复幂零流形的 Dolbeault 形式性

Tommaso Sferruzza[1], Misha Verbitsky,[2]

摘要。 微分分次代数（微分分次代数）之间的拟同构是一个乘法映射，它在上同调上诱导出同构。若一个微分分次代数可通过一串拟同构与其上同调代数相连，则称其为形式的。我们证明，复幂零流形的 Dolbeault 微分分次代数具有形式性当且仅当它是环面；而 (0,p)-形式的多尔博代数具有形式性当且仅当复结构是阿贝尔的。

arXiv:2602.13426v1 [math.DG] 13 Feb 2026

目录

1 引言 **2**

2 微分分次代数的形式性 **4**

2.1 微分分次代数的拟同构 .4 2.2 The dd^c-引理 .5 2.3 K¨ahler 流形的形式性 .5 2.4 K¨ahler 流形的 Dolbeault 形式性 .6

3 幂零流形 **6**

3.1 作为齐性空间的幂零流形 .6 3.2 幂零流形上的不变复结构 .7 3.3 可平行化复结构 .7 3.4 Kodaira 曲面 .8

4 Chevalley-Eilenberg 复形及其上同调 **9**

4.1 李代数的上同调 .9 4.2 代数的 Dolbeault 上同调 .9 4.3 Console-Fino 定理 .10

5 DG-代数的支配与 Dolbeault 微分分次代数的形式性 **11**

5.1 DG-代数的支配 .11 5.2 幂零流形的 Dolbeault 微分分次代数支配 .11 5.3 $\Lambda^{*,0}(M)$ 的 Dolbeault 形式性 .12

[1]作者获得了 INdAM 奖学金，并得到 GNSAGA 项目“2025 年研究项目 - CUP E53C24001950001”的部分资助。[2]部分得到 FAPERJ SEI-260003/000410/2023 和 CNPq - 项目编号 310952/2 021-2 的资助。**2020 年数学主题分类：** 53C26, 53C28, 53C40, 53C55

1 引言

Neisendorfer 和 Taylor [NT] 将复流形 M 定义为**Dolbeault 形式**，如果双分次形式的微分双分次代数（简称 DBA）$(\Lambda^*, {}^*M, \partial)$ 作为 DBA 等价于一个 (0,1)-微分平凡的 DBA。

DBA 等价性被理解为一系列保持双分次结构的拟同构（即在上同调上诱导同构的同态）。

自近五十年前给出这一定义以来，非 K¨ahler 情形下 Dolbeault 形式流形的研究几乎仍是一片空白，仅有少数零星的例子。

本文分析赋有不变复结构的幂零流形这一类中 Dolbeault 形式流形的存在性。

根据 Malcev 的著名结果 [Ma], ，一个 **幂零流形** 可刻画为连通幂零李群关于离散格的紧商，其中该李群的李代数是有理李代数。

自 Thurston 的工作以来，这类紧致流形一直被用作检验微分几何与复几何中的猜想和反例的试验场 [Thu]。

20 世纪 80 年代末，Benson 和 Gordon [BeGo] 以及独立地，Hasegawa[Ha2], 证明，若幂零流形具有 K¨ahler 结构，则它必与环面微分同胚。

后者通过证明与任意幂零流形相关联的李代数的极小模型不是形式的（除非该李代数是阿贝尔的，因此该幂零流形是环面），得出了这一结论。事实上，野水定理 [No]指出，任意有理李代数的上同调都与相应幂零流形的德拉姆上同调同构。另一方面，紧致 K¨ahler 流形，以及更一般地，满足 dd^c-引理的流形，按照 Sullivan 的意义都是形式的 [DGMS]。

形式流形在有理同伦理论中发挥着基础性作用 [Sul，FHT]。事实上，对于单连通流形（或基本群为幂零群且基本群在同伦群上的作用为幺幂作用的流形），流形的有理同伦类型由其上同调环形式地决定。

形式性的强化是**几何形式度量**[Kot], 这一概念，即一种黎曼度量，使调和形式的乘积仍为调和形式。另一方面，非零 Massey 积和高阶运算的存在会阻碍有理形式性。

然而，Massey 积的消失并不意味着形式性（[HS]）。这促使人们发展 A_∞-结构理论，旨在取代 Massey 积，用于研究有理同伦（[St]）。后来，Babenko 和 Taimanov 提出了 Massey 积的非交换推广 [BT]，它包含了有理同伦的全部信息，并且当且仅当微分分次代数是形式的时才消失。Dolbeault 微分分次代数的 Massey 积由 [CT], 计算，并给出了存在非零 Massey 积的充分条件。

VERSION 1.0, FEB. 13, 2026

人们已经引入了若干同伦理论，以及几何形式性和 Massey 积的概念 [NT，MS，AT，TT，ST3]。

1978年，Neisendorfer 和 Taylor [NT] 引入了 Dolbeault 同伦理论，即研究赋有 Hodge 双分次的微分分次代数的同伦理论。与有理同伦理论一样，Dolbeault 形式性会阻碍 dd^c-引理，尤其会阻碍紧致复流形上 K¨ahler 结构的存在。

关于赋有不变复结构的幂零流形（或者说，正如我们通常所称的，**复幂零流形**）的 Dolbeault 形式性，目前仅取得了一些部分成果。

据 [CFGU2，定理 5] 所述，赋有幂零复结构的幂零流形绝非 Dolbeault 形式的；该文援引了未发表的预印本 [CFGU]。在 [CFGU3], 中，同一组作者给出了四个非 Dolbeault 形式的复幂零流形实例。

最近，第一作者与 Tomassini [ST3] 证明了一个较弱的结果：复可平行化幂零流形除非是复环面，否则绝不是 Dolbeault 形式的。

与幂零流形的德拉姆上同调相比，这里存在一个显著差异，因为并不存在 Nomizu 定理的对应版本。事实上，除了一些不变复结构类 [CF、CFGU3、R1、R2], 之外，尚不清楚李代数 Dolbeault 上同调到该幂零流形的 Dolbeault 上同调的嵌入是否为同构。

在本文中，我们的主定理终于为任意赋有任意不变复结构的幂零流形给出了证明。

更确切地说，设 $M = G/\Gamma$ 是一个复幂零流形，且 $(\Lambda^{*,*}M, \partial)$ 是与之关联的微分双分次代数。那么，代数 (Λ^*M, ∂)：$=(\mathrm{Tot}^*(\Lambda^{*,*}M)\,\partial)$ 和 $(\Lambda^{0,*}M, \partial)$ 分别称为 **Dolbeault 微分分次代数**和 **Dolbeault $(0,*)$-微分分次代数**： M。据此，我们证明以下结果（推论 5.7）。

定理 1.1： 复幂零流形 M 的 Dolbeault 微分分次代数绝不具有形式性，除非 M 是环面。

证明依赖于幂零流形的 de Rham 微分分次代数与其李代数的 Chevalley-Eilenberg 微分分次代数之间的拟同构，这一结果归功于野水， [No]。Hasegawa（[Ha1，定理 1]）证明，Chevalley-Eilenberg 微分分次代数绝不具有形式性。借助 [MSZ],提出的支配论证，我们得以利用 Chevalley-Eilenberg 微分分次代数不具有形式性这一事实，证明幂零流形的 Dolbeault 微分分次代数不具有形式性。

现在，设 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^{0,1}$ 是有理李代数 $\mathfrak{g}$ 所关联的复幂零流形上的一个复结构 $M = G/\Gamma$。根据 Serre 对偶、典范丛的平凡性以及 [MSZ],的支配定理，我们得到如下结论。

定理 1.2： 复幂零流形的 Dolbeault $(0,*)$-微分分次代数是形式的，当且仅当 $\mathfrak{g}^{0,\,1}$ 是阿贝尔的。

version 1.0, Feb. 13, 2026

证明： 定理 5.8。 ■

在多重势同理论的背景下研究复幂零流形的形式性将很有意思 [AT, Ste]。这里，若复流形M的双复形 $(\Lambda^{*,*}M, \partial, \bar{\partial})$ 通过一系列弱等价与一个双微分双分次代数 $(B, \partial_B, \bar{\partial}_B)$ 相连，且满足 $\partial_B\bar{\partial}_B \equiv 0$，则称其为**弱形式的** [MS]。

这里的情况与有理同伦理论和 Dolbeault 同伦理论截然不同。事实上，弱形式性并不妨碍 dd^c-引理，也不妨碍 Kähler 结构的存在 [ST2, PSZ]。

此外，一方面，第一作者与 Tomassini 证明了，复幂零流形是弱形式的，当且仅当它们具有强凯勒带扭结构 [ST]，在复维数 3 时。另一方面，复维数不超过 5 的复平行化可解流形都不是弱形式的，[ST3] 而更高维数下的情况仍不明朗。这引出了下面的问题。

问题 1.3： 哪些复幂零流形是弱形式的?

本文结构如下。第 2 节简要回顾微分分次代数的形式性、dd^c-引理，以及紧致 Kähler 流形形式性和 Dolbeault 形式性的经典证明。第 3 节回顾赋有复结构的幂零流形的定义，并介绍一些经典例子。第 4 节回顾 Chevalley-Eilenberg 上同调和李代数 Dolbeault 上同调的定义，并阐述它们与幂零流形的 de Rham 上同调和 Dolbeault 上同调之间的联系。

在第 5 节中，我们证明本文的主要结果。

2 微分分次代数的形式性

2.1 微分分次代数的拟同构

定义 2.1：分次交换代数，或**超交换代数**，是一个分次代数 $A^* = \bigoplus_{i\geqslant 0} A^i$，其乘法为 $A^i \cdot A^j \longrightarrow A^{i+j}$，并满足分次（超）交换关系 $x\cdot y = (-1)^{\widetilde{x}\widetilde{y}} y\cdot x$，其中 $x \in A^{\widetilde{x}}$，$y \in A^{\widetilde{y}}$。**微分分次代数**（**微分分次代数**；也缩写为 DGA）是配备微分 d：$A^i \longrightarrow A^{i+1\widetilde{}}$ 的分次交换代数，该微分满足 $d(x\cdot y) = dx\cdot y + (-1)^x x\cdot dy$。若微分分次代数同态在上同调上诱导出同构，则称其为**拟同构**。如果两个微分分次代数可以通过一串拟同构连接起来，则称它们**拟同构**。

定义 2.2： 如果一个微分分次代数与其上同调代数（微分为零）准同构，则称其为**形式的** 。如果一个流形的德拉姆代数是形式的，则称该流形为**形式的** 。

2.2 dd^c引理

定义 2.3： 设 M 是一个复流形，$I: TM \longrightarrow TM$ 是其复结构算子。M 的**扭曲微分** 定义为$d^c = IdI^{-1}: \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^{*+1}(M)$，其中 I在 1-形式上的作用是与 $I: TM \longrightarrow TM$对偶的算子，并在其余微分形式上按乘法方式作用。

下述定理称为“ dd^c-引理”，早已广为人知。它因论文 [DGMS], 而得名，并成为一项基础性结果；该论文首次确立了 K¨ahler 流形的形式性。

定理 2.4： 设 η 是紧致 K¨ahler 流形上的一个形式，满足以下条件之一。

1. η 是一个恰当的（p, q）形式。
2. η 是 d-恰当的，且 d^c-闭。
3. η 是 ∂- 恰当的，且 ∂- 闭。

那么 $\eta \in \operatorname{im} dd^c$。
证明： [DGMS]。 ■

以下推论见于 [DGMS], ，可立即由dd^c-引理得到。

推论 2.5： 设 $(\Lambda^*_{d^c}(M), d)$ 是紧 K¨ahler 流形 M 上 d^c-闭形式的代数，并将其视为一个 DG-代数。则自然嵌入$\Psi: (\Lambda^*_{d^c}(M), d) \longrightarrow (\Lambda^*(M), d)$ 是一个拟同构。

证明。步骤 1： 任意闭的 (p, q)-形式都是 d^c-闭的。由于任意上同调类都可以表示为闭的 (p, q)-形式之和，因此它可以由 d^c-闭形式表示。因此 Ψ 在上同调上是满射。

步骤 2： 假设 Ψ 将一个 d-闭形式 $\alpha \in \Lambda^*_{d^c}(M)$ 映射为恰当形式。由 dd^c-引理，$\alpha = dd^c\beta$，因此 $\alpha \in d(\Lambda^*_{d^c}(M))$。所以，$\Psi$ 在上同调上是单射。
■

同样的方法也可以证明以下结果。

推论 2.6： 设 $(\Lambda^*_{\partial}(M), \partial)$ 是紧致K¨ahler 流形 M 上 ∂-闭形式的代数，并将其视为一个 DG-代数。那么，自然嵌入$\Psi: (\Lambda^*_{\partial}(M), d) \longrightarrow (\Lambda^*(M), \partial)$ 是一个拟同构。
■

2.3 K¨ahler 流形的形式性

我们主要关注多尔博代数的形式性，但同样的论证也证明了所有 K¨ahler 流形的形式性（一个著名

最初由 [DGMS]提出的结果）。

定理 2.7： 紧致 K¨ahler 流形是形式的。

证明。步骤 1： 自然嵌入（$\Lambda^*_{d^c}(M)\ d$) $\longrightarrow$ ($\Lambda^*(M)\ d$) 是一个拟同构（推论 2.5）。

步骤 2： 令 Φ: ($\Lambda^*_{d^c}(M)\ d$) $\longrightarrow$ ($H^*_{d^c}(M)$, 0) 将一个 d^c-闭形式映射到其在核 d^c 像 d^c =中的上同调类：$H^*_{d^c}(M)$。用闭的 (p, q)-形式表示上同调类，我们得到 $d\Big|_{H^*_{d^c}(M)} = 0$。因此， Φ 是微分分次代数同态。

它在上同调上是满射，因为 $H^*_{d^c}(M)$ 中的每个类都可以由一个 d, d^c-闭形式表示；它也是单射，因为每个 d^c-闭、 d-恰当形式都是 dd^c-恰当的。 ■

2.4 紧致凯勒流形的 Dolbeault 形式性

定义 2.8： 设 (M, I) 是一个紧致复流形， $\partial = \frac{d-\sqrt{-1}\,d^c}{2}$ 且为德拉姆微分的(0,1) 部分。微分分次代数 ($\Lambda^*(M)\ \partial$) 称为**多尔博代数，**而 ∂ **为 Dolbeault 微分**。我们还考虑 $(0,*)$**-多尔博代数** ($\Lambda^{0,*}(M)\ \partial$) := $\left(\bigoplus_p \Lambda^{0,p}(M)\ \partial\right)$。

在 [NT], 中证明了以下定理。

定理 2.9： 当 (M, I) 紧致且为凯勒流形时，多尔博代数 ($\Lambda^*(M)\ \partial$) 是形式的。

证明。步骤 1： 设 ($\Lambda^*_{\partial}(M)\ \partial$) 为 ∂-闭形式构成的代数。根据 推论 2.6 ，自然嵌入 ($\Lambda^*_{\partial}(M)\ \partial$) $\to$ ($\Lambda^*(M)\ \partial$) 是一个拟同构。

步骤 2： 映射 ($\Lambda^*_{\partial}(M)\ \partial$) $\to$ ($H^*_{\partial}(M)$, 0) 也是一个拟同构，这同样由 dd^c-引理得出：任何 ∂-恰当且 ∂-闭的形式也是 $\partial\partial$-恰当的。 ■

3 幂零流形

本节为方便读者，将定义幂零流形，列举其一些基本性质，并给出若干示例。除（可能的）表述方式和示例的选择外，本节内容均非原创。

3.1 作为齐性空间的幂零流形

幂零流形是一个值得深入研究的丰富主题，而幂零流形上的复结构为复几何提供了大量例子和反例。本节将简要介绍幂零流形；更多详情及相关文献参见 [VGO、CG]。

定义 3.1： 设 M 是一个配备了幂零李群传递作用的紧致流形。那么 M 称为**幂零流形**。

注记 3.2： 正如 A. Maltsev（[Ma]）所示，所有幂零流形都可表示为商空间，$M = G/\Gamma$，其中 $\Gamma \subset G$ 是幂零李群中的余紧格。

定理 3.3： 设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbf{Q}$ 上的幂零李代数，G 是其李群。那么，G 包含一个离散子群 Γ，使得 G/Γ 是紧的，并且$\Gamma = e^{\Gamma_{\mathfrak{g}}}$，其中 $\Gamma_{\mathfrak{g}}$是 $\mathfrak{g}$中的整数子代数。此外，$\mathfrak{g} \cong \Gamma_{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R}$。最后，所有幂零流形都可由此方式得到。

证明： [Ma]。 ■

注记 3.4： 从拓扑角度看，所有单连通幂零李群都微分同胚于 $\mathbf{R}^n$，而所有幂零流形都是迭代圆纤维化。这一观察（Maltsev 早已提出）可以很容易地从他的定理中推导出来。

3.2 幂零流形上的不变复结构

定义 3.5：实李代数 $\mathfrak{g}$ 上的可积复结构 $\mathfrak{g}$是一个子代数 $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 满足 $\mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{1,0} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

注 3.6： 任何此类分解都定义了一个复结构 I，在 $\mathfrak{g}$ 上由以下方式给出：$I\big|_{\mathfrak{g}^{1,0}} = \sqrt{-1}$ 且 $I\big|_{\mathfrak{g}^{0,1}} = -\sqrt{-1}$。我们将此复结构扩展为其李群 G上的左不变几乎复结构。其可积性由 $[T^{1,0}G, T^{1,0}G] \subset T^{1,0}G$给出，这等价于 $[\mathfrak{g}^{1,0}, \mathfrak{g}^{1,0}] \subset \mathfrak{g}^{1,0}$。

注记 3.7： 换言之，连通实李群上的左不变复结构与其李代数上的可积复结构一一对应。

定义 3.8：复幂零流形是配备了复结构 I 的幂零流形 $M = G/\Gamma$，其中 G 具有右不变复结构，且投影 $G \longrightarrow M$ 是全纯的。在这种情况下，复结构 I 称为**不变的**。

注记 3.9： 请注意，并非幂零流形上的所有复结构都是不变的；事实上，紧致环面存在一种非 Kähler 复结构（[Bl，Som]），显然它不是不变的。

3.3 可平行化复结构

考虑一个复幂零流形 $M = G/\Gamma$。群 G 不必是复李群。当它是复李群，且 M 上的复结构

由这个复李群上的复结构诱导时，我们讨论一类特殊的复幂零流形，称为可平行化复幂零流形。

例 3.10：岩泽流形是 $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （上三角复矩阵的群U_3(C)）关于格 Γ的商。

作为Γ 的一个例子，我们可以取 U_3(Z[$\sqrt{-1}$])。

—

注 3.11： 设 I 是幂零李群 G上的一个双不变复结构。这样的复结构称为**可平行化**。对于这样的复结构，切丛由不变全纯向量场的一个标架平凡化。

注 3.12： $\mathfrak{g}$ 上的复结构是双不变的，当且仅当 $M := (G, I)/\Gamma$ 在 G的左作用下是齐性的。于是左不变向量场是全纯的，并且这蕴含着：只要 $X \in T^{1,0}M$且 $Y \in T^{0,1}M$，就有 $[X, Y] = 0$。

推论 3.13： 设 I 是李代数 $\mathfrak{g}$上的一个复结构。那么 I 双不变，当且仅当 $[\mathfrak{g}^{0,1}, \mathfrak{g}^{1,0}] = 0$。

证明： 若此 $[\mathfrak{g}^{0,1}, \mathfrak{g}^{1,0}] = 0$成立，则对于任意右不变向量场 X， Y，其中 Y为 (1,0) 型，$\mathrm{Lie}_X Y = 0$ 也为 (1,0) 型。于是对于任意$g \in G$，都有 $gYg^{-1} \in \mathfrak{g}^{1,0}$，因此 $T^{1,0}G$ 是双不变的。 ■

3.4 Kodaira 曲面

定义 3.14： 设 T、 T'是椭圆曲线。**Kodaira 曲面** π： $M \longrightarrow T$是以 T 为底、以 T' 为纤维的局部平凡全纯纤维化，且具有非平凡的陈类。

术语说明： 这些是**“初级”**Kodaira 曲面。**“次级”**Kodaira 曲面则由取有限无分歧商得到。

注记 3.15： Kodaira 曲面微分同胚于商空间 $S^1 \times (G/G_{\mathbb{Z}})$，其中 G 是一个 3 维海森堡群，而 $G_{\mathbb{Z}}$ 是 G中的一个格。因此，Kodaira 曲面是一个幂零流形。文献 [Ha2]对此作了解释。

注记 3.16： Kodaira流形 M 是一个复幂零流形，但并非齐性流形；这一点可由文献 [OV]中对其自同构群的明确描述推出。

注 3.17： Kodaira 曲面不是 K¨ahler 的。事实上，$\pi^*(\omega_T)$ 的上同调类为零，其中 ω_T是 T上的 K¨ahler 形式。 ω_T与

M 上的 Kähler 形式（如果存在）是一个正体积形式，因此不可能是恰当形式。

4 切瓦利–埃伦伯格复形及其上同调

本节定义李代数的上同调（称为切瓦利–埃伦伯格上同调），并将这一上同调代数与幂零流形的德拉姆上同调和多尔博上同调联系起来。

4.1 李代数的上同调

命题 4.1： 令 $w \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$。考虑与 w, $d_w : V^* \longrightarrow \Lambda^2 V^*$ 对偶的映射。利用莱布尼茨法则 $d_w(x \wedge y) = d_w(x) \wedge y + (-1)^{\widetilde{x}} x \wedge d_w y$，将此映射延拓为 $d_w : \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{k+1} V^*$。则 $d_w^2 = 0$ 当且仅当 w 在 V 上定义李代数结构。

证明： [CE]。■

定义 4.2： 复形 $V^* \xrightarrow{d_w} \Lambda^2 V^* \xrightarrow{d_w} \Lambda^3 V^* \xrightarrow{d_w} \ldots$ 称为**李代数**（V, $[\cdot,\cdot]_w$）**的 Chevalley-Eilenberg 复形**。

注 4.3： 我们将李代数$\mathfrak{g}$ 的 Chevalley-Eilenberg 复形等同于其李群 G上的左不变微分形式复形。这对任意离散子群 $\Gamma \subset G$定义了微分分次代数的自然同态（$\Lambda^* \mathfrak{g}^*$, d_w） $\to$ （Λ^*（G/Γ） d）。

定理 4.4：（野水）
设 $M = G/\Gamma$ 为幂零流形。则从其切瓦莱-埃伦伯格微分分次代数到其德拉姆代数的自然映射（$\Lambda^* \mathfrak{g}^*$, d_w） $\to$ （Λ^*（G/Γ） d）是一个拟同构。

证明： [否]。■

推论 4.5： 除环面外，幂零流形都不是形式的。

证明： 有限维幂零李代数的切瓦莱-埃伦伯格微分分次代数都不是形式的，[Ha1，定理 1]。■

4.2 代数的 Dolbeault 上同调

定义 4.6： 设 $(\mathfrak{g}, I)$ 是幂零李代数上的一个复结构，d_w： $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda^{*+1}(\mathfrak{g}^*)$ 是其 Chevalley-Eilenberg 微分， $d_w = \partial_w + \bar{\partial}_w$ 是其 Hodge分解。复形 $(\Lambda^*_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^*)$ $\partial_w)$ 的上同调称为**李代数的 Dolbeault 上同调**。

注 4.7： 在 命题 4.1 中，我们已经建立了微分算子 $d_w : \Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda^{*+1}(\mathfrak{g}^*)$ 与 $\mathfrak{g}$ 上的李代数结构之间的对应关系。自然会想到，哪个括号对应于 ∂_w 和 $\partial_{\overline{w}}$。

命题 4.8： 设 $(\mathfrak{g}, I)$ 是幂零李代数上的一个复结构，且 $\partial_w : \Lambda^{*,*}(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda^{*,*+1}(\mathfrak{g}^*)$ 是其 Dolbeault 微分。那么 ∂_w 对应于 $\mathfrak{g}$ 上如下的括号 $[\cdot,\cdot]_{\partial_w}$：给定两个向量 $x, y \in \mathfrak{g}^{1,0}$ 和两个向量 $x', y' \in \mathfrak{g}^{0,1}$，有 $[x, y]_{\partial_w} = 0$, $[x, x']_{\partial_w} = [x, x']^{1,0}$，以及 $[x', y']_{\partial_w} = [x', y']$。

证明： 算子 ∂_w 是 d_w 的 (0,1) 部分，而 $[\cdot,\cdot]_{\partial_w}$ 是对偶映射。换言之，$[\cdot,\cdot]_{\partial_w}$ 是张量 $[\cdot,\cdot] \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ 的 Hodge 部分，它将 Hodge 型为 $(1,1)$ 的双向量映射到 $(1,0)$，并将 Hodge 型为 $(0,2)$ 的双向量映射到 (0,1)。 ■

命题 4.9： 设 $(\mathfrak{g}, I)$ 是幂零李代数上的一个复结构，$d_w = \partial_w + \partial_{\overline{w}}$ 为其 Chevalley-Eilenberg 微分。则 $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\ [\cdot,\cdot]_{\partial_w})$ 是一个复幂零李代数。

证明： 由于 $d_w^2 \equiv 0$，因此也有 $\partial_w^2 \equiv 0$，这等价于 $[\cdot,\cdot]_{\partial_w}$ 的 Jacobi 恒等式。对于每个 $x \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，$\mathrm{ad}(x)$ 都是幂零的，因此每个 $\mathrm{ad}_{\partial_w}(x)$ 也都是幂零的。 ■

推论 4.10： 微分分次代数 $(\Lambda^{*,*}(\mathfrak{g}^*), \partial_w)$ 是形式的，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。微分分次代数 $(\Lambda^{0,*}(\mathfrak{g}^*), \partial_w)$ 是形式的，当且仅当 $\mathfrak{g}^{0,1}$ 是阿贝尔的。
证明： 由前面的命题和 [Ha1]，定理1]。 ■

4.3 Console-Fino 定理

我们首先重述 定理3.3，以强调幂零流形的李代数上的有理结构。

定理 4.11： 设 $\mathfrak{g}$ 是一个实幂零李代数，$\Gamma \subset G$ 是其李群中的一个格。那么 $\mathfrak{g}$ 含有一个整数格 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，它在交换子运算下封闭，且 Γ 与 $e^{\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}}$ 可公度。反之，对于任意满足 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 的此类整数子代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{g}$，子群 $e^{\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}}$ 是 G 中的一个格。最后，有理格 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} := \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 由格 $\Gamma \subset G$ 唯一确定。

证明： [Ma]。 ■

定义 4.12： 设 I 是幂零流形 G/Γ 上的不变复结构。若 I 保持如上所述由 Γ 定义的有理格 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{g}$，则称其为**有理的**。

定理 4.13：(Console-Fino)
设 I 是李代数上的有理复结构，且 (M, I) 是相应的复幂零流形。则自然的微分分次代数同态 $(\Lambda^*(\mathfrak{g}), \partial_w) \to (\Lambda^*(M), \partial)$ 是一个拟同构。

证明： [CF]。 ■

注 4.14：在这种情况下，多尔博代数 $(\Lambda^*(M), \partial)$ 是形式的，当且仅当 $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), \partial_w)$ 是形式的。在下一节中，我们将证明，即使无法应用 Console-Fino 定理，多尔博代数 $(\Lambda^*(M), \partial)$ 也不是形式的。

5 微分分次代数的支配与 Dolbeault 微分分次代数的形式性

5.1 微分分次代数的支配

定义 5.1： 我们称微分分次代数 (A^*, d) **具有庞加莱 $^{'}$对偶性**，如果 $A^i = 0$ 对于 $i < 0$ 和 $i > n$, $H^n(A^*) = \mathbb{C}$，并且乘积映射 $H^i(A^*) \times H^{n-i}(A^*) \to H^n(A^*) = \mathbb{C}$ 在上同调中定义了一个非退化配对。

定义 5.2： 设 $\Psi : (B^*, d) \to (A^*, d)$ 是微分分次代数的一个态射，且 (B^*, d) 具有庞加莱对偶性，并且映射 $H^n(B^*) \to H^n(A^*)$ 是单射。那么我们称 A^* **支配** B^*，并称 Ψ 为**一种支配**。

例 5.3： 一个真纤维化 $f: X \to Y$ 到一个 n-流形 Y，若其具有截面，则定义了一个满射 $H_n(X) \to H_n(Y)$，因此它在上同调上是单射；在这种情况下，$(\Lambda^*(X), d)$ 支配 $(\Lambda^*(Y), d)$。

定理 5.4：（Milivojevic、Stelzig、Zoller）
设 $\Psi : (B^*, d) \to (A^*, d)$ 是微分分次代数的支配。假设 (B^*, d) 不是形式的。那么 (A^*, d) 不是形式的。**证明：** [MSZ，定理 A]。 ■

5.2 幂零流形的 Dolbeault 微分分次代数支配

Serre 对偶立即推出，多尔博代数 $(\Lambda^* M, \partial)$ 存在一个取值于 $H^{n,n}_{\partial}(\overline{M}) = \mathbb{C}$ 的非退化配对。对于李代数的 Dolbeault 上同调，同样的结论也很容易得到。

命题 5.5： 设 $\mathfrak{g}$ 是一个配备了复结构的幂零李代数。那么 $H^{n,n}_{\partial}(\Lambda^{*,*}\mathfrak{g}^*) = \mathbb{C}$。此外，乘法 $-$

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\Lambda^{*,*}\mathfrak{g}^*) \times H^{n-p,n-q}_{\overline{\partial}}(\Lambda^{*,*}\mathfrak{g}^*) \to H^{n,n}_{\overline{\partial}}(\Lambda^{*,*}\mathfrak{g}^*) = \mathbb{C}$$

定义了一个非退化配对。

证明： [Kos]。 ■

使用第5.1小节引入的术语，我们称这些微分分次代数满足庞加 ´莱对偶。

推论 5.6： 设 $(M = G/\Gamma)$ 是一个复幂零流形，且 $\mathfrak{g}$ 是其李代数。那么自然的微分分次代数态射 $(\Lambda^*\mathfrak{g}^*,\ \partial_w) \to (\Lambda^* M,\ \partial)$ 是一种支配。**证明：** 由 命题 5.5 立即得到。 ■

推论 5.7： 复幂零流形的 Dolbeault 微分分次代数 M 永远不是形式的，除非 M 是一个环面。
证明： 由于 $(\Lambda^*\mathfrak{g}^*,\ \bar\partial) \to (\Lambda^* M,\ \bar\partial)$ 是一种支配，且 $(\Lambda^*\mathfrak{g}^*,\ \partial)$ 不是形式的，[MSZ] 表明 $(\Lambda^* M,\ \partial)$ 也不是形式的。 ■

5.3 $\Lambda^{*,0}(M)$ 的 Dolbeault 形式性

接下来要证明定理 1.2。李代数上的复结构 $\mathfrak{g}$称为**阿贝尔的**，如果李代数 $\mathfrak{g}^{1,0}$ 是阿贝尔的。关于阿贝尔复结构的研究成果颇丰（[BD,ABD, CFU]），对它们的理解比对一般复结构更深入（例如，对于阿贝尔复结构，无需额外假设，Console-Fino 同构便成立，[CF，备注 4],另见 [CFGU3]）

定理 5.8： 设 (M, I) 是一个幂零流形，其微分分次代数 $(\Lambda^{0,*}(M)\ \partial)$ 是形式的。那么，相应的李代数上的复结构是阿贝尔的。

证明：如 [BDV]，所示，幂零流形的典范丛是平凡的。因此，Serre 对偶意味着微分分次代数 $(\Lambda^{0,*}(M)\ \partial)$ 满足 Poincar ´e 对偶。这尤其意味着，自然映射 $(\Lambda^{0,*}(\mathfrak{g})\ \partial) \to (\Lambda^{0,*}(M)\ \partial)$ 是一种支配。因此，$(\Lambda^{0,*}(M)\ \partial)$ 的形式性意味着 $(\Lambda^{0,*}(\mathfrak{g})\ \partial)$ 的形式性。然而，$(\Lambda^{0,*}(\mathfrak{g})\ \partial)$ 是李代数 $\mathfrak{g}^{0,1}$ 的 Chevalley-Eilenberg 复形。根据 [Ha1，定理 1]，，它是形式的当且仅当它是阿贝尔的。 ■

致谢： 我们感谢 Grigory Papayanov 所提供的宝贵帮助与咨询。

参考文献

[ABD] A. Andrada、M. L. Barberis、I. Dotti, *Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras* 83 1 232 255 ，《伦敦数学会杂志》（），-。（引用于第12页。）[AT] D. Angella、A. Tomassini, *On Bott-Chern cohomology and formality*, 《几何与物理杂志》93（2015年），第52-61页。（引用于第3 和 4页。）[BT] Babenko I. K.、Taimanov I. A., *Massey products in symplectic manifolds*, 《数学文集》**191** （2000年），1107-1146）。（引用于第2页。）

[BD] M. L. Barberis 和 I. Dotti, *Abelian Complex Structures on Solvable Lie Algebras*, 《李理论杂志》, 14, 第25-34页, (2004年)。(引用于第12页。) [BDV] M. L. Barberis、I. Dotti、M. Verbitsky, *Canonical bundles of complex nilmanifolds with* , , 《数 *applications to hypercomplex geometry* 16 2009 2, 331 347 学研究快报》( ), 第 - 。(引用于第12页。) [BeGo] C. Benson、C.S. Gordon, *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, 《拓扑学》27 (4) (1988年) 513-518。(引用于第2页。) [Bl] A. Blanchard, *Recherche de structures analytiques complexes sur certaines variétés*, 《巴黎科学院院刊》238 (1953年), 657-659。(引用于第7页。) [CT] Andrea Cattaneo、Adriano Tomassini, *Dolbeault-Massey triple products of low degree*, 《几何与物理杂志》, 第98卷 (2015年) 第300-311页。(引用于第2页。) [CE] C. Chevalley、S. Eilenberg, *Cohomology Theory of Lie groups and Lie algebras*, 《美国数学会汇刊》, 63 (1948年), 第 85-124页。(引用于第9页。) [CF] S. Console、A. Fino, *Dolbeault cohomology of compact nilmanifolds*, 《变换群》6 (2) (2001年), 111–124。(引用于第3、11和12页。) [CFGU] L. A. Cordero、M. Fern ´andez、A. Gray 和 L. Ugarte, *Dolbeault minimal models of compact nilmanifolds with nilpotent complex structure* 1997 3 , 预印本( )。(引用于第页。) [CFGU2] L. A. Cordero、M. Fern ´andez、A. Gray 和 L. Ugarte, *Nilpotent complex structures*, 《皇家科学院 A 辑数学评论》 95 (1), 2001 年, 第 45-55 页。(引用于第3页。) [CFGU3] L. A. Cordero、M. Fern ´andez、A. Gray 和 L. Ugarte, *Compact nilmanifolds with nilpotent complex structures: Dolbeault cohomology* 352 12 5405 。《美国数学会汇刊》, ( ): - 5433, 2000年。(引用于第3和12页。) [CFU] Cordero, L.、Fern ´andez、M.、Ugarte, L., *Abelian complex structures on 6-dimensional compact nilmanifolds* 43 2002 2, 215 229 《查理大学数学评论》( ), 第 - 。(引用于第12页。) [CG] L. Corwin、F. P. Greenleaf, *Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications. Part I* 1990 *Basic Theory and Examples*, 剑桥大学出版社, 英国剑桥, (引用于第6页。) [DGMS] P. Deligne、P. Griffiths、J. Morgan、D. Sullivan, *Real homotopy theory of Kähler manifolds* 29 1975 3, 245 274 , 《数学 发明》( ), 第 – 。(引用于第和页。) [HS] S. Halperin、J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, 《数学进展》32 (1979年), 第3期, 233-279 (引用于第2页。) [Ha1] K. Hasegawa, *Minimal Models of Nilmanifolds*, 《美国数学会会刊》, 106, 第1期 (1989年), 第65-71页。(引用于第3、9、10和12页。) [FHT] Y. F ´elix、S. Halperin、J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, 数学研究生教材, 施普林格, 纽约州纽约, 2000年。(引用于第2页。) [Ha 2] K. Hasegawa, *Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds*, 《辛几何杂志》, 第3卷, 第4期, 2005年。(引用于第2和8页。) [Kos] J.-L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, 《法国数学会通报》, 第78卷 (1950年), 第65-127页。(引用于第12页。) [Kot] D. Kotschick, *On products of harmonic forms*, 《杜克数学杂志》107 (3) (2001年), 521-531。(引用于第2页。) [Ma] A. I. Mal'cev, *On a class of homogeneous spaces*, 美国数学会译丛第39号 (1951年)。(引用于第2、7和10页。) [MS] A. Milivjevic、J. Stelzig, *Bigraded notions of formality and Aeppli-Bott-Chern-Massey products* 32 2024 2901 2933 , 《复分 析与几何通讯》( ), 第 - 页。(引用于第和页。) [MSZ] A. Milivojevic、J. Stelzig、L. Zoller, *Formality is preserved under domination*, arXiv:2306.12364。(引用于第3、11和12页。)

[NT] J. Neisendorfer, L. Taylor, *Dolbeault Homotopy Theory*, 《美国数学会汇刊》245（1978年），第183–210页。（见第2、3和6页。）[No] 野水 K. Nomizu, *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, 《数学年刊》（第2辑），59：531–538，（1954年）。（见第2、3和9页。）[OV] L. Ornea，M. Verbitsky, *Principles of Locally Conformally Kähler Geometry*, Birkh¨auser 数学进展第354卷，arXiv:2208.07188。（见第8页。）[R1] S. Rollenske, *Geometry of nilmanifolds with left-invariant complex structure and defor-* ，《伦敦 *mations in the large* 3 99 2009 2, 425 460 数学会会刊》（）（），第 期，第 - 页。（见第3页。）[PSZ] G. Placini，J. Stelzig，L. Zoller, *Nontrivial Massey products on compact Kähler manifolds*, 预印本 https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.09867。（见第4页。）[R2] S. Rollenske, *Dolbeault cohomology of nilmanifolds with left-invariant complex structure* 《复几何与微分几何》，369–392，施普林格数学论文集，第8卷，施普林格，海德堡，2011年。（见第3页。）[ST] T. Sferruzza，A. Tomassini, *Bott-Chern formality and Massey products on Strong Kähler* ，《几何 *with torsion and Kähler solvmanifolds* 34 2024 4 分析杂志》（）。（见第 页。）[ST2] T. Sferruzza，A. Tomassini, *Dolbeault and Bott-Chern formalities: deformations and ∂∂-* ，《几何 *lemma* 175 2022 104470 4 – 与物理杂志》（），。（见第 页。）[ST3] T. Sferruzza，A. Tomassini, *Geometrically Hermitian formal manifolds*, arXiv:2507.10263。（见第3和4页。）[St] James D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I*, 《美国数学会汇刊》108（1963年），275–292。（见第2页。）[Som] A. J. Sommese, *Quaternionic manifolds*, 《数学年刊》212（1975年），191–214。（见第7页。）[Ste] J. Stelzig, *Pluripotential homotopy theory*, 《数学进展》460，（2025年），110038。（见第4页。）[Sul] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, 《高等科学研究所数学出版物》47（1977年），第269–331页。（见第2页。）[Thu] W. P. Thurston, *Some Simple Examples of Symplectic Manifolds*, 《美国数学会会刊》55（1976年），第2期，第467–468页。（见第2页。）[TT] A. Tomassini，S. Torelli, *On Dolbeault formality and small deformations*, 《国际数学杂志》25（2014年），1450111。（见第3页。）[VGO] E. B. Vinberg，V. V. Gorbatsevich，O. V. Shvartsman, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, 载于《李群与李代数 II》，施普林格出版社，2000年。（见第6页。）

Tommaso Sferruzza
Istituto nazionale di alta matematica "Federico Severi" (INdAM)
Piazzale Aldo Moro, 5
00185 Roma, Ro - Italy
sferruzza@altamatematica.it

Misha Verbitsky
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Estrada Dona Castorina, 110Jardim Botânico,
CEP 22460-320Rio de Janeiro, RJ - Brasilverbit@impa.br