arXiv:2602.13178v1 [math.RA] 13 Feb 2026

四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量

VISHAL BHATOY 和 COLIN INGALLS

摘要。我们使用 Magma 计算已知的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数族的超势，并运用表示论中的 Schur-Weil 对偶确定相关不变量。通过博雷尔-韦伊定理，我们将这些不变量解释为部分旗簇上线丛的截面，从而得到几何不变量；在某些情况下，这些几何不变量对应于 K3 曲面。我们计算这些几何不变量的离散不变量，并利用它们区分代数。

1. 引言

Artin-Schelter（AS）正则代数是一类重要的分次代数，可以看作多项式环的非交换版本。Artin 和 Schelter 引入了这类代数 [1, 2, 3], ，并在假设生成元的次数为一的条件下，对整体维数不超过三的所有 AS 正则代数进行了分类。此后，研究者开始研究更高维的 AS 正则代数，重点关注其结构、模和同调性质 [4, 28, 29, 33, 34]。

Dubois-Violette [12], 与 Bocklandt、Schedler 和 Wemyss [7], 证明，每个三维二次 AS 正则代数 A 都同构于一个 i 阶导子商代数 $D(w,\ i)$，其中 w 是一个扭曲超势。Mori 和 Smith [25] 进一步证明，此类超势 w 在标量乘法意义下唯一。

我们通过定义超势研究 4 维 Koszul AS 正则代数的分类。这些超势是 $V^{\otimes 4}$中的张量，其中 $\dim_{\mathbb{K}} V = 4$。分类问题归结为确定哪些此类张量定义了 AS 正则代数。利用包含 77 个已知 4 维正则代数族的数据集，我们计算了每种情形下的显式超势。我们通过舒尔-韦尔对偶将张量空间 $V^{\otimes 4}$ 分解为不可约的 GL(V)-表示，得到由 4 的分拆标记的重数空间。应用博雷尔-韦伊定理，我们将这些重数空间解释为部分旗簇上线丛的整体截面空间。每个族的关系见 [6, 附录]。

每个超势 $w \in V^{\otimes 4}$ 都会产生五个射影不变量，它们对应于相关旗流形中的超曲面线性系。最简单的情形还原了经典不变量，例如 $\mathbb{P}^3$ 中的对称化四次式和行列式。在若干族中，我们发现了沿着

斜线奇异的不可约四次曲面；而在另一些族中，这些曲面是由一个平面和一个三次曲面组成的可约并。此外，我们有时还能得到 K3 曲面。我们使用 Magma [24]计算了全部 77 个族的不变量。用于计算这些不变量的所有代码均可在 GitHub 代码库 [5]中获取。

这项工作与我们的论文 [6], 有关。在那篇论文中，我们研究了代数栈 A_4 ，并通过研究 AS 正则代数的族，发现了 45 个分支。我们计算了相关线性系的不变量，以区分这些分支。具体而言，我们计算了概形、其约化子概形、其奇异子概形以及奇异子概形的约化子概形的主分支的维数和次数。我们还计算了其他不变量，例如直线概形、点概形和中山自同构，但它们并未提供太多区分信息，因此本文不予讨论。

然而，我们用于分类 4 维 Koszul AS-正则代数的不变量并非扭曲不变。例如，考虑代数 $A = \mathbb{K}\langle x, y\rangle/(yx - xy)$，并用标量 $q \in \mathbb{K}^\times$ 对其进行扭转，得到 $A_q = \mathbb{K}\langle x, y\rangle/(yx - qxy)$，它是$A_1$. 的一个扭转。将关系分解为对称部分和交错部分， $R \subseteq V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \bigwedge^2 V$，我们看到，对于 $q = 1$，$\mathrm{Sym}^2 V = 0$；而对于 $q \neq 1$，$\mathrm{Sym}^2 V \neq 0$。

第 2 节介绍必要的背景和定义。我们回顾连通分次代数，并定义 Artin-Schelter（AS）正则代数，列出整体维数为 4 时可能的极小投射分解类型。随后，我们定义超势和 Koszul 代数。我们给出定理 2.6，该定理表明每个 4 维 Koszul AS-正则代数都同构于导子商代数 $D(w, 2)$。

在第 3 节中，我们回顾舒尔-韦尔对偶和博雷尔-韦伊定理。利用这些结果，我们定义与最高权 λ相关的几何轨迹 $X_\lambda(w)$，它是旗簇 G/B. 上相应线性系的基点集。我们给出分拆 $\lambda \vdash 4$ 的一个例子。对于每种情况，我们描述部分旗簇、相关线丛以及确定几何轨迹的整体截面空间。

在第 4 节中，我们研究一个代数 H 的例子，并计算其关于分拆 $\lambda = (4)$ 的不变量。我们还讨论绝对不可约性的概念，说明每个主分支如何在有限域扩张上变为绝对不可约。随后，我们详细讨论关于分拆 $\lambda = (2, 2)$ 的计算。

在第 5 节中，我们对已知的 77 个 4 维 Koszul AS 正则代数族进行计算，并计算它们关于所有分拆 $\lambda \vdash 4$. 的不变量

在第6节中，我们给出主要结果，即定理 6.1。利用该定理，我们将代数栈 A_4 的 45 个分支划分为 39 个等价类，或称方框；每个类都由具有相同离散不变量的代数组成，这些不变量来自射影概形 X_{400}，X_{000}，X_{020}，X_{101}，X_{210}。该定理表明，若 A 和 B 是属于不同方框的一般族，则 $A \not\cong B$，因此不同等价类中的分支彼此不同。

2. 背景与定义

设 $\mathbb{K}$ 是特征零的代数闭域。我们称 A 是连通分次的，若 A 是分次的 $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$，且 $A_0 = \mathbb{K}$.

定义 2.1. Artin-Schelter 正则代数 [3]：Artin-Schelter 正则代数（AS 正则代数）是域 $\mathbb{K}$ 上的连通分次代数 A，由次数为一的元素生成，并满足以下条件：

(1) A具有有限整体维数 d。(2) A 具有多项式增长，即 $f(n)$ = 维数$_{\mathbb{K}} A_n$ 被 n 的多项式函数所上界。(3) A是 Gorenstein，即

$$\mathrm{Ext}^i_A(\mathbb{K}, A) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq d, \\ \mathbb{K}(l) & \text{if } i = d \end{cases}$$

对于某个分次移位 $l \in \mathbb{Z}$。这个整数 l 称为 Gorenstein 参数。

我们将上述出现的整数 d 称为 AS 正则代数的维数。若 A 是 AS-正则的，则平凡左 A-模 $\mathbb{K}$ 有如下形式的极小自由分解

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{K} \to 0,$$

其中 $P_w = \oplus_{s=1}^{n_w} A(-i_{w,\ s})$，且 n_w 和 $i_{w,\ s}$为正整数。Gorenstein 条件 (3) 意味着上述自由分解是对称的，即上述序列的对偶复形是平凡右 A-模的自由分解（经过次数移位后）。因此，对于所有 $w,\ s$，我们有 $P_0 = A$, $P_d = A(-l)$, $n_w = n_{d-w}$ 和 $i_{w,\ s} + i_{d-w,\ n_w-s+1} = l$。

在自然假设 A 是 Noether 环且 $\dim A = 4$ 下，存在三种可能的分解类型 [22, 命题 1.4]:

$$0 \to A(-4) \to A(-3)^4 \to A(-2)^6 \to A(-1)^4 \to A \to \mathbb{K} \to 0$$

$$0 \to A(-5) \to A(-4)^3 \to A(-3)^2 \oplus A(-2)^2 \to A(-1)^3 \to A \to \mathbb{K} \to 0$$

$$0 \to A(-7) \to A(-6)^2 \to A(-4) \oplus A(-3) \to A(-1)^2 \to A \to \mathbb{K} \to 0$$

其希尔伯特级数分别为,

$$\frac{1}{(1-t)^4}, \frac{1}{(1-t)^3(1-t^2)}, \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)(1-t^3)}.$$

受上述第一个分解形式的启发，我们称这类代数为*(14641)*型。本文主要研究*(14641)*型代数。*(14641)* 型代数是 Koszul [35, 定理 0.1]。因此，我们将讨论范围限定在这样的情形： A 由次数为 1 的元素生成，且定义关系的次数为 2。

定义 2.2. 超势 [25, 定义 2.5]: 设 $m \in \mathbb{N}^+$，并设 V 是有限维的 $\mathbb{K}$-向量空间。定义线性映射 $\varphi : V^{\otimes m} \to V^{\otimes m}$ 如下:

$$\varphi(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_m \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m-1}.$$

(1) 若元素 $w \in V^{\otimes m}$ 满足 $\varphi(w) = w$，则称其为超势。
(2) 若元素 $w \in V^{\otimes m}$ 满足以下条件，则称其为扭曲超势:

$$(\mu \otimes \mathrm{id}^{\otimes(m-1)})\varphi(w) = w$$

对于某个 $\mu \in \mathrm{GL}(V)$。这个 μ 称为中山自同构。

定义 2.3. 张量代数: 设 V 为一个有限维 $\mathbb{K}$-向量空间，其基为 $\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$。$V$的张量代数定义为

$$T(V) := \bigoplus_{m \geq 0} V^{\otimes m},$$

其中 $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$。给定一个满足 $m \geq 1$的元素 $w \in V^{\otimes m}$，存在唯一的元素 $w_j \in V^{\otimes(m-1)}$ 使得

$$w = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes w_j.$$

元素 $\partial_{x_j} w := w_j$ 称为 w 关于 x_j的左偏导数 .

更一般地，对于任意正整数 i， i阶左偏导数递归定义。对于任意指标序列（j_1，...... j_i） $\in \{1, \ldots\ldots, n\}^i$，定义

$$\partial_{x_{j_1}} \cdots \partial_{x_{j_i}} w := \partial_{x_{j_1}} \left(\partial_{x_{j_2}} \cdots \partial_{x_{j_i}} w \right),$$

其中，每个偏导数都作用于最左侧的张量因子。

令 $\partial^i w$ 表示所有此类 i阶左偏导数构成的集合:

$$\partial^i w := \left\{ \partial_{x_{j_1}} \cdots \partial_{x_{j_i}} w \;\middle|\; 1 \leq j_1, \ldots, j_i \leq n \right\}.$$

与 w 相关的 i阶导子商代数定义为

$$D(w, i) := T(V) \Big/ \left(\partial^i w \right),$$

即，张量代数除以由 w的所有 i阶左偏导数生成的理想所得的商。

我们关注 $\dim V = 4$ 与 $i = 2$ 的情形。在此设定下， $D(w,2)$ 由 w的 16 个二阶左偏导数生成。然而，其中仅有 6 个是互不相同的。

定义 2.2 中的中山自同构 μ 属于 $\mathrm{Aut}(D(w,2))$ [25, 定理 1.10]。

例 2.4。设 V 是一个 4 维的 $\mathbb{K}$-向量空间，其基为 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$。考虑由 $w \in V^{\otimes 4}$ 定义的元素

$$\begin{aligned} w := & - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4x_3 + x_1x_3x_2x_4 - x_1x_3x_4x_2 - x_1x_4x_2x_3 + x_1x_4x_3x_2 \\ & + x_2x_1x_3x_4 - x_2x_1x_4x_3 - x_2x_3x_1x_4 + x_2x_3x_4x_1 + x_2x_4x_1x_3 - x_2x_4x_3x_1 \\ & - x_3x_1x_2x_4 + x_3x_1x_4x_2 + x_3x_2x_1x_4 - x_3x_2x_4x_1 - x_3x_4x_1x_2 + x_3x_4x_2x_1 \\ & + x_4x_1x_2x_3 - x_4x_1x_3x_2 - x_4x_2x_1x_3 + x_4x_2x_3x_1 + x_4x_3x_1x_2 - x_4x_3x_2x_1. \end{aligned}$$

由于 $\varphi(w) = w$，因此 w 是一个超势。

现在我们将 w 表示为

$$\begin{aligned} w = {} & x_1x_2(-x_3x_4 + x_4x_3) + x_1x_3(x_2x_4 - x_4x_2) + x_1x_4(-x_2x_3 + x_3x_2) \\ & + x_2x_1(x_3x_4 - x_4x_3) + x_2x_3(-x_1x_4 + x_4x_1) + x_2x_4(x_1x_3 - x_3x_1) \\ & + x_3x_1(-x_2x_4 + x_4x_2) + x_3x_2(x_1x_4 - x_4x_1) + x_3x_4(-x_1x_2 + x_2x_1) \\ & + x_4x_1(x_2x_3 - x_3x_2) + x_4x_2(-x_1x_3 + x_3x_1) + x_4x_3(x_1x_2 - x_2x_1). \end{aligned}$$

或者，我们可以将其写作

$$\begin{aligned} w = {} & x_1x_2\,\partial^2_{x_1x_2}w + x_1x_3\,\partial^2_{x_1x_3}w + x_1x_4\,\partial^2_{x_1x_4}w \\ & + x_2x_1\,\partial^2_{x_2x_1}w + x_2x_3\,\partial^2_{x_2x_3}w + x_2x_4\,\partial^2_{x_2x_4}w \\ & + x_3x_1\,\partial^2_{x_3x_1}w + x_3x_2\,\partial^2_{x_3x_2}w + x_3x_4\,\partial^2_{x_3x_4}w \\ & + x_4x_1\,\partial^2_{x_4x_1}w + x_4x_2\,\partial^2_{x_4x_2}w + x_4x_3\,\partial^2_{x_4x_3}w, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \partial^2_{x_1x_2}w &= -x_3x_4 + x_4x_3, & \partial^2_{x_2x_1}w &= x_3x_4 - x_4x_3, \\ \partial^2_{x_1x_3}w &= x_2x_4 - x_4x_2, & \partial^2_{x_3x_1}w &= -x_2x_4 + x_4x_2, \\ \partial^2_{x_1x_4}w &= -x_2x_3 + x_3x_2, & \partial^2_{x_4x_1}w &= x_2x_3 - x_3x_2, \\ \partial^2_{x_2x_3}w &= -x_1x_4 + x_4x_1, & \partial^2_{x_3x_2}w &= x_1x_4 - x_4x_1, \\ \partial^2_{x_2x_4}w &= x_1x_3 - x_3x_1, & \partial^2_{x_4x_2}w &= -x_1x_3 + x_3x_1, \\ \partial^2_{x_3x_4}w &= -x_1x_2 + x_2x_1, & \partial^2_{x_4x_3}w &= x_1x_2 - x_2x_1, \end{aligned}$$

and

$$\partial^2_{x_ix_i}w = 0 \quad \text{for all } i.$$

另请注意,

$$\partial^2_{x_jx_i}w = -\partial^2_{x_ix_j}w, \quad \text{for } i \neq j.$$

导子商代数为:

$$D(w,2) = \mathbb{K}\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle \Big/ \left(\partial^2_{x_ix_j}w \mid 1 \leq i < j \leq 4\right).$$

因此,

$$D(w,2) \cong \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4],$$

四个变量的交换多项式环。

例 2.5. 考虑由以下定义的四个变量的斜多项式环

$$A = \mathbb{K}\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle \big/ (x_ix_j - q_{ij}x_jx_i),$$

其中参数 $q_{ij} \in \mathbb{K}^\times$ 满足 $1 \leq i < j \leq 4$。

相应的超势为

$$w = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \alpha_\sigma\, x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(4)},$$

其中 $\alpha_\sigma \in \mathbb{K}$ 是依赖于置换 $\sigma \in S_4$的标量。

w 的二阶循环偏导数由下式给出

$$\partial^2_{x_ix_j}w = -\alpha_{jikl}x_kx_l + \alpha_{jilk}x_lx_k, \quad \text{and} \quad \partial^2_{x_ix_i}w = 0,$$

其中 $i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}$均互不相同。

这些系数满足条件

$$\alpha_{iklj}\alpha_{kijl} = \alpha_{kilj}\alpha_{ikjl}, \quad \text{and} \quad q_{ij} = \frac{\alpha_{klij}}{\alpha_{klji}}.$$

定理 2.6. [12, 定理 11]: 对于每个 *4* 维 *Koszul AS*-正则代数A，都存在唯一的扭曲超势 $w \in V^{\otimes 4}$ 使得

$$A \simeq D(w,2).$$

定义 2.7. Koszul 代数: 设 $A = T(V)/R$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的连通 $\mathbb{N}$-分次二次代数，其中 $R \subseteq V \otimes V$。其二次对偶为

$$A^! = T(V^*)/\langle R^\perp \rangle,$$

其中 $R^\perp \subseteq V^* \otimes V^*$ 是 R的正交补。

设 $h_A(t)$ 和 $h_{A^!}(t)$ 分别是 A 和 $A^!$的希尔伯特级数。若 A 是 Koszul 代数，则平凡 A-模 $\mathbb{K}$的最小分次投射分解是线性的，并且满足 Koszul 对偶恒等式 [26] （另见 [30, 定理 5.9]）：

$$h_A(t)\, h_{A^!}(-t) = 1.$$

定义 2.8. Frobenius 代数: 有限维分次结合$\mathbb{K}$-代数 $A^!$ 称为次数为 n 的 Frobenius 代数，若存在一个非退化双线性配对

$$\langle -,- \rangle : A^! \otimes A^! \to \mathbb{K}$$

使得

$$\langle a, b\cdot c\rangle = \langle a\cdot b, c\rangle \quad \text{for all } a,b,c \in A^!.$$

定理 2.9. [23, 推论 D] 设 A 是一个连通分次代数。当且仅当 *Ext* 代数 $E := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \operatorname{Ext}^i_A(\mathbb{K},\mathbb{K})$ 是 *Frobenius* 代数时， A才是 *AS*-正则的。

推论 2.10. [30, 定理 4.3 和命题 5.10] 若 A 是一个 *Koszul* 代数，则其 *Ext* 代数 E 同构于其对偶 $A^!$。因此，对于 *Koszul* 代数，定理 *2.9* 意味着：当且仅当 $A^!$ 是 *Frobenius* 代数时，A 才是 *AS*-正则的。

设 A 是一个整体维数为 n的 Koszul AS-正则代数。那么，其 Koszul 对偶 $A^!$ 是一个长度为 n的有限维 Frobenius 代数，其中

$$\dim_{\mathbb{K}} A^!_n = 1.$$

因此， $A^!_n$ 是一个一维的 $\mathbb{K}$-向量空间。其对偶空间 $A^{!*}_n := (A^!_n)^*$ 嵌入到 $V^{\otimes n}$中，因为 $A^{!*}_n \subseteq ((V^*)^{\otimes n})^* \cong V^{\otimes n}$.

超势 w 定义为该空间的一个生成元（在相差一个标量的意义下唯一）：

$$w \in A^{!*}_n.$$

此外，该空间可以显式地实现为以下交集

$$A^{!*}_n = \bigcap_{i=0}^{n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes(n-2-i)} \subseteq V^{\otimes n},$$

正如 [25,引理 2.11]中所证明的那样。

特别地，对于整体维数为 $n = 4$ 的 Koszul 代数，这变为

$$w \in A_4^{!*} = \bigcap_{i=0}^{2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes(2-i)} \subseteq V^{\otimes 4}.$$

我们开发了可计算所有四维 Koszul AS 正则代数超势的 Magma 代码 [5]。

例 2.11. 考虑代数 H。其关系为

$$\begin{aligned} &x_2x_1 - x_1x_2 - x_1^2, \quad x_4x_3 + x_3x_4, \\ &x_3x_1 + h(-x_1x_4), \quad x_3x_2 + h(-fx_1x_4 - x_2x_4), \\ &x_4x_1 + h(-x_1x_3), \quad x_4x_2 + h(-fx_1x_3 - x_2x_3) \end{aligned}$$

其中 f， $h \in \mathbb{K}$。

使用 Magma 代码 [5]，我们计算超势 w 如下：

$h^4x_1^2x_3x_4+h^4x_1^2x_4x_3+h^4x_1x_2x_3x_4+h^4x_1x_2x_4x_3+(h^3f-h^3)x_1x_3x_1x_3-h^3x_1x_3x_2x_3+(-2h^2f+h^2)x_1x_3x_4x_1+h^2x_1x_3x_4x_2+(h^3f-h^3)x_1x_4x_1x_4-h^3x_1x_4x_2x_4+(-2h^2f+h^2)x_1x_4x_3x_1+h^2x_1x_4x_3x_2-h^4x_2x_1x_3x_4-h^4x_2x_1x_4x_3+h^3x_2x_3x_1x_3-h^2x_2x_3x_4x_1+h^3x_2x_4x_1x_4-h^2x_2x_4x_3x_1+h^2x_3x_1^2x_4+h^2x_3x_1x_2x_4+(hf-h)x_3x_1x_3x_1-hx_3x_1x_3x_2-h^2x_3x_2x_1x_4+hx_3x_2x_3x_1+x_3x_4x_1^2+x_3x_4x_1x_2-x_3x_4x_2x_1+h^2x_4x_1^2x_3+h^2x_4x_1x_2x_3+(hf-h)x_4x_1x_4x_1-hx_4x_1x_4x_2-h^2x_4x_2x_1x_3+hx_4x_2x_4x_1+x_4x_3x_1^2+x_4x_3x_1x_2-x_4x_3x_2x_1.$

3. 表示论

本节介绍表示论中的两个重要定理：**舒尔-韦尔对偶**和**博雷尔-韦伊定理**。舒尔-韦尔对偶揭示了对称群的不可约表示与域 $\mathbb{K}$上有限维向量空间所定义的一般线性群的不可约代数表示之间的深刻联系。博雷尔-韦伊定理通过将线性代数群的不可约表示与部分旗簇上线丛的整体截面空间对应起来，为这些表示提供了几何实现。

命题 3.1。 [13,定理 3。1] 设 G 为有限群， $\mathbb{K}$ 为域，且特征$(\mathbb{K}) \nmid |G|$。则 $\mathbb{K}[G]$ 为半单的，并且

$$\mathbb{K}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$$

作为 $\mathbb{K}$-代数，其中直和取遍 G的所有互不相同的不可约表示 V_i 。

设 c_λ 为与分拆 $\lambda \vdash n$对应的杨对称化子，如 [13,第 58]页所述。

定理 3.2。 [13, 定理 4。36] 该子空间

$$U_\lambda = \mathbb{K}[S_n]\, c_\lambda$$

通过 c_λ 的左乘法得到，是 S_n 的不可约表示。此外， S_n 的每个不可约表示都同构于某个 U_λ，对应唯一的分拆 λ，它属于 n。

由于 $\mathbb{K}[S_n]$ 是半单代数，它可分解为矩阵代数的直和，这些矩阵代数对应于 S_n 的不可约表示，如命题 3.1 所示:

$$\mathbb{K}[S_n] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{End}(U_\lambda),$$

其中求和遍历所有分拆 $\lambda \vdash n$，且每个 U_λ 都是 $\mathbb{K}$ 上 S_n 的不可约表示。

这一分解对应于将单位元分解为正交中心幂等元之和:

$$1 = \sum_{\lambda \vdash n} e_\lambda,$$

其中每个 $e_\lambda \in \mathbb{K}[S_n]$ 都是满足 $\mathbb{K}[S_n]e_\lambda \cong \mathrm{End}(U_\lambda)$。的中心幂等元

每个幂等元 $e_\lambda \in \mathbb{K}[S_4]$ 投影到 λ 同型分量上，其定义为

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{4!} \sum_{g \in S_4} \chi_\lambda(g) \cdot g,$$

其中 $\chi_\lambda(g)$表示 g 在由λ标记的不可约表示中的特征。数值 $\chi_\lambda(g)$取自 S_4 [15, 第 19]页的特征标表。

特别地，每个中心幂等元 e_λ 都作为投影，投影到 $\mathbb{K}[S_n]$-模 V中的 λ-同型分量上。更准确地说， e_λ 在 V 中的像为

$$e_\lambda V = \mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V) \otimes U_\lambda,$$

它对应于不可约表示 U_λ在 V中的重数空间。

为进一步分析超势 $w \in V^{\otimes 4}$，我们考虑对称群 S_4 通过置换张量位置对 $V^{\otimes 4}$ 的自然作用。由于该作用与对角 GL(V)-作用 [15, （第 76], 页）可交换，该空间分解为对应于 S_4的不可约表示的同型分量:

$$w = \sum_{\lambda \vdash 4} w_\lambda, \quad \text{where} \quad w_\lambda = e_\lambda \cdot w.$$

为展示超势 w 到同型分量的分解，下面给出一些例子。所有计算均使用 Magma [5]完成。

例 3.3. 对于多项式环 $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$，如例 2.4 所示，超势$w \in V^{\otimes 4}$完全属于 $V^{\otimes 4}$ 的交错分量。

我们将 w 投影到 $V^{\otimes 4}$ 中对应于 S_4 的不可约表示的同型分量上。记 $w_\lambda := e_\lambda \cdot w$, 可得:

$$w = w_{(1,1,1,1)} \qquad \text{and} \qquad w_\lambda = 0 \quad \text{for all } \lambda \neq (1,1,1,1).$$

也就是说，超势分解为

$$w = e_{(4)} \cdot 0 + e_{(3,1)} \cdot 0 + e_{(2,2)} \cdot 0 + e_{(2,1,1)} \cdot 0 + e_{(1,1,1,1)} \cdot w.$$

例 3.4. 考虑克利福德代数 [9, 第 1 节。1]。在这种情况下，除平凡分支外，所有分支都消失：

$$w = w_{(4)} \qquad \text{and} \qquad w_\lambda = 0 \quad \text{for all } \lambda \neq (4).$$

也就是说，超势分解为

$$w = e_{(4)} \cdot w + e_{(3,1)} \cdot 0 + e_{(2,2)} \cdot 0 + e_{(2,1,1)} \cdot 0 + e_{(1,1,1,1)} \cdot 0.$$

定理 3.5 (**舒尔-韦尔对偶**, [13, 推论 4。59])。设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间。那么，作为 $\mathrm{GL}(V) \times S_n$ 的一个表示，有如下分解

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{|\lambda|=n} \mathbb{S}_\lambda V \otimes U_\lambda,$$

其中

- λ 遍历 n 的所有分拆，
- U_λ 是与 λ 对应的对称群 S_n 的不可约表示，
- $\mathbb{S}_\lambda V := \mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n})$ 是重数空间，承载着 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个不可约表示。

此外，$\mathbb{S}_\lambda V = 0$ 当分拆 λ 的部分数大于 d 时（即 λ 的第 $(d+1)$ 个部分非零时），其中 $d = \dim V$.

备注 3.6. 一般而言，舒尔-韦尔对偶不要求 $\dim V = n$；在我们的情形中，$\dim V = n = 4$，因此 4 的所有分拆都允许，且没有舒尔函子会消失。

例 3.7. 2 的分拆为 (2) 和 (1,1)。根据舒尔-韦尔对偶，我们有 $V^{\otimes 2} \simeq \mathrm{Sym}^2 V \oplus \bigwedge^2 V$.

例 3.8。 3 的分拆为 (3)、(2，1) 和 (1，1，1)。根据舒尔-韦尔对偶，$V^{\otimes 3} \simeq \mathrm{Sym}^3 V \oplus (\mathbb{S}_{(2,1)} V)^{\oplus 2} \oplus \bigwedge^3 V$. 表示 $\mathbb{S}_{(2,1)} V$不像对称幂或交错幂那样具有简单的描述。可以证明，[15,页 76]:

$$\mathbb{S}_{(2,1)} V \simeq V^{\otimes 3} c_{(2,1)} \cong \ker\Big(V \otimes \bigwedge^2 V \xrightarrow{\varphi} \bigwedge^3 V\Big),$$

其中映射 φ是交错映射

$$\varphi : V \otimes \bigwedge^2 V \to \bigwedge^3 V, \quad \varphi(v_1 \otimes (v_2 \bigwedge v_3)) = v_1 \bigwedge v_2 \bigwedge v_3.$$

例 3.9。 4 的分拆为：

$$(4), \quad (3,1), \quad (2,2), \quad (2,1,1), \quad (1,1,1,1).$$

舒尔-韦尔对偶给出如下分解：

$$\begin{aligned} V^{\otimes 4} &\simeq \mathbb{S}_{(4)} V \otimes U_{(4)} \oplus \mathbb{S}_{(3,1)} V \otimes U_{(3,1)} \oplus \mathbb{S}_{(2,2)} V \otimes U_{(2,2)} \\ &\quad \oplus \mathbb{S}_{(2,1,1)} V \otimes U_{(2,1,1)} \oplus \mathbb{S}_{(1,1,1,1)} V \otimes U_{(1,1,1,1)} \\ &\simeq \mathrm{Sym}^4 V \oplus (\mathbb{S}_{(3,1)} V \otimes U_{(3,1)}) \oplus (\mathbb{S}_{(2,2)} V \otimes U_{(2,2)}) \\ &\quad \oplus (\mathbb{S}_{(2,1,1)} V \otimes U_{(2,1,1)}) \oplus \bigwedge^4 V. \end{aligned}$$

定义 3.10。**(部分旗簇，** [19, 定义 9.5。1]) 设 d =($d_1 < d_2 <\cdots < d_r$) 为严格递增的整数序列，且满足 $d_r < n$。**部分旗簇**

$$F(d;n) = F(d_1, d_2, \ldots, d_r; n)$$

定义为由子空间组成的 r 元组的集合

$$(W_{d_1}, W_{d_2}, \ldots, W_{d_r})$$

满足

$$W_{d_1} \subset W_{d_2} \subset \cdots \subset W_{d_r} \subset \mathbb{K}^n,$$

对每个 i，均有 $\dim W_{d_i} = d_i$。这个簇嵌入到格拉斯曼流形的乘积中

$$F(d;n) \subset \mathrm{Gr}(d_1, n) \times \mathrm{Gr}(d_2, n) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(d_r, n).$$

完全 或**完全旗簇** $F(n)$ 对应于特殊情形

$$r = n-1 \quad \text{and} \quad d = (1 < 2 < \cdots < n-1),$$

其点称为完全旗。

注意，根据 [19, 例 9.5.2],，部分旗簇 $F(d;\ n)$ 是 $\mathrm{Gr}(d_1, n) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(d_r, n)$ 的闭子簇；因此它是射影的。

命题 3.11。 [14, 命题 2。1] 设 $d = (d_1 < d_2 < \cdots < d_r)$ 是一个严格递增的元组，并定义 $d_0 := 0$。则部分旗簇 $F(d;\ n)$ 是不可约的，且其维数为

$$\dim F(d;n) = \sum_{i=1}^{r} (d_i - d_{i-1})(n - d_i).$$

特别地，完全旗簇 $F(n) = F(1、2、\ldots\ldots、n-1;\ n)$ 的维数为

$$\dim F(n) = \binom{n}{2}.$$

定义 3.12。设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间，并固定其一组基。相对于这组基，由所有可逆上三角矩阵组成的子群 $B \subset \mathrm{GL}(V)$ 称为 **Borel 子群**。相对于同一组基，由所有可逆对角矩阵组成的子群 $T \subset \mathrm{GL}(V)$ 称为 **极大环面**。

定义 3.13. 权向量：非零向量 $v \in V$ 若是所有 $t \in T$ 的特征向量，则称为权向量；也就是说，对每个 $t \in T$，都存在一个标量 $\chi(t) \in \mathbb{K}^\times$，使得

$$t \cdot v = \chi(t) v.$$

映射 $\chi : T \to \mathbb{K}^\times$ 称为 v 的权。

定义 3.14. 最高权向量：设 $B \subset \mathrm{GL}(V)$ 是一个包含极大环面 $T \subset B$ 的 Borel 子群。若非零向量 $v \in V$ 满足对所有 $b \in B$,

$$b \cdot v = \mu(b) v,$$

其中 $\mu : B \to \mathbb{K}^\times$ 是一个群同态（即 B 的一个特征）。

特别地，由于 $T \subset B$，向量 v 是一个权向量，其权由 μ 在 T上的限制给出。映射 μ 称为与 v相关联的最高权。

定义 3.15。**支配权**：一个权

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$$

若相对于 GL_n 的 Borel 子群而言满足以下条件，则称其为支配权重

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n.$$

定义 3.16. 差元组 $\mathbf{d}_\lambda$：设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k)$ 是一个支配权重。我们将 λ 补零至长度 n：

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0).$$

这样的支配权重 λ 对应于一个长度至多为 n 的分拆。该分拆可以与行长为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ 的杨图相对应。

定义与 λ 相关联的差元组 d_λ 为

$$d_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n),$$

由于 λ 是支配的，因此它是一个由非负整数组成的元组。

例 3.17。 下面给出 4 的分拆及其对应的差元组示例。

分拆 λ	扩展的 λ （长度为 4）	差元组 d_λ
(4)	$(4, 0, 0, 0)$	$(4, 0, 0)$
$(3, 1)$	$(3, 1, 0, 0)$	$(2, 1, 0)$
$(2, 2)$	$(2, 2, 0, 0)$	$(0, 2, 0)$
$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$
$(1, 1, 1, 1)$	$(1, 1, 1, 1)$	$(0, 0, 0)$

设 V 为域 $\mathbb{K}$ 上维数为 n 的向量空间， $G = \mathrm{GL}(V)$，并考虑旗簇 G/B。

定理 3.18 ([19, 命题 11.2.2])**.** 设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ 为具有差元组 d_λ. 的支配权重。则

$$\mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda) \cong \mathbb{S}_\lambda(V),$$

其中 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 表示 $\mathrm{GL}(V)$ 的不可约表示，其最高权为 λ（等价地，其差元组为 d_λ）。

根据舒尔-外尔对偶 3.5，我们有如下分解

$$V^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes U_\lambda.$$

根据博雷尔-外尔 3.18，每个不可约直和项 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 都可以实现为旗簇 G/B 上线丛 L_λ 的整体截面空间，具体如下

$$\mathbb{S}_\lambda(V) \cong \mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda).$$

因此，超势 $w \in V^{\otimes n}$ 的分解可表示为

$$w = \sum_{\lambda \vdash n} w_\lambda, \quad \text{with } w_\lambda \in \mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda) \otimes U_\lambda.$$

每个分量 w_λ 都对应一个向量空间之间的态射

$$\widetilde{w}_\lambda : U_\lambda^* \to \mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda),$$

其像是一个线性子系统

$$\widetilde{w}_\lambda(U_\lambda^*) \subseteq \mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda).$$

定义 3.19. 几何轨迹：我们将关联的几何轨迹定义为该线性系的基点集：

$$X_\lambda(w) := \mathrm{Base}\big(\widetilde{w}_\lambda(U_\lambda^*)\big) \subseteq G/B,$$

即 G/B 中所有截面在 $\widetilde{w}_\lambda(U_\lambda^*)$ 上同时消失的点的子集 .

命题 3.20 ([16, 第 142])。 皮卡群 $\mathrm{Pic}(G/B)$ 是 G/B 上线丛同构类构成的群。对于完全旗簇，

$$\mathrm{Pic}(G/B) \cong \mathbb{Z}^{n-1},$$

其中每个因子都对应于从 *Pl¨ucker* 嵌入中相应射影空间拉回的超平面线丛 $\mathcal{O}(1)$。

对于每个 $i = 1, \ldots, n-1$，令 $\pi_i : G/B \longrightarrow \mathrm{Gr}(i, n)$ 表示旗中的i维子空间上的投影。

因此， G/B 上的任意线丛 L_λ 都可以唯一地表示为

$$L_\lambda = \pi_1^*\mathcal{O}(d_1) \otimes \pi_2^*\mathcal{O}(d_2) \otimes \cdots \otimes \pi_{n-1}^*\mathcal{O}(d_{n-1}),$$

其中$(d_1, d_2, \ldots, d_{n-1})$ 是最高权 λ的差元组。

命题 3.21. 设 $\lambda \vdash n$ 是一个分拆。定义 λ 的支撑为

$$\mathrm{supp}(\lambda) = \{\, i \mid d_i \neq 0 \,\}.$$

设 X_{supp} 为 G/B 在乘积中的像

$$\prod_{i \epsilon \mathrm{supp}(\lambda)} \mathrm{Gr}(i, n),$$

它是一个部分旗簇（定义 *3.10*）。

令 $\pi_{\mathrm{supp}} : G/B \longrightarrow X_{\mathrm{supp}}$ 为自然投影。于是， L_λ 的整体截面可以在较小的部分旗簇上计算：

$$\mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda) \;\cong\; \mathrm{H}^0\Big(X_{\mathrm{supp}}, \bigotimes_{i \epsilon \mathrm{supp}(\lambda)} \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(i,n)}(d_i)\Big|_{X_{\mathrm{supp}}}\Big).$$

证明。 根据旗簇的皮卡群描述， G/B 上的任意线丛都可以唯一地写成 Pl¨ucker 线丛的拉回的张量积：

$$L_\lambda \cong \bigotimes_{i=1}^{n-1} \pi_i^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(i,n)}(d_i).$$

设 X_{supp} 为对应于指标 i 且满足 $d_i \neq 0$的部分旗簇，并设 $\pi_{\mathrm{supp}} : G/B \to X_{\mathrm{supp}}$ 为自然投影。则在 X_{supp} 上存在线丛M_λ ，使得

$$L_\lambda \cong \pi_{\mathrm{supp}}^* M_\lambda.$$

由于 π_{supp} 具有连通的射影纤维，$(\pi_{\mathrm{supp}})_*\mathcal{O}_{G/B} \cong \mathcal{O}_{X_{\mathrm{supp}}}$；利用 [31, Tag 0E0L]。由投影公式 [31,Tag 01E8],

$$(\pi_{\mathrm{supp}})_*(\pi_{\mathrm{supp}}^* M_\lambda) \;\cong\; (\pi_{\mathrm{supp}})_*\mathcal{O}_{G/B} \otimes M_\lambda \;\cong\; M_\lambda.$$

取整体截面，即可得到所需的同构：

$$\mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda) \;\cong\; \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{supp}}, M_\lambda).$$

□

例 3.22. 对于 $n = 4$，旗簇 G/B 可描述为

$$X = G/B = \{(p, l, \pi) \in \mathbb{P}^3 \times \mathrm{Gr}(2,4) \times \mathbb{P}^{3*} \mid p \in l \subseteq \pi\},$$

其中

- $p \in \mathbb{P}^3$ 是三维射影空间中的一个点,
- $l \in$ Gr(2,4) 是 $\mathbb{K}^4$ 中的一条直线（二维子空间），
- $\pi \in \mathbb{P}^{3*}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的一个超平面。

G/B 上的线丛具有如下形式

$$L_\lambda = \pi_1^*\mathcal{O}(d_1) \otimes \pi_2^*\mathcal{O}(d_2) \otimes \pi_3^*\mathcal{O}(d_3),$$

其中投影为

$$\pi_1 : G/B \to \mathbb{P}^3, \quad \pi_2 : G/B \to \mathrm{Gr}(2,4), \quad \pi_3 : G/B \to \mathbb{P}^{3*}.$$

考虑 $d_1 = d_2 = 0$ 的情形，于是

$$L_\lambda = \pi_3^*\mathcal{O}(d_3).$$

那么整体截面满足

$$\mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda) = \mathrm{H}^0(G/B, \pi_3^*\mathcal{O}(d_3)) \cong \mathrm{H}^0\big(\mathbb{P}^{3*}, \pi_{3*}\pi_3^*\mathcal{O}(d_3)\big).$$

由投影公式

$$\pi_{3*}\pi_3^*\mathcal{O}(d_3) \cong \pi_{3*}\mathcal{O}_{G/B} \otimes \mathcal{O}(d_3),$$

因此

$$\mathrm{H}^0(G/B, \pi_3^*\mathcal{O}(d_3)) \cong \mathrm{H}^0\big(\mathbb{P}^{3*}, \pi_{3*}\mathcal{O}_{G/B} \otimes \mathcal{O}(d_3)\big).$$

由于推前满足

$$\pi_{3*}\mathcal{O}_{G/B} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3*}},$$

可得

$$\mathrm{H}^0(G/B, \pi_3^*\mathcal{O}(d_3)) \cong \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{3*}, \mathcal{O}(d_3)).$$

例 3.23。4 的分拆为 (4)，(3，1)，(2，2)，(2，1，1)，(1，1，1，1)。现在我们逐一讨论每个分拆。

(i) λ = (4,0,0,0) :最高权为

$$d_{(4,0,0,0)} = (4-0, 0-0, 0-0) = (4, 0, 0).$$

部分旗簇化简为 $\mathbb{P}^3$，整体截面空间为

$$w_{(4,0,0,0)} \in \mathrm{H}^0\big(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(4)\big).$$

(ii) $\boldsymbol{\lambda = (3,\ 1,\ 0,\ 0)}$ **:**

这里,

$$d_{(3,1,0,0)} = (3-1, 1-0, 0-0) = (2,1,0).$$

部分旗簇嵌入到

$$F(1,2;4) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathrm{Gr}(2,4).$$

令 $\pi_1 : \mathbb{P}^3 \times \mathbf{Gr(2,4)} \to \mathbb{P}^3$和 $\pi_2 : \mathbb{P}^3 \times \mathbf{Gr(2,4)} \to \mathbf{Gr}(2,4)$ 分别为到第一和第二个因子的自然投影。则相应的线丛为

$$L_{(3,1,0,0)} = \pi_1^* \mathcal{O}(2) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}(1),$$

而整体截面属于

$$w_{(3,1,0,0)} \in \mathrm{H}^0\big(F(1,2;4), \mathcal{O}(2,1)\big).$$

(iii) $\boldsymbol{\lambda = (2,\ 2,\ 0,\ 0)}$ **:**

Then

$$d_{(2,2,0,0)} = (2-2, 2-0, 0-0) = (0,2,0).$$

部分旗簇约化为 $\mathbf{Gr(2,\ 4)}$，并且

$$w_{(2,2,0,0)} \in \mathrm{H}^0\big(\mathrm{Gr}(2,4), \mathcal{O}(2)\big).$$

(iv) $\boldsymbol{\lambda = (2,1,1,0)}$ **:**

最高权为

$$d_{(2,1,1,0)} = (2-1, 1-1, 1-0) = (1,0,1).$$

部分旗簇嵌入到

$$F(1,3;4) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*}.$$

设 $\pi_1 : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*} \to \mathbb{P}^3$和 $\pi_3 : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*} \to \mathbb{P}^{3*}$ 分别表示到第一和第二个因子的自然投影。相应的线丛为

$$L_{(2,1,1,0)} = \pi_1^* \mathcal{O}(1) \otimes \pi_3^* \mathcal{O}(1).$$

因此，整体截面空间为

$$w_{(2,1,1,0)} \in \mathrm{H}^0\big(F(1,3;4), \mathcal{O}(1,1)\big).$$

(v) $\boldsymbol{\lambda = (1,1,1,1)}$ **:**

最高权元组为

$$d_{(1,1,1,1)} = (1-1,\ 1-1,\ 1-1) = (0,0,0).$$

相应的线丛是平凡的。因此,

$$w_{(1,1,1,1)} \in \mathrm{H}^0(G/B, \mathcal{O}) \cong \mathbb{K}.$$

这一部分无法帮助区分这些代数，因此我们不将其列入表格。

4. 离散不变量的计算

本节中，我们将通过一些示例展示如何使用 Magma 计算离散不变量。部分代码很长，因此没有完整写出。完整代码可在 [5]处获取。

回顾定义 3.19，相关几何轨迹是此线性系的基点集：

$$X_\lambda(w) := \mathrm{Base}\big(\widetilde{w}_\lambda(U_\lambda^*)\big) \subseteq G/B.$$

此 $X_\lambda(w)$ 是该代数的几何不变量。接着，我们计算所有分拆 $\lambda \vdash 4$ 对应的 $X_\lambda(w)$ 的离散不变量，以区分这些代数。

定义 4.1。令 $X_\lambda(w)$ 为一个闭子概形，它由旗簇 G/B 上整体生成线丛 L_λ 的截面 $\widetilde{w}_\lambda(U_\lambda^*)$ 的零点定义。存在一一对应关系

$\{\lambda$ 至多有 n 个部分的分拆$\} \longleftrightarrow \{$在 G/B 上的有效线丛 $L_\lambda\}$,

由此我们可以用一个分拆 λ 来标记每个这样的子概形；参见 [15, 第 393] 页。

4.1. 代数 H 的计算。

例 4.2。考虑 w_λ，它是 λ =(4) 的超势分量。利用舒尔-外尔对偶 3.5，该分量可表示为

$$w_{(4)} = e_{(4)} \cdot w \in \mathbb{S}_{(4)}(V) \otimes U_{(4)} \cong \mathrm{Sym}^4(V),$$

其中 $e_{(4)}$ 是通过第 8 页上的特征标公式计算得到的幂等元。

部分旗簇 G/B 化为射影空间 $\mathbb{P}^3$，线丛 $L_{(4)}$对应于 O(4)，如例 3.23 所示。因此，分量 $w_{(4)}$ 在 $\mathbb{P}^3$中定义了一个四次超曲面，而概形

$$X_{(4)}(w) \subseteq \mathbb{P}^3$$

恰好是这个四次多项式的零点集。

接下来，我们展示代数 H 的 Magma 代码（如例 2.11 所示）。我们在有理函数域 $\mathbb{Q}(f,\ h)$ 上构造射影空间。在全文中，f 和 h 均取为一般的。代码如下：

```
QQ := RationalField();K<f,
h> := FunctionField(QQ, 2);P<x1,x2,x3,
x4> := ProjectiveSpace(K, 3);
X := Scheme(P, w(4));
```

现在我们计算离散不变量，列如下：

```
// Primary Components of the scheme X
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in PrimaryComponents(X)];
> [ [ 2, 2 ], [ 2, 2 ] ]
```

```
// Primary Components of the reduced subscheme of X
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in
PrimaryComponents(ReducedSubscheme(X))];
> [ [ 2, 1 ], [ 2, 2 ] ]

// Primary Components of the singular subscheme of X
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in
PrimaryComponents(SingularSubscheme(X))];
> [ [ 2, 1 ], [ 1, 4 ], [ 1, 1 ] ]

// Primary Components of the reduced subscheme of the singular
subscheme of X
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in
PrimaryComponents(ReducedSubscheme(SingularSubscheme(X)))];
> [ [ 2, 1 ], [ 1, 1 ] ]
```

在域 $\mathbb{K}$ 上处理概形时，在 $\mathbb{K}$ 上分解为初等分支可能无法反映真实的几何结构。特别是，这些分支可能无法体现其在代数闭包 $\mathbb{K}$ 上的不可约性。为此，我们考虑 $\mathbb{K}$ 的有限扩张，此时初等分支变为绝对不可约。

定义 4.3（**概形的基变换**）。设 X 是域 $\mathbb{K}$ 上的射影概形，且 L 是 $\mathbb{K}$ 的扩张域。将 X 基变换到 L 所得到的概形记为

$$X_L = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{K}} \operatorname{Spec} L,$$

它是将标量从 $\mathbb{K}$ 扩张到 L 后得到的概形。

引理 4.4。 [31, Tag035X] 对于 $\mathbb{K}$ 的任意域扩张 L，概形 X 是既约的，当且仅当 X_L 是既约的。

定义 4.5（**绝对不可约**，[31, Tag 0365]）。设 X 是域 $\mathbb{K}$ 上的概形。如果对于 $\mathbb{K}$ 的每个域扩张 L，概形 X_L 都是不可约的，则称 X 在 $\mathbb{K}$ 上绝对不可约。

引理 4.6。 [31, 标记 054R] 设 X 是域 $\mathbb{K}$上的等维射影概形。那么存在有限伽罗瓦扩张 $L/\mathbb{K}$，使得

$$X_L = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_t,$$

其中每个 C_i 都是 X_L的一个主分支。对所有 i，令 R_i 表示与 C_i 相关联的约化子概形。那么：

(1) 每个 R_i 都是绝对不可约的，*(2)* 维数 C_i = 维数 R_i = 维数 X，*(3)* 次数 C_i 不依赖于 i，*(4)* 次数 C_i/次数 R_i 不依赖于 i，*(5)* 次数 X = 次数 X_L = $t \cdot$ 次数 C_i.

引理 4.7. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是维数为 d的等维闭子概形，$L \subseteq \mathbb{P}^n$ 是余维为 c的线性子空间。假设：

(1) $\deg(X \cap L) = \deg(X)$,

(2) 维数$(X \cap L) = d - c$，且 *(3)* $X \cap L$ 是绝对不可约的。

那么 X 是绝对不可约的。

证明。假设 X 是可约的。那么它的理想可以写成

$$I = K \cap J,$$

其中 K 和 J 是适当理想，分别对应于 X的不同不可约分支，每个分支的维数为 d，且 $I \neq K$， $I \neq J$。

与线性子空间 L 相交对应于添加其理想 Z，因此

$$I + Z = (K \cap J) + Z.$$

根据理想的模律，

$$I + Z = (K + Z) \cap (J + Z).$$

由于 $X \cap L$ 是绝对不可约的， $I + Z$ 是一个素理想。因此，

$$I + Z = K + Z \quad \text{or} \quad I + Z = J + Z.$$

不失一般性，设

$$I + Z = K + Z.$$

由分支次数的可加性可得

$$\deg(X) = \deg(K) + \deg(J).$$

因为根据假设，与 L相交会保持次数不变，

$$\deg(X \cap L) = \deg(X) = \deg(K) + \deg(J).$$

另一方面，

$$\deg(K + Z) \leq \deg(K).$$

但是，由于 $I + Z = K + Z$，可得

$$\deg(X \cap L) = \deg(I + Z) = \deg(K + Z) \leq \deg(K),$$

这与 $\deg(K) + \deg(J) = \deg(X \cap L) \leq \deg(K)$，矛盾，因为 $\deg(J) > 0$。

因此，假设 X 是可约的会导致矛盾。因此， X 是绝对不可约的。□

因此，利用定义 4.5、引理 4.6 和引理 4.7，我们可以验证 X 的每个分支是否绝对不可约。下面简要说明如何在 Magma 中检验绝对不可约性。

我们将一个主分支 `Component1` 与随机选取的线性空间相交，得到一条曲线 C。命令 `IsAbsolutelyIrreducible(C)` 在 C 绝对不可约时返回 `true` ，否则返回 `false` 。

如果该命令返回 `false`，我们可以通过计算 `FieldOfGeometricIrreducibility(C)` 来确定一个合适的域扩张，它给出 C 的函数域中基域的代数闭包。可以对 X 的所有初等分支重复此过程，以验证绝对不可约性。代码如下：

```
pc := PrimaryComponents(X);
Component1 := pc[1]; // first component
C := Curve(Intersection(Component1, Scheme(P1, [49*x1 - 17*x2 +
6*x3])));
IsAbsolutelyIrreducible(C);
// true → component is absolutely irreducible

// false → we set
KK := FieldOfGeometricIrreducibility(C);
XKK := ChangeRing(X, KK);
```

例4.8. 例 4.2 中计算得到的初等分支并非全部绝对不可约，因此我们在 `XKK` 上重新计算它们，并重复此过程，直到所有分支都绝对不可约。

```
// Primary Components of the scheme XKK
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in PrimaryComponents(XKK)];
> [ [ 2, 2 ], [ 2, 1 ], [ 2, 1 ] ]

// Primary Components of the reduced subscheme of XKK
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in
PrimaryComponents(ReducedSubscheme(XKK))];
> [ [ 2, 1 ], [ 2, 1 ], [ 2, 1 ] ]

// Primary Components of the singular subscheme of XKK
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in
PrimaryComponents(SingularSubscheme(XKK))];
> [ [ 2, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1 , 2 ] [ 1, 1 ] ]

// Primary Components of the reduced subscheme of the singular
subscheme of XKK
[[Dimension(p), Degree(p)] :  p in
PrimaryComponents(ReducedSubscheme(SingularSubscheme(XKK)))];
> [ [ 2, 1 ], [ 1, 1 ] ]
```

4.2. $\lambda = (2,2)$ **的表示论框架**。

考虑 w_λ，即 $\lambda = (2,2)$ 的超势的分支，定义为

$$w_{(2,2)} := e_{(2,2)} \cdot w \in \mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes U_{(2,2)} \subseteq V^{\otimes 4}.$$

作为 $\mathrm{GL}(V)$-表示，我们有 $\mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes U_{(2,2)} \simeq (\mathbb{S}_{(2,2)}V)^{\oplus 2}$，因为 $U_{(2,2)}$ 是二维的。

$\mathbb{S}_{(2,2)}V$ 的两个副本可以通过对称幂和外幂在 $V^{\otimes 4}$ 中实现：

$$\mathbb{S}_{(2,2)}V \subseteq \mathrm{Sym}^2(\bigwedge^2 V) \subseteq V^{\otimes 4} \quad \text{and} \quad \mathbb{S}_{(2,2)}V \subseteq \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V) \subseteq V^{\otimes 4}.$$

令 $C_4 \leq S_4$ 表示由循环 p =(1234)生成的循环子群。将不可约的 S_4-表示 $U_{(2,2)}$ 限制到 C_4后，我们得到

$$U_{(2,2)}\big|_{C_4} \simeq L_0 \oplus L_2,$$

其中， L_0 和 L_2 表示 C_4 的一维表示，在这些表示中，生成元 p 分别作用为 1 和 -1。

因此，我们可以写成

$$\mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes U_{(2,2)} \simeq (\mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes L_0) \oplus (\mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes L_2).$$

作为 GL(V)-表示， $\mathbb{S}_{(2,2)}V$ 的两个副本是同构的。特别地，我们可以写出正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{S}_{(2,2)}V \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V) \longrightarrow \mathrm{Sym}^4(V) \longrightarrow 0,$$

其中

$$\mathbb{S}_{(2,2)}V = \ker\big(\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V) \to \mathrm{Sym}^4(V)\big).$$

为使这些 $\mathbb{S}_{(2,2)}V$ 的副本显式化，我们构造这些子空间的基

$$\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V) \subseteq V^{\otimes 4} \quad \text{and} \quad \mathrm{Sym}^2(\textstyle\bigwedge^2 V) \subseteq V^{\otimes 4}.$$

利用交换子和反交换子，我们为每个子空间生成张成集，然后将其约化为线性无关集以构成基。每个基的维数为20。

为方便起见，我们令 $W_0 := \mathrm{Sym}^2(\bigwedge^2 V)$以及 $W_1 := \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^2 V)$，并利用余乘作用在这些子空间中寻找最高权向量。回顾李代数元素 $g \in \mathfrak{gl}(V)$在 $V^{\otimes 4}$ 上的余乘作用定义为

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = \sum_{i=1}^{4} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes g(v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_4,$$

从而 g 分别作用于每个张量因子，而其余因子保持不变。

我们为李代数 $\mathfrak{gl}(V)$选取一组生成元，由满足 $i < j$的正根向量 e_{ij} 组成。将升算子 e_{ij}的零空间与先前构造的子空间 W_0 和 W_1 相交，即得到最高权向量

$$h_0 \in W_0 \quad \text{and} \quad h_1 \in W_1,$$

其给出如下:

$$h_0 := -x_3x_4x_3x_4 + x_3x_4^2x_3 + x_4x_3^2x_4 - x_4x_3x_4x_3,$$

and

$$h_1 := x_3^2x_4^2 - \frac{1}{2}x_3x_4x_3x_4 - \frac{1}{2}x_3x_4^2x_3 - \frac{1}{2}x_4x_3^2x_4 - \frac{1}{2}x_4x_3x_4x_3 + x_4^2x_3^2.$$

接下来，我们将最高权向量 h_1 分解为其 C_4-同型分量。这些分量对应于特征标 L_0 和 L_2。与这些特征标相关联的 $\mathbb{K}[C_4]$ 中的幂等元为

$$e_{L_0} = \frac{1}{4}(1 + p + p^2 + p^3), \qquad e_{L_2} = \frac{1}{4}(1 - p + p^2 - p^3),$$

由此得到

$$h_1^0 := e_{L_0} \cdot h_1 \qquad \text{and} \qquad h_1^1 := e_{L_2} \cdot h_1.$$

h_1^0 和 h_1^1 的表达式为

$$h_1^0 := \frac{1}{4}x_3^2x_4^2 - \frac{1}{2}x_3x_4x_3x_4 + \frac{1}{4}x_3x_4^2x_3 + \frac{1}{4}x_4x_3^2x_4 - \frac{1}{2}x_4x_3x_4x_3 + \frac{1}{4}x_4^2x_3^2,$$
$$h_1^1 := \frac{3}{4}x_3^2x_4^2 - \frac{3}{4}x_3x_4^2x_3 - \frac{3}{4}x_4x_3^2x_4 + \frac{3}{4}x_4^2x_3^2.$$

因此，这三个最高权向量为 h_0， h_1^0， h_1^1. 容易将 h_0 解释为 Gr(2，4) 上的函数，而 h_1 则不能，因此我们将其拆分为 $h_1 = h_1^0 + h_1^1$。

为了生成完整的子表示，我们反复对每个最高权向量施加李代数元素的余乘作用，从而得到矩阵 M_0、 M_1 和 M_2。每个矩阵的大小为 10000×256；它们的秩为 20，等于 $\dim \mathbb{S}_{(2,2)}V$。这里，

$$\text{lieAlg} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \cup \{e_{ij} \mid 1 \le j < i \le 4\}$$

表示嘉当元素和降算子的集合。随后在 Magma 中定义这些矩阵如下：

```
M0 := [ h1^0 * coproduct(X) * coproduct(Y) * coproduct(Z) *
coproduct(W) | X、 Y、 Z、 W in lieAlg ];

M1 := [ h0 * coproduct(X) * coproduct(Y) * coproduct(Z) *
coproduct(W) | X, Y, Z, W in lieAlg ];

M2 := [ h1^1 * coproduct(X) * coproduct(Y) * coproduct(Z) *
coproduct(W) | X, Y, Z, W in lieAlg ];
```

接下来，为了将这些最高权向量解释为 Gr(2，4) 上的函数，我们构造同构

$$h_1^0 \cdot \mathfrak{gl}(V) \simeq \mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes L_0 \subseteq V^{\otimes 4}, \quad h_1^1 \cdot \mathfrak{gl}(V) \simeq \mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes L_2 \subseteq V^{\otimes 4},$$

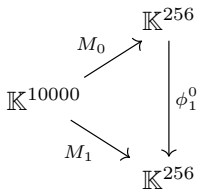
and

$$h_0 \cdot \mathfrak{gl}(V) \simeq W_0 \subseteq V^{\otimes 4}.$$

令 $\phi_1^0 : V^{\otimes 4} \longrightarrow V^{\otimes 4}$ 表示该线性映射。我们关注它在 $\phi_1^0| : h_1^0 \cdot \mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\sim} h_0 \cdot \mathfrak{gl}(V)$ 上的限制。

对于轨道 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的向量 $X \in \mathbb{K}^{10000}$， M_0 将其映射到 $\mathbb{S}_{(2,2)}V \otimes L_0 \subseteq V^{\otimes 4}$，而 M_1 将其映射到 $W_0 \subseteq V^{\otimes 4}$。然后，我们求解 ϕ_1^0，使交换图交换：

$$\phi_1^0(M_0X) = M_1X \quad \text{for all } X.$$



类似地，我们可以利用最高权向量 h_1^1 定义映射 ϕ_1^1。我们使用以下命令在 Magma 中求出表示 ϕ_1^0 和 ϕ_1^1 的矩阵:

```
S01 := Transpose(Solution(Transpose(M0), Transpose(M1)));
S21 := Transpose(Solution(Transpose(M2), Transpose(M1)));
```

矩阵 $S01$ 和 $S21$ 的大小均为 256×256。将映射作用于最高权向量，得到 $\phi_1^0(h_1^0) = h_0$ 和 $\phi_1^1(h_1^1) = h_0$.

我们将$w_{(2,2)}$ 投影到 L_0 和 L_2上，得到

$$w_{(2,2)} = w_{(2,2)}^{\mathrm{triv}} + w_{(2,2)}^{\mathrm{sign}},$$

其中 $w^{\mathrm{triv}}{}_{(2,\ 2)} := e_{L_0} \cdot w_{(2,2)}$ 和 $w^{\mathrm{sign}}{}_{(2,\ 2)} := e_{L_2} \cdot w_{(2,2)}$.

然后，我们将线性映射 ϕ_1^0 和 ϕ_1^1 作用于超势的相应分支，得到向量 f_0 和 f_2：

$$f_0 := \phi_1^0\big(w_{(2,2)}^{\mathrm{triv}}\big), \qquad f_2 := \phi_1^1\big(w_{(2,2)}^{\mathrm{sign}}\big).$$

令 $S = \{S_i\}$ 为 $W_0 \subseteq V^{\otimes 4}$ 的有序基，接着我们求解以下方程组，得到系数 β_0^i 和 β_2^i:

$$f_0 = \sum_i \beta_0^i S_i, \qquad f_2 = \sum_i \beta_2^i S_i.$$

接下来，我们描述几何轨迹 $X_{(2,2)}(w) \subseteq \mathrm{Gr}(2,4)$。令 $R = \mathbb{K}[b_1, \ldots, b_6]$ 为六个变量的多项式环。通过 Pl¨ucker 嵌入，Grassman- nian Gr(2,4) 被实现为射影子簇 $\mathrm{Gr}(2,4) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \cong \mathbb{P}^5$，其齐次坐标环由 $b_1, \ldots, b_6$ 生成，并满足 Pl¨ucker 关系

$$Q_{\mathrm{Gr}} := b_1 b_6 - b_2 b_5 + b_3 b_4.$$

最后，为了得到 Pl¨ucker 坐标中的二次型，我们将基元素S_i写成 $b_1, \ldots, b_6$ 的二次型，并构造线性组合

$$\beta_0 = \sum_i \beta_0^i S_i(b_1, \ldots, b_6), \qquad \beta_2 = \sum_i \beta_2^i S_i(b_1, \ldots, b_6).$$

一些基元素为

$$S = \{4b_1^2, 4b_1b_2, 4b_2^2, 4b_1b_3, 4b_2b_3, 4b_3^2, \ldots\}.$$

接着，我们定义理想 $I := Q_{\mathrm{Gr}}$，β_0，β_2，相应的射影概形为 $X_{(2,2)}(w) := \mathrm{Proj}(R/I) \subseteq \mathbb{P}^5$. 因此，我们可以像例 4.2 中那样计算离散不变量。

对于分拆 $\lambda = (2,\ 1,\ 1)$ 和 $\lambda = (3,\ 1)$，也进行了类似的计算；代码可在 GitHub 仓库 [5] 中找到。

5. 记号与离散不变量

沿用例 3.17 中关于分拆的记号，我们将相关的几何轨迹 $X_\lambda(w)$ 定义为

$$X_{(4)}(w) := X_{400}, \quad X_{(3,1)}(w) := X_{210}, \quad X_{(2,2)}(w) := X_{020},$$
$$X_{(2,1,1)}(w) := X_{101}, \quad X_{(1,1,1,1)}(w) := X_{000}.$$

我们还引入以下概形及其对应的离散不变量：

- 令 PC(X) 表示概形 X 的初等分支集合。X 的初等分支的维数-次数数据由 dimdegPC(X) := {[dim(C), deg(C)] | $C \in$ PC(X)}。
- X 的**约化子概形**记为 X，其对应数据为 dimdegPC(X) := {[dim(C), deg(C)] | $C \in$ PC(X)}。
- X 的**奇异子概形**记为 X_{sing}，其对应数据为 dimdegPC(X_{sing}) := {[dim(C), deg(C)] | $C \in$ PC(X_{sing})}。
- X 的**奇异子概形的约化子概形**记为 $\bar{X}_{\mathrm{sing}}$，其对应数据为 dimdegPC($\bar{X}_{\mathrm{sing}}$) := {[dim(C), deg(C)] | $C \in$ PC($\bar{X}_{\mathrm{sing}}$)}。

对于每个分拆 $\lambda \vdash 4$，我们给出 X、X^{sing} 和 $\bar{X}^{\mathrm{sing}}$ 的维数-次数数据。各项为成对数据 [dim，deg]，，并在适用时标明重数。空括号项 [ ] 表示奇异子概形为空（即其维数为 -1），因此相应的曲面是光滑的。表项 0 表示相应分量 w_λ 为零。

文献中已有一些代数被证明彼此同构。在他们的论文 [35], 中，作者对形如 ($kQ[x_1, x_2]$)$_P[y_1, y_2]$ 的四维正则整环进行分类；σ] 在同构意义下 [35, 命题 4.4]。借助基于扭曲等价 [35,定义 3.3], 的 Σ-M-对偶 [35, 定义 4.3], 的概念，他们确定了对偶对 - (E, J)、(F, I)、(N, P)、(T, U) 和 (W, Z)，这些代数通过交换 x_i 和 y_i 而同构；以及自对偶代数：B、C、M、O、R 和 S。

现在，我们列出第 5.1–5.4 节中已知的 77 个 Koszul AS-正则代数族的离散不变量。

5.1. **λ = (4) 的离散不变量。**

代数	**dimdegPC**(X)	**PC 的次数维数**(X^{sing})	**PC 的次数维数**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
A	[2,1], [2,3]	[1,3], [1,1]×2, [0,8], [0,2]	[1,1]×3
B	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
C	[2,4]	[1,1]×2, [0,6]×2, [0,2]×2	[1,1]×2
D	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,4]×3	[1,1]×4
(E,J)	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
(F,I)	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
G	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,4]×3	[1,1]×4
H	[2,1]×2, [2,2]	[1,1], [1,2]×2, [2,1]	[2,1], [1,1]
K	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
L	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
M	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
(N,P)	[2,4]	[1,1]×2, [0,8], [0,4]×2	[1,1]×2
O	[2,4]	[1,1]×2, [0,8], [0,4]×2	[1,1]×2
Q	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,2]×2, [0,4]×2	[1,1]×4
R	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
S	[2,4]	[1,1]×2, [0,4]×2, [0,3]×2, [0,2]×2	[1,1]×2
(T,U)	[2,4]	[1,1]×2, [0,4]×3, [0,3], [0,2]	[1,1]×2
V	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,2]×2, [0,4]×2	[1,1]×4
(W,Z)	[2,4]	[1,1]×2, [0,8], [0,4]×2	[1,1]×2
X	[2,2], [2,1]×2	[2,1], [1,2]×2, [1,1]	[2,1], [1,1]
Y	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,4]×2, [0,2]×2	[1,1]×4

表1. 来自 [35]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
Vancliff	[2,1]×2, [2,2]	[1,1]×5, [0,4]×2	[1,1]×5
Vancliff 扭曲	[2,1]×2, [2,2]	[1,1]×5, [0,4]×2	[1,1]×5
S_∞	[2,4]	[ ]	[ ]
S_∞ 扭转	[2,4]	[ ]	[ ]
$S_{d,i}$ $(i=1)$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
$S_{d,i}$ $(i=2)$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
$S_{d,i}$ $(i=3)$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
$S_{d,i}$ $(i=4)$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
$S_{d,i}$ $(i=5)$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
$S_{d,i}$ $(i=6)$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=1)$	[2,4]	[ ]	[ ]
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=3)$	[2,4]	[ ]	[ ]
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=5)$	[2,4]	[ ]	[ ]
$\mathbb{K}_Q[x_1,x_2,x_3,x_4]$	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
Clifford	[2,4]	[ ]	[ ]
中心扩张扭曲 [2,1], [2,3]		[1,3]	[1,3]
Kirkman R	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
Kirkman S	[2,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
Kirkman T	[2,4]	[0,1]×2	[0,1]×2
Cassidy-Vancliff 2	[2,4]	[ ]	[ ]
Cassidy-Vancliff 3	[2,4]	[0,8], [0,3]	[0,1]×2
$R(3,\ a)$	[2,2]×2	[2,1], [1,6]	[2,1]
A_5	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]

表2。四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量，取自 [20, 32, 11, 10, 8, 27, 21, 29]。

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$\mathrm{F}_{(0,-1,-1,2)}$	[2,1]×2, [2,2]	[1,2], [1,1]×3, [0,5]	[1,2], [1,1]×3
$\mathrm{F}_{(-1,-1,1,1)}$	[2,1]×2, [2,2]	[1,1]×5, [0,4]×2	[1,1]×5
$\mathrm{F}_{(0,-1,-1,2)}$ *(style id="1"> (−1,0,−1,2)*	[2,1], [2,3]	[1,1]×3, [0,7], [0,5]×2	[1,1]×3
$\mathrm{F}_{(0,-1,-1,2)}$ *(style id="1"(style id="1">−1,−1,style id="5">2,style id="7">0style id="9">)*	[2,1], [2,3]	[1,2], [1,1], [0,10], [0,6]	[1,2], [1,1]
OreExt 类型 A_1	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 A_2	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 A_3	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 B_1	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 E_1	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 E_2	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 H.I	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 H.II	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 S'_1	[2,1]×2, [2,2]	[1,2], [1,1]×3, [0,5]	[1,2], [1,1]×3
OreExt 类型 S_2	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]×2	[1,2]×2, [1,1]×2

表3. [17, 20]中的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

注5.1. 请注意，对于以下代数，$w_{(4)} = 0$： 中心扩张、 L(1,1,2)、 E(3)、四维 Sklyanin、四维 Sklyanin 扭曲、Shelton-Tingey、$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$、 S(2, 3)、S_d、$_i$扭转（i = 2, 4, 6）、Cassidy-Vancliff 1、 L(1, 1, 2)$^{\sigma}$、S(2,3)$^{\sigma}$、Caines 代数、$\mathrm{F}_{(0,-1,-1,2)}$、李代数 1、李代数 2、李代数 3、(0,0,0,0) (2,-1,-1,0) 李代数 4、$\mathfrak{sl}_2$、CentExt 类型 B、CentExt 类型 E、CentExt 类型 H、CentExt 类型 S_1、CentExt 类型 S'_1、CentExt 类型 S_2

注5.2. 对于表1、表2和表3中的所有代数，我们都有 $X = \bar{X}$，但 H、X 和 R(3, a) 除外。

我们给出一些例子，以说明离散不变量的结构及其几何意义；此处 $X = X_{400}$。

例5.3 (代数 M)。

- dimdegPC(X) = $[2,1] \times 4$
- dimdegPC($X_{\text{奇异}}$) = $[1,1] \times 6$
- dimdegPC($\bar{X}_{\text{奇异}}$) = $[1,1] \times 6$

X 是可约的，是 $\mathbb{P}^3$ 中四个平面的并集，其中每个平面都不可约。它沿六条直线奇异。

例5.4 (代数 S_∞)。

- dimdegPC(X) = $[2,4]$
- dimdegPC($X_{\text{奇异}}$) = [ ]
- dimdegPC($\bar{X}_{\text{奇异}}$) = [ ]

X 是 $\mathbb{P}^3$中的光滑四次曲面。

5.2. **λ = (2,2) 的离散不变量。**

代数	**dimdegPC**(X)	**PC 的次数维**(X^{sing})	**PC 的次数维**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
A	[2,3]×2, [2,1]×2	[1,3]×3, [1,1], [0,4]×2	[1,3], [1,1]×3
B	[2,4]×2	[1,2]×2, [0,5]×2	[1,2]×2
C	[2,8]	[0,7]×2, [0,1]×2	[0,1]×4
D	[2,6], [2,1]×2	[1,1]×5, [0,3]×2, [0,2]×2	[1,1]×5
(E,J)	[2,2]×4	[1,2]×4	[1,2]×4
(F,I)	[2,8]	[0,7]×2, [0,1]×2	[0,1]×4
G	[2,3]×2, [2,1]×2	[1,3], [1,1]×5, [0,3]×2	[1,3], [1,1]×5
H	[2,4]×2	[2,3]×2, [1,14]	[2,1]×2
K	[2,2]×2, [2,1]×4	[1,1]×10	[1,1]×10
L	[2,2]×2, [2,1]×4	[1,1]×10	[1,1]×10
M	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
(N,P)	[2,2]×4	[1,2]×4	[1,2]×4
O	[2,8]	[0,7]×2	[0,1]×2
Q	[2,2]×3, [2,1]×2	[1,2]×2, [1,1]×5	[1,2]×2, [1,1]×5
R	[2,4]×2	[1,4], [0,7]×2, [0,1]×2	[1,4], [0,1]×2
S	[2,8]	[2,4], [0,2]×2	[2,4]
(T,U)	[2,4]×2	[1,1]×4, [0,6]×2, [0,4]×2	[1,1]×4
V	[2,2]×3, [2,1]×2	[1,2]×2, [1,1]×5	[1,2]×2, [1,1]×5
(W,Z)	[3,4]	[0,1]×2	[0,1]×2
X	[2,4]×2	[2,3]×2, [1,14]	[2,1]×2
Y	[3,4]	[0,1]×4	[0,1]×4

表 4。来自 [35]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$L(1,1,2)$	[3,2]×2	[2,2], [0,1]×2	[2,2], [0,1]×2
$E(3)$	[3,4]	[1,3],[0,4]	[1,1]
四维 Sklyanin	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
Vancliff	[2,4], [2,1]×4	[1,1]×8, [0,2]×4	[1,1]×8
Vancliff 扭曲	[2,4], [2,1]×4	[1,1]×8, [0,2]×4	[1,1]×8
Shelton-Tingey	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
S_∞	[3,4]	[0,1]×2	[0,1]×2
S_∞ 扭转	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
$S_{d,\ i}$ $(i=1)$	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
$S_{d,i}$ $(i=2)$	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
$S_{d,i}$ $(i=3)$	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
$S_{d,i}$ $(i=4)$	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
$S_{d,i}$ $(i=5)$	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
$S_{d,i}$ $(i=6)$	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=1)$	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=3)$	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=5)$	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
$\mathbb{K}_Q[x_1,x_2,x_3,x_4]$	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
Kirkman R	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
Kirkman S	[3,4]	[1,1], [0,2]×2	[1,1]
Kirkman T	[3,4]	[0,1]	[0,1]
Cassidy-Vancliff 1	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
Cassidy-Vancliff 2	[3,4]	[3,2], [0,4]	[3,2]
Cassidy-Vancliff 3	[3,2]×2	[2,1]×2, [1,4]	[2,1]×2
$R(3,\ a)$	[2,2]×2, [2,4]	[2,1]×2, [1,12], [0,26]	[2,1]×2
$L(1,1,2)^\sigma$	[3,2]×2	[2,2], [0,1]×2	[2,2], [0,1]×2
A_5	[3,4]	[1,2], [0,3]×2	[1,1]

表5. 来自 [20, 32, 11, 10, 8, 27, 21, 29]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
F$_{(0,-1,-1,2)}$ (0, 0, 0, 0)	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
F$_{(-1,-1,1,1)}$ (0, 0, 0, 0)	[2,4], [2,1]×4	[1,1]×8, [0,2]×4	[1,1]×8
F$_{(0,-1,-1,2)}$ (0, 0, 0, 0) (2,−1,−1,0)	[3,2]×2	[2,2], [0,1]×2	[2,2], [0,1]×2
F$_{(0,-1,-1,2)}$ (style id='1'>（−1,0,−1,2） (0, 0, 0, 0)	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
F$_{(0,-1,-1,2)}$ (0, 0, 0, 0) (style id='1')(style id='1'>−1,−1,style id='2'>2,style id='7'>0style id='9'>)	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
OreExt 类型 A_1	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
OreExt 类型 A_2	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
OreExt 类型 A_3	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
OreExt 类型 B_1	[3,2]×2	[2,1]×2, [1,4]	[2,1]×2
OreExt 类型 E_1	[2,6], [2,1]×2	[1,3]×2	[1,3]×2
OreExt 类型 E_2	[2,6], [2,1]×2	[1,3]×2	[1,3]×2
OreExt 类型 H.I	[2,2]×3, [2,1]×2	[2,1]×2, [1,5], [1,2]×2, [1,1]×2	[2,1]×2,[1,1]×2
OreExt 类型 H.II	[2,2]×3, [2,1]×2	[2,1]×2, [1,5], [1,2]×2, [1,1]×2	[2,1]×2,[1,1]×2
OreExt 类型 S'_1	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
OreExt 类型 S_2	[2,2]×2, [2,1]×4	[1,1]×10	[1,1]×10
CentExt 类型 E	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
CentExt 类型 H	[3,2]×2	[2,1]×2, [1,4]	[2,1]×2
CentExt 类型 S_1	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
CentExt 类型 S'_1	[3,2]×2	[2,2], [0,1]×2	[2,2], [0,1]×2
CentExt 类型 S_2	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6

表 6. 来自 [17, 20]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

注 5.5. 注意 $w_{(2,2)} = 0$ 对于以下代数：中心扩张、四维 Sklyanin 扭曲、$S_{d,\ i}$ 扭转（$i = 2$, 4，6）、 $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$、Clifford、 S（2，3）、中心扩张扭曲、 S（2，3）$^{\sigma}$、Caines 代数、李代数 1、李代数 2、李代数 3、李代数 4、 $\mathfrak{sl}_2$ 以及 CentExt 类型 B

注 5.6。 对于表 4、5 和 6 中的所有代数，我们都有 $X = X$，但 H、S、X、Cassidy-Vancliff 2、 R(3， a)、OreExt Type H.I 和 OreExt Type H.II 除外。

以下示例针对 $X = X_{020}$。

例 5.7 (代数 C)。

- dimdegPC(X) $= [2, 8]$
- dimdegPC($X_{\text{奇异}}$) $= [0, 7] \times 2,\ \ [0, 1] \times 2$
- dimdegPC($\bar{X}_{\text{单数}}$) $= [0, 1] \times 4$

X 是一个次数为 8 的不可约曲面。它在四个点处奇异。

例 5.8 (代数 M)。

- dimdegPC(X) $= [3, 4]$
- dimdegPC($X_{\text{奇异}}$) $= [0, 1] \times 6$
- dimdegPC($\bar{X}_{\text{奇异}}$) $= [0, 1] \times 6$

X 是一个不可约三维四次曲面，即一个四次三维簇。它有六个奇异点。

5.3. **$\lambda = (2,1,1)$的离散不变量。**

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
A	[3,12], [3,4]×2	[3,6], [2,6]×2, [0,1]×2	[3,6]
B	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
C	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
D	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4, [0,1]×2	[2,3]×4, [0,1]×2
(E,J)	[2,16], [2,2]×2	[1,4]×2	[1,4]×2
(F,I)	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4, [0,1]×2	[2,3]×4, [0,1]×2
G	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4, [0,1]×2	[2,3]×4, [0,1]×2
H	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
K	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
L	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
M	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12
O	[4,20]	[1,2]×2	[1,2]×2
Q	[2,3]×4, [2,2]×4	[2,1]×2, [1,3]×4,[1,2]×2, [1,1]×4, [0,42]	[2,1]×2, [1,1]×4
R	[2,2]×6, [2,1]×8	[1,1]×24	[1,1]×24
(T,U)	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
V	[2,3]×4, [2,2]×4	[2,1]×2, [1,3]×4, [1,2]×2, [1,1]×4, [0,42]	[2,1]×2, [1,1]×4
(W,Z)	[4,20]	[1,2]	[1,2]
X	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
Y	[4,20]	[1,2]	[1,2]

表7. 来自 [35]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
Vancliff	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
Vancliff 扭曲	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
S_∞	[4,20]	[1,2]×2	[1,2]×2
$S_{d,\ i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$	[2,6]×2, [2,1]×4, [2,2]×2	[1,1]×16	[1,1]×16
$\mathbb{K}_Q[x_1, x_2, x_3, x_4]$	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
中心扩张扭曲 [4,10]×2		[3,6]	[3,6]
Kirkman S	[4,10]×2	[3,6]	[3,6]
Kirkman T	[4,20]	[1,2]	[1,2]
$R(3,\ a)$	[2,12], [2,4]×2	[2,10], [2,3]×2, [1,20]×2	[2,1]×2, [2,2]
$L(1,\ 1,\ 2)^\sigma$	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12
$S(2,\ 3)^\sigma$	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
A_5	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,\ 0,\ 0,\ 0)}$	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
$\mathrm{F}^{(-1,-1,1,1)}_{(0,\ 0,\ 0,\ 0)}$	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\ (2,-1,-1,0)}$	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{\text{(style id='1'> (-1,0,-1,2) (0, 0, 0, 0)}}$	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\ (-1,\ -1,\ 2,\ 0)}$	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

表8。来自 [20, 32, 11, 10, 8, 17, 21, 29]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
李代数 2	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
李代数 3	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
李代数 4	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
OreExt 类型 A_1	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
OreExt 类型 A_2	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
OreExt 类型 A_3	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
OreExt 类型 B_1	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
OreExt 类型 E_1	[3,20]	[0,1]×6	[0,1]×6
OreExt 类型 E_2	[3,20]	[0,1]×6	[0,1]×6
OreExt 类型 H.I	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2
OreExt 类型 H.II	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2
OreExt 类型 S'_1	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24
OreExt 类型 S_2	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
CentExt 类型 B	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
CentExt 类型 E	[3,20]	[0,1]×6	[0,1]×6
CentExt 类型 H	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2
中心扩张类型 S_1	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12
中心扩张类型 S'_1	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12
中心扩张类型 S_2	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4

表 9. 来自 [18, 20]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

注 5.9. 注意，对于以下代数：N、P、S、中心扩张、 $L(1,1,2)$、 $E(3)$、四维 Sklyanin、四维 Sklyanin 扭曲、Shelton-Tingey、 S_∞ 扭转、$S_{d,i}$ 扭转（$i = 1,\ldots,6$）、 $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$、Clifford、 $S(2,3)$、Kirkman R、Cassidy-Vancliff 1、Cassidy-Vancliff 2、Cassidy-Vancliff 3、Caines 代数、李代数 1，以及 $\mathfrak{sl}_2$。

注 5.10。 对于表 7、8 和 9 中的所有代数，我们都有 $X = \bar{X}$，但 A、Q、V 和 $R(3, a)$ 除外。

5.4. **λ = (3，1) 的离散不变量**。

由于针对分拆 (3,1) 的 Magma 代码（即由 X_{210} 得到的代码）未能终止，因此无法计算某些条目。这些缺失条目以 ***** 标示。因此，在区分这些代数时，仅在少数情况下使用来自该分拆的不变量。

代数	**维次数PC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**维数次数PC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
A	[3,24], [3,11], [3,6], [3,5]×3	*****	[3,11], [3,5]×2, [2,5], [2,3]×2
B	[3,5]×2, [2,6]×6, [2,4]×4	[2,1]×4, [1,5]×2, [1,1]×8, [0,17]×2, [0,18]×2	[2,1]×4, [1,1]×10
C	[3,67], [3,5]×2	*****	[2,8]×2, [2,1]×4
D	[3,6], [3,5]×4, [2,6]×3, [2,4]×2, [2,3]×2	[2,5], [2,9], [2,3]×3, [2,1]×5, [1,17]×2, [1,16], [1,12], [1,11], [1,10], [1,7], [1,5], [0,44]×2, [0,29]×2, [0,72], [0,20]	[2,3]×4, [2,1]×6, [1,1]
(E,J)	*****	*****	*****
(F,I)	[3,5]×2, [2,10]×2, [2,6]×2, [2,4]×4, [2,3]×4	[2,4]×2, [2,1]×4, [1,10], [1,7], [1,4]×2, [1,3], [1,5], [1,1]×6, [0,5]×2, [0,21], [0,55], [0,47]	[2,4]×2, [2,1]×4, [1,1]×7
G	[3,24], [3,11]×2, [3,6], [3,5]×4	*****	[3,5], [2,7]×2, [2,6], [2,5], [2,4]×2, [2,3]×3, [2,1]×2
H	[3,6], [3,5]×2, [2,7]×2, [2,4]×2	*****	[3,6], [2,3]×2, [2,1]
K	[3,6]×2, [3,5]×2, [2,14], [2,8]	[2,4]×2, [2,3]×2, [2,6], [1,16], [1,8]×2, [1,12], [1,4]×4, [0,20], [0,94], [0,168], [0,216]	[2,6], [2,3]×2, [2,1]×2, [1,4]×4
L	[3,6]×2, [3,5]×2, [2,14], [2,4]×2	[2,4]×2, [2,3]×4, [1,16], [1,8]×2, [1,12], [1,4]×2, [1,2]×4, [0,49]×2, [0,168], [0,276]	[2,3]×4, [2,1]×2, [1,4]×2, [1,2]×4
M	[3,67], [3,5]×2	*****	[2,3]×4, [2,1]×8
(N,P)	[3,67], [3,5]×2	*****	[2,8], [2,3]×2, [2,1]×6
O	[3,67], [3,5]×2	*****	[2,3]×4, [2,1]×8
Q	*****	*****	[2,3], [2,1], [1,2]×4, [1,1]×11
R	*****	*****	[1,1]×18
S	[3,35], [3,16]×2, [3,5]×2	*****	[2,6]×2, [2,4], [2,3]×4, [2,1]×6

表10. 来自 [35]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	¯维次数PC(X)	dimdegPC(X^{sing})	维数次数PC$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
(T,U)	*****	*****	[2,3]×2, [2,1]×2, [1,1]×9
V	*****	*****	[2,3], [2,1], [1,2]×4, [1,1]×11
(W,Z)	[3,30], [3,16]×2, [3,5]×2	*****	[3,5], [2,10]×2, [2,8], [2,1]×2
X	[3,6], [3,5]×2, [2,7]×2, [2,4]×2	*****	[3,6], [2,3]×2, [2,1]
Y	[3,24], [3,11]×2, [3,6], [3,5]×4	*****	[3,5], [2,7]×2, [2,6], [2,5], [2,4]×2, [2,3]×3, [2,1]×2
中心扩张	[4,56]	[1,9]	[1,9]
$L(1,1,2)$	[4,56]	[2,1]×2, [1,4]×2, [1,2]×4, [1,3]×2, [1,1]	[2,1]×2, [1,4]×2, [1,1]
$E(3)$	[4,56]	[2,1], [1,14], [1,4], [1,1], [0,83]	[2,1], [1,4], [1,1]
四维 Sklyanin	[4,56]	[1,12]	[1,12]
四维 Sklyanin 扭曲	[4,56]	[ ]	[ ]
Vancliff	*****	*****	[2,3]×6, [2,1]×4
Vancliff 扭曲	*****	*****	[2,3]×6, [2,1]×4
Shelton-Tingey	[4,56]	[ ]	[ ]
$S_{d,\,i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$	*****	*****	[2,3]×2, [2,1]×2, [1,8]×2, [1,1]×2, [0,1]×6
$S_{d,i}$ 扭转 $(i=2,4,6)$	[4,56]	[ ]	[ ]
$\mathbb{K}_Q[x_1,x_2,x_3,x_4]$	[3,6]×4, [3,5]×6	*****	[2,3]×12, [2,1]×4
$S(2,\ 3)$	[4,56]	*****	[2,1], [1,1]×7
Cassidy-Vancliff 1	[4,56]	[ ]	[ ]
$R(3,\ a)$	*****	*****	[2,3], [2,1]
$L(1,\ 1,\ 2)^{\sigma}$	[3,6]×2, [3,5], [2,3]×6, [2,4], [2,1]×2	*****	[2,3]×2, [2,1]×2, [1,1]×6, [0,1]×6
$S(2,\ 3)^{\sigma}$	[4,56]	*****	[2,1], [1,1]×7
A_5	*****	*****	[2,1], [1,14], [1,2]×3, [1,1]×6
Caines 代数	[4,56]	[1,1], [0,7], [0,1]×2	[1,1], [0,1]×2
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,0,0,0)}$	[3,6]×2, [3,5]×3, [2,14], [2,4], [2,3]×2	*****	[2,3]×6, [2,1]×3, [1,4], [1,1]×3
$\mathrm{F}^{(-1,-1,1,1)}_{(0,0,0,0)}$	[3,6]×2, [3,5]×5, [2,14], [2,4], [2,3]×2	*****	[2,3]×6, [2,1]×4
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,0,0,0)\ (2,-1,-1,0)}$	[3,6]×2, [3,5],[2,6]×2, [2,4], [2,3]×2, [2,2]	*****	[2,3]×2, [2,1]×2, [1,1]×6, [0,1]×6
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(-1,0,-1,2)\ (0,0,0,0)}$	[3,6], [3,5]×3, [2,16], [2,4]×2, [2,3]×4	*****	[2,3]×6, [2,1]×3, [1,1]×2

表11。来自 [35, 20, 32, 11, 10, 8, 17, 21, 29]的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

代数	¯维度度数PC(X)	dimdegPC(X^{sing})	维数次数PC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,0,0,0)}$	*****	*****	[2,3]×2, [2,1]×2, [1,4], [1,1]×5
李代数 1	[4,16]×2, [4,24]	[3,20], [3,6]×2	[3,5], [3,6]×2
李代数 2	[4,16]×2, [4,24]	[3,5]×2, [3,6], [3,11], [3,12]	[3,5]×2, [3,6], [3,11]
李代数 3	[4,16], [4,40]	[3,5]×2, [3,6], [2,18]×2, [2,5], [2,1]	[3,6], [3,5]×2, [1,1]
李代数 4	[4,16], [4,40]	[3,15], [3,6], [2,24], [1,7], [1,1]	[3,6], [3,5], [1,1]
$\mathfrak{sl}_2$	[4,16], [4,40]	[3,6], [3,10], [2,24]	[3,6], [3,10]
OreExt 类型 A_1	*****	[2,4], [1,21], [1,1]×3, [0,1]×18	[2,1], [1,21], [1,1]×3
OreExt 类型 A_2	*****	[2,4], [1,21], [1,1]×3, [0,1]×18	[2,1], [1,21], [1,1]×3
OreExt 类型 A_3	*****	[2,4], [1,21], [1,1]×3, [0,1]×18	[2,1], [1,21], [1,1]×3
OreExt 类型 B_1	[3,35], [3,21], [3,15], [3,6]	*****	[2,12], [2,9]×2, [2,4], [2,3]×2, [2,1]×4, [1,2]
OreExt 类型 E_1	*****	*****	*****
OreExt 类型 E_2	*****	*****	*****
OreExt 类型 H.I	*****	*****	[2,1]、[1,10]、[1,2]×3、[1,1]×10
OreExt 类型 H.II	*****	*****	[2,1]、[1,10]、[1,2]×3、[1,1]×10
OreExt 类型 S'_1	[3,6]×2, [3,5]×3, [2,14], [2,4], [2,3]×2	*****	[2,3]×6, [2,1]×3, [1,4], [1,1]×3
OreExt 类型 S_2	[3,6]×2, [3,5]×2, [2,14], [2,4]×2	*****	[2,3]×4, [2,1]×2, [1,4]×2, [1,2]×4
CentExt 类型 B	[4,56]	[1,5], [1,8], [1,2], [1,1]×2	[1,5], [1,8], [1,2], [1,1]×2
CentExt 类型 E	[3,15]×2, [3,6], [3,41]	*****	*****
CentExt 类型 H	[3,35], [3,15], [3,11], [3,10], [3,6]	*****	[2,12], [2,9], [2,8], [2,6], [2,4], [2,3]×3, [2,1]×5
CentExt 类型 S_1	[3,23], [3,6]×4, [3,5]×6	*****	[2,6]×4, [2,3]×12, [2,1]×4
中心扩张类型 S'_1	[3,35], [3,10], [3,6]×2, [3,5]×3	*****	[3,5], [2,8], [2,6], [2,3]×6, [2,1]
中心扩张类型 S_2	[3,35], [3,6]×2, [3,5]×6	*****	[2,6]×2, [2,4]×4, [2,3]×8, [2,1]×6

表12。 [18, 20]中的四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数的离散不变量。

注 5.11。 注意，对于以下代数： $w_{(3,1)} = 0$ ： S_∞扭转、$S_{d、i}$扭转（$i = 1$、3、5）、$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$、Clifford、中心扩张扭曲、Kirkman R、Kirkman S、Kirkman T、Cassidy-Vancliff 2、Cassidy-Vancliff 3。

6. 分支的区分

定理 6.1。 我们考虑代数栈 $\mathcal{A}_4$ ，其定义见 [6,第 10]页。该栈有 45 个分支（列于 [6, 表 4]）。利用计算机代数系统 ***Magma*** [24], 进行的计算，我们将这些分支分拆为 ***39*** 个等价类（称为盒子），其中每个等价类都由具有相同离散不变量的代数组成，这些不变量来自射影概形$X_{400}, X_{000}, X_{020}, X_{101}, X_{210}$。

若 A 和 B 是属于不同等价类的代数的一般族，则 $A \not\cong B$。由此可知，属于不同等价类（盒子）的 $\mathcal{A}_4$ 的分支彼此不同。

证明。 每个代数 A 都对应一个超势 $w_A \in V^{\otimes n}$，其中 $\dim V = 4$。类似地， B 对应一个超势 $w_B \in V^{\otimes n}$。

群 $G = \mathrm{PGL}(V)$ 通过对角自同构自然地作用于 $V^{\otimes n}$。代数 A 和 B 之间的同构意味着存在一个元素 $g \in G$，使得：

$$w_B = g \cdot w_A.$$

此作用保持舒尔-外尔分解 3.5，该分解将张量空间拆分为由分拆 λ 标记的分支

$$w_A = \sum_\lambda w_{A,\lambda}, \quad w_B = \sum_\lambda g \cdot w_{A,\lambda}.$$

因此， g 的作用根据 $g \cdot w_{A,\ \lambda} \in \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes U_\lambda$ 变换每个分支 $w_{A,\lambda}$ 。

根据博雷尔-外尔 3.18，我们有 $\mathbb{S}_\lambda(V) \cong \mathrm{H}^0(G/B,\ L_\lambda)$。每个分支 $w_{A,\lambda}$ 对应于一个态射：

$$\tilde{w}_{A,\lambda} : U_\lambda^* \to \mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda).$$

在 $g \in G$ 的作用下，该态射的像变换如下：

$$\mathrm{im}(\tilde{w}_{B,\lambda}) = g \cdot \mathrm{im}(\tilde{w}_{A,\lambda}) \subseteq \mathrm{H}^0(G/B, L_\lambda),$$

这表明像子空间在群作用下按等变方式变换。

$G = \mathrm{PGL}(V)$ 对射影空间 $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(G/B,\ L_\lambda))$ 的作用由射影自同构给出，这些自同构保持射影簇的维数和次数

$$X_\lambda(A) := \mathrm{Base}\big(\tilde{w}_{A,\lambda}\big) \subseteq G/B.$$

具体而言，初等分支的维数和次数，以及初等分支的数量，在同构下是不变的。□

以下方框总结了定理 6.1 中所述分支的等价类。

方框 1

代数	概形 dimdegPC（X）	dimdegPC（X^{sing}）	dimdegPC（ $\bar{X}^{\mathrm{sing}}$）
B	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,4]×2	[1,2]×2, [0,5]×2	[1,2]×2
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

方框 2

代数	概形 dimdegPC（X）	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
C	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,6]×2, [0,2]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,8]	[0,7]×2, [0,1]×2	[0,1]×4
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

框 3

代数	概形 dimdegPC(X)	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
D	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,4]×3	[1,1]×4
	X_{020}	[2,6], [2,1]×2	[1,1]×5, [0,3]×2, [0,2]×2	[1,1]×5
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4, [0,1]×2	[2,3]×4, [0,1]×2

方框 4

代数概形 dimdegPC(X)		dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)	
(E, J)	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,2]×4	[1,2]×4	[1,2]×4
	X_{101}	[2,16], [2,2]×2	[1,4]×2	[1,4]×2

方框 5

代数概形 dimdegPC(X)		dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)	
(F, I)	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,8]	[0,7]×2, [0,1]×2	[0,1]×4
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4, [0,1]×2	[2,3]×4, [0,1]×2

方框 6

代数	概形 dimdegPC(X)	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
G	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,1]×4, [0,4]×3	[1,1]×4
	X_{020}	[2,3]×2, [2,1]×2	[1,3], [1,1]×5, [0,3]×2	[1,3], [1,1]×5
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4, [0,1]×2	[2,3]×4, [0,1]×2

方框 7

代数	概形	PC 的维数度数(X)	PC 的维数度数(X^{sing})	PC 的维数度数($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
K	X_{400}	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
	X_{020}	[2,2]×2, [2,1]×4	[1,1]×10	[1,1]×10
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
	X_{210}	[3,6]×2, [3,5]×2, [2,14], [2,8]	[2,4]×2, [2,3]×2, [2,6], [1,16], [1,8]×2, [1,12], [1,4]×4, [0,20], [0,94], [0,168], [0,276]	[2,6], [2,3]×2, [2,1]×2, [1,4]×4

方框 8

代数	概形	dimdegPC(X)	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
L	X_{400}	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
	X_{020}	[2,2]×2, [2,1]×4	[1,1]×10	[1,1]×10
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4
	X_{210}	[3,6]×2, [3,5]×2, [2,14], [2,4]×2	[2,4]×2, [2,3]×4, [1,16], [1,8]×2, [1,12], [1,4]×2, [1,2]×4, [0,10]×2, [0,168], [0,276]	[2,3]×4, [2,1]×2, [1,4]×2, [1,2]×4

方框 9

代数	概形	dimdegPC(X)	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
M	X_{400}	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
	X_{020}	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
	X_{101}	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12

方框 10

代数	概形	dimdegPC(X)	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
(N, P)	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8], [0,4]×2	[1,1] × 2
	X_{020}	[2,2]×4	[1,2]×4	[1,2]×4
	X_{101}	0	0	0

方框 11

代数	概形	dimdegPC(X)	dimdegPC(X^{sing})	dimdegPC($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
O	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8], [0,4]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,8]	[0,7]×2	[0,1]×2
	X_{101}	[4,20]	[1,2]×2	[1,2]×2

方框 12

代数	概形	dimdegPC(X)	PC 的次数维数(X^{sing})	PC 的次数维数($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
Q, V	X_{400}	[2,1],[2,3]	[1,1]×4, [0,2]×2, [0,4]×2	[1,1]×4
	X_{020}	[2,2]×3, [2,1]×2	[1,1]×5, [1,2]×2	[1,1]×5, [1,2]×2
	X_{101}	[2,3]×4, [2,2]×4	[2,1]×2, [1,3]×4, [1,2]×2, [1,1]×4, [0,42]	[2,1]×2, [1,1]×4

问题 6.2. 代数 Q 和 V 是否同构?

方框 13

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
R	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,4]×2	[1,4], [0,7]×2, [0,1]×2	[1,4], [0,1]×2
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

方框 14

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
S	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,4]×2, [0,3]×2, [0,2]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[2,8]	[2,4], [0,2]×2	[2,4]
	X_{101}	0	0	0

方框 15

代数概形 **dimdegPC**(X)			**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
(T, U)	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,4]×3, [0,3], [0,2]	[1,1]×2
	X_{020}	[2,4]×2	[1,1]×4,[0,6]×2, [0,4]×2	[1,1]×4
	X_{101}	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]

方框 16

代数概形 **dimdegPC**(X)			**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
(W, Z)	X_{400}	[2,4]	[1,1]×2, [0,8] [0,4]×2	[1,1]×2
	X_{020}	[3,4]	[0,1]×2	[0,1]×2
	X_{101}	[4,20]	[1,2]	[1,2]

方框 17

代数	概形 **dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
中心扩张	X_{400}	0	0	0
	X_{020}	0	0	0
	X_{101}	0	0	0

方框 18

代数	概形 **dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
中心扩张扭曲	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,3]	[1,3]
	X_{020}	0	0	0
	X_{101}	[4,10]×2	[3,6]	[3,6]

方框 19

代数	概形 **dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
四维 Sklyanin	X_{400}	0	0	0
	X_{020}	[3,4]	[0,1]×6	[0,1] × 6
	X_{101}	0	0	0

方框20

代数	概形 **dimdegPC**（X）	**dimdegPC**（X^{sing}）	**dimdegPC**（ $\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
S_∞	X_{400}	[2,4]	[ ]	[ ]
	X_{020}	[3,4]	[0,1]×2	[0,1]×2
	X_{101}	[4,20]	[1,2]×2	[1,2]×2

方框21

代数	概形	**dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$S_{d,\ i}$ （$i=1,\ldots,6$）	X_{400}	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]	[1,2]×2, [1,1]
	X_{020}	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
	X_{101}	[2,6]×2, [2,1]×4, [2,2]×2	[1,1]×16	[1,1]×16

注 6.3.（参见 [32, 定理 0.4] 后的注释）将生成元 x_1, x_2, x_3 of $S_{d,i}$ 进行循环置换，可定义一个同构，其对应于该族中的某个代数$S_{d,i+2}$ （指标按模 6 考虑）：

$$S_{d,1} \simeq S_{d,3} \simeq S_{d,5} \quad \text{and} \quad S_{d,2} \simeq S_{d,4} \simeq S_{d,6}.$$

方框 22

代数	概形 **dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
Clifford	X_{400}	[2,4]	[ ]	[ ]
	X_{020}	0	0	0
	X_{101}	0	0	0

方框 23

代数	概形 **dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$\mathbb{K}_Q[x_1,x_2,x_3,x_4]$	X_{400}	[2,1]×4	[1,1]×6	[1,1]×6
	X_{020}	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

方框 24

代数	概形 **dimdegPC**(X)	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
Cassidy-Vancliff 1	X_{400}	0	0	0
	X_{020}	[3,2]×2	[2,2]	[2,2]
	X_{101}	0	0	0

方框 25

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$R(3,a)$	X_{400}	[2,2]×2	[2,1], [1,6]	[2,1]
	X_{020}	[2,2]×2, [2,4]	[2,1]×2, [1,12], [0,26]	[2,1]×2
	X_{101}	[2,12], [2,4]×2	[2,10], [2,3]×2, [1,20]×2	[2,1]×2, [2,2]

方框 26

代数	概形 **dimdegPC**（X）	**dimdegPC**（X^{sing}）	**dimdegPC**（ $\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
$S(2,3)^{\sigma}$	X_{400} 0	0	0
	X_{020} 0	0	0
	X_{101} [4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
	X_{210} [4,56]	*****	[2,1], [1,1]×7

方框 27

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
CentExt 类型 B	X_{400}	0	0	0
	X_{020}	0	0	0
	X_{101}	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]
	X_{210}	[4,56]	[1,5], [1,8], [1,2], [1,1]×2	[1,5], [1,8], [1,2], [1,1]×2

方框 28

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$L(1,1,2)^{\sigma}$	X_{400}	0	0	0
	X_{020}	[3,2]×2	[2,2], [0,1]×2	[2,2], [0,1]×2
	X_{101}	[3,20]	[0,1]×12	[0,1]×12

方框 29

代数	概形 **dimdegPC**（X）		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
A_5	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
	X_{020}	[3,4]	[1,2], [0,3]×2	[1,1]
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2

框 30

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**$(\bar{X}^{\mathrm{sing}})$
$\mathrm{F}^{(0,-1,-1,2)}_{(0,0,0,0)}$, OreExt 类型 S_1'	X_{400}	[2,1]×2, [2,2]	[1,2], [1,1]×3, [0,5]	[1,2], [1,1]×3
	X_{020}	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

注记 6.4。 代数 $\mathcal{F}^{(0,-1,-1,2)}$ 和 OreExt 类型 S_1' 在$(0,\ 0,\ 0,\ 0)$下同构

生成元的线性变换为 $\phi : x_1 \mapsto t, \quad x_2 \mapsto \lambda x_2, \quad x_3 \mapsto \mu x_1, \quad x_4 \mapsto \nu x_3$ 其中 $c^2 d = \frac{q_{13}}{q_{14}^2}, \quad b^2 d = \frac{1}{q_{13}}, \quad bcd = \frac{1}{q_{14}}, \quad \nu^2 = -\mu\lambda, \quad a = -q_{23}, \quad \frac{\alpha}{a} = -q_{24}.$

框 31

代数	概形 **dimdegPC**（X）		**dimdegPC**（X^{sing}）	**dimdegPC**（$\bar{X}^{\mathrm{sing}}$）
$\mathrm{F}^{(-1,-1,1,1)}_{(0,0,0,0)}$	X_{400}	[2,1]×2, [2,2]	[1,1]×5, [0,4]×2	[1,1]×5
	X_{020}	[2,4], [2,1]×4	[1,1]×8, [0,2]×4	[1,1]×8
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

框 32

代数	概形 **dimdegPC**（X）	**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
$\mathbb{F}_{(0,-1,-1,2)}$ $_{(-1,0,-1,2)}$ $_{(0,0,0,0)}$	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,1]×3, [0,7], [0,5]×2	[1,1]×3
	X_{020}	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

方框 33

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
$\mathbb{F}_{(0,-1,-1,2)}$ $_{(0,0,0,0)}$ $_{(-1,-1,2,0)}$	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,2], [1,1], [0,10], [0,6]	[1,2], [1,1]
	X_{020}	[2,1]×8	[1,1]×12	[1,1]×12
	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

框 34

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
OreExt 类型 A_1,	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
OreExt 类型 A_2,	X_{020}	[3,4]	[0,1]×6	[0,1]×6
OreExt 类型ype A_3	X_{101}	[2,1]×8, [2,2]×6	[1,1]×24	[1,1]×24

问题 6.5。 OreExt 代数 A_1, A_2， 以及 A_3 是否同构?

框 35

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
OreExt 类型 B_1	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
	X_{020}	[3,2]×2	[2,1]×2, [1,4]	[2,1]×2
	X_{101}	[4,10]×2	[3,6], [0,4]	[3,6]

框 36

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
OreExt 类型 E_1, OreExt 类型 E_2	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
	X_{020}	[2,6], [2,1]×2	[1,3]×2	[1,3]×2
	X_{101}	[3,20]	[0,1]×6	[0,1]×6

问题 6.6. OreExt 代数 E_1 和 E_2 是否同构?

方框 37

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\bar{X}^{\mathrm{sing}}$)
OreExt 类型 H.I, OreExt 类型 H.II	X_{400}	[2,1], [2,3]	[1,3], [0,8]	[1,3], [0,1]
	X_{020}	[2,2]×3, [2,1]×2	[2,1]×2, [1,5], [1,2]×2, [1,1]×2	[2,1]×2, [1,1]×2
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2

问题 6.7。 OreExt 代数 H.I 和 H.II 是否同构?

框 38

代数	概形 **dimdegPC**（X）	**dimdegPC**（X^{sing}）	**dimdegPC**（$\widetilde{X^{\mathrm{sing}}}$）	
OreExt 类型 S_2	X_{400}	[2,1]×2, [2,2]	[1,2]×2, [1,1]×2	[1,2]×2, [1,1]×2
	X_{020}	[2,2]×2, [2,1]×4	[1,1]×10	[1,1]×10
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×4	[2,3]×4

方框 39

代数	概形 **dimdegPC**(X)		**dimdegPC**(X^{sing})	**dimdegPC**($\widetilde{X^{\mathrm{sing}}}$)
CentExt 类型 H	X_{400}	0	0	0
	X_{020}	[3,2]×2	[2,1]×2, [1,4]	[2,1]×2
	X_{101}	[3,6]×2, [3,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2, [1,4]×2	[2,3]×2, [2,2]×2, [2,1]×2

参考文献

[1] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh。与椭圆曲线自同构相关的一些代数。载于《Grothendieck Festschrift》第 I 卷，数学进展丛书第 86 卷，第 33–85 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年。[2] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh。三维正则代数上的模。数学发明，106(2):335–388，1991年。[3] Michael Artin 和 William F. Schelter。整体维数为 3 的分次代数。《数学进展》，66(2):171–216，1987年。[4] G. Bellamy、D. Rogalski、T. Schedler、J.T. Stafford 和 M. Wemyss。非交换代数几何。数学科学研究所出版物。剑桥大学出版社，2016年。[5]Vishal Bhatoy。四维 AS 正则代数的离散不变量。https://github.com/vishalbhatoy/Discrete-Invariants-of-AS-Regular-Algebras-Dimension-4-，2025年。[6] Vishal Bhatoy、Colin Ingalls、F´elix LaRoche 和 Ravali Nookala。四维 Koszul-Artin-Schelter 正则代数模空间的若干分支，2025年。[7] Raf Bocklandt、Travis Schedler 和 Michael Wemyss。超势与高阶导子。《纯数学与应用代数杂志》，214(9):1501–1522，2010年。[8] Thomas Cassidy 和 Michaela Vancliff。分次克利福德代数与完全交的推广。《伦敦数学会杂志》，81(1):91–112，2009年11月。[9] Thomas Cassidy 和 Michaela Vancliff。分次克利福德代数与完全交的推广。《伦敦数学会杂志》，81:91–112，2010年。[10] Alex Chirvasitu 和 S. Paul Smith。奇异椭圆代数。《美国数学会会刊》，371(1):279–333，2019年。[11] Andrew Davies。代数的余循环扭曲。《交换代数通讯》，45(3):1347–1363，2017年。[12] Michel Dubois-Violette。多线性形式与分次代数，2014年。[13] Pavel Etingof、Oleg Golberg、Sebastian Hensel、Tiankai Liu、Alex Schwendner、Dmitry Vaintrob 和 Elena Yudovina。表示论导论，2011年。[14] Hannah Friedman 和 Serkan Ho。sten。线性代数、优化与统计学中的 Grassmann 流形和旗流形：一种代数视角，2025年。[15] W. Fulton 和 J. Harris。《表示论：入门课程》。研究生数学教材。施普林格，1991年。[16] William Fulton。《杨表：及其在表示论与几何中的应用》。伦敦数学会学生教材。剑桥大学出版社，1996年。[17] Lauren Grimley。量子完全交群扩张的霍赫希尔德上同调，2016年。[18] Nathan Jacobson。《李代数》。多佛出版社，纽约，1979年。1962年原版的再版。[19] V. Lakshmibai 和 J. Brown。《旗流形：几何、组合学与表示论的交融》。数学文本与读物。Hindustan Book Agency，2009年。[20] Lieven Le Bruyn、S. P. Smith 和 Michel Van den Bergh。三维 Artin-Schelter 正则代数的中心扩张。《数学杂志》，222(2):171–212，1996年。[21] Cesar Lecoutre 和 Susan J. Sierra。一类新的泊松代数及其变形。《名古屋数学杂志》，233:32–86，2017年9月。[22] D.-M. Lu、J. H. Palmieri、Q.-S. Wu 和 J. J. Zhang。四维正则代数及其 A_∞-Ext 代数。《杜克数学杂志》，137(3):537–584，2007年。[23] Di Ming Lu、John H. Palmieri、Quan Shui Wu 和 James J. Zhang。A_∞-代数中的 Koszul 等价。《纽约数学杂志》，14:325–378，2008年。[24] Magma 计算代数系统。Magma 手册。https://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/。[25] Izuru Mori 和 S. Smith。m-Koszul Artin-Schelter 正则代数。《代数杂志》，446:374–396，2015年2月。[26] L. E. Positselskii。二次对偶代数的希尔伯特级数关系并不蕴含 Koszul 性。《泛函分析及其应用》，29(3):213–217，1995年。[27] Brent Pym。复几何中的泊松结构与李代数丛。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2013年。博士论文——多伦多大学（加拿大）。

[28] Daniel Rogalski。Artin-Schelter 正则代数。载于非交换代数与几何的最新进展，当代数学第 801 卷，第 195–241 页。美国数学会，[普罗维登斯], 罗得岛州， [2024] ©2024年。[29] Brad Shelton 和 Craig Tingey。关于 Koszul 代数及 Artin–Schelter 正则代数的一种新构造。代数杂志，241:789–798，2001年。[30] S. Paul Smith。与椭圆曲线相关的一些有限维代数。载于代数表示论及相关主题（墨西哥城，*1994*年），加拿大数学会会议论文集第 19 卷，第 315–348 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。[31] Stacks项目作者。Stacks项目。 `https://stacks.math.columbia.edu`，2025年。[32] J. T. Stafford。与 Sklyanin代数相关的代数的正则性。美国数学会会刊，341(2):895–916，1994年。[33] John Tate 和 Michel van den Bergh。Sklyanin代数的同调性质。数学发明，124(1-3):619–647，1996年。[34] M Wambst。量子Koszul复形。傅里叶研究所年刊，43(4):1089–1156，1993年1月。[35] James J. Zhang 和 Jun Zhang。(14641) 型双扩张正则代数。代数杂志，322(2):373–409，2009年。

数学系，卡尔顿大学，加拿大安大略省渥太华

电子邮箱地址： `vishalbhatoy@cmail.carleton.ca`

数学系，卡尔顿大学，加拿大安大略省渥太华

电子邮箱地址： `coliningalls@cunet.carleton.ca`