arXiv:2602.13354v1 [math.GR] 13 Feb 2026

对关于带有不可约特征标的 p-子群偏序集连通性的一个问题的肯定回答

Gang Chen[a,*], Wenhua Zhao[b]

Abstract. 设 p 为素数， e 为非负整数，且 G 为满足 $p^{e+1} \mid |G|$的有限 p-群。设 I 为G中所有阶为 p^{e+1} 的子群的交。证明了 $|I \cap Z(G)| \leq |\pi_0(\Gamma_{p,e}(G))| \leq |$不可约特征标集$(I)|$，其中$\Gamma_{p,e}$（其连通分支记为 $\pi_0(\Gamma_{p,e}(G))$）是由所有满足 $H \leq G$、 $|H| \geq p^{e+1}$、 $\varphi \in$ 不可约特征标集(H)的对(H,φ)构成的偏序集。因此，得到了 [2] 中问题 2的肯定回答。

关键 词：不可约特征标，连通性，有限 p- 群。
2020 年数学主题分类：20C05；20D15。

1. Introduction

在本文中， p 是一个素数， e 是一个非负整数。

设 G 是一个有限群。 G 中阶大于p^e 的所有 p-子群的集合记为$\mathcal{S}_{p,\ e}(G)$。

在 [2], 中定义如下偏序集：

$$\Gamma_{p,e}(G) = \{(H,\varphi) | H \in \mathcal{S}_{p,e}(G), \varphi \in \mathrm{Irr}(H)\},$$

其偏序“ $\leq$”定义如下：

$$(K,\psi) \leq (H,\varphi) \iff K \leq H \quad \text{and} \quad [\varphi_K, \psi] \neq 0.$$

此外，如果两个有序对 (K,ψ) 和 (H,φ) 属于 $\Gamma_{p,e}(G)$，且可由一个有限序列连接起来，使得每两个相邻的有序对都相容，那么它们就是连通的，或位于同一个连通分支中。$\Gamma_{p,e}(G)$ 的连通分支集合记为 $\pi_0(\Gamma_{p,e}(G))$。

对于具有 $p^{e+1} \mid |G|$ 的有限 p-群 G， G 中所有阶为 p^{e+1} 的子群的交记为 I。

如果 $p^2 \mid |G|$，则 [2] 的定理C证明了，$\Gamma_{p,1}$ 不连通当且仅当 $I \neq 1$。在 [2]，的问题 2 中，Meng 和 Yang 提出了以下问题：

问题。设 G 是有限 p-群，其中 $|G|$ 可被 p^{e+1} 整除。假设 $e \geq 2$。那么，$\Gamma_{p,e}(G)$ 不连通当且仅当 $I \neq 1$，这是否成立?

其中一个方向的证明已在 [2]末尾给出。本文简短地对前述问题给出了肯定回答；见下文的定理2.3。

[a,*] 电子邮箱：997051@hainanu.edu.cn，海南大学数学与统计学院，中国海口 570228[b] 通讯作者，电子邮箱：zwh1999@mails.ccnu.edu.cn，华中师范大学数学与统计学院，中国武汉 430079。

2. 证明

下面的引理非常有用。

引理 2.1. *([2, Lemma 4]) Let G be a finite p-group and H a subgroup of G with $|H| \geq p^{e+1}$. Then*

$$\pi_0(\Gamma_{p,e}(G)) = \{[(H,\varphi)]|\varphi \in \mathrm{Irr}(H)\},$$

where $[(H,\ \varphi)]$ denotes the connected component containing $(H,\ \varphi)$ in $\Gamma_{p,\ e}(G)$。

定理 2.1. *Let $H,\ K \in \mathcal{S}_{p,\ e}(G)$ $\alpha \in$不可约特征标集(H) and $\beta \in$不可约特征标集(K) such that $[\alpha_{H\cap K}, \beta_{H\cap K}] \neq 0$. Then $(H,\ \alpha)$ is connected with $(K,\ \beta)$ in $\Gamma_{p,\ e}(G)$。*

证明。根据假设，存在 $\gamma \in$ 不可约特征标集$(H \cap K)$，使得 α 和 β 都位于 γ之上。因此，

$$[(\alpha^G)_K, \beta] = \sum_{x\in[H\backslash G/K]} [({}^x\alpha)^K_{x_{H\cap K}}, \beta] \geqslant [\alpha^K_{H\cap K}, \beta] = [\alpha_{H\cap K}, \beta_{H\cap K}] \geqslant [\gamma,\gamma] \neq 0,$$

其中，第一个等式由麦基公式（见 [1, 问题 5.6]）得出，第二个等式由弗罗贝尼乌斯互反律（见 [1, 引理 5.2]）得出。

因此，我们可以选取 ω α^G 的一个不可约成分 $[\omega_K, \beta] \neq 0$，使得 $[\omega_K, \beta] \neq 0$。由此可见，

$$(H,\alpha) \leqslant (G,\omega) \geqslant (K,\beta),$$

这就证明了该断言。 □

以下定理包含了主要结果的关键要素。

定理 2.2. *Suppose that $L_0,\ L_1,\ L_2 \ldots L_n,\ L_{n+1} \in \mathcal{S}_{p,\ e}(G)$. For each $j,\ $ set $K_j = \bigcap^{j}_{i=0} L_i$. Let $\alpha_0 \in$ 不可约特征标集(L_0) $\alpha_{n+1} \in$ 不可约特征标集(L_{n+1}) satisfying $[(\alpha_0)^{K_{n+1}}, (\alpha_{n+1})_{K_{n+1}}] \neq 0$. Then $(L_0,\ \alpha_0)$ is connected with $(L_{n+1},\ \alpha_{n+1})$ in $\Gamma_{p,\ e}(G)$。*

证明。我们对 n进行归纳。若 $n = 1$，则由定理2.1可得所述结论。

现在假设 $n > 1$。根据假设，存在 $\gamma \in$ 不可约特征标集(K_{n+1})，使得 α_0 和 α_{n+1} 都位于 γ 之上。

由于

$$0 \neq [(\alpha_{n+1})_{K_{n+1}}, \gamma] = [((\alpha_{n+1})_{L_n\cap L_{n+1}})_{K_{n+1}}, \gamma],$$

存在 $\eta \in$ 不可约特征标集$(L_n \cap L_{n+1})$，使得 η 位于 γ 之上且位于 α_{n+1} 之下。

于是我们有

$$[(\alpha_0)_{K_n}, (\eta^{L_n})_{K_n}] = \sum_x [(\alpha_0)_{K_n}, ({}^x\eta)^{K_n}_{x(L_n\cap L_{n+1})\cap K_n}] \geq [(\alpha_0)_{K_n}, \eta^{K_n}_{K_{n+1}}]$$

$$= [(\alpha_0)_{K_{n+1}}, \eta_{K_{n+1}}] \geq [\gamma,\gamma] = 1,$$

其中 x 遍历一组 $(L_n \cap L_{n+1})\backslash L_n / K_n$ 双陪集代表元 .

因此存在 $\alpha_n \in$不可约特征标集(η^{L_n})，使得 $[(\alpha_0)_{K_n},\ (\alpha_n)_{K_n}] \neq 0$。由归纳假设，$(L_0,\ \alpha_0)$ 在 $\Gamma_{p,\ e}(G)$ 中与 $(L_n,\ \alpha_n)$ 连通。

最后，注意到

$$[(\alpha_n)_{L_n\cap L_{n+1}}, (\alpha_{n+1})_{L_n\cap L_{n+1}})] \geqslant [\eta,\eta] = 1,$$

由此可得 $(L_n,\ \alpha_n)$ 由定理 2.1，与 $(L_{n+1},\ \alpha_{n+1})$ 连通。

我们得出，$(L_0,\ \alpha_0)$ 与 $(L_{n+1},\ \alpha_{n+1})$ 连通。

□

下面的结果将对 [2]中的问题 2 给出肯定的回答。

定理

2 3 *Let G be a finite p-group with $p^{e+1} \mid |G|$ and let I be the intersection of . . , all subgroups of order p^{e+1} in G. Then* $|I \cap Z(G)| \leqslant |\pi_0(\Gamma_{p,e}(G))| \leqslant |\mathrm{Irr}(I)|$.

In particular, we have $\Gamma_{p,\ e}(G)$ is connected iff $I = 1$.

证明。取子群 L_0，L_1，……，L_n 使得

$$\bigcap_{i=0}^{n} L_i = I,$$

其中每个 L_i 的阶为 p^{e+1}, $0 \leq i \leq n$。

对于任意的 (L_0, α_0)、$(L_0, \alpha_0') \in \Gamma_{p,\ e}(G)$，取 $(L_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (L_0, \alpha_0')$，并注意到在定理 2.2 $K_{n+1} = I$ 的记号下，根据定理 2.2 可知，若 $(\alpha_0)_I$ 和 $(\alpha_0')_I$ 有共同的不可约成分，则 (L_0, α_0) 与 (L_0, α_0') 连通。

根据引理 2.1，我们有

$$|\pi_0(\Gamma_{p,e}(G))| \leqslant |\mathrm{Irr}(I)|,$$

这就证明了定理中右侧的不等式。

如果 $I \cap Z(G) = 1$，定理中的左侧不等式显然成立。因此，我们可以假设 $|I \cap Z(G)| = p^{f+1}$，其中 f 是一个非负整数。

定义

$$\varphi : \Gamma_{p,e}(G) \to \Gamma_{p,f}(I \cap Z(G))$$
$$(H, \alpha) \mapsto (I \cap Z(G), \beta),$$

其中 β 是$\alpha_{I \cap Z(G)}$的唯一成分 .

注意，若 $(H_1,\ \alpha_1) \leqslant (H_2,\ \alpha_2)$，则有 $\varphi((H_1,\ \alpha_1)) = \varphi((H_2,\ \alpha_2))$，因为 α_1 是 α_2 的一个不可约成分，而 $(\alpha_2)_{I \cap Z(G)}$ 有唯一的不可约成分。因此，φ 是一个偏序集映射。

容易验证 φ 是一个满射。由 [2], 的引理 5 可得

$$|\pi_0(\Gamma_{p,f}(I \cap Z(G)))| \leqslant |\pi_0(\Gamma_{p,e}(G))|.$$

由于 $I \cap Z(G)$ 是阿贝尔的，且 $|I \cap Z(G)| = p^{f+1}$，容易看出

$$|\pi_0(\Gamma_{p,f}(I \cap Z(G)))| = |I \cap Z(G)|,$$

因此，定理中的左侧不等式得证。

特别地，若 $\Gamma_{p\ e}\ G$ $|\pi_0\ \Gamma_{p\ e}\ G\ | = 1$ $I \cap {}_{,}(\ )$ 是 $Z\ G\ = 1$ $I = 1$ $I \lhd G$ $I = 1$ G 连通的，则 $(,(\ ))$，由此得到 $(\ )$，因此当 时。反过来，若 则 $|\pi_0(\Gamma_{p,e}(\ ))| = 1$，即 $\Gamma_{p,e}(G)$ 是连通的。□

3. 致谢

作者的研究得到国家自然科学基金（项目编号：12371019）的资助。

References

[1] I. Martin Isaacs.《可解群的特征标》，《数学研究生教程》第189卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2018年。[2] H.Meng、Y. Yang. 不可约特征标下的 p-子群偏序集的连通性，2025, arXiv:2512.22410vl，第1–16页。