arXiv:2602.13171v1 [math.RA] 13 Feb 2026

从复数到有理数的快速矩阵乘法

Yoav Moran*[1]、Oded Schwartz†[1]、Shuncheng Yuan‡[2]

[1]耶路撒冷希伯来大学[2]加州大学圣迭戈分校

摘要

快速矩阵乘法算法在渐近意义上快于经典立方时间算法，但在实践中往往更慢。其中一个重要障碍是使用复数系数，这会增加算术开销并限制实际效率。本文重点研究如何将复系数矩阵乘法方案转换为等价的实系数或有理数系数方案。我们提出了一种系统方法：给定一个复系数方案，该方法要么构造出一族等价的有理数算法，要么证明不存在等价的有理数方案。我们的方法仅依赖于复矩阵相似变换的基本线性代数性质。该方法不仅重新得出了 Dumas、Pernet 和 Sedoglavic（2025）此前已知的特设结果，还将其推广到更一般的情形，包括涉及有理数系数和平方根的算法，其中 $i = \sqrt{-1}$ 是一个特例。

利用这一框架，我们证明，不存在与 Smirnov 的$\langle 4,\ 4,\ 9,\ 104\rangle$ $\mathbb{Q}[\sqrt{161}]$ 算法（2022）等价的有理数方案，也不存在与 Kaporin（2024）的$\langle 4,\ 4,\ 4,\ 48\rangle$ 复杂算法等价的实数方案。更一般地，我们的方法还可用于证明整数系数方案的不存在性。

1 引言

1.1 背景

矩阵乘法是许多应用中的基础原语，例如数值线性代数、机器学习、数据分析和图算法。经典算法使用 $O(n^3)$ 次运算将两个 $n \times n$ 矩阵相乘。Strassen [47] 是首位发现次立方 $O(n^{\log_2 7})$ 算法的人。此后，众多研究不断改进矩阵乘法指数的已知最佳上界 ω（例如 [37, 8, 40, 39, 11,48, 10, 46, 52, 32, 1, 15, 53, 2]），目前最佳上界为 $\omega < 2.371339$ [2]。然而，

*电子邮件：yoav.gross@mail.huji.ac.il

†电子邮件：odedsc@cs.huji.ac.il

‡电子邮件：syuan@ucsd.edu

其中许多改进都伴随着极大的隐藏常数，仅适用于天文数字般大的矩阵维数。

因此，实用矩阵乘法的研究已分化为多个方向。其中一个方向旨在改善渐近界，同时保留其对维数可行的矩阵的适用性。这些技术包括三线性聚合 [37, 36, 38,31, 14, 9, 41]，基于翻转图的搜索 [29, 30, 3, 34]，基于SAT求解器的搜索 [12, 20, 21,54]，交替最小二乘 [26, 45, 6]，零填充 [14, 43, 18]，和强化学习 [18, 50, 35]。近期研究还探讨了快速矩阵乘法算法的数值稳定性 [7, 13, 4, 51, 42]，，并力求降低首项系数 [28, 5, 22, 33]。

一些快速矩阵乘法算法依赖复数系数，包括 Kaporin 的算法 [27] ，以及 Google DeepMind 团队使用 AlphaEvolve编程智能体发现的方案 [35]。与实数运算相比，复数运算会带来更高的计算开销，这可能限制此类算法的实际效率。因此，将复系数方案转换为等价的实系数方案，在实践中可以显著提升性能。

在发现复系数方案之后， [35], Dumas、Pernet 和 Se- doglavic 运用 De-Groote 作用构造了等价的有理系数方案 [16,17]。他们的方法利用张量的对称性，并结合精心挑选的、针对具体问题的启发式方法。

1.2 我们的贡献

我们的主要贡献是给出了一个充要条件，用以判断复值矩阵乘法方案是否存在等价的有理数方案（在 De-Groote 作用下）。我们还提供了一种明确的算法，用于判断是否存在这种等价的有理数形式，并在存在时构造出该形式。利用此方法，我们重新得到了 Dumas、Pernet 和 Sedoglavic 的结果。

我们还得到了新的不存在性结果。特别地，我们证明，Smirnov方案 [44] 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{161})$ 上不存在等价的有理数方案；Kaporin 的复系数方案 [27]不存在等价的实数方案。具体而言，我们证明，在 $\mathbb{Q}(\sqrt{161})$上不存在与 Smirnov 算法等价的有理数方案，也不存在与 Kaporin 的复算法 [27]等价的实数方案。我们还将这一框架扩展到研究有理数方案能否转换为等价的整数方案。利用这一扩展，我们证明，AlphaEvolve [35] 生成的方案不存在等价整数方案，若干已知的 $\mathbb{Z}[1/2]$方案 [45, 24, 4]也不存在等价整数方案。

2 预备知识

2.1 符号说明

在本文中，我们分别用 $M_{m,n}(R)$ 和 $M_n(R)$ 表示元素属于环 R 的 $m\times n$ 矩阵集合以及 $n\times n$ 方阵集合。 $GL_n(R) = \{A \in M_n(R) : A$ 可逆$\}$ 表示一般线性群。

设 $\mathbb{F}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{F}\}$ 为 $\mathbb{F}$ 上特征为 0 的二次扩张（多数情况下为 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$）。对元素 $a + b\sqrt{d} \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$，定义其共轭 $\overline{a + b\sqrt{d}} = a - b\sqrt{d}$。对矩阵 $A \in M_{m,n}(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，令 $\overline{A}$ 表示 A 的逐项共轭，并令 $A(i,j)$ $A(i,:)$ $A(:,j)$ 分别表示 A 的第 (i,j) 项、第 i 行和第 j 列。容易验证，这种共轭满足以下性质。

命题 1. 对于 a、$b \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$、$A$、$B \in M_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$、$C \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$ 下列结论成立。

$$\begin{aligned}
\overline{ab} &= \overline{a} \cdot \overline{b} \\
\overline{a + b} &= \overline{a} + \overline{b} \\
\overline{AB} &= \overline{A} \cdot \overline{B} \\
\overline{C^{-1}} &= \overline{C}^{-1}.
\end{aligned}$$

2.2 矩阵乘法张量与编码矩阵

矩阵乘法本质上是一个双线性映射。编码双线性映射有两种方式。对于环 R，设 $f : R^n \times R^m \to R^k$ 是一个执行 r 次环乘法的双线性方案。则存在 $U \in M_{r,n}(R)$ $V \in M_{r,m}(R)$ $W \in M_{r,k}(R)$，使得对每一个 $x \in R^n, y \in R^m$，

$$f(x, y) = W^T((Ux) \odot (Vy)), \tag{1}$$

其中 $\odot$ 表示 Hadamard积 [49]。我们将 (U, V, W) 称为映射 f 的编码矩阵。

另一种方式是将映射编码为一个张量。由上述编码矩阵 (U, V, W)，下列张量同样编码了映射 f。 $\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$ 其中 $O_j = U(j,:)$ $P_j = V(j,:)$ $Q_j = W(j,:)$。

具体而言，在矩阵乘法的语境中，设 $f : M_{m,n}(R) \times M_{n,p}(R) \to M_{m,p}(R)$ 是一个执行 r 个环元素乘法的矩阵乘法算法。我们称其为一个 $\langle m, n, p, r \rangle$-算法。在这种情况下，$U \in M_{t,m \cdot n}(R)$ $V \in M_{t,n \cdot p}(R)$ $W \in M_{t,p \cdot m}(R)$。在张量分解中，$O_j \in M_{m,n}(R)$ $P_j \in M_{n,p}(R)$ $Q_j^T \in M_{m,p}(R)$ 的向量化分别是 U, V, W 的行。此外，它们满足以下 Brent方程。

命题 2. 设 R 是一个环。U, V, W 是一个 $\langle m, n, p, r \rangle$-算法的编码矩阵，当且仅当对于每个 $i_1, i_2 \in [m], j_1, j_2 \in [n], k_1, k_2 \in [p]$，$\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$ 是相应的编码张量分解，

$$\sum_{t=1}^{r} O_t(i_1, j_1) P_t(j_2, k_1) Q_t(k_2, i_2) = \delta_{i_1,i_2} \delta_{j_1,j_2} \delta_{k_1,k_2}$$

等价地

$$\sum_{t=1}^{r} U(t, (i_1, j_1)) V(t, (j_2, k_1)) W(t, (i_2, k_2)) = \delta_{i_1,i_2} \delta_{j_1,j_2} \delta_{k_1,k_2}$$

其中，如果 $\delta_{i,\ j} = 1$ $i = j$，否则为 0 。

矩阵乘法算法的一个例子是用于两个 2×2矩阵乘法的 Strassen算法。对于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

计算 $AB = C$ 的 Strassen算法是:

$$\begin{array}{l|l} p_1 = (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) & c_{1,1} = p_1 + p_4 - p_5 + p_7 \\ p_2 = (a_{2,1} + a_{2,2})(b_{1,1}) & c_{1,2} = p_3 + p_5 \\ p_3 = (a_{1,1})(b_{1,2} - b_{2,2}) & c_{2,1} = p_2 + p_4 \\ p_4 = (a_{2,2})(b_{2,1} - b_{1,1}) & c_{2,2} = p_1 - p_2 + p_3 + p_6 \\ p_5 = (a_{1,1} + a_{1,2})(b_{2,2}) & \\ p_6 = (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) & \\ p_7 = (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) & \end{array}$$

其编码矩阵为

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

相应的矩阵乘法张量 $\sum_{j=1}^{7} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$ 为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

对于大小为 2^k 乘以 2^k 的矩阵，其中某个整数 k，可以将 Strassen算法应用于 2^{k-1} 乘以 2^{k-1} 的分块，并递归地用于计算矩阵乘法。另一个例子是，任何用于计算 $n \times m$和 $m \times p$ 矩阵乘法的标准算法都是一个矩阵乘法张量

$$\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{n,m,p} E_{j_1 j_2}^{(n,m)} \otimes {E_{j_2 j_3}}^{(m,p)} \otimes E_{j_3 j_1}^{(p,n)},$$

其中这些矩阵是矩阵空间的标准基矩阵。

2.3 De-Groote 作用

给定一个矩阵乘法张量 $\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$，对于任意可逆的 X，Y，Z [19, 23]，以下张量 $\sum_{j=1}^{r} P_j \otimes Q_j \otimes O_j$、$\sum_{j=1}^{r} P_j^T \otimes O_j^T \otimes Q_j^T$ 和 $\sum_{j=1}^{r} XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 也都是矩阵乘法张量。对于一个张量，以下结论成立

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j O_j \otimes P_j \otimes Q_j = \sum_{j=1}^{r} O_j \otimes \alpha_j P_j \otimes Q_j = \sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes \alpha_j Q_j \tag{3}$$

我们将这些称为 De-Groote 作用或 De-Groote 变换。

如果存在 α_j，β_j，γ_j，使得 $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j O_j \otimes \beta_j P_j \otimes \gamma_j Q_j$ 的所有元素都属于 $\mathbb{F}$，那么我们称 $\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$ 在 $\mathbb{F}$ 中相差一个标量。

3 结果

我们展示如何使用 De-Groote 作用将矩阵乘法张量从$\mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 变换为 $\mathbb{F}$，例如 $\mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}$。在 3.1 节中，我们介绍算法及其理论保证。在 3.2 节中，我们展示此处得到的 $\mathbb{Q}$ 中的大多数张量无法进一步变换为 $\mathbb{Z}$。

3.1 有理数 De-Groote 等价点

设 $\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$ 是一个矩阵乘法张量。我们知道，对于任意尺寸相容的可逆X，Y，Z，$\sum_{j=1}^{r} XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 仍是一个矩阵乘法张量，因为这是一种 De-Groote 作用。Dumas、Pernet 和 Sedoglavic 发现了 De-Groote 作用，可以将 $\langle 4, 4, 4, 48\rangle$ 和 $\langle 3, 4, 7, 63\rangle$ 中的复张量变换为有理张量 [17, 16]。他们的构造巧妙地利用相关张量的对称性，并作出合理猜测。相比之下，我们给出一种算法，不仅能判断是否可以使用 De-Groote 作用将复张量变换为实张量，而且在这种变换存在时，还能给出构造方法。

假设 $O_j \in M_{m,n}(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$ $P_j \in M_{n,p}(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$ $Q_j \in M_{p,m}(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$。如果存在 $X \in GL_m(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$、$Y \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$、$Z \in GL_p(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，使得 $\sum_{j=1}^{r} XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 属于 $\mathbb{F}$，那么

$$(XO_jY^{-1})(YP_jZ^{-1})(ZQ_jX^{-1}) = X(O_jP_jQ_j)X^{-1} \tag{4}$$
$$(YP_jZ^{-1})(ZQ_jX^{-1})(XO_jY^{-1}) = Y(P_jQ_jO_j)Y^{-1} \tag{5}$$
$$(ZQ_jX^{-1})(XO_jY^{-1})(YP_jZ^{-1}) = Z(Q_jO_jP_j)Z^{-1} \tag{6}$$

是所有元素均属于 $\mathbb{F}$ 的矩阵。这意味着存在可逆的 X, Y, Z，使得

$$X(O_jP_jQ_j)X^{-1} \in M_n(\mathbb{F}), \tag{7}$$
$$Y(P_jQ_jO_j)Y^{-1} \in M_m(\mathbb{F}), \tag{8}$$
$$Z(Q_jO_jP_j)Z^{-1} \in M_p(\mathbb{F}) \tag{9}$$

对所有 $j = 1$、.....、r。下面的定理 1 表明，若不存在满足以下条件的 S：对于所有 j，$SO_jP_jQ_j = O_jP_jQ_jS$ 且 $SS = I$，则不存在这样的 X。Y、Z 的存在性也类似。寻找这样的 S 等价于求解一个线性方程组。找到这个 S 后，受下面定理 2 的证明启发，我们可以通过求解一个线性方程组，由 S 构造出 X。

引理 1. 设 $A \in M_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$。若存在 $X \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，使得 $XAX^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$，则存在 $S \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，使得 $SA = \bar{A}S$ 且 $SS = I$。

证明. 设 $R = XAX^{-1}$。由于 R 属于 $\mathbb{F}$,

$$XAX^{-1} = R = \bar{R} = \overline{XAX^{-1}} = \overline{X} \cdot \overline{A} \cdot \overline{X}^{-1} \tag{10}$$

取 $S = X^{-1}X$即可完成证明。 □

将此引理应用于我们的情形，得到如下结论。

定理 1. 如果不存在满足 $S(O_jP_jQ_j) = O_jP_jQ_jS$ 的 S，使得对于 $j = 1, r$.....同时满足 $SS = I$，或者对于 $P_jQ_jO_j$ 或 $Q_jO_jP_j$ 也有类似情形，那么就不存在 X、Y、Z，使得 $XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 全都属于 $\mathbb{F}$。

定理 2. 对于 $A \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，如果存在 $S \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，使得 $SA = AS$ 且 $S\overline{S} = I$，那么就存在 $X \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，使得 $X\overline{A}X^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$。

我们使用两个引理来证明定理 2。

引理 2. 在此引理中，我们将向量视为行向量。设 $S \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$ 是一个满足 $SS = I$ 的矩阵。那么 $f\colon \mathbb{F}[\sqrt{d}]^n \to \overline{\mathbb{F}}[\sqrt{d}]^n$, $f(x) = xS$ 是一个反线性对合，即对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 和 $x, y \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]^n$

$$f(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}f(x) + \overline{\beta}f(y) \qquad \textit{(anti-linearity)} \tag{11}$$
$$f \circ f = id_{\mathbb{F}[\sqrt{d}]^n} \qquad \textit{(involution).} \tag{12}$$

证明。令 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 和 $x, y \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]^n$。

反线性:

$$f(\alpha x + \beta y) = (\overline{\alpha x + \beta y})S = \overline{\alpha x}S + \overline{\beta y}S = \overline{\alpha}f(x) + \overline{\beta}f(y)$$

对合:

$$f(f(x)) = f(\overline{x}S) = \overline{\overline{x}S}S = x\overline{S}S = x$$

□

引理 3. 设 $f:\ \mathbb{F}[\sqrt{d}]^{n}\to\mathbb{F}[\sqrt{d}]^{n}$ 是一个反线性对合，且 $\mathrm{Fix}(f)=\{x\in\mathbb{F}[\sqrt{d}]:\ f(x)=\overline{x}\}$ 是 f 的不动点集合。那么 $\mathrm{Fix}(f)$ 是一个 n 维子空间（基于 $\mathbb{F}$。

证明。对于 $a,\ b\in\mathrm{Fix}(f)$，以及 $\alpha\in\mathbb{F}$,

$$f(a+b)=f(a)+f(b)=a+b\implies a+b\in\mathrm{Fix}(f)$$
$$f(\alpha b)=\alpha f(b)=\alpha b\implies \alpha b\in\mathrm{Fix}(f).$$

这表明 $\mathrm{Fix}(f)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个子空间。接下来，我们证明 $\mathrm{Fix}(f)\bigoplus\sqrt{d}\mathrm{Fix}(f)=\mathbb{F}[\sqrt{d}]^{n}$，其中 $\sqrt{d}\mathrm{Fix}(f)=\{\sqrt{d}a:\ a\in\mathrm{Fix}(f)\}$。

对于任意 $a\in\mathbb{F}[\sqrt{d}]^{n}$、$a=a_1+a_2$，其中

$$a_1=\frac{a+f(a)}{2},\qquad a_2=\frac{a-f(a)}{2}.$$

下列关系成立：$f(a_1)=f\left(\frac{a+f(a)}{2}\right)=\frac{1}{2}[f(a)+f(f(a))]=a_1$，因此，$a_1\in\mathrm{Fix}(f)$。此外，

$$f\left(\frac{\sqrt{d}}{d}a_2\right)=-\frac{\sqrt{d}}{d}f\left(\frac{a-f(a)}{2}\right)=-\frac{\sqrt{d}}{d}\frac{1}{2}[f(a)-a]=\frac{\sqrt{d}}{d}a_2$$

因此，$a_2\in\sqrt{d}\mathrm{Fix}(f)$。如果 $a\in\mathrm{Fix}(f)\cap\sqrt{d}\mathrm{Fix}(f)$

$$\frac{\sqrt{d}}{d}a=f\left(\frac{\sqrt{d}}{d}a\right)=-\frac{\sqrt{d}}{d}f(a)=-\frac{\sqrt{d}}{d}a.$$

因此，该交集是平凡空间，并且这是一个直和，这意味着 $\mathrm{Fix}(f)$ 的维数是 n。

□

定理 *2* 的证明。该定理见于 [25] 及其他一些教科书中。证明使用 Jordan 标准形。然而，由于这一证明思路是从 S构造X 的关键组成部分，我们在此给出一个构造性证明。

从引理 1 的证明中，我们看到 S 和 X 满足

$$\overline{X}S=X \tag{13}$$

这意味着 X 的行 x_j 满足 $x_jS=\overline{x}_j$。这为构造提供了直观思路。定义 $f\colon\mathbb{F}[\sqrt{d}]^{n}\to\mathbb{F}[\sqrt{d}]^{n}$，$f(x)=xS$。根据引理 2，这是一个反线性对合；根据引理 3，$\mathrm{Fix}(f)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维子空间。设 x_1，x_2，……，x_n 是 $\mathrm{Fix}(f)$ 的一个 $\mathbb{F}$基。构造 $X=[x_1^T,x_2^T,\cdots,x_n^T]^T$，该 X满足所需性质，因为

$$\begin{aligned}\overline{XAX^{-1}}&=\overline{X}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X}^{-1}\\&=\overline{X}\cdot(SAS^{-1})\cdot\overline{X}^{-1}\\&=(\overline{X}S)A(\overline{X}S)^{-1}\\&=XAX^{-1}\ ,\end{aligned}$$

因此，必然有 XAX^{-1} 属于 $M_n(\mathbb{F})$。 □

算法 1 从一个 $\mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 张量的轨道中寻找一个 $\mathbb{F}$ 点

输入： 一个元素取自 $\mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 的矩阵乘法张量 $\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$

1. 对每个 $j = 1,\ldots,r$，构造 $M_j = O_j P_j Q_j$。2. 同时求解 $SM_j = M_j S$，$SS = I$ $j = 1,\ldots,r$。3. 如果存在 S，转到 4。否则，输出 Null。4. 计算不动点空间 $x \to xS$ 的基 $\{x_1, \ldots, x_n\}$。5. 构造 $X = [x_1; \ldots; x_n]$。6. 使用 $M_j = P_j Q_j O_j$ 和 $M_j = Q_j O_j P_j$ 重复步骤 1-5，以构造 Y, Z。

上述定理归纳为算法 1。

乍一看，这个算法只能确保矩阵 $UO_jP_jQ_jU^{-1}$、$VP_jQ_jO_jV^{-1}$、$WQ_jO_jP_jW^{-1}$ 都属于 $\mathbb{F}$。原则上，可能存在某些 j、UO_jV^{-1} 或 VP_jW^{-1} 或 WQ_jU^{-1} 不具有 αR 的形式，其中 $\alpha \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 且 $R \in M(\mathbb{F})$。例如，

$$XO_1Y^{-1} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, YP_1Z^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, ZQ_1X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

满足 $XO_1P_1Q_1X^{-1}$ $YP_1Q_1O_1Y^{-1}$，$ZQ_1O_1P_1Z^{-1}$ 均为单位矩阵，但它不属于 $\mathbb{F}$ 在相差一个标量倍数的意义下。

然而，如果算法中的 S 在相差一个标量倍数的意义下唯一，且 α 满足$\alpha\alpha = 1$，那么这种情况就不会发生。也就是说，如果 S，S' 均满足 $SO_jP_jQ_j = \overline{O_jP_jQ_j}S$ 和 $S\overline{S} = I$，那么对于某个满足 $\alpha\alpha = 1$ 的 $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}[\sqrt{d}]$，有 $S = \alpha S'$。为证明这一点，我们先证明一个引理。

引理 4。对于定义在 $\mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 上的矩阵乘法张量 $\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$，假设存在一组三元组 X、Y、Z，它由步骤 *4* 中的算法导出，且满足 $XO_jY^{-1} = \alpha_1 R_1$、$YP_jZ^{-1} = \alpha_2 R_2$、$ZQ_jX^{-1} = \alpha_3 R_3$，其中 α_1、α_2、$\alpha_3 \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$ 满足$\sim\ \sim\ \sim\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \in \mathbb{F}$，并且 R_1、R_2、$R_3 \in M_n(\mathbb{F})$。那么，对于算法导出的任意一组可能的 X、Y、Z，XO_jY^{-1}、YP_jZ^{-1} 和 ZQ_jX^{-1} 具有相同的形式。

证明。$\widetilde{X}$ 和 X 都满足

$$\overline{X}S = X \qquad \overline{\widetilde{X}}S = \widetilde{X}.$$

由此可得

$$\overline{\widetilde{X}X^{-1}} = \overline{\widetilde{X}}\,\overline{X^{-1}} = \overline{\widetilde{X}}(\overline{XS})^{-1} = \overline{\widetilde{X}}\,\overline{S^{-1}X^{-1}} = (\overline{\widetilde{X}}S)X^{-1} = \widetilde{X}X^{-1}.$$

因此，$\widetilde{X}X^{-1}$ 属于 $\mathbb{F}$。类似的论证表明，$\widetilde{Y}Y^{-1}$ 和 $\widetilde{Z}Z^{-1}$ 都是实数。现在

$$\widetilde{X}O_j\widetilde{Y}^{-1} = \widetilde{X}X^{-1}XO_jY^{-1}(\widetilde{Y}Y^{-1})^{-1} = \alpha_1\widetilde{X}X^{-1}R_1(\widetilde{Y}Y^{-1})^{-1}.$$

用 YP_jZ^{-1} 和 ZQ_jX^{-1} 重复这一过程，即可完成证明。 □

这个引理表明，算法步骤 4 中基的选择并不重要。如果一种基可行，那么所有基都可行。下面的定理表明，前面提到的潜在问题不会出现。

定理 3. 对于矩阵乘法张量 $\sum_{j=1}^{r} O_j \otimes P_j \otimes Q_j$ *over* $\mathbb{F}[\sqrt{d}]$，假设存在 X, Y, Z，使得 $XO_jY^{-1} \otimes VP_jW^{-1} \otimes WQ_jU^{-1}$ 在相差一个标量的意义下都属于 $\mathbb{F}$。如果算法中存在 S，且它在相差一个标量 α 的意义下是唯一的，并满足 $\alpha\alpha = 1$，那么对于算法计算得到的任意 X, Y, Z，$XO_jY^{-1} \otimes \sim \sim \sim \sim \sim \sim YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 都属于 $\mathbb{F}$。

证明。假设 X, Y, Z 满足 $\sum_{j=1}^{r} XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 属于 $\mathbb{F}$。那么 $S = \overline{X^{-1}}X$ 满足 $SO_jP_jQ_j = O_j\overline{P_jQ_jS}$ 和 $SS = I$。如果我们假设 S 在上述意义下是唯一的，那么算法计算得到的 $\widetilde{S}$ 和 $\widetilde{X}$ 满足某个 $\alpha \in \mathbb{F}[\sqrt{d}]$所对应的 $\widetilde{S} = \alpha S$，并且 $\widetilde{X}\widetilde{S} = \widetilde{X}$。根据定理 2，存在 $T \in GL_n(\mathbb{F}[\sqrt{d}])$，使得 $T^{-1}T = \alpha I$。由此可得

$$\widetilde{S} = \alpha S = (\overline{TX})^{-1}TX \tag{14}$$

这意味着，X 和 X 的各行构成了 $x \to xS$的不动点空间的一组基。结合命题 4，即可得出该结果。 □

3.2 整数算法

将 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 张量变换为 $\mathbb{Q}$ 张量后，可以进一步探究是否存在 X，Y，Z使得 $\sum_{j=1}^{r} XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 为整数张量，从而实现更快的计算。本节将介绍一种通过考察 $O_jP_jQ_j$的迹来检验其是否存在的方法。

如果一个矩阵乘法张量中存在 j，使得 $O_jP_jQ_j$ 的迹不是整数，那么根据下面的命题 3，不存在 X，Y，Z 使得 $\sum_{j=1}^{r} XO_jY^{-1} \otimes YP_jZ^{-1} \otimes ZQ_jX^{-1}$ 是一个仅含整数矩阵的张量（相差一个标量因子）。这实际上表明，Google DeepMind 团队发现的 $\langle 3, 4, 7, 63\rangle$ 复杂算法，以及 Smirnov 发现的$\langle 3, 3, 6, 40\rangle$ $\mathbb{Z}[1/2]$ 算法，都无法变换为整数算法，因为在这两种情况下，对于某个 j，Trace($O_jP_jQ_j$) $\notin \mathbb{Z}$。

如果所有 $O_jP_jQ_j$的迹都是整数，例如 Google DeepMind 团队发现的 $\langle 4,4,4,48\rangle$ 张量中所有 $O_jP_jQ_j$ 的迹都是 1 或 2，那么接下来我们可以考察所有 $j_1, j_2 = 1,\ldots,r$的 Trace($O_{j_1}P_{j_1}Q_{j_1} \cdot O_{j_2}P_{j_2}Q_{j_2}$)。事实证明，存在 j_1, j_2 使得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Trace}(O_{j_1}P_{j_1}Q_{j_1}) = 1\\
&\mathrm{Trace}(O_{j_2}P_{j_2}Q_{j_2}) = 1\\
&\mathrm{Trace}(O_{j_1}P_{j_1}Q_{j_1} \cdot O_{j_2}P_{j_2}Q_{j_2}) = 1/2
\end{aligned}$$

这意味着该算法不存在 $\mathbb{Z}$ 等价形式。同样，Hopcroft 和 Kerr 提出的 $\langle 3, 3, 6, 32\rangle$ 上的 $\langle 2,4,5, 32\rangle$ 算法也因同样的原因不存在 $\mathbb{Z}$ 等价形式。

最后， $\mathbb{Z}[1/2]$ 上的 $\langle 2, 4, 4, 26\rangle$ 算法也不具有 $\mathbb{Z}$ 等价形式。该算法满足：对于所有 $j = 1, \ldots, r$，以及所有数对 $j_1, j_2 = 1, \ldots, r$

$$\mathrm{Trace}(O_{j_1} P_{j_1} Q_{j_1}) \in \mathbb{Z}$$
$$\mathrm{Trace}(O_{j_1} P_{j_1} Q_{j_1} \cdot O_{j_2} P_{j_2} Q_{j_2}) \in \mathbb{Z}.$$

然而，存在 j_1， j_2， j_3 使得

$$\mathrm{Trace}(O_{j_1} P_{j_1} Q_{j_1} \cdot O_{j_2} P_{j_2} Q_{j_2} \cdot O_{j_3} P_{j_3} Q_{j_3}) \notin \mathbb{Z},$$

这表明不存在 $\mathbb{Z}$ 等价形式。

一般来说，我们可以使用以下命题。

命题 3。 设 $A_1, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{C})$。假设存在 $j_1, \ldots, j_k$ 使得 迹$(\prod_{\ell=1}^{k} A_{j_\ell}) \notin \mathbb{Z}$，则不存在 X 可逆，使得对每个 j都有 $XA_jX^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$。

证明。 假设存在 X 使得对每个 j都有 $XA_jX^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$。那么对于任意指标 $j_1, \ldots, j_k$，

$$\prod_{\ell=1}^{k} (XA_{j_\ell}X^{-1}) = X(\prod_{\ell=1}^{k} A_{j_\ell})X^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}).$$

Hence 迹$(\prod_{\ell=1}^{k} A_{j_\ell}) \in \mathbb{Z}$。这证明了该命题的逆否命题 n. □

4 应用

我们将算法应用于 $\langle 4, 4, 4, 48\rangle$ 和 $\langle 3, 4, 7, 63\rangle$ 在 $\mathbb{Q}[i]$ 中的算法， [35],$\langle 4, 9, 4, 104\rangle$ 在 $\mathbb{Q}[\sqrt{161}]$ 中的算法，以及另一个 [44],、4、4、$\langle 4$在 $48\rangle$ 中的算法。我们还检查了 $\mathbb{C}$、3、6、 [27]、4、5、 $\langle 3$和 $40\rangle$ $\langle 2, 4, 4, 32\rangle$ 在 $\langle 2$中的算法能否变换为 $26\rangle$ 张量。其中，两个 $\mathbb{Z}[1/2]$ 张量可以变换为 [45,中的一个张量，正如 Dumas、Pernet 和 Sedoglavic 在 24, 4] 中所证明的；我们还可以证明，使用 De-Groote 作用无法将 $\mathbb{Z}$ 张量变换为有理数张量。 $\mathbb{Q}[i]$ 、4、4、 $\mathbb{Q}$ 在 [17, 16], 中的张量也无法使用 De-Groote 作用变换为 $\mathbb{Q}[\sqrt{161}]$ 张量。以上信息总结在下表中。

算法	原始环	新环	不存在性
$\langle 4, 4, 4, 48\rangle$ [35]	$\mathbb{Q}[i]$	$\mathbb{Z}[1/8]$	$\mathbb{Z}$
$\langle 3, 4, 7, 63\rangle$ [35]	$\mathbb{Q}[i]$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$
$\langle 4, 4, 4, 48\rangle$ [27]	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\langle 4, 9, 4, 104\rangle$ [44]	$\mathbb{Q}[\sqrt{161}]$	$\mathbb{Q}[\sqrt{161}]$	$\mathbb{Q}$
$\langle 3, 3, 6, 40\rangle$ [45]	$\mathbb{Z}[1/2]$	$\mathbb{Z}[1/2]$	$\mathbb{Z}$
$\langle 2, 4, 5, 32\rangle$ [24]	$\mathbb{Z}[1/2]$	$\mathbb{Z}[1/2]$	$\mathbb{Z}$
$\langle 2, 4, 4, 26\rangle$ [6]	$\mathbb{Z}[1/2]$	$\mathbb{Z}[1/2]$	$\mathbb{Z}$

我们的算法应用于 $\langle 4, 4, 4, 48\rangle$ 张量（在 [35] 中）的详细步骤如下。

在步骤 1 和 2 中，形成 $O_jP_jQ_j$ 后，零空间是一维的:

$$\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\right\}$$

因此， S 的形式为

$$\begin{bmatrix}0&0&0&\alpha\\0&0&i\alpha&0\\0&i\alpha&0&0\\\alpha&0&0&0\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{Q}[i], |\alpha| = 1.$$

X [17] 满足步骤 4 中的 $XS = X$ 。另一个可行的 X 为

$$X = \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&i&0\\0&i&1&0\\i&0&0&-i\end{bmatrix}$$

对于 $P_jQ_jO_j$，零空间也是一维的

$$\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

因此， S 的形式为

$$\begin{bmatrix}-\alpha&0&0&0\\0&-\alpha&0&0\\0&0&-\alpha&0\\0&0&0&\alpha\end{bmatrix} \alpha \in \mathbb{Q}[i], |\alpha| = 1.$$

一个可行的 Y 为

$$Y = \begin{bmatrix}i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

对于 $Q_jO_jP_j$, $S = I$，因此 Z 可以直接是 I。通过变换推导出的有理算法

通过取 $\langle 4, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 48 \rangle$ 在 [35] 中的复杂算法

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -i & i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

见附录。在此， X、 Y、 Z 是任意选择的，用于说明基的选择并不重要。根据引理 4，如果这一特定三元组有效，那么算法生成的任何 X、 Y、 Z都将有效。

5 开放问题

1. 在本文中，我们找到了一个充分条件，使 $\mathbb{Z}$等价算法不存在。寻找使用 De-Groote 作用实现整数算法的充要条件是有意义的。

2. 我们论证了，如果 S 在标量意义下唯一，则类似问题 14 的问题不会出现。尽管S 在我们看到的所有情形中都是唯一的，但论证上述问题是否可以避免仍然很有意思。

3. 许多快速矩阵算法在约化环上没有等价形式。另一个未来方向是使用替代基方法来弥合这一差距。Karstadt 和 Schwartz 引入了替代基方法，通过使编码矩阵 [28]稀疏化，降低快速矩阵乘法算法复杂度的首项系数。

6 致谢

Shuncheng Yuan 感谢 UC MRPI M25PL9060 的支持。我们还感谢 Ioana Dumitriu 提供的宝贵意见，帮助提升论文的清晰度。本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟地平线 2020 研究与创新计划下的资助（资助协议编号 818252、101113120、101138056、101142020）、以色列科学基金会的资助（资助编号 1354/23、514/20），以及 Science Accelerator、创新、科学与技术部的科学前沿倡议和 Len Blavatnik 与布拉瓦特尼克家族基金会的支持。作者在访问西蒙斯计算理论研究所期间完成了本研究的部分工作。

参考文献

[1] Josh Alman 和 Virginia Vassilevska Williams。“一种改进的激光方法与更快的矩阵乘法”。载于：TheoretiCS 3（2024）。[2] Josh Alman 等。“更多的不对称性带来更快的矩阵乘法”。载于：2025 年 ACM-SIAM离散算法年会论文集（SODA）。SIAM。2025 年，第 2005–2039 页。[3] Yamato Arai、Yuma Ichikawa 和 Koji Hukushima。“用于矩阵乘法的自适应翻转图算法”。载于：2024 年国际符号与代数计算研讨会论文集。2024 年，第 292–298 页。[4] Grey Ballard 等。“提升快速矩阵乘法的数值稳定性”。载于：SIAM矩阵分析与应用杂志 37.4（2016），第 1382–1418 页。[5] Gal Beniamini 等。“快速矩阵乘法算法中算子的稀疏化”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2008.03759（2020）。[6] Austin R Benson 和 Grey Ballard。“实用并行快速矩阵乘法框架”。载于：ACM SIGPLAN Notices 50.8（2015），第 42–53 页。[7] Dario Bini 和 Grazia Lotti。“矩阵乘法快速算法的稳定性”。载于：Numerische Mathematik 36.1（1980），第 63–72 页。[8] Dario Bini 等。“n× n 近似矩阵乘法的复杂度为 O(n2.7799)”。载于：Information Processing Letters 8.5（1979），第 234–235 页。[9] Alin Bostan、Hadrien Notarantonio 和 Mohab Safey El Din。“离散微分方程的快速算法”。载于：2023 年国际符号与代数计算研讨会论文集。ISSAC '23。挪威特罗姆瑟：计算机协会，2023 年，第 80–89 页。 ISBN: 9798400700392. DOI: 10.1145/3597066.3597103. URL: https://doi.org/10.1145/3597066.3597103.[10] Don Coppersmith 和 Shmuel Winograd。“通过算术级数进行矩阵乘法”。载于：第十九届 ACM计算理论研讨会论文集。1987 年，第 1–6 页。[11] Don Coppersmith 和 Shmuel Winograd。“关于矩阵乘法的渐近复杂度”。载于：SIAM计算杂志 11.3（1982），第 472–492 页。[12] Nicolas T. Courtois、Gregory V. Bard 和 Daniel Hulme。“一种仅用 23 次乘法计算 3×3矩阵的新型通用方法”。载于：（2011）。arXiv:1108.2830 [cs.SC]. URL: https://arxiv.org/abs/1108.2830.[13] James Demmel 等。“快速矩阵乘法具有稳定性”。载于：Numerische Mathematik 106.2（2007），第 199–224 页。[14] Charles ´Eric Drevet、Md. Nazrul Islam 和 ´Eric Schost。“小规模矩阵乘法的优化技术”。载于：《理论计算机科学》412.22（2011），第 2219–2236 页。 ISSN: 0304-3975. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2010.12.012. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397510007

036.

[15] 段然、吴宏勋和周仁飞。“通过非对称哈希实现更快的矩阵乘法”。载于：*2023*年第*64*届*IEEE*计算机科学基础年会（*FOCS*）。IEEE。2023年，第2129–2138页。[16] Jean-GuillaumeDumas、Cl´ement Pernet 和 AlexandreSedoglavic。“一种非交换的

e

算法：使用63次非复数乘法将一个3x4矩阵与一个4x7矩阵相乘”。工作论文或预印本。2025年6月。 URL: https://hal.science/hal-05121550。[17] Jean-GuillaumeDumas、Cl´ement Pernet 和 AlexandreSedoglavic。一种非交换的

e

使用 4×4 *48* 次非复数乘法计算矩阵的算法。2025。arXiv: 2506.13242 [cs.SC]。URL: https://arxiv.org/abs/2506.13242.[18] Alhussein Fawzi 等人。“利用强化学习发现更快的矩阵乘法算法”。载于：《自然》610.7930 (2022)，第 47–53 页。[19] Hans F de Groote。“关于双线性映射计算最优算法的簇 I：双线性映射的各向同性群”。载于：《理论计算机科学》7.1 (1978)，第 1–24 页。[20] Marijn JH Heule、Manuel Kauers 和 Martina Seidl。“快速矩阵乘法的局部搜索”。载于：国际可满足性测试理论与应用会议。施普林格。2019，第 155–163 页。[21] Marijn JH Heule、Manuel Kauers 和 Martina Seidl。“矩阵乘法的新方法”。载于：《符号计算杂志》104 (2021)，第 899–916 页。[22] Olga Holtz 等人。“新型快速矩阵乘法算法的替代基”。载于：*2025*年应用与计算离散算法会议论文集 *(ACDA)*。SIAM。2025，第 322–334 页。[23] John Hopcroft 和 Jean Musinski。“对偶性在矩阵乘法及其他双线性型复杂度中的应用”。载于：第五届年度*ACM*计算理论研讨会论文集。1973，第 73–87 页。[24] John E Hopcroft 和 Leslie R Kerr。“关于如何将矩阵乘法所需的乘法次数降至最少”。载于：《工业与应用数学学会应用数学杂志》20.1 (1971)，第 30–36 页。[25] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。《矩阵分析》。第2版。剑桥大学出版社，2012。[26] Rodney W Johnson 和 Aileen M McLoughlin。“3×3矩阵乘法的非交换双线性算法”。载于：*SIAM*计算杂志15.2 (1986)，第 595–603 页。[27] Igor Evgen’evich Kaporin。“Brent方程的半解析解”。载于：《数学报告》第110卷第1期。施普林格。2024，第 318–322 页。[28] Elaye Karstadt 和 Oded Schwartz。“矩阵乘法，稍快一些”。载于：《美国计算机协会会刊》*(JACM)*67.1 (2020)，第 1–31 页。

[29] Manuel Kauers 和 Jakob Moosbauer。“矩阵乘法的翻转图”。载于：*2023*年符号与代数计算国际研讨会论文集。ISSAC '23。挪威特罗姆瑟：计算机协会，2023，381–388。 ISBN：9798400700392。 DOI： 10.1145/3597066.3597120。 URL： https://doi.org/10.1145/3597066.3597120。[30] Manuel Kauers 和 Isaac Wood。“探索矩阵乘法的元翻转图”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2510.19787*（2025）。[31] Julian Laderman、Victor Pan 和 Xuan-He Sha。“加速矩阵乘法的实用算法”。载于：线性代数及其应用 162-164(1992)，第 557–588 页。 ISSN：0024-3795。 DOI： https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90393-0。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379592903930。

[32] Fran¸cois Le Gall. “代数复杂性理论与矩阵乘法。”载于：*ISSAC*。第14卷。2014年，第23页。[33] Erik M˚artensson 和 Paul Stankovski Wagner。“野兽之数：减少维数不超过666的快速矩阵乘法算法中的加法次数。”载于：*2025*年应用与计算离散算法会议（*ACDA*）论文集。SIAM。2025年，第47–60页。[34] Jakob Moosbauer 和 Michael Poole。“具有对称性的翻转图与新的矩阵乘法方案。”载于：*2025*年国际符号与代数计算研讨会论文集。2025年，第233–239页。[35] Alexander Novikov 等。“AlphaEvolve：用于科学与算法发现的编程智能体，2025年。”载于：网址：*https://arxiv.org/abs/2506.13131* ()。[36] V. Ya. Pan。“矩阵运算的新型快速算法。”载于：*SIAM*计算杂志9.2（1980年），第321–342页。 DOI： 10.1137/0209027。电子版： https://doi.org/10.1137/0209027。 URL： https://doi.org/10.1137/0209027。[37] V Ya Pan。“Strassen算法并非最优的三线性技术：通过聚合、合并和抵消来构造矩阵运算快速算法。”载于：第*19*届计算机科学基础年会（*sfcs 1978*）。IEEE。1978年，第166–176页。[38] V.Ya. Pan。“通过隐式抵消进行三线性聚合，以加速矩阵乘法。”载于：计算机与应用数学8.1（1982年），第23–34页。 ISSN：0898-1221。 DOI： https://doi.org/10.1016/0898-1221(82)90037-2。URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0898122182900372。[39] Francesco Romani。“与矩阵乘法相关的张量不相交和的一些性质。”载于：*SIAM*计算杂志11.2（1982年），第263–267页。[40] Arnold Sch¨onhage。“部分矩阵乘法与完全矩阵乘法。”载于：*SIAM*计算杂志10.3（1981年），第434–455页。[41] Oded Schwartz 和 Eyal Zwecher。通过三线性聚合实现更快的可行矩阵乘法。2025年。 arXiv： 2508.01748 [cs.DS]。 URL： https://arxiv.org/abs/2508.01748。

[42] Oded Schwartz 等。“替代基矩阵乘法快速且稳定。”载于：*2024*年*IEEE*国际并行与分布式处理研讨会（*IPDPS*）。IEEE。2024年，第38–51页。[43] Alexandre Sedoglavic。“一种用于将（7× 7）矩阵相乘、仅需250次乘法的非交换算法。”载于：（2017年）。[44] A Smirnov。用于矩阵乘法的双线性算法¡ 4× 4× 9; 104¿。*Brent*系统的一个不可约无理数解。[45] Alexey V Smirnov。“矩阵乘法的双线性复杂度与实用算法。”载于：《计算数学与数学物理》53.12（2013年），第1781–1795页。[46] Andrew James Stothers。“论矩阵乘法的复杂度。”载于：（2010年）。[47] Volker Strassen。“高斯消元并非最优。”载于：*Numerische Mathematik*13.4（1969年），第354–356页。[48] Volker Strassen。“张量渐近谱与矩阵乘法指数。”载于：第*27*届计算机科学基础年会（*sfcs 1986*）。IEEE。1986年，第49–54页。[49] Volker Strassen。“避免除法。”载于：纯粹与应用数学杂志 ¨ 264（1973年），第184–202页。[50] Yiwen Sun 和 Wenye Li。“OpenTensor：复现更快矩阵乘法发现算法。”载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2405.20748*（2024年）。[51] Charlotte Vermeylen 和 Marc Van Barel。“快速矩阵乘法的稳定性改进。”载于：《数值算法》100.2（2025年），第645–683页。[52] Virginia VassilevskaWilliams。“比Coppersmith-Winograd更快地进行矩阵乘法”.

载于：第四十四届美国计算机协会计算理论研讨会论文集。2012 年，第 887–898 页。[53] Virginia Vassilevska Williams 等人。《矩阵乘法的新界：从 alpha 到 omega》。载于：*2024* 年 *ACM-SIAM* 离散算法年会（*SODA*）论文集。SIAM。2024 年，第 3792–3835 页。[54] Jason Yang。《通过可满足性问题排除具有对称性的低秩矩阵乘法张量分解》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2402.01011*（2024 年）。

一个有理数 $\langle 4,\ 4,\ 4,\ 48\rangle$ 张量

	O_j	P_j	Q_j
$j=1$	$\begin{matrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -1 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}-1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0 & -1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{matrix}$

	O_j	P_j	Q_j
$j=2$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{matrix}$
$j=3$	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=4$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/8 & -1/8 & 3/8 & -1/8 \\ -3/8 & 1/8 & -3/8 & 1/8 \\ -1/8 & -1/8 & -1/8 & -1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{matrix}$
$j=5$	$\begin{matrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix}$
$j=6$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=7$	$\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=8$	$\begin{matrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{matrix}$
$j=9$	$\begin{matrix} 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/8 & -3/8 & -1/8 & -3/8 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 & 1/8 \\ -3/8 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \end{matrix}$
$j=10$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=11$	$\begin{matrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{matrix}$

	O_j	P_j	Q_j
$j=12$	$\begin{matrix} 1/2 & 1 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5/4 & 5/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 3/4 & -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{matrix}$
$j=13$	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=14$	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=15$	$\begin{matrix} -1/2 & 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/8 & 3/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & -3/8 & 3/8 \\ -1/8 & -1/8 & 1/8 & -1/8 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{matrix}$
$j=16$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=17$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/8 & -3/8 & -1/8 & -3/8 \\ 1/8 & -1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 1/8 & -1/8 & 1/8 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{matrix}$
$j=18$	$\begin{matrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$
$j=19$	$\begin{matrix} -1/2 & -1 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/4 & -1/4 & -5/4 & -5/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$
$j=20$	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=21$	$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

	O_j	P_j	Q_j
$j=22$	$\begin{matrix} -1/2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/8 & -1/8 & -1/8 & 1/8 \\ -1/8 & 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ 1/8 & -1/8 & -1/8 & 1/8 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{matrix}$
$j=23$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$
$j=24$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=25$	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/8 & -3/8 & -3/8 & -3/8 \\ -1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ -1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{matrix}$
$j=26$	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=27$	$\begin{matrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3/2 & -3/2 & -3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=28$	$\begin{matrix} 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & -1 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/4 & -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$
$j=29$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{matrix}$
$j=30$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{matrix}$
$j=31$	$\begin{matrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

	O_j	P_j	Q_j
$j=32$	$1/2 \quad 0 \quad 1 \quad 1/2$ $1/2 \quad 0 \quad 1 \quad 1/2$ $-1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2$ $-1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2$	$0 \quad 3 \quad -1 \quad 1$ $0 \quad -1 \quad 1 \quad 0$ $0 \quad -1 \quad -1 \quad -1$ $0 \quad -1 \quad -1 \quad -1$	$-1/8 \quad -1/8 \quad 1/8 \quad 1/8$ $1/8 \quad 1/8 \quad -1/8 \quad -1/8$ $-1/8 \quad -1/8 \quad 1/8 \quad 1/8$ $-1/4 \quad -1/4 \quad -1/4 \quad -1/4$
$j=33$	$0 \quad 0 \quad -1 \quad 1$ $0 \quad 0 \quad -1 \quad 1$ $0 \quad 0 \quad 1 \quad -1$ $0 \quad 0 \quad -1 \quad 1$	$0 \quad 3/2 \quad 3/2 \quad 0$ $0 \quad -1/2 \quad -1/2 \quad 0$ $0 \quad -1/2 \quad -1/2 \quad 0$ $0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 0$	$0 \quad -3/4 \quad 0 \quad -3/4$ $0 \quad 1/4 \quad 0 \quad 1/4$ $0 \quad 1/4 \quad 0 \quad 1/4$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$
$j=34$	$-1/2 \quad -1 \quad 0 \quad 1/2$ $1/2 \quad 0 \quad 1 \quad -1/2$ $1/2 \quad 1 \quad 0 \quad -1/2$ $-1/2 \quad 0 \quad -1 \quad 1/2$	$0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$ $-1 \quad -1 \quad 0 \quad 1$ $1 \quad 1 \quad 0 \quad -1$ $0 \quad -1 \quad -1 \quad -1$	$1/8 \quad -3/8 \quad -1/8 \quad 3/8$ $-1/8 \quad 3/8 \quad 1/8 \quad -3/8$ $1/8 \quad 1/8 \quad -1/8 \quad -1/8$ $-1/4 \quad -1/4 \quad 1/4 \quad 1/4$
$j=35$	$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$ $-1 \quad 0 \quad -2 \quad 1$ $1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$ $1 \quad 0 \quad 2 \quad -1$	$1/2 \quad 1/2 \quad -1 \quad -1/2$ $-1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0$ $1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 1/2$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad -1/2$	$3/8 \quad -3/8 \quad 3/8 \quad 3/8$ $-1/8 \quad 1/8 \quad -1/8 \quad -1/8$ $-1/8 \quad 1/8 \quad -1/8 \quad -1/8$ $-1/4 \quad -1/4 \quad -1/4 \quad 1/4$
$j=36$	$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ $0 \quad 0 \quad -1 \quad -1$ $0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ $0 \quad 0 \quad -1 \quad -1$	$-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad 0$ $1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad 0$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad 0$	$0 \quad 0 \quad -1/4 \quad 1/4$ $0 \quad 0 \quad 1/4 \quad -1/4$ $0 \quad 0 \quad -1/4 \quad 1/4$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$
$j=37$	$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$ $0 \quad -1 \quad -1 \quad 0$ $0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$ $0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$	$1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 1/2$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad -1/2$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad -1/2$ $1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 1/2$	$0 \quad 0 \quad -1/2 \quad -1/2$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$
$j=38$	$1/2 \quad 1 \quad 1 \quad -1/2$ $-1/2 \quad -1 \quad -1 \quad 1/2$ $-1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2$ $-1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2$	$1/2 \quad 3/2 \quad 0 \quad -1/2$ $0 \quad -1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$ $0 \quad -1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad -1/2$	$3/4 \quad -3/4 \quad -1/4 \quad -1/4$ $-1/4 \quad 1/4 \quad -1/4 \quad -1/4$ $-1/4 \quad 1/4 \quad -1/4 \quad -1/4$ $1/2 \quad -1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$
$j=39$	$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$ $0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$ $0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$ $0 \quad -1 \quad -1 \quad 0$	$3/2 \quad 3/2 \quad 0 \quad 0$ $-1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0$ $-1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0$ $-1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0$	$-1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$
$j=40$	$-1/2 \quad 0 \quad 0 \quad -1/2$ $-1/2 \quad -1 \quad -1 \quad -1/2$ $1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2$ $1/2 \quad 1 \quad 1 \quad 1/2$	$-1/2 \quad -3/2 \quad -1 \quad -1/2$ $0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$ $0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2$ $-1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1/2$	$3/4 \quad 1/4 \quad -3/4 \quad -1/4$ $1/4 \quad -1/4 \quad -1/4 \quad 1/4$ $-1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad -1/4$ $1/2 \quad -1/2 \quad -1/2 \quad 1/2$
$j=41$	$1 \quad 2 \quad 1 \quad 0$ $-1 \quad -2 \quad -1 \quad 0$ $1 \quad 2 \quad 1 \quad 0$ $-1 \quad -2 \quad -1 \quad 0$	$1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0$ $1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0$ $-1/2 \quad -1/2 \quad -1 \quad 0$ $1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0$	$-1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0$ $-1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0$

	O_j	P_j	Q_j
$j=42$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix}$
$j=43$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{matrix}$
$j=44$	$\begin{matrix} -1/2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/8 & -1/8 & 3/8 & 3/8 \\ -3/8 & 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ 1/8 & -1/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{matrix}$
$j=45$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3/4 & 0 & -3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$j=46$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{matrix}$
$j=47$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix}$
$j=48$	$\begin{matrix} -1/2 & -1 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/8 & 1/8 & -3/8 & 3/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{matrix}$