要证明第二个断言，假设 F 保持逆像。设 X 是一个集合，且 a 是 $F(X \times \kappa)$ 的一个元素。根据假设，存在一个集合 $A \subsetneq \kappa$，使得 $F\pi_2(a) \in FA$，其中 $\pi_2 \colon X \times \kappa \to \kappa$

是相应的投影。这意味着 a 属于 $F(X \times \kappa) \xrightarrow{F\pi_2} F\kappa \xleftarrow{Fi_A} FA$ 的拉回，其中 $i_A\colon A \rightarrowtail X$ 表示相应的包含映射，它由 $F(\pi_2^{-1}[A])$ 给出，因为 F 保持逆像。因此，$a \in F(\pi_2^{-1}[A])$，并且由于 $A \subsetneq \kappa$，对于每个 $x \in X$，$\{x\} \times \kappa \not\subseteq \pi_2^{-1}[A]$。保持二元积的函子的情形是显然的。□

例 *3.9*。以下函子不是逐元素有界的。

1. 幂集函子 $\mathcal{P}$，因为不存在这样的集合 κ：它属于 $\mathcal{P}$ 在其任一真子集上的像。2. 单调邻域函子 $\mathcal{M}$，因为不存在这样的集合 κ：邻域系统 $\{\kappa\}$ 属于 $\mathcal{M}$ 在其任一真子集上的像。3. 邻域函子，理由与单调邻域函子相同。

最后，我们可以证明，每个逐元素有界的函子都只允许局部单调扩张；正如我们在定理 3.3中所见，这类扩张仅存在于保弱拉回的函子。

引理 3.10。对于每个映射 $e\colon Y \to X$，

$$Fe \geq \bigvee\{(F\rho_1)^\circ \cdot Ff \mid e \cdot f^\circ = \nabla_X\},$$

其中 f 遍历从 Y 到 $X + X$的所有函数。

证明。设 $f\colon Y \to X + X$是满足 $e \cdot f^\circ = \nabla_X$的函数。于是，鉴于无论 F 是否保弱拉回，Barr 构造都有良定义 [1]，$Fe \cdot (Ff)^\circ = F\nabla_X$。因此，

$$Fe \cdot \big((F\rho_1)^\circ \cdot Ff\big)^\circ = Fe \cdot (Ff)^\circ \cdot F\rho_1 = F(\nabla_X \cdot \rho_1) = 1_{FX}.$$

因此，$(b,\ a) \in (F\rho_1)^\circ \cdot Ff$蕴含 $Fe(b) = a$。□

下一个结果是证明主定理的关键所在。它表明，逐元素有界函子对满射的作用可以用余对角映射的分解来表示；正如我们在引理 3.2中所见，这些分解能够检测局部单调扩张。

引理 3.11。考虑以下命题。

1. 函子 F 是逐元素 $\mathcal{K}$有界的。*2.* 对每个集合 X，都存在集合 Y_X 和满射 $e\colon Y_X \twoheadrightarrow X$，使得

$$Fe = \bigvee\{(F\rho_1)^\circ \cdot Ff \mid e \cdot f^\circ = \nabla_X\} \tag{2}$$

其中，f 遍历从 Y_X 到 $X + X$的所有函数。

于是，*1* $\Rightarrow$ *2*；当 F 保逆像时，*2* $\Rightarrow$ *1*。

（回想一下， ρ_1 是第一个注入 $X \hookrightarrow X + X$。）

证明。 $1 \Rightarrow 2$。只需证明引理 3.10 中反向的不等式。为此，设 X 是一个集合，并令 $\pi_1 \colon X \times \mathcal{K}_X \to X$ 为到 X的投影。根据定义， $\mathcal{K}_X$ 非空，因此 π_1 是满射。我们断言它满足 (2)。为此，取 $a \in F(X \times \mathcal{K}_X)$。根据假设，存在一个集合 $A \subseteq X \times \mathcal{K}_X$，使得$a \in FA$；并且对每个 $x \in X$， $\{x\} \times \mathcal{K}_X$ 不包含于 A。现在，考虑函数 $f \colon X \times \mathcal{K}_X \to X + X$，定义为：若 $(x, y) \in A$，则 $f(x, y) = \rho_1(x)$；否则，$f(x, y) = \rho_2(x)$。由于 $2 \leq |\mathcal{K}_X|$且 $\{x\} \times \mathcal{K}_X \not\subseteq A$，对每个 $x \in X$，不失一般性地，我们可以假设对每个 $x \in X$，都存在 $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_X$，使得 $(x, k_1) \in A$且 $(x, k_2) \notin A$。因此， $\pi_1 \cdot f^\circ \geq \nabla_X$；又由于另一个不等式由 f 的定义成立，我们得到 $\pi_1 \cdot f^\circ = \nabla_X$。此外，$\rho_1 \cdot \pi_1 \cdot i_A = f \cdot i_A$，其中 $i_A \colon A \rightarrowtail X \times \mathcal{K}_X$是相应的包含映射。这意味着 $F\rho_1 \cdot F\pi_1 \cdot Fi_A = Ff \cdot Fi_A$。于是， $F\pi_1 \cdot Fi_A \leq (F\rho_1)^\circ \cdot Ff \cdot Fi_A$。因此，根据假设， $a \in Fi_A[FA]$，我们得出 $(a, F\pi_1(a)) \in (F\rho_1)^\circ \cdot Ff$。

$2 \Rightarrow 1$。令 X 为一个集合，并令 $e \colon Y_X \twoheadrightarrow X$ 为满足（2）的满射。首先注意，对于每个满射 $e' \colon Y \twoheadrightarrow Y_X$，满射 $e \cdot e'$ 也满足（2）。令 $e' \colon Y \twoheadrightarrow Y_X$ 为一个满射。那么，

$$\begin{aligned} F(e \cdot e') &= \bigvee \{(F\rho_1)^\circ \cdot Ff \cdot Fe' \mid e \cdot f^\circ = \nabla_X\} \\ &= \bigvee \{(F\rho_1)^\circ \cdot F(f \cdot e') \mid e \cdot e' \cdot (f \cdot e')^\circ = \nabla_X\} \end{aligned}$$

其中 f遍历从 Y_X到 $X+X$的所有函数。因此，由引理 3.10，

$$F(e \cdot e') = \bigvee \{(F\rho_1)^\circ \cdot Fg \mid e \cdot e' \cdot g^\circ = \nabla_X\},$$

其中 g 遍历从 Y到 $X + X$的所有函数。现在，若 X 为空，则根据注记 3.6.，我们只需取 $\mathcal{K}_X = 2$即可。因此，假设 X 非空。由于 e 是满射， Y_X 必非空，因此，根据我们关于满射复合的论证，不妨假设 $2 \leq |Y_X|$。接下来，对每个 $x \in X$，我们选取一个从 Y_X 到 $e^{-1}(x)$ 的满射映射 e'_x；根据定义，这样的映射存在，因为 $e^{-1}(x) \subseteq Y_X$。由此得到一个映射 $e' \colon X \times Y_X \to Y_X$，它将 $(x, y) \in X \times Y_X$ 映到 $e'_x(y)$；该映射是满射，因为 $Y = \bigcup_{x \in X} e^{-1}(x)$。此外，根据构造， $e \cdot e'$与投影 $\pi_1 \colon X \times Y_X \to X$重合。因此，根据我们关于满射复合的论证，可得 $\pi_1 \colon X \times Y_X \to X$ 满足 (2)。现在，令 $a \in F(X \times Y_X)$。那么存在 $f \colon X \times Y_X \to X + X$，使得 $\pi_1 \cdot f^\circ = \nabla_X$，且 $(a, F\pi_1(a)) \in (F\rho_1)^\circ \cdot Ff$，这意味着 $Ff(a) = F\rho_1 \cdot F\pi_1(a)$。考虑集合 $A = \{(x, y) \in X \times Y_X \mid f(x, y) \in \rho_1[X]\}$。我们断言，对每个 $x \in X$， $\{x\} \times Y_X$ 不属于 A，且 $a \in FA$。令 $x \in X$。由于 $\pi_1 \cdot f^\circ = \nabla_X$，存在 $y \in Y_X$，使得 $f(x, y) = \rho_2(x)$。因此，$(x, y) \notin A$。另一方面，注意到，由于 $Ff(a) = F\rho_1 \cdot F\pi_1(a)$，$(a, F\pi_1(a))$ 属于 $FY_X \xrightarrow{Ff} F(X + X) \xleftarrow{F\rho_1} FX$ 的拉回。因此，由于 ρ_1是单射， A是 $Y_X \xrightarrow{f} X + X \xleftarrow{\rho_1} X$ 的拉回，且 F 保持逆像，我们得出 $a \in FA$。因此， F 是逐元素 $\mathcal{K}$- 有界的，其中 $\mathcal{K}_\varnothing = 2$；对于其他每个集合 X， $\mathcal{K}_X = Y_X$。□

现在，我们的主要结果可直接得出。

定理 3.12. 逐元素有界的函子存在扩张，当且仅当它保持弱拉回；在这种情况下，该扩张唯一，即其 *Barr* 扩张。

证明. 假设 F 是逐元素 $\mathcal{K}$有界的。根据定理3.3 只需证明 F是局部单调的。令 X为一个集合。我们声称 $F\rho_1 \leq F(\nabla_X^\circ)$，由此可根据引理 3.2得出 是局部单调的。首先注意，根据引理 3.11，存在一个满射 $e\colon Y_X \twoheadrightarrow X$ 使得

$$Fe = \bigvee \{(F\rho_1)^\circ \cdot Ff \mid e \cdot f^\circ = \nabla_X\}, \tag{3}$$

其中 f遍历从 Y_X到 $X + X$的所有函数。现在，令 $a \in FX$。由于 e是满射，$e \cdot e^\circ = 1_X$，这意味着 $Fe \cdot F(e^\circ) = F(e \cdot e^\circ) = 1_{FX}$。因此，存在 $b \in FY$使得 $(a, b) \in F(e^\circ)$ 且 $Fe(b) = a$。于是，根据 (3)，存在$f\colon Y \to X + X$使得 $(b, a) \in (F\rho_1)^\circ \cdot Ff$，这意味着 $Ff(b) = F\rho_1(a)$，且 $f \cdot e^\circ = \nabla_X^\circ$。因此，$Ff \cdot F(e^\circ) = F(f \cdot e^\circ) = F(\nabla_X^\circ)$，$(a, b) \in F(e^\circ)$，并且 $Ff(b) = F\rho_1(a)$。所以，$(a, F\rho_1(a)) \in F(\nabla_X^\circ)$。□

由此立即可得，每个可达函子至多有一个扩张，等价地说，至多有一个定义在幂集单子上的 Kleisli 分配律。

推论 3.13。 一个可达或 保二元余积的函子存在扩张，当且仅当它保弱拉回；在这种情况下，该扩张唯一，即其 *Barr* 扩张。

这一结果还可以进一步具体化。例如，众所周知，幺半群值函子保弱拉回，当且仅当该幺半群为正且可细化 [8]。因此：

推论 3.14。 幺半群值函子存在扩张，当且仅当该幺半群为正且可细化；在这种情况下，该扩张唯一，即其 *Barr* 扩张。

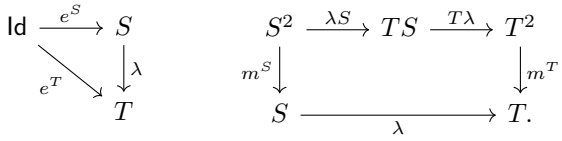
由于保弱拉回是一项广为研究的性质，我们的结果使得识别存在唯一扩张的函子，或根本不存在任何扩张的函子，变得容易。例如，例 2.4 中的所有函子都存在唯一扩张，而例2.5 中的有限函子均不存在扩张。

4.....有时还不止如此

我们已经证明，对于逐元素有界函子（例如有限幂集函子），弱拉回保持性是扩张存在的必要条件，也是扩张唯一的充分条件。本节中，我们

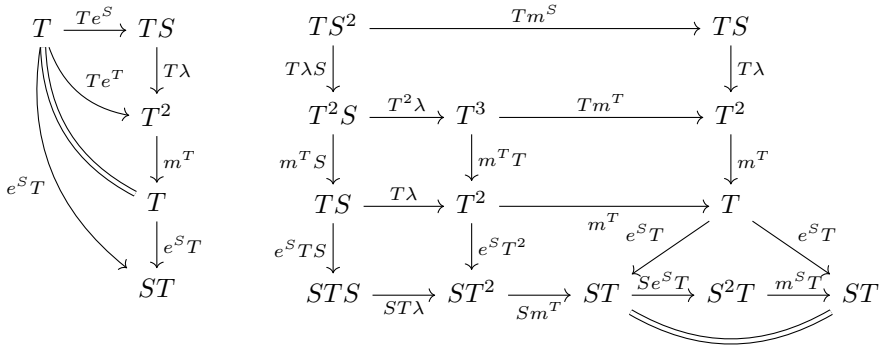
将证明这一结论一般情况下并不成立。值得注意的是，我们将证明，与有限幂集函子不同，完全幂集函子恰有三种扩张。

我们的例子基于单子态射诱导 Kleisli 定律这一事实。回想一下，给定单子 $\mathbf{S} = (S, e^S, m^S)$ 与 $\mathbf{T} = (T, e^T, m^T)$，自然变换 $\lambda\colon \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ 是单子态射，如果它使下列图表交换：



命题 4.1. 设 $\mathbf{S} = (S, e^S, m^S)$ 与 $\mathbf{T} = (T, e^T, m^T)$ 为单子。对每个单子态射 $\lambda\colon \mathbf{S} \to \mathbf{T}$，自然变换 $e^S T \cdot m^T \cdot T\lambda$给出一个 *Kleisli* 律 $T\mathbf{S} \to \mathbf{S}T$。

证明。 设 $\lambda\colon \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ 为单子态射。注意，单子、单子态射与自然变换的公理蕴含下列图表交换。



□

特别地，从幂集单子 $\mathbf{P} = (\mathcal{P}, \eta, \mu)$ 到单子 $\mathbf{T} = (T, e, m)$ 的单子态射 $\lambda\colon \mathbf{P} \to \mathbf{T}$，经由同构 $\mathbf{Rel} \simeq \mathbf{Set}_{\mathbf{P}}$，给出 T 到 Rel 的一个扩张，它将关系 $r\colon X \nrightarrow Y$ 映到函数 $m_Y \cdot T(\lambda_Y \cdot r^\sharp)$（的图），其中 $r^\sharp\colon X \to \mathcal{P}Y$表示在同构 $\mathbf{Rel} \simeq \mathbf{Set}_{\mathbf{P}}$ 下与关系 r 对应的函数。

例 *4.2*。

1. 对于指向终端单子的单子态射 $\mathbf{P} \to \mathbf{1}$，我们得到常值函子 1 的 Barr 扩张。
2. 对于恒等单子态射 $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$，我们得到关系像扩张，它将关系 $r\colon X \nrightarrow Y$ 映射为一个函数，该函数将集合$A \subseteq X$ 映射到其关系像 $r[A]$。

3. 对于指向滤子单子的单子态射 $\Box\colon \mathbf{P} \to \mathbf{F}$ (例如 [17, 例 4。3])，其 X-分量由 $\Box_X(U) = \{A \subseteq X \mid U \subseteq A\}$给出，我们得到这样的扩张：它将关系 $r\colon X \nrightarrow Y$ 映射为一个函数，该函数将滤子 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}X$ 映射到 $\uparrow\{r[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$，其中 $\uparrow$表示相对于子集包含的向上闭包。
4. 对于到单调邻域单子的单子态射 $\Box\colon \mathbf{P} \to \mathbf{F} \hookrightarrow \mathbf{M}$，我们可以得到一种类似于滤子函子的扩张。此外，对于单子态射 $\Diamond\colon \mathbf{P} \to \mathbf{M}$ （例如 [17, 例 4.3]），其 X-分量由 $\Diamond_X(U) = \{A \subseteq X \mid U \cap A \neq \varnothing\}$ 给出，我们可以得到另一种不同的扩张，它将关系 $r\colon X \nrightarrow Y$ 映射为一个函数，该函数将单调邻域系统 $\mathcal{A} \in \mathcal{M}X$ 映射为 $\{B \mid r^{\circ}[B] \in \mathcal{A}\}$。

根据定义，由单子态射诱导的扩张会将每个关系映射为一个函数，因此其行为通常与 Barr 扩张大不相同（尤其是，这类扩张当然不满足局部单调性）。例 4.2 表明，有些函子不保持弱拉回，例如单调邻域函子（参见 [6, 例 3.10(2)]），但仍存在（多个）扩张；也有些函子保持弱拉回，却存在多个扩张，例如幂集函子和滤子函子。相比之下，在上一节中我们看到，与它们密切相关的有限幂集函子和超滤子函子都存在唯一扩张，这意味着逐元素有界性对于保证这两种情形下的唯一性至关重要。

在推论 3.4中，我们已经看到，通过收缩或扩张 Barr 扩张无法生成其他扩张。最后，我们证明，对于由单子态射诱导的扩张，这样做可能是可行的。事实上，我们证明，幂集函子恰好有三种扩张：Barr 扩张、关系像扩张，以及一种略作修改的关系像扩张，其对应的 Kleisli 分配律将 $\{\varnothing\}$ 映射到 $\varnothing$，因此并非由单子态射诱导。

命题 4.3。幂集函子恰好有三种扩张：

˜*1. Barr* 扩张：$A\,(Fr)\,B$ 当且仅当 $B \subseteq r[A]$ 且 $A \subseteq r^{\circ}[B]$; ˜*2.* 关系像扩张：$A\,(Fr)\,B$ 当且仅当 $B = r[A]$; ˜*3.* 受限关系像扩张：$A\,(Fr)\,B$ 当且仅当 $B = r[A] \neq \varnothing$或 $A = B = \varnothing$。

证明。 我们利用扩张等价于 Kleisli 分配律这一事实。因此，设 $\delta\colon F\mathcal{P} \to \mathcal{P}F$ 是这样一个分配律，其中 F 是幂集函子。首先，我们说明 δ 必须恰好满足以下条件之一：

$$\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}, \tag{4}$$
$$\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,1,2\}\} \tag{5}$$

令 $f\colon \{0,1,2\} \to \{1,2\}$ 将 0、1 映射到 1，将 2 映射到 2，并令 $p = \{\{0,1\},\{2\}\}$。于是，利用 δ 的自然性以及定律 $\delta(F\eta) = \eta$,

$$\{\{1,2\}\} = \delta\{\{1\},\{2\}\} = \delta(F\mathcal{P}f)(p) = (\mathcal{P}Ff)(\delta(p)).$$

因此， $\delta(p)$ 必须是 $\{0,1,2\}$ 的一个子集集合 s，满足 $(\mathcal{P}f)(s) = \{1,2\}$。由此可得以下几种情况：

1. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,2\}\}$，2. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{1,2\}\}$，3. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,2\},\{1,2\}\}$，4. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,1,2\}\}$，5. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,2\},\{0,1,2\}\}$，6. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{1,2\},\{0,1,2\}\}$，7. $\delta\{\{0,1\},\{2\}\} = \{\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$。

选项 1、2、5 和 6 与 δ 的自然性不相容：交换 0 和 1 后，左边保持不变，但右边并非如此。我们也排除 3。于是有

$$\begin{aligned}\{\{0,2\},\{1,2\}\} &= \delta\{\{0,1\},\{2\},\{0,1\}\}\\ &= (\delta(F\mu))\{\{\{0,1\},\{2\}\},\{\{0,1\}\}\}\\ &= (\mu(\mathcal{P}\delta)\delta)\{\{\{0,1\},\{2\}\},\{\{0,1\}\}\}\\ &= (\mu(\mathcal{P}\delta))\{\{\{0,1\},\{0,1\}\},\{\{2\},\{0,1\}\}\}\\ &= \mu\{\delta\{\{0,1\}\},\{\{2,0\},\{2,1\}\}\}\\ &= \delta\{\{0,1\}\}\cup\{\{0,2\},\{1,2\}\},\end{aligned}$$

蕴含 $\delta\{\{0,1\}\} \subseteq \{\{0,2\},\{1,2\}\}$。这与 δ 的自然性相矛盾。我们恰好只剩下上述选项（4）和（5）。

给定一个集合 X，以及一个由非空且两两不相交的非空子集组成的族 $(X_i \subseteq X)_{i\in I}$，假设

$$\delta\{X_i\}_{i\in I} = \{Y_j \subseteq X\}_{j\in J}. \tag{6}$$

让我们证明，对每个 $j \in J$ 和每个 $i \in I$，$X_i \cap Y_j \neq \varnothing$。固定某个$i \in I$。如果 $X = X_i$，则显然可得结论。假设 $X \neq X_i$，并令f： $X \to \{0,1\}$ 将 X_i 中的元素映射到 1，其余元素映射到 0。于是

$$\{\{0,1\}\} = \delta\{\{0\},\{1\}\} = \delta(F\mathcal{P}f)\{X_i\}_{i\in I} = (\mathcal{P}Ff)(\delta\{X_i\}_{i\in I}).$$

如果 $\delta\{X_i\}_{i\in I}$ 包含一个与 X_i不相交的集合，则将 Ff 应用于该集合会得到 $\{1\}$，矛盾。此外，注意到根据 δ 与 η的相容性，

$$\delta(\varnothing) = \{\varnothing\}. \tag{7}$$

假设（4）。我们的目标是推导出 δ 的一般公式：

$$\delta\{X_i\}_{i\in I} = \left\{Y \subseteq \bigcup\nolimits_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I.\, Y \cap X_i \neq \varnothing\right\}. \tag{8}$$

我们先确立一个特殊情形：在（6）中，取 $I = I_1 \cup I_2$，使得 $I_1 \cap I_2 = \varnothing$，$X_i = \{x_i, y_i\}$ 若 $i \in I_1$ 且 $X_i = \{x_i\}$ 若 $i \in I_2$。我们接下来证明

$$\{x_i\}_{i\in I} \in \delta(\{\{x_i, y_i\}\}_{i\in I_1} \cup \{\{x_i\}\}_{i\in I_2}). \tag{9}$$

如果我们能选取这样的 $Y \in \delta\{X_i\}_{i\in I}$，使得对每个 $i \in I_1$，$x_i \notin Y$ 或$y_i \notin Y$至少有一个成立，那么我们就能通过关于 f应用自然性来证明（9）：$X \to X$ 在 $y_i \in Y$时交换 x_i和 y_i。回想一下，对每个 $Y \in \delta\{X_i\}_{i\in I}$以及每个 $i \in I_1$，都有$Y \cap \{x_i, y_i\} \neq \varnothing$，因此 $x_i \in Y$ 或 $y_i \in Y$。我们来证明，确实可以选取这样的 Y，使得对每个 $i \in I_1$，x_i 和 y_i 不会同时属于 Y。反设：对于某个 $k \in I_1$，对所有 $Y \in \delta\{X_i\}_{i\in I}$，都有 $\{x_k, y_k\} \subseteq Y$。令 $f\colon X \to \{0,1,2\}$ 将 x_k 映射为 0，将 y_k 映射为 1，并将其余所有元素映射为 2。根据自然性，$\delta\{\{0,1\},\{2\}\}$ 的每个元素都同时包含 0 和 1，这与（4）矛盾。

利用（9），我们继续证明一般公式（8）：正如上文所论证的，每个 $Y \in \delta\{X_i\}_{i\in I}$ 都必须与每个 X_i有非空交集。我们还需证明反方向：对于每个 $Y \subseteq X$，若 $Y \cap X_i \neq \varnothing$ 对所有 $i \in I$都成立，则 $Y \in \delta\{X_i\}_{i\in I}$。我们先证明一个特殊情形：

$$\bigcup_{i\in I} X_i \in \delta\{X_i\}_{i\in I}.$$

事实上，取 $Z \in \delta\{\{x\} \times X_i\}_{i\in I,\ x\in X_i}$（因此，$Z \in X \times \mathcal{P}(X)$），并注意到 Z中的元素具有（x，W）的形式，其中 $i \in I$、$x \in X_i$和 $W \neq \varnothing$。通过对左投影 $X \times \mathcal{P}(X) \to X$应用自然性，我们得到$\bigcup_{i\in I} X_i \in \delta\{X_i\}_{i\in I}$。现在，任取满足以下条件的 $Y \subseteq X$：对所有 $Y \cap X_i \neq \varnothing$ $i \in I$，并将 I 不相交地划分为 I_1 和 I_2，使得 $i \in I_2$ 当且仅当 $X_i \subseteq Y$。令$x_i = Y \cap X_i$、$y_i = X_i \setminus Y$（对于 $i \in I_1$），并令 $x_i = X_i$（对于 $i \in I_2$）。于是

$$\begin{aligned} Y = \bigcup_{i\in I} x_i &\in \delta(\{x_i\}_{i\in I}) \\ &= (\mu(\mathcal{P}\delta))\{\{x_i\}_{i\in I}\} \\ &\subseteq (\mu(\mathcal{P}\delta)\delta)\{\{x_i, y_i\}\}_{i\in I_1} \cup \{\{x_i\}\}_{i\in I_2}) \\ &= (\delta(F\mu))(\{\{x_i, y_i\}\}_{i\in I_1} \cup \{\{x_i\}\}_{i\in I_2}) \\ &= \delta\{X_i\}_{i\in I}. \end{aligned}$$

因此，我们已经证明了（8）对 $I \neq \varnothing$ 以及非空的 X_i成立。由（7），同一公式对 $I = \varnothing$仍然成立。接下来需要证明，当 $I \neq \varnothing$且某些 X_i 为空时，该公式仍然成立。以下推导结合 δ的自然性，表明 $\delta\{\varnothing, \{1\}\} = \varnothing$:

$$\begin{aligned} \delta\{\varnothing, \{1\}\} &\subseteq (\mu(\mathcal{P}\delta))\{\{\varnothing, \{1\}\}, \{\{2\}, \{1\}\}, \{\varnothing, \{2\}, \{1\}\}\} \\ &= (\mu(\mathcal{P}\delta)\delta)\{\{\varnothing, \{2\}\}, \{\{1\}\}\} \\ &= (\delta(F\mu))\{\{\varnothing, \{2\}\}, \{\{1\}\}\} \\ &= \delta\{\{2\}, \{1\}\} \\ &= \{\{1, 2\}\}. \end{aligned}$$

可以类似地证明 $\delta\{\varnothing\} = \varnothing$。这意味着，只要$X_i = \varnothing$ 对于某个 $i \in I$ 成立，就有 $\delta\{X_i\}_{i\in I} = \varnothing$——否则，我们就会与 δ 关于常值函数 f的自然性矛盾：$X \to \{1\}$。至此便完成了证明：满足（4）的唯一分配律是（8）。

现在，假设（5）。令 $i \in I$并令 $x \in X_i$。令 $f\colon X \to \{0,1\}$ 将 x发送到1，并将所有其他元素发送到0。那么（$\mathcal{P}Ff$）（$\delta\{X_i\}_{i\in I}$）$= \delta$（$F\mathcal{P}f$）$\{X_i\}_{i\in I}$

要么是 $\delta\{\{0,1\},\{0\}\} = \{\{0,1\}\}$，要么是 $\delta\{\{1\},\{0\}\} = \{\{0,1\}\}$，要么是 $\delta\{\{1\}\} = \{\{1\}\}$。在所有情况下，结果都不包含 $\{0\}$；如果某个 Y_j 不包含 x，就会出现这种情况。因此，我们证明了对于每个 $i \in I$ 和每个 $j \in J$，$X_i \subseteq Y_j$。因此（6）变为

$$\delta\{X_i\}_{i\in I} = \left\{\bigcup_{i\in I} X_i\right\}$$

根据（7），当 $I = \varnothing$ 时，同一公式仍然成立。下面证明，对于 $|I| > 1$ 和 $X_i = \varnothing$，只要 i，同一公式也成立。事实上，取 $I' \neq \varnothing$，我们有

$$\begin{aligned}
\delta(\{X_i\}_{i\in I'} \cup \{\varnothing\}) &= (\mu(\mathcal{P}\delta))\{\{X_i\}_{i\in I'} \cup \{\varnothing\}\} \\
&= (\mu(\mathcal{P}\delta)\delta)\{\{X_i, \varnothing\} \mid i \in I'\} \\
&= (\delta(F\mu))\{\{X_i, \varnothing\} \mid i \in I'\} \\
&= \delta\{X_i\}_{i\in I'} \\
&= \left\{\bigcup_{i\in I'} X_i\right\}.
\end{aligned}$$

唯一尚未涵盖的情形是 $\{X_i\}_{i\in I} = \{\varnothing\}$。对于 $\delta\{\varnothing\}$，只有两种可能的选择：$\delta\{\varnothing\} = \{\varnothing\}$ 和 $\delta\{\varnothing\} = \varnothing$。前一种是（5）的特例。后一种仍然给出一个分配律，可以直接验证。□

5 结论与未来工作

我们研究了集合函子在幂集单子上的分配律的存在性和唯一性——等价地说，也研究了函子从 Set 到Rel的扩张。我们确定了逐元素有界集合函子这一类，它严格包含所有可达函子。对于逐元素有界函子，存在分配律当且仅当它保弱拉回；在这种情况下，分配律唯一，且由幂律给出（定理 3.12），并诱导出 Barr 扩张。我们的唯一性论证表明，每个逐元素有界集合函子的扩张都是局部单调的，揭示了扩张的局部单调性与集合函子上的可达性类条件之间一种出乎意料的联系。幂集函子本身（它并非逐元素有界）表明，超出这一范围后唯一性可能失效：完全幂集函子在（完全）幂集单子上恰有另外两个分配律（命题 4.3）。

总的来说，我们的工作阐明了函子向关系扩张的典范性程度。未来研究的一个重要方向，是对实值关系以及更一般的定量关系作出类似的阐明；对于后者，整体图景预计会复杂得多。

参考文献

1. Barr, M.：关系代数。载于：《中西部范畴研讨会 IV 报告》，第 39–55 页。数学讲义第 137 卷。Springer（1970）。https://doi.org/10.1007/BFb00604392. Beck, J.：分配律。载于：《三元组与范畴同调理论研讨会》，数学讲义第 80 卷，第 119–140 页。Springer-Verlag，柏林（1969），介绍了单子的分配律。3. Bílková, M., Kurz, A., Petrisan, D., Velebil, J.：预序与偏序集上的关系提升。载于：Corradini, A., Klin, B., Cîrstea, C.（编）《计算机科学中的代数与余代数——第 4 届国际会议 CALCO 2011》，英国温彻斯特，2011 年 8 月 30 日至 9 月 2 日。会议论文集。计算机科学讲义第 6859 卷，第 115–129 页。Springer（2011）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-22944-2_94. Bílková, M., Kurz, A., Petrisan, D., Velebil, J.：关系提升及其在多值覆盖模态中的应用。《逻辑方法与计算机科学》9(4)（2013）。https://doi.org/102013 52168948./LMCS-(:). Carboni, A., Kelly, G.M., Wood, R.J.：基变换与几何态射的二范畴方法 I。《拓扑与范畴微分几何笔记》2（1），47–95（1991）6. Goncharov, S., Hofmann, D., Nora, P., Schröder, L., Wild, P.：保恒等的松弛扩张及其所在之处。载于：Beyersdorff, O., Pilipczuk, M., Pimentel, E., Nguyen, K.T.（编）《第 42 届理论计算机科学专题国际研讨会 STACS 2025》，2025 年 3 月 4–7 日，德国耶拿。LIPIcs，第 327 卷，第 40:1–40:20 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心（2025）。https://doi.org/1040 742302025./LIPICS.STACS.. Goncharov, S., Hofmann, D., Nora, P., Schröder, L., Wild, P.：重新审视关系子与模拟概念。CoRR **abs/2502.01790**（2025）。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2502.017908. Gumm, H.P., Schröder, T.：幺半群标记迁移系统。载于：Corradini, A., Lenisa, M., Montanari, U.（编）《计算机科学中的余代数方法》，CMCS 2001。ENTCS，第 44(1) 卷，第 185–204 页。Elsevier（2001）。https://doi.org/10.1016/S1571-0661(04)80908-39. Hasuo, I., Jacobs, B., Sokolova, A.：通过余归纳实现的泛型迹语义。《逻辑方法与计算机科学》**3**（4）（2007）10. Jacobs, B.：余代数的迹语义。载于：《计算机科学中的余代数方法》（CMCS）。《理论计算机科学电子札记》第 106 卷，第 167–184 页（2004），预印本可在线查阅。11. Karamlou, A., Shah, N.：不可能性定理：无法在分布单子上分配的有向容器。载于：Sobocinski, P., Lago, U.D., Esparza, J.（编）《第 39 届 ACM/IEEE 逻辑与计算机科学年度研讨会论文集》，LICS 2024，爱沙尼亚塔林，2024 年 7 月 8–11 日。第 69:1–69:13 页。ACM（2024）。https://doi.org/103662137 1211453661814./.. Klin, B., Salamanca, J.：迭代协变幂集不是单子。《理论计算机科学电子札记》**341**，261–276（2018）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.entcs.2018.11.013，第三十四届程序语义的数学基础会议（MFPS XXXIV）论文集。13. Kupke, C., Pattinson, D.：模态逻辑的余代数语义：综述。《理论计算机科学》**412**（38），5070–5094（2011）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.04.023，cMCS 十周年纪念会议

14. Kurz, A., Velebil, J.：关系提升综述。J. Log. Algebraic Methods Program. 85 002 15 4 475 499 2016 10 1016 2015 08 ( ), – ( ). https://doi.org/ . /J.JLAMP. . . . Makkai, M., Paré, R.：《可及范畴：范畴模型论的基础》，当代数学，第 104 卷。美国数学会，普罗维登斯，RI (1989)，176 页。16. Purdy, C., Damato, S.：单子容器的分配律。载于：Cîrstea, C., Knapp, A. (编)《第 11 届计算机科学代数与余代数会议》，CALCO 2025，斯特拉斯克莱德大学，英国，2025 年 6 月 16–18 日。LIPIcs，第 342 卷，第 4:1–4:22 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心 (2025)。https: //doi.org/10 4 17 4230 2025 . /LIPICS.CALCO. . . Schubert, C., Seal, G.J.：松弛代数理论中的扩张。范畴理论与应用 [仅电子版] **21**，118–151 (2008)，http://eudml. org/doi/130307 18. Seal, G.J.：一种基于 Kleisli 的松弛代数方法。应用范畴结构 17 6 19 1 75 89 2009 10 1007 10485 008 9135 ( ), – ( ). https://doi.org/ . /s - - - . Street, R.：单子的形式理论。纯粹与应用代数杂志 2(2), 149–168 (1972)。https://doi.org/10.1016/0022-4049(72)90019-9，这是在 2-范畴中对单子形式理论的奠基性发展。20. Trnková, V.：关系自动机的一般理论。Fund. Inform. 3(2), 189–233 (1980 3208 21 10 3233 1980)。https://doi.org/ . /FI- - . Zwart, M., Marsden, D.：分配律的不可能性定理。Log. Methods Com- put. Sci. 18(1) (2022)。https://doi.org/10.46298/LMCS-18(1:13)2022