arXiv:2602.13373v1 [math.RT] 13 Feb 2026

有限海森堡群的酉不变量

JOSH KATZ

批准公开发布；无限制分发。公开发布案件编号 26-0143。与 MITRE 公司存在隶属关系仅用于身份识别，并不表示或暗示 MITRE 赞同或支持作者表达的立场、意见或观点。©2026年 MITRE公司。保留所有权利。

Abstract. 群作用的多项式不变量往往只在高次数时才会出现，而在许多表示中，不变量环施加了严格的次数约束，使得任何非平凡不变量都无法在较低次数出现。相比之下，更大的酉不变量类别——即同时包含变量及其共轭的多项式——通常表现出截然不同的特性，而其分离能力相对而言尚未得到充分探索。

我们以有限海森堡群 H_N 为例，突出这种反差。尽管多项式不变量环 $\mathbb{C}[V]^{H_N}$ 在次数低于 N 时不含非平凡元素，我们证明，次数为六的酉不变量已经足以在相差一个全局相位因子的意义下分离一般的 H_N-轨道。这些不变量源自涉及向量及其离散傅里叶变换的模的三次方程。一个次数为 N 的多项式不变量即可进一步确定剩余的全局相位，从而实现一般轨道的完全分离。我们的证明运用了相位恢复领域的基本结果 [2]。此外，我们还将探讨酉不变量在改进循环群表示的次数界方面的用途。

本文给出了一个具体例子，其中酉不变量的最小分离次数远低于多项式不变量的最小次数。这个问题在多篇研究中曾被提出 [11, 1, 9, 10] ，但迄今尚无确切结论。

1. Introduction

不变量理论传统上关注与群 G 在复向量空间 V上的线性作用相关联的多项式不变量环 $\mathbb{C}[V]^G$ 。经典问题探讨该环的生成元数量及次数的界。由 Derksen 和 Kemper [7], 开创的一条较新的研究方向关注分离不变量：能够区分所有不同 G-轨道 [8, 14]的多项式不变量集合。尽管这些次数界通常低于生成不变量环所需的次数，但仍可能相当大。受应用和计算问题的推动，许多作者开始研究分离一般轨道所需次数界的问题[1, 5, 10, 9]。值得注意的是，在许多受关注的情形中，三次不变量足以分离一般轨道。

当 V 是紧群的复表示时，可以通过允许变量及其共轭的多项式来扩充不变量代数。由此得到酉不变量环

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N]^G,$$

日期：2026年2月17日。

它是定义在 V 上且在 G 作用下保持不变的实代数函数环。这些不变量在信号处理和调和分析中无处不在，然而与相应的多项式不变量相比，人们对它们的代数性质及分离能力所知甚少。本文的一个核心主题是：使用多项式不变量和酉不变量分离一般轨道所需的最小次数可能大相径庭。

注 1.1. 本文中，「一般的」一词采用实代数几何中的含义。特别地，我们称 $\mathbb{C}^n$ 中的一般向量满足某个性质，是指存在一个开集 U，其补集是维数为 $m < n$ 的实代数子集，且该性质在 U 上成立。此类开集在欧几里得拓扑下稠密，并具有满勒贝格测度。

定义 1.2. 令 $\gamma(V, G)$ 表示满足以下条件的最小整数 d：存在一组次数为 $\leq d$ 的多项式不变量，能够区分一般的 G-轨道。同理，令 $\gamma^U(V, G)$ 表示满足以下条件的最小 d：存在一组次数为 $\leq d$ 的酉不变量，能够区分一般轨道。

$\gamma(V, G)$ 的取值往往受到 V 的表示论的极大限制（对于阿贝尔群，这取决于表示的权之间的线性关系）；而 $\gamma^U(V, G)$ 则能够涉及更大范围的不变量。在许多情况下，$\gamma^U(V, G)$ 远小于 $\gamma(V, G)$。

1.1. 动机示例。

我们从两个经典例子开始：在这两个例子中，多项式不变量无法分离轨道，而低次数的酉不变量却可以做到。

例 1.3（带限函数上的圆群作用）。令 $G = S^1$ 在 $V = L^2(S^1)_d = \{f \in L^2(S^1) | \hat{f}[j] = 0, \forall |j| > d\}$上按对角方式作用。在傅里叶基下，该作用表示为

$$(\hat{f}[-d], \dots, \hat{f}[d]) \mapsto (e^{-id\theta}\hat{f}[-d], \dots, e^{id\theta}\hat{f}[d]).$$

由于 $\mathbb{C}[V]^{S^1} = \mathbb{C}[V]^{\mathbb{C}^*}$，任何多项式不变量至多只能确定一个轨道到 $\mathbb{C}^*$；因此不存在有限次数的多项式分离集。相比之下，三次酉不变量

$$\hat{f}[k]\hat{f}[s]\overline{\hat{f}[k+s]}, \quad -d \leq k, s \leq d,$$

称为双谱，可确定任意傅里叶系数 $[17, 16]$ 均非零的 f 的 S^1-轨道。因此 $\gamma^U(V, S^1) = 3$，而 $\gamma(V, S^1) = \infty$。

例 1.4（权为 1 和 2 的圆群作用）。令 S^1 通过权 1 和 2 作用于 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2$。不存在非恒定多项式不变量，但三次酉不变量

$$x_1\bar{x}_1, \quad x_2\bar{x}_2, \quad x_1^2\bar{x}_2$$

sep用 $x_1x_2 \neq 0$分隔所有轨道。同样，$\gamma^U(V, S^1) = 3$，而 $\gamma(V, S^1) = \infty$。

我们给出以下命题，对这一现象作一般性刻画.

命题 1.5。设 G 是一个紧群，V 是其一个复表示。那么 $\gamma(V, G)$ 有限，当且仅当 G 有限。

这一结果是表示论中的标准结论。关于紧李群复化的优质参考资料，可见讲义 [4]。

证明。 对于紧 G，我们有 $\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[V]^{G_{\mathbb{C}}}$ 其中 $G_{\mathbb{C}}$ 是复化。当 $\dim G > 0$时，复化 $G_{\mathbb{C}}$ 是一个正维代数群，而不同的G-轨道可能位于同一个 $G_{\mathbb{C}}$-轨道中。特别是，当 G 维数为正时，多项式不变量无法区分 G-轨道。反之，当 G 为有限时， $G_{\mathbb{C}} = G$ 和经典结果保证多项式不变量能够区分轨道。□

值得注意的是，尽管对于正维紧群， $\gamma(V, G)$ 通常不是有限的，但 $\gamma^U(V, G)$ 总是有限的。

定理 1.6。 对于紧群 G的任意复表示 V， V的酉不变量能够区分 G-轨道。特别地， $\gamma^U(V, G)$ 是有限的。

这可由以下引理证明。

引理 1.7 （[1]）。 设 G 是一个紧群，且 V 是定义在 $\mathbb{R}$上的有限维表示。多项式不变量能够区分 V 的 G-轨道。

定理 *1.6* 的证明。 G-表示 $V = \mathbb{C}^N$ 可视为一个维数加倍、坐标为 $x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, ..., x_n, x_n$ 的实表示，因此酉不变量环可视为 $\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}[x_1, ...x_n, x_1, ..., x_n]^G = \mathbb{R}[\mathbb{R}^{2n}]^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$上的多项式不变量环。因此，我们可以将任意向量视为属于 $2n$维 G-表示$v \in \mathbb{R}^{2n}$ ，根据前述引理，其轨道由$\mathbb{R}[\mathbb{R}^{2n}]^G$中的多项式不变量确定。□

2. Cyclic Groups

现在我们转向有限群，首先讨论循环群。即使在这个简单的情形下，也可以构造出这样的表示，使得 $\gamma^U(V, G) < \gamma(V, G) < \infty$。

例 2.1。 令 $G = \mathbb{Z}_6$ ，其生成元为 ζ_6，这是一个本原六次单位根。令 G 作用于 $V = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2$ ，其中下标表示特征标的权。即 $\zeta_6(v_1, v_2) = (\zeta_6 v_1, \zeta_6^2 v_2)$。

唯一的三次不变多项式是 x_2^3，因此 $\gamma(V, \mathbb{Z}_6) > 3$。然而，三次酉不变量 $x_1^2 x_2$ 使我们能够求出一般向量 $(v_1, v_2) \in V$ 的轨道，方法如下：

假设有两个向量 (v_1, v_2)，$(w_1, w_2) \in V$，满足

$$v_2^3 = w_2^3, v_1^2\overline{v_2} = w_1^2\overline{w_2}.$$

进一步假设 $v_2 \neq 0$。

这迫使 $w_2 = \zeta_3 v_2$ ，其中 ζ_3 是任意一个三次单位根。由此得到$w_1 = \pm\zeta_3 v_1 = \zeta_6 v_1$，因此 (w_1, w_2) 属于 (v_1, v_2) 的轨道。

现在我们将这一结果推广到 $\mathbb{Z}_{3n}$ 的一般情形。

定理2.2。 设 $G = \mathbb{Z}_{3n}$ 作用于 $V = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_n$。则 $\gamma^U(V, G) = 3$ 且$\gamma(V, G) > 3$。

证明。 *</style}*唯一的次数为的多项式不变量是，因此$(, G) > 3$。对于酉界，我们使用以下方程

$$S = \{x_1\overline{x_1} = r, x_1^2\overline{x_2} = a_1, x_1x_2\overline{x_3} = a_2, x_1x_3\overline{x_4} = a_3, ..., x_1x_{n-1}\overline{x_n} = a_{n-1}, x_n^3 = a_n\}.$$

利用第一个方程 $x_1x_1 = |x_1| = r$ ，不失一般性地假设 x_1 固定且具有单位范数。

现在注意，如果 $x_1 \neq 0$，那么 x_2 由 $x_1^2x_2 = a_1$ 唯一确定。进一步，如果 x_1，$x_2 \neq 0$ ，那么 x_3 由 $x_1x_2x_3 = a_2$ 唯一确定。以此类推，固定 $x_1 \in S^1$ 后，S 中的酉不变方程列表确定一个向量（v_1，……，v_n）$\in V$，当且仅当 $v_k \neq 0\ \forall 1 \leq k \leq n$。换言之，S 中的不变量确定了 V 的一个一般的 S^1 轨道。

更准确地说，设 $v =$（v_1，……，v_n）$\in V$，其中 $v_k \neq 0\ \forall 1 \leq k \leq n$，并假设 $w =$（w_1，……，w_n）$\in V$ 满足 f（w）$= f$（v）$\forall f \in S$。我们必有 $w =$（θv_1，$\theta^2 v_2$，……，$\theta^n v_n$），其中$|\theta| = 1$。现在利用 $w_n^3 = v_n^3$ 蕴含（$\theta^n v_n$）$^3 = v_n$ 这一事实，可得 $\theta^{3n} = 1$ ，因此 w 属于 v 的 $\mathbb{Z}_{3n}$ 轨道。□

当表示包含 $\mathbb{Z}_n$ 的每个特征标时，这一差距便消失。

定理 2.3 ([1])。 设 $V = \mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的正则表示。 n

$$\gamma(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n) = \gamma^U(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n) = 3.$$

在离散傅里叶基下，三次多项式不变量为

$$\{\hat{x}[i]\hat{x}[j]\hat{x}[N-i-j]\}_{0 \leq i,j \leq N-1}$$

而酉不变量包括如下形式的表达式：

$$\{\hat{x}[i]\hat{x}[j]\overline{\hat{x}[i+j]}\}_{0 \leq i,j \leq N-1}.$$

后者是双谱的离散类比。

这 这一结果已在信号处理文献中得到广泛研究 [3, 6].

以下推广见于 [9]。

定理 2.4 ([9])。 设 V 是有限群在 $\mathbb{C}$ 上的一个表示，其中包含正则表示。则 $\gamma(V, G) = \gamma^U(V, G) = 3$。

3. The Heisenberg Group

设 $\zeta = e^{2\pi i/N}$ 并定义有限海森堡群

$$H_N = \{(k, n, m) : k, n, m \in \mathbb{Z}_N\}$$

其乘法定义为

$$(k, n, m) \cdot (k', n', m') = (k + k', n + n', m + m' + kn').$$

该群通过以下方式作用于 $\mathbb{C}^N$：

- 时间平移： $T_k x_j = x_{j+k}$
- 频率调制： $M_n x_j = \zeta^{nj} x_j$
- 全局相位： $Z_m x_j = \zeta^m x_j$

这些算子满足海森堡交换关系 $T_1 M_1 = \zeta M_1 T_1$。

这是雷达、声呐和时频分析所依据的移位–调制（加博）作用的离散类比。海森堡作用自然地出现在联合时延和多普勒移位估计中。关于有限海森堡群在其中一些应用中的用途，可参见 [13, 12]。

3.1. **不存在低次数多项式不变量。** 与循环群的标准表示不同，海森堡群没有低次数多项式不变量。

命题 3.1. $\mathbb{C}[x_0,\dots,x_{N-1}]^{H_N}$ 不含次数为 $<N$ 的非恒定不变量。

证明。 全局相位算子 Z_m 的作用方式为 $Z_m x_j=\zeta^m x_j$，将每个坐标乘以ζ^m。若单项式 $x_0^{a_0}\cdots x_{N-1}^{a_{N-1}}$ 要在所有 $m\in\mathbb{Z}_N$下对 Z_m 保持不变，则需要

$$\zeta^{m(a_0+\cdots+a_{N-1})}=1 \quad \text{for all } m\in\mathbb{Z}_N.$$

这要求 $a_0+\cdots+a_{N-1}\equiv 0$ (模 N)，因此任何不变多项式的总次数都必须是 N 的倍数。特别地，不存在次数为 $<N$ 的非恒定不变量。□

此外，次数为 $\geq N$ 时出现的不变量肯定不是单项式，因此，提取一组能够区分一般轨道的不变量极具挑战性。

4. The Heisenberg Bispectrum

本文的关键洞见是，尽管海森堡群不存在低次数多项式不变量，但它对模

$$y_j=|x_j|^2=x_j\overline{x_j},\qquad z_k=|\hat{x}[k]|^2=\hat{x}[k]\overline{\hat{x}[k]}$$

要简单得多：时间平移会对 y_j 进行循环置换，而频率调制会对 z_k 进行循环置换。因此，实序列 $y,\ z\in\mathbb{R}^N$ 的双谱在 H_N 下保持不变。

令 $\hat{}y$ 并令 $\hat{}z$ 表示实向量 y 和 z 的离散傅里叶变换。

定义 4.1（海森堡双谱）。 对于 $x\in\mathbb{C}^N$，定义模双谱

$$B^M(x)(i,j)=\hat{y}[i]\hat{y}[j]\hat{y}[N-i-j]$$

其中 $\hat{}y$ 是 $y=(|x_0|^2,\ \dots\dots,\ |x_{N-1}|^2)\in\mathbb{R}^N$ 的离散傅里叶变换。类似地，定义傅里叶模双谱

$$B^{FM}(x)(i,j)=\hat{z}[i]\hat{z}[j]\hat{z}[N-i-j]$$

其中 $\hat{}z$ 是 $z=(|\hat{}x[0]|^2,\ \dots\dots,\ |\hat{}x[N-1]|^2)\in\mathbb{R}^N$ 的离散傅里叶变换。海森堡双谱 是这一对

$$B^H(x)=(B^M(x),B^{FM}(x)).$$

注 4.2。 单个元素 $B^M(x)(i,j)$ 和 $B^{FM}(x)(i,j)$ 分别是实变量 $y_0,\dots,y_{N-1}$ 和 $z_0,\dots,z_{N-1}$ 的三次酉不变量，因此也是原变量 $x_j,\bar{x}_j$ 的六次酉不变量。

定理 4.3 (不变性)。 对于任意 $g\in H_N$ 和 $x\in\mathbb{C}^N$，有 $B^H(g\cdot x)=B^H(x)$.

证明。 我们验证在 H_N 的每个生成元下的不变性：

时间平移 T_k：这会循环置换 $(|x_0|,\dots,|x_{N-1}|)$，因此 y 也会被置换。实序列的双谱具有移位不变性（因为循环移位会使傅里叶系数乘上相位，而这些相位在双谱中会相互抵消）。傅里叶幅值 z 在 $\widehat{T_k}$ 下保持不变，因为 $|T_k x[j]|=|\hat{}x[j]|$。

频率调制 M_n：这会将 x_j 乘以 ζ^{nj}，而保持 $|x_j|$不变，因此 y 保持$\widehat{\ }$不变。傅里叶变换满足 $M_n x[k]=\hat{}x[k-n]$，因此 z 会发生循环置换。同样，双谱具有平移不变性。

全局相位 Z_m：这会将所有坐标乘以 ζ^m，而所有模长保持不变。□

5. Separation of Heisenberg Orbits

5.1. **循环双谱理论**。我们首先回顾循环群作用的经典结果。

定理 5.1（循环双谱分离 [3, 15]）。设 $y \in \mathbb{R}^N$ 是一个傅里叶系数均非零的实信号$\hat{}$ $y[k] \neq 0$，对所有 $0 \leq k \leq N-1$ 均成立。双谱

$$B(y)(i,j) = \hat{y}[i]\hat{y}[j]\hat{y}[N-i-j]$$

确定 y，但仅精确到循环移位。

5.2. **幅值数据恢复**。

引理 5.2。对于一般的 $x \in \mathbb{C}^N$，$y = (|x_0|^2, \ldots, |x_{N-1}|^2)$ 和 $z = (|\hat{}x[0]|^2, \ldots, |\hat{}x[N-1]|^2)$的所有傅里叶系数均非零。

请注意，在本文中，“一般的”是指位于 $\mathbb{C}^N$ 的某个固定真子实代数子集之外。

证明。条件 $\hat{}y[k] = 0$ 在信号空间中定义了一个实代数超曲面。$\hat{}z[k] = 0$同样如此。□

定理 5.3（在移位意义下的分离）。对于一般的 $x \in \mathbb{C}^N$，海森堡双谱$B^H(x)$确定以下内容：

（1）幅值向量 $y_j = |x_j|$，在循环移位意义下；以及（2）傅里叶幅值向量 $z_k = |\hat{}x[k]|$，在循环移位意义下。

证明。根据引理 5.2，一般的信号对 y 和 z 都具有不为零的傅里叶系数。根据定理 5.1，双谱 B^M 和 B^{FM} 随后分别确定 y 和 z——即模的平方——且各自在循环移位意义下确定。由此可直接确定模，$|x[j]|$，$|\hat{}x[k]|$在循环移位意义下确定。□

5.3. **化归为经典相位恢复**。以下经典结果将幅值测量与信号恢复联系起来。

定理 5.4 (一维相位恢复 [2])。设 $x \in \mathbb{C}^N$ 是一般向量。若另一个向量 x' 满足

$$|x_j| = |x'_j| \quad and \quad |\hat{x}[k]| = |\hat{x}'[k]| \quad for\ all\ j,k,$$

则 $x' = \lambda x$，其中某个 $\lambda \in S^1$。

精确的一般性条件见 [2]。

推论 5.5（在全局相位意义下的分离）。对于一般的 $x \in \mathbb{C}^N$，

$$B^H(x) = B^H(x') \implies x' = \lambda \cdot (k_0, n_0, 0) \cdot x \quad for\ some\ \lambda \in S^1,\ k_0, n_0 \in \mathbb{Z}_N.$$

也就是说，海森堡双谱在相差一个全局相位的意义下确定 H_N-轨道。

证明。根据定理 5.3，双谱可确定 ($|x_j|$) 和 ($|\hat{}x[k]|$)，但只能确定到循环移位。也就是说，存在 k_0, $n_0 \in \mathbb{Z}_N$ 使得

$$|x'_j| = |x_{j+k_0}|, \qquad |\hat{x}'[k]| = |\hat{x}[k+n_0]|$$

对于所有 j,k。令 $x'' = (k_0, n_0, 0) \cdot x$。于是，对于所有 j,k，有 $|x''_j| = |x'_j|$ 和 $|\hat{}x''[k]| = |\hat{}x'[k]|$。根据定理 5.4，$x' = \lambda x''$，其中某个 $\lambda \in S^1$。□

阶数 t　要完整恢复轨道，我们必须强制 $\lambda \in S^1$ 成为一个 N 次单位根　　.

5.4. 消除全局相位。幅值数据在乘以全局相位 $e^{i\theta}$ 后保持不变，因此双谱型不变量无法区分 x 和 $e^{i\theta}x$。现在我们证明，一个单独的 N 次多项式不变量即可消除此歧义。

定义 5.6. 定义次数为-N 的多项式不变量

$$I_N(x) = x_0^N + x_1^N + \cdots + x_{N-1}^N.$$

引理 5.7. I_N 在 H_N 下保持不变。

证明。对于时间平移：通过重新编排索引，$I_N(T_k x) = \sum_j x_{j+k}^N = \sum_j x_j^N = I_N(x)$。

对于频率调制：$I_N(M_n x) = \sum_j (\zeta^{nj} x_j)^N = \sum_j \zeta^{Nnj} x_j^N = \sum_j x_j^N = I_N(x)$，因为 $\zeta^N = 1$。

对于全局相位：$I_N(Z_m x) = \sum_j (\zeta^m x_j)^N = \zeta^{Nm} \sum_j x_j^N = I_N(x)$，因为 $\zeta^{Nm} = 1$。 □

T定理 5.8（完全轨道分离）。设 $x \in \mathbb{C}^N$ 是一般的。若 x' 满足

$$B^H(x) = B^H(x') \quad and \quad I_N(x) = I_N(x'),$$

则 x' 与 x 位于同一个 H_N-轨道中。

证明。根据推论 5.5，$x' = \lambda \cdot g \cdot x$ 对某些 $\lambda \in S^1$ 和 $g \in H_N$ 成立。由于 I_N 是 H_N-不变的，我们有

$$I_N(x') = I_N(\lambda \cdot g \cdot x) = \lambda^N I_N(g \cdot x) = \lambda^N I_N(x).$$

条件 $I_N(x') = I_N(x)$ 因而要求 $\lambda^N = 1$，所以对于某个 $m \in \mathbb{Z}_N$ 有 $\lambda = \zeta^m$。但此时 $x' = \zeta^m \cdot g \cdot x = Z_m \cdot g \cdot x$，它位于 x 的 H_N-轨道中。□

5.5. 带有 $N = 3$ 的小例子。令 $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$，并令 $\hat{y}[k] = |x_0|^2 + \zeta_3^k |x_1|^2 + \zeta_3^{2k} |x_2|^2$，其中 $k = 0, 1, 2$。我们得到以下形式的模数酉不变量

$$\begin{aligned} x_0\overline{x_0} + x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} &= \hat{y}[0], \\ (x_0\overline{x_0} + \zeta_3 x_1\overline{x_1} + \zeta_3^2 x_2\overline{x_2}) * (x_0\overline{x_0} + \zeta_3^2 x_1\overline{x_1} + \zeta_3 x_2\overline{x_2}) &= \hat{y}[1]\hat{y}[2] \\ B^M(x)(1,1) = (x_0\overline{x_0} + \zeta_3 x_1\overline{x_1} + \zeta_3^2 x_2\overline{x_2})^3 &= \hat{y}[1]^3 \end{aligned}$$

这些不变量可以确定 $(|x_0|, |x_1|, |x_2|) \in \mathbb{R}^3$，精确到循环移位。

类似地，我们令 $\hat{z}[k] = |\hat{x}[0]|^2 + \zeta_3^k |\hat{x}[1]|^2 + \zeta_3^{2k} |\hat{x}[2]|^2$，得到傅里叶模数不变量

$$\begin{aligned} \hat{x}[0]\overline{\hat{x}[0]} + \hat{x}[1]\overline{\hat{x}[1]} + \hat{x}[2]\overline{\hat{x}[2]} &= \hat{z}[0], \\ (\hat{x}[0]\overline{\hat{x}[0]} + \zeta_3 \hat{x}[1]\overline{\hat{x}[1]} + \zeta_3^2 \hat{x}[2]\overline{\hat{x}[2]}) * (\hat{x}[0]\overline{\hat{x}[0]} + \zeta_3^2 \hat{x}[1]\overline{\hat{x}[1]} + \zeta_3 \hat{x}[2]\overline{\hat{x}[2]}) &= \hat{z}[1]\hat{z}[2] \\ B^{FM}(x)(1,1) = (\hat{x}[0]\overline{\hat{x}[0]} + \zeta_3 \hat{x}[1]\overline{\hat{x}[1]} + \zeta_3^2 \hat{x}[2]\overline{\hat{x}[2]})^3 &= \hat{z}[1]^3 \end{aligned}$$

将这些与多项式不变量结合

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$$

补全了一般分离集。

6. Summary and Discussion

T定理 6.1（主要结果）。 对于带有 $N > 3$ 的 $\mathbb{C}^N$ 上的海森堡作用：

(1) </style}不存在次数为 的非恒定多项式不变量。**(2)** *6* 次酉不变量（海森堡双谱）可在全局相位意义下分离一般的轨道。(3) 再加入唯一一个次数为 N 的不变量 I_N，即可实现完全分离。因此 $\gamma^U(\mathbb{C}^N, H_N) \leq N$，而 $\gamma(\mathbb{C}^N, H_N) \geq N$。

备注 6.2. </style}尚不清楚 (, H_N**)** $= N$，不过应当牢记，多项式不变量的限制要大得多，因此不太可能得到类似酉情形的构造性结果。

海森堡双谱展现了一种新现象：即使不变量环不存在低次数多项式不变量，低次数的分离不变量仍可能存在。这一构造从根本上依赖于相位恢复的相关结果；相位恢复研究的是何时能够根据幅值测量恢复信号 [2]。经典结果表明，幅值和傅里叶幅值一般能够唯一确定一个信号（相差一个全局相位），这构成了我们的双谱不变量与轨道恢复之间的桥梁。

6.1. **开放问题**。

(1) 我们证明了 $\gamma^U(\mathbb{C}^N,\ H_N) \leq N$，但我们能否进一步降低这个次数界？大部分工作是由 6 次不变量完成的。**(2)** 研究酉不变量的方法能否为其他群的轨道恢复提供更优的次数界？

References

[1] Afonso S. Bandeira、Ben Blum-Smith、Joe Kileel、Jonathan Niles-Weed、Amelia Perry 和 Alexander S. Wein。《群作用下的估计：从不变量恢复轨道》。《应用与计算调和分析》，66：236–319，2023年。[2] Robert Beinert 和 Gerlind Plonka。《利用时域中的额外信号信息确保一维相位恢复的唯一性》。《应用与计算调和分析》，45(3)：505–525，2018年。[3] Tamir Bendory、Nicolas Boumal、Chao Ma、Zhizhen Zhao 和 Amit Singer。《双谱反演及其在多参考对齐中的应用》。《*IEEE*信号处理汇刊》，66(4)：1037–1050，2017年。[4] Maxime Bergeron。《复约化代数群》。讲义，2014年。[5] Ben Blum-Smith、Thays Garcia、Rawin Hidalgo 和 Consuelo Rodriguez。《 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$及其他有限群的有理不变量域的次数界》。《纯粹与应用代数杂志》，228(10)：第107693号论文，45页，2024年。[6] Hua Chen、Mona Zehni 和 Zhizhen Zhao。《一种稳定双谱反演的谱方法及其在多参考对齐中的应用》。《*IEEE*信号处理快报》，25(7)：911–915，2018年。[7] Harm Derksen 和 Gregor Kemper。《计算不变量理论》，数学科学百科全书第130卷。Springer，海德堡，增订版，2015年。附有 Vladimir L. Popov 撰写的两篇附录，以及 Norbert A'Campo 和 Popov 撰写的补遗，《不变量理论与代数变换群》，第八卷。[8] Matyas Domokos。《阿贝尔群分离不变量的次数界》。《美国数学会会刊》，145：3695–3708，2017年。[9] Dan Edidin 和 Josh Katz。《有限群表示中低次数不变量的轨道恢复》。载于*2025*年国际采样理论与应用会议（*SampTA*），第1–5页，2025年。

[10] Dan Edidin 和 Josh Katz。《反射不变双谱：二面体模型中的信号恢复》。《傅里叶分析与应用杂志》，32(1)：1，2026年。[11] Dan Edidin 和 Matthew Satriano。《带限函数的轨道恢复》。《*SIAM*应用代数与几何杂志》，8(3)：733–755，2024年。[12] S. D. Howard、A. R. Calderbank 和 W. Moran。《有限海森堡–外尔群与戈莱互补序列》。第1–8页，2006年。[13] S. D. Howard、A. R. Calderbank 和 W. Moran。《雷达与通信中的有限海森堡–外尔群》。《*EURASIP*信号处理进展杂志》，2006(1)：85685，2006年。[14]Martin Kohls 和 Hanspeter Kraft。《分离不变量的次数界》。《数学研究快报》，17(6)：1171–1182，2010年。[15] Brian M. Sadler 和 Georgios B. Giannakis。《利用双谱进行平移和旋转不变的物体重建》。《美国光学学会杂志*A*辑》，9(1)：57–69，1992年。[16] Fethi Smach、Cedric Lemaˆ ıtre、Jean-Paul Gauthier、Johel Miteran 和 Mohamed Atri。《广义傅里叶描述子及其在支持向量机背景下的物体识别应用》。《数学成像与视觉》，30(1)：43–71，2008年。[17] John Tukey。《平稳时间序列高阶矩的谱表示与变换性质》。载于《*John Tukey*文集，第一卷》，第165–184页。1953年。

The MITRE Corporation电子邮件地址：joshua.katz@mitre.org