arXiv:2602.13285v1 [math.CV] 7 Feb 2026

微分单项式的正规性判据与 Lappan 型定理的精确性

Molla Basir Ahamed*、Sanju Mandal 与 Nguyen Van Thin

摘要。Lappan 的一个基本结果 [瑞士数学评论**49** （1974年），492-495。] 指出，亚纯函数 f 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中是正规的，当且仅当其球面导数在一个五点子集 $E \subset \mathbb{C}$上有界。本文建立了新的正规性判据，将这一经典结果与值分布理论的当代发展趋势联系起来。我们证明，集合 E 的基数可以从五减少到少至三，只要该函数及其逐次导数 $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$的球面导数在 E的原像上有界。这一转变表明，来自高阶导数的解析数据能够有效补偿目标集合几何信息的减少。此外，我们将 Pang-Zalcman 定理推广到一般的微分单项式类 $M[f]$。我们证明，若$(M[f])^{\#}$在 a-点的集合$(a \neq 0)$上有界，则族 $\mathcal{F}$ 是正规的，只要次数 d_M 相对于权 D_M 和阶k满足一个特定的精确阈值。这些结果为正规性的自然边界提供了更为精细的视角，并推广了该领域若干既有结论。

1. 引言

本文研究复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数。通过球面导数研究正规性判据——这一研究传统上源于 Montel 和 Marty 的工作——如今已发展到考察此类导数在离散集上的行为，或从微分算子的角度进行研究。这一领域的核心主题，是球面导数（或其乘积）的一致有界性与函数族的等度连续性之间的关系。此类判据不仅是值分布理论的基础，也是在研究黎曼曲面、复动力系统以及解析延拓问题时不可或缺的工具。

定义 1.1. 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的亚纯函数族。若 $\mathcal{F}$ 的每个序列$\mathcal{F}$ 都含有一个子序列，该子序列在 Ω 的每个紧子集上球面一致收敛于一个亚纯函数 f，且该函数可能恒等于 ∞，则称 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上按 Montel 意义正规。

将Nevanlinna理论融入正规族研究，对几何函数论产生了深远影响，尤其是在零点与极点的分布以及黎曼曲面的性质方面。通过运用

文件：San_Aha_Thin_NTP3_07_12_2026.tex，打印日期：2026-2-17，1.052020 数学主题分类。主要分类号 30D35、30D45。关键词和短语。球面导数、亚纯函数、正规族、正规函数、Nevanlinna理论、微分单项式。

第二基本定理及相关亏量关系，可以推导出超越经典局部估计的有力正规性判据。具体而言，现代正规性研究方法通常借助Zalcman重标度引理，依赖于函数特征函数的增长与其值的分歧之间的微妙平衡。在此背景下，我们探讨微分单项式球面导数的约束如何反映其内在的值分布，并以超越增长和解析延拓为视角，为判定正规性提供严格的理论框架。

本文中，我们假设读者熟悉 Nevanlinna 理论的基本概念和标准记号，包括特征函数$T(r, f)$、邻近函数 $m(r, f)$，以及（约化）计数函数 $N(r, f)$ ($N(r, f)$)。关于单复变数和多复变数中的值分布理论的全面论述，请参阅 Yang [32] 以及 Yang 和 Yi [35]的专著。按照惯例，我们用 $S(r, f)$ 表示满足$S(r, f) = o(T(r, f))$ 的任意量，其中 $r \to \infty$，但可能不包括一个博雷尔测度有限的集合。

正规性仍然是几何函数论的基石，其重要性在多复变数研究中日益凸显。近年来，高维分析受到广泛关注，其中关于全纯曲线、全纯映射和调和映射的正规族理论已取得显著发展。例如，Hu和Thin [16] 将 Montel 的经典判据推广到从平面区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到复射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$的全纯映射族，同时还将*Lappan* 五值定理 推广到全纯曲线的情形。这一研究脉络在文献中有详尽记载（参见 [2, 3, 27, 33, 34]）。

历史上，调和函数正规性的研究由 Lappan [17], 开创，他建立了与 Lehto 和 Virtanen [22] 所给出的正规亚纯函数刻画相类似的充要条件。近年来，Arbeláez 等人 [4] 和 Deng 等人 [7]分别独立发展了正规亚纯函数理论的调和类比，揭示了调和正规映射的各种结构性质。有关正规性的不同方面及其现代发展，读者可参阅 [1, 10, 11, 30, 37]。

定义 1.2. 令 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘。若函数 f 在 $\mathbb{D}$ 中亚纯，则称其为正规函数，当且仅当族$\mathfrak{F} = \{f \circ \phi : \phi \in Aut(\mathbb{D})\}$ 是正规族，其中 $Aut(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 的保角自同构类。Yosiada [36] 最早研究了正规函数。随后，Noshiro [24] 通过证明亚纯函数 f 是正规函数当且仅当

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right) f^{\#}(z) < \infty$$

where其中，$f_{\#}$表示 f的球面导数，定义为 $f^{\#}(z) = |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2$).

正规族是研究亚纯函数边界行为和结构性质不可或缺的框架。这些族的相干性

最早由 Montel [23]于 1927 年系统地确立，为 Picard、Schottky 和 Landau 的基础定理提供了统一的处理方法。在现代复变数研究中，导数的行为往往提供刻画原函数整体性质所必需的关键信息。本文着重通过分析族$\mathcal{F}$ 中各成员的连续各阶导数的球面导数，建立正规性判据。我们首先回顾亚纯函数高阶导数的球面导数的定义。

定义 1.3. [29] 设 $k \geq 0$ 为整数，且 $f^{(k)}$ 为亚纯函数 f的 k 阶导数，并且 $f_{(0)} := f$。$f^{(k)}$的球面导数定义为

$$\left(f^{(k)}(z)\right)^{\#} = \frac{\left|f^{(k+1)}(z)\right|}{1+\left|f^{(k)}(z)\right|^2}.$$

容易看出，$\left(f_{(0)}(z)\right)^{\#} = f^{\#}(z)$。

本文主要采用 Nevanlinna理论这一研究方法，并通过推广该领域近期的研究成果，给出若干结果。Pommerenke 在其 1972年的文章 [26] 中，汇总了单复变函数论及相关领域的一系列未解决问题。其中最重要的问题涉及与集合 E相关的正规函数的研究，具体如下。

问题 1.1. *[26]* 给定 $M > 0$，是否存在一个有限集 E，使得若 f 在 $\mathbb{D}$中为亚纯函数，则条件 $(1-|z|^2)f^{\#}(z) \leq M$ 对每个$z \in f^{-1}(E)$ 成立，就能推出 f 是正规函数?

1974年，Lappan [18] 通过建立一项基础性成果，对问题1.1给出了肯定的回答；如今，这项成果被广泛称为关于 $\mathbb{D}$中亚纯函数的 Lappan 五值定理。近年来，该定理重新受到广泛关注，众多作者对其各个方面及其推广进行了研究。特别是，Deng等人 [7], 、Hu和Thin [16], 以及Tran和Nguyen [28],的工作，连同其中的参考文献，为这一方向的最新发展提供了全面概述。

定理A。*[18]* 设 E 为由五个互不相同的复数组成的集合，该集合可以是有限的，也可以是无限的。若 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的亚纯函数，并且

$$\sup_{z \in f^{-1}(E)} (1-|z|^2)f^{\#}(z) < \infty,$$

那么 f 是正规函数。

值得注意的是，Lappan [18] 证明了定理A中集合 E 的基数是最佳的，指出“五”不能替换为“三”，并给出了“四”个点不足以满足条件的情形。这些发现推动了复数域 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}^n$上正规函数的后续研究。沿着这一方向，Hinkkanen [15]和 Lappan [21] 独立地为亚纯函数的正规族建立了类似结果，进一步巩固了值分布与球面导数的有界性之间的联系。

定理 B. *[15, 21]* 区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中的亚纯函数族 $\mathcal{F}$ 是ˆ正规族，当且仅当对于每个紧集 $K \subset D$，都存在一个集合 $E = E(K) \subset \mathbb{C}$，其中至少包含五个互不相同的点，以及一个正数常数 $M = M(K)$，使得

$$\max_{z \in K \cap f^{-1}(E)} (f(z))^{\#} \leq M, \quad f \in \mathcal{F}.$$

在 [28], 中，Tan 和 Thin 通过考虑 f, f'与 f''的球面导数的同时有界性，建立了若干正规性判据。在本文中，我们将这些结果推广到集合 E 所含目标点更少——具体而言可少至三个——的情形，从而通过纳入高阶导数，进一步放宽正规性的几何要求。

定理 C. *[28]* 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D \subset \mathbb{C}$中的亚纯函数族。假设对每个紧集 $K \subset D$，存在由三个互异点组成的集合 $E = E(K) \subset \mathbb{C}$ 以及正数常数 $M = M(K)$，使得

$$f^{\#}(z) \leq M, \quad (f')^{\#}(z) \leq M \ \ and \ \ (f'')^{\#}(z) \leq M,$$

对所有 $f \in \mathcal{F}$和 $z \in K \cap f^{-1}(E)$成立。则 $\mathcal{F}$ 是正规的。

1971年，Hayman 和 Storvick [13] 证明，一个函数的正规性并不必然蕴含其导数的正规性。反之，也存在导数本身为正规函数的非正规函数的例子 [13, 19]。关于导数正规性的详尽论述，请读者参阅 [20,31]及其中的参考文献。关于高阶导数，Lappan [20] 证明，对于解析函数，某一给定导数的正规性不能由其前阶或后阶导数的状况来预测，这进一步说明了导数增长在复解析意义上的独立性。

我们知道，Pang 和 Zalcman [25] 在假设对于区域 Ω 中所有的 $f \in \mathcal{F}$， $f^n f_{(k)} - a$（其中常数 a 给定）均无零点的条件下，得到了关于全纯函数族 $\mathcal{F}$ 的正规性结果。若集合 E 是单元素集，则文献 [28] 得到了关于某种形式的微分多项式的如下结果。事实上，作者 [28] 将 Pang–Zalcman 定理推广，得到了以下结果。

定理 D。 *[28]*设 n, k 为正整数，满足 $n > k + 3 + \frac{2}{k}$。设 $\mathcal{F}$ 是区域 $\Omega \in \mathbb{C}$ 上的亚纯函数族，其所有零点的重数至少为 k。假设对于每个紧子集 $K \subset \Omega$，存在$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$及正数常数 $M = M(K)$，使得对于所有$f \in \mathcal{F}$，均有 $\left(f^n f_{(k)}\right)^{\#} \leq M$，且 $z \in K \cap \{f^n f_{(k)} = a\}$。那么 $\mathcal{F}$ 是正规的。

1.1. 关于正规性和微分算子的进一步探讨。 虽然 Lappan 五值定理（定理A）及其后续结果（定理B和定理C）基于球面导数建立了亚纯函数的正规性判据，但仍有一个问题（问题 1.1）尚待解决：当高阶导数的球面导数（$f, f', f'', \ldots, f_{(k-1)}$）有上界时，这些判据是否仍然成立。此外，还需要将现有结果（定理 D）推广到任意微分单项式 $M[f]$，而不仅限于 $f^n f_{(k)}$ 这类特定形式。

在深入讨论细节之前，我们先回顾由亚纯函数生成的微分单项式的定义。

定义 1.4。[9] 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一个亚纯函数n_0，n_1，$\cdots$，n_k均为非负整数。我们称

$$M[f(z)] = f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}$$

由 f生成的微分单项式，其中 d_M:= $n_0+n_1+\cdots+n_k$为其次数，Γ_M:= $n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k$为其权，而 D_M:= $\Gamma_M-d_M = n_1+2n_2+\cdots+kn_k$.

对上述定理 C 进行全面考察，对于推导出更为全面的推广至关重要，这必然引出一个自然的问题。

问题 1.1。当 $f, f', f'', \cdots, f_{(k-1)}$ 的球面导数有上界时，正规性判据是否仍然成立？

Tan 和 Thin 的研究结果 [28]促使我们进一步研究定理 D，以得到其推广形式，从而引出一个自然的问题。

问题 1.2。我们能否将定理 *D* 推广到适用于任意微分单项式 $M[f(z)]$?

本文通过建立两个主要的正规性判据来解决这些问题。首先，我们为一类函数族给出一个判据：当高阶球面导数 $(f^{(i)})^{\#}$ 在包含少于五个点的集合上有界时，事实上可将要求降至三个点。此外，我们推广了 Pang–Zalcman 定理，证明了在次数 d_M和权 D_M满足以下条件时，一大类微分单项式 $M[f]$的正规性判据：

$$d_M > \frac{(k+2)D_M + 2(k+1)}{k}.$$

本研究的主要目标是全面解答问题 1.1 和问题 1.2。为确保论述系统有序，本文安排如下：第 2 节介绍主要结果及其意义。第 3 节给出必要的预备引理，并严格证明主要定理。这样的结构突出了支配亚纯函数族正规性的基本性质。

2. 主要结果

本节将建立一系列亚纯函数族的正规性判据，其中导数 $f, f', f'', \ldots, f_{(k-1)}$ 的球面导数或一般微分单项式的球面导数均一致有界。下文给出的主要结果通过将集合 E 中所需点的数量从五个减少到三个，对问题 1.1 给出了全面解答。

定理 2.1。设 k 为一个正整数，使得 $k > 2$。令 $\mathcal{F}$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}$内的亚纯函数族。假设对每个紧

$K \subset D$，都存在一个由三个不同点组成的集合 $E = E(K) \subset \mathbb{C}$ 以及一个正数常数 $M = M(K)$，使得

$$\left(f^{(j)}\right)^{\#}(z) \leq M, \quad where\ j = 0, 1, \ldots, (k-1),$$

对所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $z \in K \cap f^{-1}(E)$ 均成立。因此，$\mathcal{F}$ 是正规族。

注 2.1. 定理 2.1 是对定理 C 的重要推广；具体而言，当 $k = 3$ 时，定理 C 可作为我们一般结果的一个特例得到。此外，该定理改进了定理 B 中确立的判据，证明即使集合 E 中的点少于五个，仍可保持正规性。

为说明定理 2.1 的适用性，我们给出一个涉及指数函数族的例子。该例展示了对有限点集施加的约束如何有效控制高阶球面导数的增长，从而使该族具有正规性。

例 2.1. 考虑族 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = e^{nz} : n \in \mathbb{N}\}$，并设 $k = 3$。我们分析 f_n、f_n' 和 f_n'' 的球面导数。对于第一项，其球面导数为 $f_n^{\#}(z) = \frac{n|e^{nz}|}{1+|e^{nz}|^2}$，对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均有上界 $n/2$。尽管该上界依赖于 n，定理 2.1 仅要求其在集合 $K \cap f^{-1}(E)$ 上有界，其中 E 包含三个不同的值。如果将f_n 在三个不同点处的取值加以约束，则指数增长参数 n 受到限制，从而确保对于 $j = 0$，1，2，$(f_n^{(j)})^{\#}$ 在指定集合上一致有界。因此，族 $\mathcal{F}$ 满足该定理所确立的正规性判据。

下面的例子探讨条件 $k > 2$ 的必要性，并确立我们结果的锐性。通过考察一个线性函数序列，我们证明当 $k = 1$ 时定理不成立，从而凸显高阶导数在减少目标点数量的情况下保证正规性所起的关键作用。

例 2.2. 定理 2.1 中的条件 $k > 2$ 至关重要。事实上，当 $k = 1$ 时，该结果归结为一个与 Lappan 五值定理相关的情形。考虑族 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = nz : n \in \mathbb{N}\}$。这里，$f_n'(z) = n$ 且 $f_n''(z) = 0$。该族中函数的球面导数为

$$f_n^{\#}(z) = \frac{n}{1 + n^2|z|^2}.$$

在原点处，当 $n \to \infty$ 时，$f_n^{\#}(0) = n \to \infty$，这表明该族在 $z = 0$ 处不正规。此例说明，当集合 E 的基数较小（例如 $|E| < 5$）时，仅仅对一阶导数的球面导数加以限制，并不足以保证正规性。这证明了必须引入高阶导数（$k > 2$），才能在 E 中点数较少的情况下实现正规性。

针对问题 1.2，我们建立了一个定理，它对定理 D 和经典的 Pang–Zalcman 正规性判据 [25] 都作了大幅推广。通过放宽以往对微分

单项式结构的限制，定理 2.2 基于球面导数的有界性，为亚纯函数族的正规性提供了一种全面统一的方法。

定理2.2. 设 k、 d_M 和 D_M 为正整数，使得

$$d_M > \frac{(k+2)D_M + 2(k+1)}{k}. \tag{2.1}$$

设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上的一族亚纯函数，其所有零点的重数至少为 k。假设对于每个紧子集 $H \subset D$，存在$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$和一个正数常数 $M^* = M^*(H)$，使得

$$(M[f(z)])^{\#} \leq M^*,$$

对所有 $f \in \mathcal{F}$和 $z \in H \cap \{M[f(z)] = a\}$均成立。则 $\mathcal{F}$是正规的。

注 2.2. 特别地，将 $n_0 = n$、 $n_k = 1$和 $n_j = 0$分别设为 $1 \leq j \leq k-1$时，微分单项式 $M[f]$化简为 $f^n f_{(k)}$。在这些参数下，条件（2.1）简化为

$$n > k + 3 + \frac{2}{k}.$$

因此，定理 D 可作为定理2.2的一个特例推论得出，这证明了我们结果的普遍性。

现在我们给出一个涉及特定微分单项式的定理2.2的具体应用，以验证已确立的次数阈值。该例证实，当次数 d_M 满足所要求的不等式时，球面导数在 a-点处保持有界，这与我们的理论结果一致。

例 2.3。 考虑微分单项式 $M[f] = f^n f_{(k)}$。在这些参数下，条件 (2.1) 简化为 $n > k + 3 + \frac{2}{k}$。对于 $k = 1$，这要求$n > 6$。令 $n = 7$，并考虑族 $\mathcal{F} = \{f_m(z) = mz\}_{m\in\mathbb{N}}$。 于是 $M[f_m(z)] = m^8 z^7$。对于任意 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$， $M[f_m]$的 a-点由$z_{m,j} = \left(\frac{a}{m^8}\right)^{1/7} \omega^j$给出，其中 ω 是七次单位根。直接计算表明，$(M[f_m(z_{m,j})])^{\#}$在 $m \to \infty$时保持有界，因为单项式的高次数 d_M 有效抑制了球面导数在这些点处的增长。这说明了次数阈值在维持族 $\mathcal{F}$的正规性方面所发挥的作用。

最后，我们给出一个反例，以说明定理2.2中规定的次数与权之比的必要性。通过考察违反这一阈值的情形，我们证明，仅有球面导数的有界性不足以保证正规性，从而确认条件(2.1)不可或缺。

例 2.4. 为说明定理2.2中次数阈值的必要性，考虑条件 (2.1) 不成立的情形。设 $f_m(z) = mz - a$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一个函数序列。我们定义微分单项式 $M[f] = f'$，由此得到参数 $d_M = 1$、 $D_M = 1$ 和 $k = 1$。在此情形下，我们发现 $\frac{(k+2)D_M + 2(k+1)}{k}$的值为 7，且条件 $d_M > 7$ 显然不满足。对于此族，$M[f_m] = m$，且球面导数恒等于零，即 $(M[f_m])^{\#} = 0$。

尽管球面导数在集合 $\{z: M[f_m(z)] = a\}$ 上有界，但族 $\mathcal{F}$ 并不正规，因为 $f_m(z) \to \infty$ 当 $m \to \infty$。这证实了，要根据单项式球面导数的有界性确保正规性，次数阈值是必要条件。

3. 主要结果的证明

为便于证明主要结果，我们首先陈述一系列预备引理。特别地，我们将运用 Zalcman 型重缩放引理，这是正规族理论中的一项基本判据，它将正规性的失效与无穷小收敛联系起来。后续证明需要以下技术性结果。

引理3.1. *[37]* 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的亚纯函数族，且 $\mathcal{F}$ 中函数的所有零点重数至少为 p，所有极点的重数至少为 q。设 α 为满足 $-p < \alpha < q$ 的实数。那么， $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规，当且仅当存在

(i) 一个数 r, $0 < r < 1$; *(ii)* 点 z_n，满足 $|z_n| < r$, $z_n \to z_0$; *(iii)* 函数 $f_n \in \mathcal{F}$; *(iv)* 正数 $\rho_n \to 0^+$

使得 $g_n(\xi) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi) \to g(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上关于球面度量一致成立，其中 g 是一个非常数亚纯函数，其所有零点和极点的重数分别至少为 p、q。此外，$g^{\#}(\xi) \leq g^{\#}(0) \leq 1$，且 g 的阶至多为 2。

引理 3.2. *[6]* 设 g 为整函数， M 为正数常数。若对所有 $\xi \in \mathbb{C}$ 有$g^{\#}(\xi) \leq M$，则 g 的阶至多为一。

注 3.1. [28] 在引理3.1中，若 g 为全纯函数，则由引理 3.2 可知， g 的阶不大于 1。

下面给出亚纯函数的微分多项式的定义，这将使我们能够扩展研究范围。

定义 3.1. [14] 假设 f 是复平面上的超越亚纯函数， $\mathbb{C}$ 及其前 p 阶导数。关于 f 的微分多项式 P 定义为

$$P(z) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z) \prod_{j=0}^{p} \left(f^{(j)}(z)\right)^{S_{ij}},$$

其中 S_{ij}、$1 \leq i \leq n$、$0 \leq j \leq p$ 是非负整数， $\alpha_i \not\equiv 0$、$1 \leq i \leq n$ 是（相对于 f）小亚纯函数。令

$$d(P) := \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{p} S_{ij} \quad \text{and} \quad \theta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{p} j S_{ij}.$$

根据定义 3.1，Hinchliffe [14] 推广了 Hayman [12]和 Chuang [5], 的定理，并得到了以下结果，该结果将在定理 D 的证明中发挥作用。

引理3.3. *[14]* 设 f 为超越亚纯函数， P 为关于 f的非常数微分多项式，且 $d(P) \geq 2$。那么，对于任意 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$T(r,f) \leq \frac{\theta(P)+1}{d(P)-1}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \frac{1}{d(P)-1}\overline{N}\left(r,\frac{1}{P-a}\right) + S(r,f).$$

对所有 $r \in [1,\infty)$，但不包括一个勒贝格测度有限的集合。

此外，正如 Dethloff 等人所证明的， $[8,$ 引理 $10]$, 对于更广泛的非恒定亚纯函数类，此结果仍然成立。为求完整，并帮助读者理解，我们在下一节中详细给出定理2.1和2.2的严格证明。

定理 2.1 的证明。不失一般性，我们可以假设 D 是单位圆盘 $\mathbb{D}$。假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in \mathbb{D}$处不正规。根据引理3.1，对于 $\alpha = 0$，存在

(i) 一个数 r, $0 < r < 1$; (ii) 点 z_m，满足 $|z_m| < r$, $z_m \to z_0$; (iii) 函数 $f_m \in \mathcal{F}$; (iv) 正数 $\rho_m \to 0^+$

使得

$$g_m(\xi) := f_m(z_m + \rho_m \xi) \to g(\xi) \tag{3.1}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上局部球面一致收敛到一个非常数亚纯函数 g。因此，对于 $k \in \mathbb{N}$，容易看出

$$g_m^{(k)} \to g^{(k)} \quad \text{as} \quad m \to \infty \tag{3.2}$$

在 $\mathbb{C} \setminus P$ 的紧子集上一致收敛，其中 P 是 g 的极点集。

考虑紧子集

$$K := \left\{ z : |z| \leq \frac{1+z_0}{2} \right\} \subset \mathbb{D}.$$

根据假设，存在一个由三个点组成的子集 $E \subset \mathbb{C}$ 和一个常数 $M > 0$，使得对于固定整数 $k > 2$, 下列不等式成立:

$$\left(f^{(j)}\right)^{\#}(z) \leq M, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

对所有 $z \in K \cap f^{-1}(E)$ 以及所有 $f \in \mathcal{F}$ 均成立。

设 $a \in E$ 为任意一点。对 $g - a$的任一零点 ξ_0，Hurwitz定理蕴含存在序列 $\xi_m \to \xi_0$，使得当 m充分大时,

$$f_m(z_m + \rho_m \xi_m) = a.$$

因此，当 m 充分大时，点 $z_m + \rho_m \xi_m$ 属于 $K \cap f_m^{-1}(E)$。根据假设 $k > 2$, 可得

$$\frac{\left|f_m^{(i+1)}(z_m + \rho_m \xi_m)\right|}{1 + \left|f_m^{(i)}(z_m + \rho_m \xi_m)\right|^2} \leq M, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

特别地，对于 $i=0$，我们得到

$$\frac{|g_m'(\xi_m)|}{1+|g_m(\xi_m)|^2}=\rho_m\frac{|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+|f_m(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\leq\rho_m M,$$

这对所有充分大的 m 都成立。由 (3.1) 可得

$$g^{\#}(\xi_0)=\lim_{m\to\infty}(g_m)^{\#}(\xi_m)=0$$

即，$g'(\xi_0)=0$。由于 $g(\xi_0)=a$ 且 $g'(\xi_0)=\cdots=g^{(k)}(\xi_0)=0$，泰勒展开的标准应用表明，$\xi_0$ 是 g 的一个 a 点，其重数至少为 $k+1$。事实上，若作相反假设，则 $g'(\xi_0)\neq 0$。然而，前一个不等式蕴含 $g'(\xi_0)=0$，这就产生了矛盾。此外，若 g 是次数至多为 1 的非恒定多项式，例如对某个 $b,c\in\mathbb{C}$ 满足 $b\neq 0$，有 $g(z)=bz+c$，则 $g'(\xi_0)=b$ 将非零，这再次与 $g'(\xi_0)=0$ 的事实矛盾。因此，g 必为常数或具有高阶零点。

另一方面，我们观察到

$$\begin{aligned}|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|&=(1+|f_m(z_m+\rho_m\xi_m)|^2)f_m^{\#}(z_m+\rho_m\xi_m)\\&\leq M\left(1+\max_{b\in E}|b|^2\right):=B_1.\end{aligned}$$

由此可得，对于所有充分大的 m，

$$\begin{aligned}\frac{|g_m''(\xi_m)|}{1+|g_m'(\xi_m)|^2}&=\rho_m^2\frac{|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+\rho_m^2|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\&=\rho_m^2\frac{|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\cdot\frac{1+|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}{1+\rho_m^2|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\&\leq M\rho_m^2\frac{1+|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}{1+\rho_m^2|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\&\leq M\rho_m^2\left(1+|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2\right)\\&\leq M\rho_m^2\left(1+B_1^2\right).\end{aligned}$$

因此，我们得到 $(g')^{\#}(\xi_0)=\lim_{m\to\infty}(g_m')^{\#}(\xi_m)=0$，这意味着 $g''(\xi_0)=0$。鉴于 $g(\xi_0)=a$ 以及 $g'(\xi_0)=0$（如前所述），可知 ξ_0是 g 的一个 a-点，重数至少为 3。事实上，若作相反假设，则$g'''(\xi_0)\neq 0$。在这种情况下，g 将是一个次数至多为 2 的非恒定多项式。

情形 A。如果对于某个 $b,\ c\in\mathbb{C}$，有 $g(z)=bz+c$，那么 $g'(\xi_0)=b\neq 0$，这就产生了矛盾。

情形 B。如果对于某个 $b_2,\ b_1,\ c_1\in\mathbb{C}$，有 $g(z)=b_2z^2+b_1z+c_1$，那么 $g''(\xi_0)=2b_2\neq 0$，这与 $g''(\xi_0)=0$这一事实矛盾。

此外，我们还可以看到

$$\begin{aligned}|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|&=\left(1+|f_m'(z_m+\rho_m\xi_m)|^2\right)(f_m')^{\#}(z_m+\rho_m\xi_m)\\&\leq M\left(1+B_1^2\right):=B_2.\end{aligned}$$

对于所有充分大的 m，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|g_m'''(\xi_m)|}{1+|g_m''(\xi_m)|^2} &= \rho_m^3 \frac{|f_m'''(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+\rho_m^4|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\ &= \rho_m^3 \frac{|f_m'''(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\cdot\frac{1+|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}{1+\rho_m^4|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\ &\le M\rho_m^3\frac{1+|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}{1+\rho_m^4|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\ &\le M\rho_m^3\left(1+|f_m''(z_m+\rho_m\xi_m)|^2\right)\\ &\le M\rho_m^3\left(1+B_2^2\right).\end{aligned}$$

因此，我们得到 $(g'')^{\#}(\xi_0) = \lim_{m\to\infty}(g_m'')^{\#}(\xi_m) = 0$，这意味着 $g'''(\xi_0) = 0$。由于 $g(\xi_0) = a$ 且 $g'(\xi_0) = g''(\xi_0) = 0$，由此可知 ξ_0 是 g 的一个 a-点，其重数至少为 4。事实上，若作相反假设，则 $g^{(iv)}(\xi_0) \neq 0$。在这种情况下，g 将是一个次数至多为 3 的非恒定多项式。

若对某个 $d_0, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$，有 $g(z) = d_3z^3+d_2z^2+d_1z+d_0$，则 $g'''(\xi_0) = 6d_3 \neq 0$，这与 $g'''(\xi_0) = 0$ 这一事实矛盾。

重复这一过程可得

$$|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)| = \left(1+|f_m^{(k-2)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2\right)\left(f_m^{(k-2)}\right)^{\#}(z_m+\rho_m\xi_m) \le B_{(k-1)},$$

其中

$$\begin{cases} B_{(k-1)} := M\left(1+B_{(k-2)}^2\right)\\ B_{(k-2)} := M\left(1+B_{(k-3)}^2\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_3 := M\left(1+B_2^2\right)\\ B_2 := M\left(1+B_1^2\right)\\ B_1 := M\left(1+\max_{b\in E}|b|^2\right). \end{cases}$$

当 m充分大时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|g_m^{(k)}(\xi_m)|}{1+|g_m^{(k-1)}(\xi_m)|^2} &= \rho_m^k\frac{|f_m^{(k)}(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+\rho_m^{2(k-1)}|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\ &= \rho_m^k\frac{|f_m^{(k)}(z_m+\rho_m\xi_m)|}{1+|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\cdot\frac{1+|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}{1+\rho_m^{2(k-1)}|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\ &\le M\rho_m^k\frac{1+|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}{1+\rho_m^{2(k-1)}|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2}\\ &\le M\rho_m^k\left(1+|f_m^{(k-1)}(z_m+\rho_m\xi_m)|^2\right)\\ &\le M\rho_m^3\left(1+B_{(k-1)}^2\right).\end{aligned}$$

因此，容易看出

$$\left(g^{(k-1)}\right)^{\#}(\xi_0) = \lim_{m\to\infty}\left(g_m^{(k-1)}\right)^{\#}(\xi_m) = 0$$

即， $g^{(k)}(\xi_0) = 0$。于是，容易看出 ξ_0 是 g 的一个重数至少为 $k+1$的 a-点。事实上，否则 $g^{(k+1)}(\xi) = 0$。于是 g是一个次数至多为 k的非恒定多项式。

如果对某些 $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_3, \in \mathbb{C}$有 $g(z) = r_k z^k + \cdots + r_2 z^2 + r_1 z + r_0$，则 $g^{(k)}(\xi_0) = k! \neq 0$，这与 $g^{(k)}(\xi_0) = 0$这一事实相矛盾。

因此，对每个$a \in E$， $g - a$ 的每个零点的重数至少为 $k+1$。设 $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ 表示该集合中的三个互异点。应用Nevanlinna理论的第一基本定理和第二基本定理，我们得到

$$\begin{aligned} T(r,g) &\leq \sum_{j=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) + o\left(T(r,g)\right) \\ &\leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{3} N\left(r, \frac{1}{g-a_j}\right) + o\left(T(r,g)\right) \\ &\leq \frac{3}{k+1} T(r,g) + o\left(T(r,g)\right) \end{aligned}$$

对所有 $r \in [1, \infty$（排除一个有限勒贝格测度的集合）。由于 $k > 2$，这就导出了矛盾。因此， $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$中是正规族，从而完成证明。□

定理2.2的证明。 首先，我们考虑 D 作为一个单位圆盘 $\mathbb{D}$。反之，我们假设族 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in \mathbb{D}$处不正规。由引理3.1，存在

(i) 一个数 r, $0 < r < 1$; (ii) 点 z_m 满足 $|z_m| < r$， $z_m \to z_0$; (iii) 函数 $f_m \in \mathcal{F}$; (iv) 正数 $\rho_m \to 0^+$

使得

$$g_m(\xi) := \frac{f_m(z_m + \rho_m \xi)}{\rho_m^{\alpha}} \to g(\xi) \tag{3.3}$$

其中

$$\alpha = \frac{D_M}{d_M} = \frac{n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k}{n_0 + n_1 + \cdots + n_k}$$

关于球面度量局部一致收敛到 g 上的一个非常数亚纯函数，该函数在 $\mathbb{C}$的紧子集上零点的重数至少为 k。因此，对于 $k \in \mathbb{N}$，不难看出

$$g_m^{(k)} \to g^{(k)} \quad \text{as} \quad m \to \infty \tag{3.4}$$

在 $\mathbb{C}\setminus P$的紧子集上一致收敛，其中 P是 g的极点集。简单计算可得

$$\begin{aligned}
M[g_m(\xi)] &= [g_m(\xi)]^{n_0}[g_m'(\xi)]^{n_1}\cdots[g_m^{(k)}(\xi)]^{n_k}\\
&= \left(\frac{f_m(z_m+\rho_m\xi)}{\rho_m^{\alpha}}\right)^{n_0}\left(\frac{\rho_m f_m'(z_m+\rho_m\xi)}{\rho_m^{\alpha}}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{\rho_m^k f_m^{(k)}(z_m+\rho_m\xi)}{\rho_m^{\alpha}}\right)^{n_k}\\
&= \frac{(f_m(z_m+\rho_m\xi))^{n_0}}{\rho_m^{\alpha n_0}}\cdot\frac{(f_m'(z_m+\rho_m\xi))^{n_1}}{\rho_m^{(\alpha-1)n_1}}\cdots\frac{\left(f_m^{(k)}(z_m+\rho_m\xi)\right)^{n_k}}{\rho_m^{(\alpha-k)n_k}}\\
&= \frac{M[f_m(z_m+\rho_m\xi)]}{\rho_m^{\alpha n_0+(\alpha-1)n_1+\cdots+(\alpha-k)n_k}}\\
&= \frac{M[f_m(z_m+\rho_m\xi)]}{\rho_m^{\alpha(n_0+n_1+\cdots+n_k)-(n_1+2n_2+\cdots+kn_k)}}\\
&= \frac{M[f_m(z_m+\rho_m\xi)]}{\rho_m^{\alpha d_M-D_M}}\\
&= M[f_m(z_m+\rho_m\xi)]. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

由 (3.3)、(3.4) 和 (3.5)，我们得出

$$M[g_m(\xi)] \;\to\; M[g(\xi)] \qquad (3.6)$$

在 $\mathbb{C}\setminus P$ 的紧子集上一致成立。

我们首先证明微分单项式 $M[g]$ 不是常数，并且 $M[g]-a$ 的所有零点的重数至少为 2。为了证明 $M[g]$ 不是常数，我们注意到，由于 g 不是常数，且其零点的重数至少为 k，因此 g 的 k 阶导数 $g^{(k)}$ 不可能恒等于零。于是， $M[g]\neq 0$。反设 $M[g]$ 是常数。由 $n\geq 1$ 可知， g 必定是处处不为零的整函数。根据注 3.1， g 可写成 $g(\xi)=e^{c\xi+d}$ 的形式，其中 $c\neq 0$ 为某个常数。直接计算可得

$$\begin{aligned}
M[g(\xi)] &= (g(\xi))^{n_0}(g'(\xi))^{n_1}\cdots\left(g^{(k)}(\xi)\right)^{n_k}\\
&= \left(e^{c\xi+d}\right)^{n_0}\left(ce^{c\xi+d}\right)^{n_1}\cdots\left(c^k e^{c\xi+d}\right)^{n_k}\\
&= c^{n_1+2n_2+\cdots+kn_k}\; e^{(c\xi+d)(n_0+n_1+\cdots+n_k)}\\
&= c^{D_M}e^{(c\xi+d)d_M}.
\end{aligned}$$

由于假设 $M[g(\xi)]$ 是常数，因此 $c^{D_M}e^{d_M(c\xi+d)}$ 也必定是常数。然而，由于 $c\neq 0$ 和 $d_M\geq 1$，这将导致矛盾。因此，我们得出结论： $M[g]$ 不是常数。

Let

$$H := \left\{z : |z| \leq \frac{1+|z_0|}{2}\right\}$$

表示 $\mathbb{D}$ 的一个紧子集。根据假设，存在一个值 $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 和一个正数常数 M^*，使得对于所有 $f\in\mathcal{F}$ 以及所有

$z \in H \cap (M[f])^{-1}(a)$。我们将证明， $M[g]-a$ 的所有零点的重数至少为 2。

对于 $M[g]-a$ 的任意零点 ξ_0，由 Hurwitz定理 可知，存在一个序列 $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛到 ξ_0，使得 $M[f_m(z_m+\rho_m\xi_m)]=a$。当 m 充分大时，可得 $z_m+\rho_m\xi_m \in H \cap (M[f_m])^{-1}(a)$。因此，根据假设，我们得到

$$(M[f_m(z_m+\rho_m\xi_m)])^{\#} = \frac{|M'[f_m(z_m+\rho_m\xi_m)]|}{1+|M[f_m(z_m+\rho_m\xi_m)]|^2} \le M^*. \tag{3.7}$$

对于所有充分大的 m，由 (3.7) 可知，经过简单计算可得

$$(M[g_m(\xi_m)])^{\#} = \frac{|M[g_m(\xi_m)]|'}{1+|M[g_m(\xi_m)]|^2} = \frac{\rho_m|M[f_m(z_m+\rho_m\xi_m)]|'}{1+|M[f_m(z_m+\rho_m\xi_m)]|^2} \le \rho_m M^*. \tag{3.8}$$

利用 (3.6) 和 (3.8)，可得

$$(M[g(\xi_0)])^{\#} = \lim_{m\to\infty}(M[g_m(\xi_m)])^{\#} = 0.$$

由于 $(M[g(\xi_0)])^{\#} = 0$，可得 $(M[g])'(\xi_0) = 0$。因此， ξ_0 是 $M[g]$ 的一个 a 点，其重数至少为 2。将引理3.3应用于 $P = M[g]$，其中

$\theta\left(P\right) = D_M$和 $d\left(P\right) = d_M$，直接计算可得

$$
\begin{aligned}
(3.9)\quad T(r,g) &\leq \frac{D_M+1}{d_M-1}\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{d_M-1}\overline{N}\left(r,\frac{1}{M[g]-a}\right)+S(r,g)\\
&\leq \frac{D_M+1}{k(d_M-1)}N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{2(d_M-1)}N\left(r,\frac{1}{M[g]-a}\right)+S(r,g)\\
&\leq \frac{D_M+1}{k(d_M-1)}T(r,g)+\frac{1}{2(d_M-1)}T(r,M[g])+S(r,g)\\
&\leq \frac{D_M+1}{k(d_M-1)}T(r,g)+\frac{1}{2(d_M-1)}T\left(r,(g)^{n_0}(g')^{n_1}\cdots\left(g^{(k)}\right)^{n_k}\right)\\
&\quad +S(r,g)\\
&\leq \frac{1}{2(d_M-1)}\left(T(r,g^{n_0})+T(r,(g')^{n_1})+\cdots+T\left(r,\left(g^{(k)}\right)^{n_k}\right)\right)\\
&\quad +\frac{D_M+1}{k(d_M-1)}T(r,g)+S(r,g)\\
&\leq \frac{D_M+1}{k(d_M-1)}T(r,g)+\frac{1}{2(d_M-1)}\left(n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k\right)T(r,g)\\
&\quad +S(r,g)\\
&\leq \frac{1}{2(d_M-1)}\left((n_0+n_1+\cdots+n_k)+(n_1+2n_2+\cdots+kn_k)\right)T(r,g)\\
&\quad +\frac{D_M+1}{k(d_M-1)}T(r,g)+S(r,g)\\
&\leq \frac{D_M+1}{k(d_M-1)}T(r,g)+\frac{1}{2(d_M-1)}\left(d_M+D_M\right)T(r,g)+S(r,g)\\
&\leq \frac{1}{d_M-1}\left(\frac{D_M+1}{k}+\frac{d_M+D_M}{2}\right)T(r,g)+S(r,g)\\
&\leq \frac{(k+2)D_M+kd_M+2}{2k(d_M-1)}\,T(r,g)+S(r,g)
\end{aligned}
$$

对所有 $r\in[1,\infty)$，但不包括一个勒贝格测度有限的集合。

由不等式 (3.9) 可得

$$\left(1-\frac{(k+2)D_M+kd_M+2}{2k(d_M-1)}\right)\leq 0,$$

这等价于

$$d_M\leq\frac{(k+2)D_M+2(k+1)}{k}.$$

这导致矛盾，因为

$$d_M>\frac{(k+2)D_M+2(k+1)}{k}.$$

因此， $\mathcal{F}$ 是一个正规族，从而完成证明。 □

4. 结语

值得注意的是，将本文所得结果推广到多复变数情形，是一个引人入胜且颇具挑战性的未解决问题。在一维情形中，我们证明了微分单项式 $M[f]$ 的次数与权之比，是族 $\mathcal{F}$ 正规性的一个尖锐且内在的界限。这个阈值由d_M、 D_M、与阶 k 之间的关系所定义，从本质上量化了抑制球面导数 $(M[f])^{\#}$ 在其 a- 点处增长所需的“代数压力”。

在高维情形下，尤其对于全纯映射 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$，正规性的概念与超平面的几何性质以及相关雅可比行列式的行为密不可分。由于例外集的存在，以及超平面必须处于一般位置这一要求，球面导数与原像分布之间的相互作用变得复杂得多。我们的结果表明，全纯映射可能也存在与定理2.2中发现的类似阈值，其中可能涉及共享超平面的交数重数以及相关微分算子的权。

此外，我们将 Lappan定理通过高阶球面导数推广至三点集 E，为高维情形下的最小基数要求提供了新的视角。虽然关于映射到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的经典结果通常要求有 $2N+1$ 个或更多超平面才能保证正规性，但我们的研究暗示，若能控制这些导数 $f^{(j)}$ 的球面增长，则使用导数或许可以减少目标值的数量。

因此，我们的框架提供了一个基础性桥梁，可与 Tu [30] 和 Yang等人 [34]探讨的高维类比相辅相成。具体而言，本文所发展的技术可用于处理存在微分单项式时的重缩放过程，这或许有助于解决标准 Picard 型值稀缺情形下全纯映射的正规性判据问题。未来若将多维 Zalcman 型重缩放引理与微分单项式结合起来研究，或可为这些不同维度上的正规性建立更统一的理论。

致谢： 作者谨向匿名审稿人致谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议使稿件得以改进。

作者贡献： 所有作者均积极参与了本文所述研究，并审阅了稿件。

伦理标准遵守声明：

利益冲突。 作者声明，就本文的发表而言不存在利益冲突。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

资助声明。 作者声明，在本文撰写过程中未获得任何资金、资助或其他支持。

参考文献

[1] M. B. Ahamed 和 S. Mandal，正规亚纯函数与正规调和映射的若干性质，《数学月刊》200（2023），719–736。[2] M. B. Ahamed 和 S. Mandal，关于全纯函数全导数的正规性判据，$\mathbb{C}^n$，《计算方法与函数论》（2024）。[3] G. Aladro 和 S. G. Krantz，$\mathbb{C}^n$中的一个正规性判据，《数学分析与应用杂志》161（1991），1–8。[4] H. Arbel*á*ez、R. Hern*á*ndez 和 W. Sierra，正规调和映射，《数学月刊》190（2019），425-439。[5] C. T. Chuang，论微分多项式。载于：《单复变函数分析》，World Sci.（1987），12–32。[6] J. Clunie 和 W.K. Hayman，积分函数与亚纯函数的球面导数，《瑞士数学评论》40（1966），117-148。[7] H. Deng、S. Ponnusamy 和 J. Qiao，正规调和映射的性质，《数学月刊》193（2020）：605-621。[8] G. Dethloff、T.V. Tan 和 N.V. Thin，亚纯函数族的正规性判据，《数学分析与应用杂志》411（2014），675–683。[9] W. Doeringer，微分多项式的例外值，《太平洋数学杂志》98（1982）。[10]P.V. Dovbush，论 W. Schwick 的一个正规性判据，《几何分析杂志》31（2021），5355–5358。[11] P. V. Dovbush，论 $\mathbb{C}^n$中的正规族，《复变函数与椭圆方程》67(1)（2022），1-8。[12] W.K. Hayman，《亚纯函数》，克拉伦登出版社，牛津（1964）。[13] W. K. Hayman 和 D. A. Storvick，论正规函数，《伦敦数学学会通报》3（1971），193-194。[14] J.D. Hinchliffe，论 Chuang 关于 Hayman替代定理的一个结果，《计算方法与函数论》2（2002），293–297。[15] A. Hinkkanen，正规族与Ahlfors五岛定理，《新西兰数学杂志》22（1993），39–41。[16] P. C. Hu 和 N. V. Thin，将Montel正规性判据和Lappan五值定理推广到全纯曲线，《复变函数与椭圆方程》65(4)（2020），525-543。[17] P. Lappan，调和正规函数的一些结果，《数学杂志》90(2)（1965），155-159。[18] P. Lappan，亚纯函数为正规的一个判据，《瑞士数学评论》49（1974），492-495。[19] P. Lappan，球面导数与正规函数，《芬兰科学院学报A辑》3(2)（1977），301-310。[20] P. Lappan，论函数导数的正规性，《数学年刊》238（1978），141–146。[21] P. Lappan，正规族的统一方法，《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》39（1994），691–702。[22] O. Lehto 和 K. Virtanen，边界行为与正规亚纯函数，《数学学报》97（1957），47-65。[23] P. Montel，《解析函数正规族讲义及其应用》，Borel文集（1927）。[24] K. Noshiro，单位圆内亚纯函数理论的贡献，《北海道大学理学部纪要》7（1938），149-159。[25] X. C. Pang 和 L. Zalcman，论Hayman和Clunie定理，《新西兰数学杂志》28（1999），71-75。

[26] Ch. Pommerenke，复函数论中的问题，伦敦数学学会通报**4**（1972），354–366。[27] M. Ru，Nevanlinna理论及其与丢番图逼近的关系，新加坡，*World Scientific*出版社，2001。[28] T. V. Tan 和 N. V. Thin，论Lappan五点定理，计算方法与函数论**17**（2017），47-63。[29] T. V. Tan、N. V. Thin 和 V. V. Truong，论Montel与Bergweiler–Langley的正规性判据，数学分析与应用杂志 **448** （2017），319-325。[30] Z. H. Tu，几个复变数的全纯映射族到 $\mathbb{P}^N$（$\mathbb{C}$）的正规性判据，美国数学会会刊 **127** （1999），1039-1049。[31] S. Yamashita，论正规亚纯函数，数学杂志 **141** （1975），139–145。[32] L. Yang，《值分布理论》，*Springer*出版社和科学出版社，柏林，1993。[33] L. Yang、C. Y. Fang 和 X. C. Pang，关于共享超平面的复射影空间全纯映射正规族，太平洋数学杂志 **272** （2014），245–256。[34] L. Yang、X. J. Liu 和 X. C. Pang，论复射影空间中的亚纯映射族，休斯顿数学杂志**42**（2016），775–789。[35] C. Yang、H. Yi，《亚纯函数唯一性理论》，科学出版社，北京 （2006）。[36] K. Yosida，论一类亚纯函数，日本物理数学学会会刊（丛刊）**16(3)**（1934），227-235。[37] L. Zalcman，正规族：新视角，美国数学会通报 **35** （1998），215-230。Molla Basir Ahamed，雅达夫普尔大学数学系，印度西孟加拉邦加尔各答 700032。电子邮箱：mbahamed.math@jadavpuruniversity.in Sanju Mandal，雅达夫普尔大学数学系，印度西孟加拉邦加尔各答 700032。电子邮箱：sanjum.math.rs@jadavpuruniversity.in, sanju.math.rs@gmail.com Nguyen Van Thin，太原师范大学数学系，越南太原市 Luong Ngoc Quyen街。电子邮箱：thinmath@gmail.com