arXiv:2602.13519v1 [math.GT] 13 Feb 2026

研究报告：人工智能启发的多面体辛拓扑中的若干构造

ANTONIO ALFIERI 和 CONNOR NOVAK

摘要。我们利用大语言模型（LLM）探讨 Abouzaid 等人在《First Proof》中提出的一个关于拉格朗日可光滑化性的问题 [1]。

1. 引言

这是我们对 [1] 中提出的实验的回应。我们特别关注问题 8，相关报告如下。

问题 1.1 (Abouzaid 等人 [1])。 $\mathbb{R}^4$ 中的多面体拉格朗日曲面 K 是一个有限多面体复形，其所有面都是拉格朗日的，并且是 $\mathbb{R}^4$ 的拓扑子流形。 K 的拉格朗日光滑化是光滑拉格朗日子流形的哈密顿同伦 K_t，以 $(0,1]$，为参数，并延拓为一个拓扑同伦，以 $[0,1]$，为参数，端点为 $K_0 = K$。

设 K 是一个多面体拉格朗日曲面，且每个顶点恰好有4 个面相交。 K 是否必然存在拉格朗日光滑化？

1.1. **方法论**。 我们分成了两个团队。Team A（探索团队）使用标准的 ChatGPT 5.2 商业发行版，探索所提出问题的解法。Team B（控制团队）运用人类智慧和 Google Gemini Pro 大语言模型，检查所提论证是否正确。两个团队举行了几次研究讨论会，Team A 需要为 ChatGPT 生成的材料进行辩护，Team B 则对其提出批评。参与者都不具备多面体辛拓扑方面的专门知识，尤其不熟悉问题 1.1。

我们于 2 月 8 日星期日开始这项实验，并于 2 月 13 日星期五结束；当时距离 [1] 问题清单的解答公布仅剩几个小时。由于通知时间很短，我们没有为这项活动专门安排时间，而是将实验融入了我们在佐治亚大学的日常工作流程中。

受限于时间，许多方向尚未探索，也有许多细微的数学之处来不及讨论。本报告约 80% 的文本由人工智能生成。

致谢。 我们感谢 David Gay 和 Gordana Matic 参与了该实验。

2. 基本设置

2.1. 多面体拉格朗日曲面。 设 $(\mathbb{R}^4, \omega)$ 表示配备其标准（线性）辛形式的 $\mathbb{R}^4$ ：

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2.$$

一个多面体曲面 $K \subset \mathbb{R}^4$ 是一个有限二维多面体复形的像，其中其 2-胞腔是仿射嵌入于 $\mathbb{R}^4$中的平面多边形。我们假设 K是一个拓扑曲面，也就是说， K 中的每个点都有一个与 $\mathbb{R}^2$同胚的邻域。等价地， K 中每个顶点的链接都与一个圆同胚。

定义 2.1（拉格朗日多面体曲面）。 若多面体曲面 $K \subset \mathbb{R}^4$ 满足：对于每个2维面 $F \subset K$，包含 F 的仿射平面 $L_F := \mathrm{Aff}(F) \subset \mathbb{R}^4$ 都是一个拉格朗日平面，即 $\omega\Big|_{L_F} \equiv 0$，则称其为多面体拉格朗日曲面 。

2.2. 局部原函数系。 最初探索的想法是局部原函数系及其关联的上循环 c。一开始，ChatGPT 误将其识别为哈密顿光滑化的障碍。我们仍然报告这一想法，因为它是项目第一阶段讨论的核心。

固定一个多面体拉格朗日曲面 K ，并用 $\mathcal{F}(K)$ 表示其面集。由于$\omega|_F = 0$对于每个面 F，$\lambda|_F$都是闭的： $d(\lambda|_F) = (d\lambda)|_F = \omega|_F = 0$。因此， $\lambda|_F$在每个面上都是（局部）恰当的。

定义 2.2（局部原函数系统）。 在 K 上，一个局部原函数系统是指：对每个面 $F \in F(K)$，选取一个光滑函数

$$f_F : F \to \mathbb{R} \qquad such\ that \qquad df_F = \lambda|_F.$$

令 X_K 表示 K 的底层二维多面体复形，并令 X_K^* 表示通过反转关联关系定义的对偶复形。

定义 2.3（与局部原函数系统相关联的上循环）。 给定一个局部原函数系统 $\{f_F\}$，对相邻的面 F、F'，定义常数

$$c(F, F') := \Big(f_{F'} - f_F\Big)\Big|_{F \cap F'} \in \mathbb{R}.$$

那么， c 是取值于 $\mathbb{R}$ 的 X_K^* 上的一个1–上链。我们称 c 为该局部原函数系统的哈密顿上循环。

Lem引理 2.4（上循环性质）。 上链 c是一个1–上循环： $c \in Z^1(X_K^*; \mathbb{R})$.

证明。 在对偶图中任取一个（组合）2-胞腔；等价地，任取一个循环排列的面序列

$$F_1, F_2, \ldots, F_m, F_{m+1} = F_1$$

使得相邻的面沿着 K 的一条边相交，且该序列构成某个顶点的对偶多边形的边界。在每个重叠处 $F_i \cap F_{i+1}$ ，我们有

$$c(F_i, F_{i+1}) = (f_{F_{i+1}} - f_{F_i})|_{F_i \cap F_{i+1}}.$$

沿环求和，得到一个望远镜和：

$$\sum_{i=1}^{m} c(F_i, F_{i+1}) = \sum_{i=1}^{m} \Big(f_{F_{i+1}} - f_{F_i} \Big)\Big|_{F_i \cap F_{i+1}} = \sum_{i=1}^{m} f_{F_{i+1}}(v) - f_{F_i}(v) = 0.$$

这恰好成立于 $\delta c = 0$ 上的2-胞腔；因此， c 是一个上循环。 □

将 f_F 替换为 $f_F + a_F$，其中常数为 $a_F \in \mathbb{R}$，会使 c 改变一个上余边界：

$$c(F, F') \longmapsto c(F, F') + (a_{F'} - a_F).$$

因此，上同调类 $[c] \in H^1(X_K^*; \mathbb{R})$不依赖于 K各面上原函数系统的具体选择。

2.3. 一个基本例子：多边形曲线的乘积。 当聊天机器人被要求给出一些多面体拉格朗日子流形的例子时，它描述了以下对Clifford环面的多面体近似。设

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2_{(x_1,y_1)} \times \mathbb{R}^2_{(x_2,y_2)}$$

其辛形式为

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2.$$

设 $P \subset \mathbb{R}^2_{(x_1,y_1)}$ 和 $Q \subset \mathbb{R}^2_{(x_2,y_2)}$ 为嵌入的多边形曲线。定义

$$K := P \times Q \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4.$$

曲 面 K 继承了自然的多面体结构，其二维面是乘积 s

$$e_P \times e_Q,$$

其中 e_P 是 P 的一条边， e_Q 是 Q的一条边。每个这样的面都是以仿射方式嵌入 $\mathbb{R}^4$中的平行四边形。

引理2.5。 曲面 $K = P \times Q$ 是一个多面体拉格朗日曲面。

证明。 设 $F = e_P \times e_Q$ 是 K的一个二维面。 F 的切向量分解为

$$u = (u_1, 0), \qquad v = (0, v_2),$$

以及 $u_1 \in Te_P \subset \mathbb{R}^2_{(x_1,y_1)}$ 和 $v_2 \in Te_Q \subset \mathbb{R}^2_{(x_2,y_2)}$。直接计算可得

$$\omega(u, v) = (dx_1 \wedge dy_1)(u_1, 0) + (dx_2 \wedge dy_2)(0, v_2) = 0$$

这表明这些面是拉格朗日子流形。 □

如果 P和 Q 都是闭多边形曲线，那么 K 是一个多面体拉格朗日环面。如果其中一条曲线是开曲线，那么 K 是一个多面体拉格朗日圆柱。更一般地，这一构造会产生形如 $S^1 \times I$或 $I \times I$的多面体拉格朗日曲面。

2.4. 拉格朗日与哈密顿光滑化。 我们首先为多面体拉格朗日曲面引入一个一般的光滑化概念，而不施加哈密顿刚性条件。

定义 2.6 (拉格朗日光滑化)。 设 $K \subset \mathbb{R}^4$ 是一个多面体拉格朗日曲面。 K 的一族子集称为拉格朗日光滑化，

$$\{K_t\}_{t\in[0,1]}$$

满足以下性质：

(1) 对每个 $t \in (0,1]$, ，子集 $K_t \subset \mathbb{R}^4$ 都是光滑嵌入的拉格朗日子流形。*(2)* 族 $\{K_t\}_{t\in(0,1]}$ 是光滑拉格朗日同痕。*(3)* 族 $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$ 可延拓为一个关于 t 连续的拓扑同伦，且

$$K_0 = K.$$

现在我们引入本文所涉及的限制性更强的概念。

定义 2.7 (哈密顿拉格朗日平滑)。 多面体拉格朗日曲面 $K \subset \mathbb{R}^4$ 的哈密顿拉格朗日平滑是一个拉格朗日光滑化 $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$，使得拉格朗日同痕 $\{K_t\}_{t\in(0,1]}$ 是哈密顿的，也就是说，存在 $\mathbb{R}^4$ 的一个哈密顿同伦 $\{\phi_t\}_{t\in(0,1]}$，满足 $K_t = \phi_t(K)$ 对所有 $t \in (0,1]$ 均成立。

3. 沿边进行光滑化

本节讨论 ChatGPT 在被要求研究拉格朗日多面体各边的拉格朗日可光滑化性时提出的构造。

设 $K \subset \mathbb{R}^4$ 是一个多面体拉格朗日曲面。用 Vert(K) 表示其顶点集。对于 $\varepsilon > 0$，我们定义

$$U_\varepsilon := \bigcup_{v\in \mathrm{Vert}(K)} B_\varepsilon(v), \qquad K^\varepsilon := K \setminus U_\varepsilon,$$

其中 $B_\varepsilon(v)$ 是以 v 为中心、半径为 ε 的开欧几里得球。由于 K 是一个拓扑曲面，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，对每个顶点 v，交集 $K \cap B_\varepsilon(v)$ 都是一个拓扑圆盘，因此 K^ε 是一个边界由多边形曲线组成的紧曲面。

3.1. 铰链的标准形与精确平滑。我们记录一个铰链标准形，以及反复用到的标准精确平滑。

引理 3.1 (铰链标准形)。 设 $P, P' \subset (\mathbb{R}^4, \omega)$ 是沿直线 $\ell = P \cap P'$ 相交的拉格朗日平面。则存在一个 $\mathbb{R}^4$ 的线性辛同胚，将 ℓ 映到 张成$\{e_1\}$，并将 (P, P') 映到一对具有如下形式的拉格朗日平面

$$P = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}, \qquad P' = \mathrm{span}\{e_1,\ e_2 + s f_2\}$$

对于某个实参数 $s \in \mathbb{R}$。

证明。 固定 ℓ，并选取辛坐标，使得 ℓ =张成$\{e_1\}$。商空间ℓ^ω/ℓ 是一个辛二维平面。包含 ℓ 的拉格朗日平面对应于 ℓ^ω/ℓ中的（拉格朗日）直线，因此对应于 $\mathbb{R}P^1$中的点。将该商空间辛同一化为由$\{e_2,\ f_2\}$张成的空间后，可以令 P对应于由$\{e_1,\ e_2\}$ 张成的空间，并令 P'对应于由$\{e_2 + sf_2\}$张成的空间。提升回原空间即可得到所述标准形。 □

有了这一点，我们证明任意多面体拉格朗日 K 都可以在远离顶点处进行拉格朗日光滑化。

引理 3.2 (远离顶点的边光滑化)。 设 $K \subset \mathbb{R}^4$ 为一个多面体拉格朗日曲面。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个1参数族 $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$，使得对每个 $t \in (0, 1],$，子集 $K_t \cap (\mathbb{R}^4 \setminus U_\varepsilon)$ 都是光滑嵌入拉格朗日曲面（带边界），且 K_t 与 K的距离为 ϵ。

此处 ChatGPT 给出的第一个论证乍看之下似乎正确，但负责核查论证的人类团队却认为它毫无道理，并提出了以下论证。根据我们的经验，这类错误最终可能会由聊天机器人修正。为了节省时间，我们选择自行撰写论证。

证明。 在标准形坐标 $(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$ 中，这些平面为

$$P = \{y_1 = y_2 = 0\}, \qquad P' = \{y_1 = 0,\ y_2 = sx_2\}.$$

首先，令 $\beta_\varepsilon(x_2,\ y_2)$ 为一个鼓包函数： β_ε 是一个光滑函数，使得 $\beta_\varepsilon \equiv 1$在 $B_{\varepsilon/2}(0)$ 中成立，并且 β_ε 的支集包含于 $B_\varepsilon(0)$ 中。考虑关于 x_2 和 y_2的时变函数：

$$g_t(x_2, y_2) = y_2(y_2 - sx_2) - t\beta_\varepsilon(x_2, y_2).$$

在 $t = 0$ 处， $g_1(x_2,\ y_2) = y_2(y_2 - sx_2)$ 的零点集是直线 $y_2 = 0$ 和$y_2 = sx_2$ 的并，因此 $P \cup P' = \{y_1 = 0,\ g_1(x_2,\ y_2) = 0\}$。对于 $t > 0$，在 $B_\varepsilon(0)$ 之外， g_t 的零点集与 $y_2(y_2 - sx_2)$ 的零点集重合。在 $B_{\varepsilon/2}(0)$ 内， g_t 的零点集由 $x_2 = s\left(y_2 - \frac{t}{y_2}\right)$ 给出，它是一条光滑平面曲线。在 $B_{\varepsilon/2}(0)$ 与 $B_\varepsilon(0)$ 之间，我们的鼓包函数在两个零点集之间平滑地插值。定义

$$S_t = \{y_1 = 0, g_t(x_2, y_2) = 0\}.$$

如上所述， $S_0 = P \cup P'$。 S_t 是一个光滑嵌入的拉格朗日对象，因为它可表示为拉格朗日曲线 $g_t(x_2,\ y_2) = 0$（位于 $(x_2,\ y_2)$-辛平面中）与拉格朗日曲线 $y_1 = 0$（位于 $(x_1,\ y_1)$-辛平面中）的乘积。 □

总之，沿边进行光滑化是一个纯粹的局部问题，而且总能在任意小的顶点邻域之外完成。因此，多面体拉格朗日曲面存在拉格朗日光滑化的任何障碍，似乎都局限于顶点处。

4. 顶点处的局部障碍

我们实验第二部分讨论的核心，是理解顶点处的拉格朗日可光滑化性。聊天机器人在此提出了两种障碍。

4.1. **上循环障碍（失败的想法）**。提出的第一个障碍基于以下论证。设 K 是一个多面体拉格朗日。给定一个顶点 v，考虑围绕 γ v的一条小环路，并考虑 $[c]\cdot[\gamma]\in\mathbb{Z}$ 对我们在第c节中引入的上循环2.2的求值。如果 K 可以通过某个哈密顿族光滑化

$$f_\epsilon : K \to \mathbb{R}^4$$

的嵌入拉格朗日流形，那么

$$\lim_{\epsilon\to 1}\int_{\gamma_\epsilon}\lambda = [c]\cdot[\gamma_v]$$

其中 $\gamma_\epsilon := f_\epsilon(\gamma)$。另一方面，根据斯托克斯定理

$$\int_{\gamma_\epsilon}\lambda = \int_{int(\gamma_\epsilon)} d\omega = 0,$$

这表明在每个可光滑化的顶点处，$[c]\cdot[\gamma]=0$。如果不是因为 $[c]\cdot[\gamma]=0$，这会是一个颇具吸引力的想法；原因只是 γ在 X_K^* 中围成了一个 2-胞腔。ChatGPT 反复坚持这一错误想法；我们认为，错误的根源在于它相信 c 必须是 K 的对偶图的同调类。

4.2. **马斯洛夫指标障碍**。 在讨论哈密顿上循环时，ChatGPT 顺带提到，拉格朗日子流形要能够光滑化，还必须满足马斯洛夫指标障碍消失。被问及更多细节时，它指出 $t\mapsto T_{\gamma_\epsilon(t)}L_\epsilon$ 描述了拉格朗日平面格拉斯曼流形 LGr(2) 中一个同伦平凡的环路，其中平面位于 $(\mathbb{R}^4,\omega)$ 中。因此，对于可光滑化的多面体拉格朗日，绕顶点一周时，马斯洛夫指标必须为零。

随后，我们要求系统利用这一观察结果，提出某种组合性质的障碍。我们的查询生成了以下构造。

设 $K\subset\mathbb{R}^4$ 是一个多面体拉格朗日曲面。在价为 k的顶点 v 附近，它是有限多个平面面片 F_1、……、F_k的并。切平面 $T_vF_i\subset\mathbb{R}^4$ 产生一个拉格朗日平面的循环序列 L_1、……、$L_k\subset(\mathbb{R}^4,\ \omega)$，其交模式如下：

$$\begin{aligned}
&\dim(L_i\cap L_{i+1})=1 \quad \text{for } i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\\
&L_i\cap L_{i+2}=\{0\} \quad \text{for } i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\\
&L_1\cap L_2\cap\cdots\cap L_k=\{0\}.
\end{aligned}$$

用 $\ell_{i,\ i+1}=L_i\cap L_{i+1}$ 表示两个相邻拉格朗日子流形的交线（各向同性直线）。为在 LGr(2) 中得到一个环路，我们构造路径

$$\alpha_{i,i+1}:[0,1]\to \mathrm{LGr}(2),\qquad \alpha_{i,i+1}(0)=L_i,\ \alpha_{i,i+1}(1)=L_{i+1},$$

从一个拉格朗日平面过渡到下一个平面。为了构造这条路径，我们可以考虑辛约化 $W_i=\ell_{i,\ i+1}^{\omega}/\ell_{i,i+1}$。这是一个辛平面，其中拉格朗日平面 $L_i,L_{i+1}\subset\mathbb{R}^4$ 下降为经过原点的两条定向直线。

我们将$\alpha_{i,i+1}$定义为一族拉格朗日平面，它们对应于辛平面 W 中 L_i 绕 L_{i+1} 逆时针旋转的过程。[1]

将连接路径 $\alpha_{i,\ i+1}$ 首尾相接，得到一个连续闭路

$$\alpha_v : S^1 \to \mathrm{LGr}(2).$$

顶点 v 处的组合马斯洛夫指标是 α_v的马斯洛夫指标 :

$$\mu(K; v) \ := \ \mu(\alpha_v) \in \mathbb{Z}.$$

或者，可以沿边 K 进行光滑化，得到一个拉格朗日曲面 Σ_ϵ，它与 K 相距不超过 ϵ，且其边界是顶点 v周围的一些小圆周 γ_v。接着，可以将 $\mu(K; v) := \mu(\beta_v) \in \mathbb{Z}$ 定义为环路 β_v 的马斯洛夫指标： $\theta \in \gamma_v \mapsto T_\theta \Sigma_\epsilon$。

4.3. 拓扑阻碍。 最后，还有一些拓扑阻碍。在顶点 v 处，可以考察交集

$$\Gamma_v = S^3_\delta(v) \cap K$$

小球面与多面体拉格朗日的交集。这是 S^3中的一个纽结。若拉格朗日 K 要在 v处可光滑化，该纽结必须是切片[3]，，也就是说，它必须是某个光滑圆盘 $D \subset B^4_\delta(v)$的边界。许多不同的纽结不变量（例如 Arf不变量）都能构成障碍，阻止纽结具有这一性质。例如，三叶纽结不是切片（其 Arf $= 1$）。此外， S^3 中的任何纽结都可以用一个多边形纽结来逼近，而其锥是一个边界为 K的多面体圆盘，因此，多面体圆盘的存在在这里并没有带来任何帮助。

对于所提出的问题，这并不构成真正的障碍。对于纽结 $Q \subset S^3$，我们将 棍数 Stk(Q) 定义为用多边形曲线描述 Q 所需的最少边数。对于多面体曲面K顶点处的纽结 Γ_v，有 Stk(Γ_v) $\leq k$，其中 k 表示 v的价。由于任何非平凡纽结的棍数至少为 6，假设每个顶点的价为 $k \leq 5$即可消除这一障碍。

当然，这种情况涉及的不只是简单的拓扑学：由多面体曲面的顶点确定的纽结 $\Gamma_v \subset S^3$是一个分段勒让德纽结，具有k 个角点，而两个相邻角点之间的勒让德弧是 S^3 中的一段大圆。我们将这种纽结称为 ***PL*** 勒让德纽结。我们认为，讨论中提出的以下问题或许值得在未来深入探讨。

问题 4.1. 哪一个 *PL*勒让德纽结 $Q \subset (S^3, \xi_{st})$ 围成一个多面体拉格朗日圆盘 $\Delta \subset (B^4, \omega_0)$?

注意，对于一个光滑的勒让德结 Q 要围成一个拉格朗日圆盘 $\Delta \subset (B^4,\ \omega_0)$，必须满足： Q 是旋转数为 rot $= 0$且 Thurston-Bennequin 数为 tb $= -1$的平凡纽结。

[1]聊天机器人还提议利用 LGr(2) $\cong U(2)/O(2)$ 的对称空间结构，通过最短路径论证将 L_i 与 L_{i+1} 连接起来。

5. 顶点处的局部模型

本节讨论在辛线性坐标变换下，顶点处可以达到的一种标准形。人工智能软件似乎能够非常高效地执行此类任务，几乎总是不会出现任何重大错误。

5.1. 平面的标准形。 首先，我们在切向层次恢复一个标准形。假设 (L_1, L_2, L_3, L_4) 是一个具有正方形相交模式的循环定向序列的线性拉格朗日子空间：相邻的相交为直线，对面的相交为平凡相交。

在 $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ 的线性辛同胚意义下，我们可以将其中三个平面置于标准位置：

$$L_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}, \qquad L_2 = \operatorname{span}\{e_1, f_2\}, \qquad L_3 = \operatorname{span}\{f_1, f_2\}.$$

现在 L_4 必须满足：

- $L_4 \cap L_1$ 是 L_1 中横截于 $L_1 \cap L_2 = \operatorname{span}\{e_1\}$的一条直线，因此它由某个 $e_2 + \tau e_1$ 张成，且 $\tau \in \mathbb{R}$。
- $L_4 \cap L_3$ 是 L_3 中与 $L_2 \cap L_3 = \operatorname{span}\{f_2\}$横截的一条直线，因此它由某个 $f_1 + \sigma f_2$ 张成，且满足 $\sigma \in \mathbb{R}$。
- 平面 $L_4 = \operatorname{span}\{e_2 + \tau e_1,\ f_1 + \sigma f_2\}$ 是拉格朗日的，当且仅当

$$0 = \omega_0(e_2 + \tau e_1,\ f_1 + \sigma f_2) = \tau + \sigma,$$

因此 $\sigma = -\tau$。

因此

$$L_4 = L_4(\tau) := \operatorname{span}\{\, e_2 + \tau e_1,\ f_1 - \tau f_2 \,\}.$$

条件 $L_2 \cap L_4 = \{0\}$ 迫使 $\tau \neq 0$成立。这给出一个单参数族 $L(\tau)$，用于描述多面体拉格朗日顶点处的切锥。

5.2. 从平面到面：符号参数 ε_{ij}. 多面体顶点在芽的层面上由如下方式确定：指定每条相交直线$\ell_{i,i+1}$ 中哪条半射线是边方向。我们用符号来编码这一点

$$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{41} \in \{\pm 1\},$$

并定义边方向向量

$$a_{12} = \varepsilon_{12} e_1, \qquad a_{23} = \varepsilon_{23} f_2, \qquad a_{34} = \varepsilon_{34}(f_1 - \tau f_2), \qquad a_{41} = \varepsilon_{41}(e_2 + \tau e_1).$$

那么，每个面都是由其相邻的两条边射线张成的（闭凸）锥：

$$F_i = \{\, s\, a_{i-1,i} + t\, a_{i,i+1} \mid s \geq 0,\ t \geq 0 \,\}.$$

将这些内容写成方程和不等式，即可得到一个显式的局部模型

$$K(\tau; \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{41}) := F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \subset \mathbb{R}^4,$$

其中:

$$F_1 = \{\, y_1 = y_2 = 0,\ \varepsilon_{41}x_2 \geq 0,\ \varepsilon_{12}(x_1 - \tau x_2) \geq 0 \,\},$$
$$F_2 = \{\, y_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \varepsilon_{12}x_1 \geq 0,\ \varepsilon_{23}y_2 \geq 0 \,\},$$
$$F_3 = \{\, x_1 = x_2 = 0,\ \varepsilon_{34}y_1 \geq 0,\ \varepsilon_{23}(y_2 + \tau y_1) \geq 0 \,\},$$
$$F_4 = \{\, x_1 = \tau x_2,\ y_2 = -\tau y_1,\ \varepsilon_{41}x_2 \geq 0,\ \varepsilon_{34}y_1 \geq 0 \,\}.$$

根据构造， $F_i \subset L_i$ 和每个 L_i 都是拉格朗日的，因此每个面都是拉格朗日的。

5.3. **符号 σ 和两种顶点类型**。定义乘积符号

$$\sigma := \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}\varepsilon_{41} \in \{\pm 1\}.$$

这是在自然对称性（整体反转、循环重标记以及 $\tau \mapsto -\tau$ 对称性）下唯一保留下来的离散数据。直观地说， σ 衡量的是：绕顶点一周时，所选边的半射线是否沿循环“定向一致”，还是引入了“扭转”。

5.4. 一种启发式解释? 我们进入本节所报告的这段对话内容的方式相当有趣。

在讨论马斯洛夫指标和（未能成立的）哈密顿上循环障碍时，聊天机器人曾多次脱离上下文地提到，某个模空间的维数为一。我们起初以为这是幻觉，但后来询问 ChatGPT 价为$k = 4$这一假设有何特殊之处时，它仍坚持这一点。以下是它生成的文本。

> “固定 K 的一个顶点 v ，在该顶点处恰有4 个面按循环顺序相交:
>
> $$F_1, F_2, F_3, F_4.$$
>
> 令 L_i 表示包含 F_i的仿射拉格朗日平面。拓扑曲面条件意味着，K 中 v 的链接 是一个4–循环；特别地，相邻的面沿一条边相交，而不相邻的面仅在该顶点处相交。
>
> 在线性化层面（切锥）上，可以得到经过原点的4 个拉格朗日平面的循环构型，并具有相同的交模式。这类构型构成一个1–参数模空间，可以方便地用射影交比编码；抽象地说，这就是1–维模空间
>
> $$\mathcal{M}_4 \;=\; (\mathbb{R}P^1)^4/PGL(2,\mathbb{R}), \qquad \dim \mathcal{M}_4 = 1.$$
>
> 就我们的目的而言，只需固定一个带有显式参数的具体标准形即可。提取字面交比时所采用的不同约定，相当于对该参数进行莫比乌斯重参数化。”

到达这一阶段时，我们的实验已接近尾声，于是尝试收尾论证。

6. 完成论证

令 K 是 $(\mathbb{R}^4,\ \omega)$ 中的一个可定向多面拉格朗日曲面，其顶点的价为$k\ =\ 4$。任取足够小的 $\delta\ >\ 0$ 和 $0\ <\ \epsilon\ <\ \delta$。根据引理 3.2 ，我们可以在 K 的一个 ε-邻域内将 K的边平滑化。这就得到一个光滑拉格朗日曲面 Σ_ε ，它与 ε相差不超过 K。

给定 v 的一个顶点 K ，我们可以考虑交集

$$\Gamma_{v,\delta} := \Sigma_\varepsilon \cap S^3_\delta(v)\ .$$

由于 $k \le 4$ 这是一个平凡纽结。如果我们能验证 $\Gamma_{v,\ \delta}$ 的旋转数为 rot $= 0$，且瑟斯顿-贝内昆数为 tb $= -1$ ，就可以用一个拉格朗日圆盘封住 $\Gamma_{v,\ \delta}$ ，并构造一个与 K相距 ε的光滑拉格朗日曲面 K_ϵ 。

利用 Chartraine [2, 定理 1.3，第 2 节。2][2]的结果，可以将$\Gamma_{v,\ \delta}$ 的旋转数识别为马斯洛夫指标:

$$\mathrm{rot}(\Gamma_{v,\delta}) = \frac{1}{2}\mu(K,v) \tag{6.1}$$

我们称 K 当每个顶点处的马斯洛夫指标 $\mu(K,v) = 0$ 都为零时，称其为 无阻碍的 .

假设 K 在每个顶点处都无阻碍，那么剩下唯一需要检查的是瑟斯顿-贝内昆数是否为 -1, 它可能构成第二个阻碍。此时，我们请 ChatGPT 根据局部模型计算马斯洛夫指标。答案是:

猜想 6.1 (ChatGPT 5.2)。 设 $\Gamma_{v,\delta} \subset (S^3, \xi_{\mathrm{std}})$ 为局部光滑化的四价4顶点与一个充分小球面相交所得的勒让德链环。那么以下结论成立:

(i)如果多面体 *Maslov* 指标满足

$$\mu(K,v) = 0,$$

then

$$\mathrm{rot}(\Gamma^\varepsilon_v) = 0 \quad and \quad tb(\Gamma^\varepsilon_v) = -1.$$

特别地， Γ^ε_v 与标准勒让德平凡结 ***Legendrian*** 同伦同位 $t.$

(ii)如果多面体 *Maslov* 指标满足

$$\mu(K,v) \neq 0,$$

then

$$\mathrm{rot}(\Gamma^\varepsilon_v) \neq 0,$$

因此， Γ^ε_v 无法在 $B_\varepsilon\ (v)$ 内部围成一个拉格朗日圆盘。特别是，该顶点在局部并非 ***Lagrangian*** 可光滑化。

[2]ChatGPT 并未明确给出引文，但在 Team A 和 Team B 的一次会议期间，我们得以确定具体的论文。尽管聊天机器人曾提到 Chartraine 的工作，但我们认为，大量使用大语言模型方法可能会使研究人员面临无意剽窃的风险。

由于时间有限，我们无法着手验证这一计算。我们只想指出，可以请聊天机器人给出纽结 $K \cap S^3_\delta(v)$ 的参数化。由此应该能够更好地理解这一情况，甚至可以通过 3D 绘图计算器（Wolfram alpha、Geogebra 等）生成前投影图像。[3]

6.1. **跨越科学与科幻小说之间的界限**。 有许多微妙之处，看起来大语言模型无法处理。尤其是，要将我们刚才讨论的启发式方法转化为完整的证明，必须解决以下问题：

(1) 必须仔细验证， Σ_ε 可以被安排成与球面 $S^3_\delta(v)$相交于一个勒让德结。(2) 必须明确组合定义与拓扑定义的马斯洛夫指标之间的对应关系。(3) 必须仔细讨论 PL勒让德纽结 $S^3_\delta(v)\cap K$ 的光滑化与拉格朗日铰链平滑之间的关系，并仔细计算瑟斯顿-贝内昆数。

填补这 些空白，标志着严谨数学与科幻小说之间的界限 .

6.2. **Matíc 实验**。 Gordana Matíc 教授在项目过程中曾先后支持双方，同时独立开展了一项实验。她与 Google Gemini Pro 分别进行了两次不同的对话：一次要求它证明该问题有肯定答案，另一次则要求它论证相反的结论。两次对话中，聊天机器人似乎都确信自己能够按照指示给出有效证明。它的首要目标似乎是证实用户的主张，而不是证明正确的结论。

参考文献

[1] Mohammed Abouzaid、Andrew J. Blumberg、Martin Hairer、Joe Kileel、Tamara G. Kolda、Paul D. Nelson、Daniel Spielman、Nikhil Srivastava、Rachel Ward、Shmuel Weinberger 和 Lauren Williams。First Proof，2026年。网址 https://arxiv.org/abs/2602.05192。[2] Baptiste Chantraine。勒让德结的拉格朗日一致。《代数与几何拓扑》，10(1):63–85，2010年。doi: 10.2140/agt.2010.10.63。网址 https://arxiv.org/abs/math/0611848。[3] Ralph H Fox。结理论速览。载于 MK Fort, Jr 编，《三维流形拓扑及相关主题》，第120–167页。Prentice-Hall，Englewood Cliffs，新泽西州，1962年。佐治亚大学。美国佐治亚州雅典。电子邮箱： alfieriantonio90@gmail.com电子邮箱： novakcon@uga.edu

[3]我们注意到，ChatGPT 在生成与对话内容相关的图像方面存在严重局限。这可能是因为我们无法使用完整模型。尤其是在拓扑学领域，这是一个重大障碍。