arXiv:2602.13552v1 [math.GT] 14 Feb 2026

# 用于缝合流形的对称幺半 Frohman–Nicas 拓扑量子场论

Andrew Manion 和 Elijah Rutter

Abstract. 通过分析带边缝合 Heegaard Floer 同调的去范畴化，我们重新诠释并推广了经典的、用于亚历山大多项式的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论，将其置于缝合曲面之间的 3维缝合协边这一背景下。在此背景中，任意曲面之间协边所对应的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论映射（不受连通性限制）可被解释为一个真正的对称幺半函子（关于不交并）的一部分，且不存在半投射性零点。我们还将带 Spin$^c$ 结构的去范畴化带边缝合理论与 Florens–Massuyeau 的、缝合版本的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的$G$-类比相关联。

## Contents

1. 引言 2 2. 背景 19 2.1. 弧图与缝合曲面 19 2.2 希加德图与缝合余边界 23 3. CW 分解 31 3.1. 由希加德图得到的分解 31 3.2. 胞腔定向 33 3.3. 规范化选择与子复形，适用于 $F_i$ $\widehat{36}$ 4. [不带 Spin$^c$ 结构的 BSDA] $\widehat{39}$ 4.1. [BSDA]在 $\mathbb{Z}$ 43上的函子性 4.2. $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的选择与不交并 49 5. $\mathbb{Z}$ 51上的缝合亚历山大函子 5.1. $\mathbb{Z}$ 51上的亚历山大函数 5.2. $\mathbb{Z}$ $\widehat{55}$上的亚历山大函子 5.3. 识别 [BSDA]与 $\mathbb{Z}$ $\widehat{58}$上的亚历山大函子 5.4. [BSDA]在 $\mathbb{Z}$ 60上的独立性 6. 缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论 61 7. 对称幺半结构 69 7.1. 范畴 $\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 与 $\mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}_{\pm 1}$ 69 7.2. 函子 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 80 8. 与 SFH 的关系 85 8.1. Zarev 帽 86 8.2. 依赖于幂等元的CW复形 88

8.3. 矩阵元 90 8.4. 平衡缝合流形 91 8.5. 将 [BSDA]与 $\chi$(SFH) 联系起来 93 9. Spin$^c$ 结构 95 9.1. 生成元的相对 Spin$^c$ 结构 95 9.2. 依赖于参考 Spin$^c$ 结构的 [BSDA] Spin$^c$ 版本 97 9.3. [ BSDA($Y, \Gamma$; $\Xi_s$)]$^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合; 具体 98的挠率解释 9.4. 覆盖与提升 100 9.5. 独立于参考 Spin$^c$ 结构的 [BSDA] Spin$^c$ 版本 106 10. 带扭曲系数的缝合亚历山大函子 109 10.1. $\mathbb{Z}[G]$ 110上的亚历山大函子 10.2. $\mathbb{Q}[H]$ 116上的亚历山大函子
参考文献 124

## 1. Introduction

Heegaard Floer同调由 Ozsv´ath 和 Szab´o [OS04b, OS04a], 引入，是闭3-流形及四维余边界的不变量。它具有类似于（$3+1$）维拓扑量子场论的粘合性质，符合 Atiyah [Ati88]的观点；从 Atiyah 的拓扑量子场论公理的现代视角来看，拓扑量子场论被定义为一个对称幺半函子，它从由闭合的 $n$维流形和（$n+1$）维配边构成的范畴映射到另一个对称幺半范畴（例如参见 [Lur09，第 1.1] 节）。然而，众所周知，Heegaard Floer同调并不严格满足这些拓扑量子场论公理。

带边 Heegaard Floer 同调 [LOT08] 和缝合 Floer 同调 [Juh06] 为将 Heegaard Floer 同调推广到带边界的三维流形提供了两种不同的方法。带边缝合Floer同调由 [Zar09], 发展而来，将这两种方法统一起来，并将它们分别作为特例纳入其中。我们可以研究所有这些理论的“去范畴化”，以去除部分技术复杂性，并有望更全面地理解其拓扑量子场论结构。根据一般规律，我们可以期待，涉及二维曲面和带边界的三维流形的这些 Heegaard Floer理论的去范畴化，能够构成某种类似于（2+1）维 Atiyah 风格的拓扑量子场论。

Petkova[Pet18]和 Hom–Lidman–Watson [HLW17]研究了带边 Heegaard Floer 同调的去范畴化；特别是，Hom–Lidman–Watson 表明，带边 Heegaard Floer 同调的去范畴化恢复了亚历山大多项式的一个经典（2+1）维拓扑量子场论框架的子集，即 Frohman–Nicas 拓扑量子场论[FN91] （另见 [Don99, Ker03, FM15]）。然而，Frohman–Nicas 拓扑量子场论本身也并不严格满足拓扑量子场论公理；当将其表述为适用于输入和输出均可不连通的一般三维配边时，它具有一种非标准的“半投射”函子性，这一性质由 Kerler 在 [Ker03]中进行了分析。

另一方面，Friedl–Juhasz–Rasmussen [FJR09], 研究了缝合 Floer 同调的去范畴化，但该理论本身并未涵盖沿边界曲面粘合三维流形，而这正是（2+1）维拓扑量子场论所涉及的内容。在缝合 Floer 同调的语境下，这种粘合是 Zarev 的带边缝合理论 [Zar09]的研究主题。第一作者研究了2维流形带边缝合不变量的去范畴化 [Man24b, Man24c], ，但这些论文没有讨论三维流形。本文研究三维中的带边缝合不变量的去范畴化，并将 [Pet18, HLW17] 的结果推广到边界缝合情形。

因此，我们证明，对于任意两个闭曲面之间的配边，无论是否施加连通性限制，其 Frohman–Nicas 拓扑量子场论映射都可以在两个 2维缝合曲面之间的 3维缝合协边框架下重新诠释，从而消除半射影函子性。我们定义的缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论与三维去范畴化带边缝合不变量相关联，它是一个取值于某个范畴的对称幺半函子；该范畴中的态射是模符号的线性映射，也就是说，它是“射影的”，但并非“半射影的”。与通常的 Atiyah 框架相比，主要区别在于，我们的定义域范畴由缝合曲面及其间的缝合协边组成，不同于通常由闭曲面及其间的配边组成的范畴。这两个配边范畴都不是另一个的子范畴；特别是，闭曲面本身并非我们范畴中的对象。通常“闭”配边范畴中的对象和态射（不施加连通性限制），通过从曲面中删去点的邻域，并从配边中删去无圈带状图的邻域，可以得到我们缝合协边范畴中的对象和态射；然而，这些新缝合协边的复合与原配边的复合并不一致，而这种不一致恰好发生在通常的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论中出现半射影性零值之处。见下文注 1.11。

**注释 1.1**。 我们注意到，文献中此前还出现过其他对称幺半版本的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论；特别是 Frohman–Nicas 在 [FN91 的 4] 范畴 $\mathcal{SC}^+$ 节中定义的单调递增配边和单调递减配边版本，以不交并作为定义域上的对称幺半范畴，构成对称幺半结构。这些受限的配边范畴 $\mathcal{SC}^{\pm}$ 经过选择，使其中不会出现导致半射影性零值的复合。不过，它们也有相应的局限：在通常的（定向）配边范畴中，对象 $X$ 的对偶是其定向反转 $-X$ $X$，而对偶性的求值态射和余求值态射分别由 $X \times [0,1]$ 作为从 $X \sqcup -X$ 到 $\emptyset$、以及从 $\emptyset$ 到 $-X \sqcup X$ 的配边给出。这种对偶性通常是推理 Atiyah 型拓扑量子场论基本性质的起点，例如 [Lur09 的 1.1] 节。对 $\mathcal{SC}^{\pm}$ 中的任意对象 $X$，求值协边是单调递减的，因此属于 $\mathcal{SC}^-$；而余求值协边是单调递增的。因此， $\mathcal{SC}^+$ 和 $\mathcal{SC}^-$ 都不同时包含见证 $X$ 与 $-X$ 之间对偶性的那两种通常的协边。相比之下，在我们的版本中，对于缝合曲面（$F$, $\Lambda$），缝合余边（$F$, $\Lambda$）$\times [0,1]$ 确实给出了有效的求值协边和余求值协边，见证（$F$, $\Lambda$）与 $-$（$F$, $\Lambda$）之间的对偶性；参见注 1.17。

我们还注意到，当 Frohman–Nicas 拓扑量子场论定义在 Crane–Yetter 范畴 Cob 上时，其中对象是具有一个边界分支的连通曲面，态射是相对协边界，如 Kerler [Ker03] 以及 Florens–Massuyeau $G = 1$ FM15], 的 [情形中那样，它给出一个编织幺半函子，其定义域范畴在边界连通和下具有编织（但非对称）幺半结构，并具有对象的对偶，对偶由通常构造的相对类比给出 $X \times [0,1]$；例如参见 [CHM08，图 5。2]，其中给出了这种情形下余求值协边的一个例子。

我们也首次将 Spin$^c$ 结构引入去范畴化带边理论的分析中；我们把带有 Spin$^c$ 结构的去范畴化带边缝合不变量与 Florens–Massuyeau 的亚历山大函子 [FM15] 的缝合版本联系起来。例如，这使得纽结 $S^3$ 的亚历山大多项式可以直接从其纽结补空间的去范畴化带边缝合不变量中显现出来。

**Frohman–Nicas 拓扑量子场论。** 我们首先回顾 Frohman–Nicas 拓扑量子场论，记作 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}$。

**定义 1.2。** 设 $\Sigma$为闭定向曲面，设 $g$ 为 $\Sigma$所有连通分支的亏格之和。对于 $\Sigma$，*Frohman–Nicas* 拓扑量子场论（取 $\mathbb{Z}$ 系数）赋予$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(\Sigma) := \wedge^* H_1(\Sigma)$，一个秩为 $2^{2g}$ 的自由阿贝尔群。

设 $W$ 是一个从 $\Sigma_0$ 到 $\Sigma_1$的定向配边；按照约定， $\partial W$ 与$\Sigma_1 \sqcup -\Sigma_0$等同。对于 $W$，Frohman–Nicas 拓扑量子场论赋予一个从 $\wedge^* H_1(\Sigma_0)$ 到$\wedge^* H_1(\Sigma_1)$ 的 $\mathbb{Z}$-线性映射，其定义只确定到一个符号，具体如下。

- 若 $i_*\colon\ H_1(\partial W;\mathbb{Q}) \to H_1(W;\mathbb{Q})$ 不是满射（即 $W$并非“有理同调平凡”），则 $\mathcal{V}_{\mathrm{FN}}(W)$ 被定义为零。
- 若 $W$ 是有理同调平凡的，考虑差一个符号的元素

$$\begin{aligned} |K_W| := \pm|\operatorname{tors}(H_1(W))| \wedge^{\mathrm{top}} \ker(i_*\colon H_1(\partial W) \to H_1(W)) \\ \in \wedge^* H_1(\Sigma_0) \otimes \wedge^* H_1(\Sigma_1); \end{aligned}$$

  注意 $\ker i_*$ 的秩为 $g_0 + g_1$，因此上述表达式中有 $\wedge^{\mathrm{top}} = \wedge^{g_0+g_1}$。差一个符号的映射 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$ 被定义为该复合

$$\wedge^* H_1(\Sigma_0) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes|K_W|} \wedge^* H_1(\Sigma_0) \otimes \wedge^* H_1(\Sigma_0) \otimes \wedge^* H_1(\Sigma_1) \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}} \wedge^* H_1(\Sigma_1),$$

  其中 $\varepsilon\colon\ \wedge^* H_1(\Sigma_0) \otimes \wedge^* H_1(\Sigma_0) \to \mathbb{Z}$ 在 $\alpha \wedge \beta$ 不是 $\wedge^* H_1(\Sigma_0)$ 的最高次数元素时将 $\alpha \otimes \beta$ 映为零，否则将 $\alpha \otimes \beta$ 映为 $\alpha \wedge \beta$ 在 $\wedge^{\mathrm{top}} H_1(\Sigma_0) \cong \mathbb{Z}$ 的一个任意选定的基元素 $\Omega$ 上的系数。

根据 [Ker03，引理 2], Frohman–Nicas 拓扑量子场论在复合配边 $W$ 和 $W'$时满足以下“半投射的”函子性性质：

$$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W' \circ W) = \pm 0^{\mu(W',W)} \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W') \circ \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W),$$

其中 $0^0 := 1$和 $\mu(W', W) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$的定义是：对于配边 $W$，令 $b(W)$ 等于 $W$ 的连通分支数减去 $\partial W$ 的连通分支数的一半，并定义

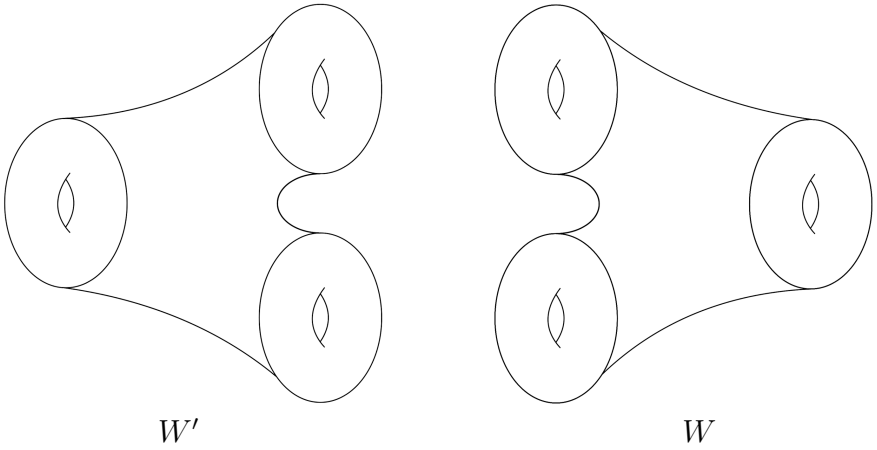



FIGURE 1. 半射影性零值出现在 Frohman–Nicas 拓扑量子场论中的一个典型例子。

$\mu(W', W) := b(W' \circ W) - b(W') - b(W)$。图1展示了$\mu(W', W)$ 非零的一个典型例子；在这种情况下，我们有 $b(W) = b(W') = -1/2$，而 $b(W' \circ W) = 0$，因此$\mu(W', W) = 1$。

文献中，$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}$ 与去范畴化边界 Heegaard Floer 同调之间的关系适用于满足 $W\colon \Sigma_0 \to \Sigma_1$ 且 $W$ 连通的配边。在这种情况下，存在一个$\widehat{\text{边界 Heegaard Floer 不变量 CFDA}}(W)$，它是一种特定类型的双模。根据 Hom–Lidman–Watson [HLW17] 的结果，可以得出$\widehat{\text{CFDA}}(W)$] 的“去范畴化” [，即一个从 $\wedge^* H_1(\Sigma_0)$到 $\wedge^* H_1(\Sigma_1)$的差一个符号的映射，与 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$一致。

遵循 Petkova 和 Hom–Lidman–Watson 的工作，要确立去范畴化边界 Heegaard Floer 同调与 Frohman–Nicas 拓扑量子场论之间的关系，主要分为两个步骤。第一步是对边界 Heegaard Floer 不变量 CFDA$(W)$上的某些 $\mathbb{Z}_2$ 分次给出组合解释；该解释基于 Heegaard 图中曲线的局部相交符号。证明 [HLW17，附录 A] 中抽象分次与组合分次一致的过程技术性很强，也不易推广到带边缝合情形。第二步是将采用组合分次定义的 [CFDA$(W)$], 与 Frohman–Nicas 拓扑量子场论联系起来。

**主要结果关于 $\mathbb{Z}$，不涉及 Spin$^c$ 结构。** 本文的一个目标是将第二步推广到边界缝合情形，而暂不考虑第一步。我们稍微推广了[Zar09], ，并采用以下定义。

**定义 1.3.** 一个缝合曲面 $(F, \Lambda, S^+, S^-)$是一个紧致定向曲面 $F$，配备 $\partial F$ 中的有限点集 $\Lambda$，将 $\partial F$ 划分为子集 $S^+$ 与 $S^-$，二者在 $\Lambda$的点两侧交替出现。本文要求 $F$ 的每个连通分支都与 $S^+$ 和$S^-$ 非平凡相交；特别地，$F$ 没有闭分支。我们常将$(F, \Lambda)$作为$(F, \Lambda, S^+, S^-)$的简写。

**定义 1.4.** 从缝合曲面$(F_0, \Lambda_0)$到缝合曲面$(F_1, \Lambda_1)$的缝合余边 $(Y, \Gamma, R^+, R^-)$（或简记为$(Y, \Gamma)$）是一个紧致定向三维流形 $Y$，配备 $F_1 \sqcup -F_0$ 到 $\partial Y$ 的嵌入，以及$\partial Y \setminus \text{int}(F_1 \sqcup -F_0)$中由适当嵌入的弧与圆构成的有限集 $\Gamma$，连同 $\partial\Gamma = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_0$，将 $\partial Y \setminus \text{int}(F_1 \sqcup -F_0)$划分为子集 $R^+$ 与 $R^-$，二者在 $\Gamma$ 的曲线两侧交替并满足$R^\pm \cap F_i = S_i^\pm$。我们要求 $Y$ 的每个连通分支都与 $R^+$ 和 $R^-$ 非平凡相交；特别地，$Y$ 没有闭分支。

**例 1.5.** 对于闭定向曲面 $\Sigma$ 及其上的一组带框架点 $p$（每个连通分支 $\Sigma$上各有一点），令 Sut$(\Sigma, p)$ 表示缝合曲面（$F$，$\Lambda$），其中 $F$是去掉这些点 $p$ 的一个开邻域后的补集，而 $\Lambda$ 由 $F$的每个边界分支上的两个点组成（由 $p$的框架确定）。

对于连通定向余 bordism $W\colon \Sigma_0 \to \Sigma_1$，假设 $W$ 配备了嵌入在 $W$ 中的无圈带状图 $\gamma$，其外部顶点是 $\Sigma_0$ 和$\Sigma_1$上的点 $p_i$。在一个 $\Sigma_i$ 连通且非空、另一个为空的特殊情形下，我们假设 $\gamma$ 是非空 $\Sigma_i$中的一个点 $p_i$。当 $\Sigma_i$ 都为空时，我们假设 $\gamma$ 是 $W$中的一个点。如果 $W$ 不连通，则假设$W$ 的每个连通分支都配备了上述无圈带状图，并令 $\gamma$ 为这些图的并。

令 Sut$(W, \gamma)$ 为缝合余边 $(Y, \Gamma)$，其中 $Y$ 是 $W$ 中 $\gamma$ 的一个管状邻域的补集，而 $Y$ 上的缝合线 $\Gamma$ 是带状图$\gamma$ 的边界（将 $\gamma$ 加厚为一个曲面后）。在 $W$ 的一个连通分支中，若其中一个 $\Sigma_i$ 连通且非空，而另一个为空，则取 $\Gamma$ 为连接 $\Lambda$ 两点的一条弧。在 $W$ 的一个闭分支中，取 $\Gamma$ 为对应 $Y$ 连通分支的 $S^2$ 边界中的一条圆。

与 [Man24b, Man24c], 中对缝合曲面 $(F, \Lambda)$ 的处理相同，我们将把 $\wedge^* H_1(F, S^+)$ 解释为 $(F, \Lambda)$ 的去范畴化的边界缝合 Heegaard Floer 不变量。注意，对于一个闭定向曲面 $\Sigma$，若 $(F, \Lambda) := \text{Sut}(\Sigma, p)$，则对任意选择的 $p$，$F$ 的每个边界分支上都有一个 $S^+$ 区间。我们有 $H_1(\Sigma) \cong H_1(F) \cong H_1(F, S^+)$，因此 $\mathcal{V}^{\text{FN}}(\Sigma)$ 与 $\wedge^* H_1(F, S^+)$ 有典范同一。

设 $(Y, \Gamma)$ 是一个缝合余边，其从缝合曲面 $(F_0, \Lambda_0)$ 到缝合曲面 $(F_1, \Lambda_1)$。在定义 4.3 中，作出弧图 $\mathcal{Z}_i$（表示 $(F_i, \Lambda_i)$）以及 Heegaard 图（表示 $(Y, \Gamma)$）等额外选择后，我们将使用基于交点的分次，定义一个组合替代物 $\widehat{[\text{BSDA}(Y, \Gamma)]}^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$，它是一个在符号意义下定义的 $\mathbb{Z}$-线性映射，从 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$ 映到 $\wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$，用以表示 $(Y, \Gamma)$ 的“实际”去范畴化带边缝合 Heegaard Floer 不变量 $[\text{BSDA}(Y, \Gamma)]$（该不变量只有在对 $(Y, \Gamma)$ 施加比此处更强的假设时才有定义）。

**注 1.6.** 对于闭连通曲面 $\Sigma_i$ 之间的连通余边 $W$，CFDA$(W)$ 的先验定义取决于如例 1.5 中所示的 $\gamma$ 的选择；例如参见 [LOT10, 节 1.2]。例如，如果二者均非空，那么 CFDA$(W)$ 取决于从 $\Sigma_0$ 到 $\Sigma_1$ 的带框架的弧 $\gamma$ 的选择。如果二者均为空，我们有通常的依赖关系，即

$\widehat{\text{CFDA}}(W) = \widehat{\text{HF}}(W)$ 取决于基点的选择。一般而言，若令 $(Y, \Gamma) = \text{Sut}(W, \gamma)$，则有

$$[\widehat{\text{CFDA}}(W)] = [\widehat{\text{BSDA}}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$$

由构造可知（使用 $[\text{CFDA}(W)]$ 的组合分次），其中 $\widehat{\text{CFDA}}(W)$ $\gamma$ 的定义隐式地使用了给定的 $\gamma$ 选择。

为陈述将不带 Spin$^c$ 结构的 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 与缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论联系起来的主定理，令

$$K = \operatorname{rank} H_1(F_0, S_0^+) + \operatorname{rank} H_1(F_1, S_1^+) + \chi(Y, R^+).$$

我们将在命题 6.1 中证明，假设 $H_2(Y, R^-) = 0$，则有 $\operatorname{rank}\ker(i_*) \le K$，且等号成立当且仅当 $H_2(Y, R^+) = 0$。注意，由 Poincaré–Lefschetz 对偶性，条件 $H_2(Y, R^-) = 0$ 等价于要求 $H^1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0) = 0$，或者（由普遍系数定理）要求 $H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0)$ 是有限的。在这种情况下，我们有

$$|H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0)| = |H^2(Y, R^-)| = |\operatorname{tors}(H_1(Y, R^-))|.$$

**定理 1.7.** 若 $H_2(Y, R^-) = 0$，考虑这个差一个符号的元素

$$\begin{aligned}|K_{Y,\Gamma}| &:= \pm|H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0)| \wedge^K \ker(i_*\colon H_1(F_0 \sqcup F_1, S_0^+ \sqcup S_1^+) \to H_1(Y, R^+)) \\ &\subset \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \otimes \wedge^* H_1(F_1, S_1^+);\end{aligned}$$

注意，若 $\operatorname{rank}\ker(i_*) < K$（即 $H_2(Y, R^+) \neq 0$），则 $|K_{Y,\Gamma}| = 0$；而若 $\operatorname{rank}\ker(i_*) = K$（即 $H_2(Y, R^+) = 0$），则 $\wedge^K \ker(i_*)$ 可视为一个差一个符号的元素，而非子空间。若 $H_2(Y, R^-) \neq 0$，令 $|K_{Y,\Gamma}| := 0$。差一个符号的映射 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 与复合相一致

$$\begin{aligned}\wedge^* H_1(F_0, S_0^+) &\xrightarrow{\text{id}\otimes|K_{Y,\Gamma}|} \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \otimes \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \otimes \wedge^* H_1(F_1, S_1^+) \\ &\xrightarrow{\varepsilon\otimes\text{id}} \wedge^* H_1(F_1, S_1^+)\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon$ 的定义同定义 *1.2*，映射的张量积 $f \otimes g$ 按照符号规则计算 $(f \otimes g)(x \otimes y) := (-1)^{|f||y|} f(x) \otimes g(y)$。此处，$\wedge^j H_1(F_i, S_i^+)$ 中元素的次数定义为 $j$；注意，映射 $\varepsilon$ 的次数为 $n_0 := \text{秩}\, H_1(F_0, S_0^+)$。

我们将定理 1.7 中的复合 $(\varepsilon\otimes\text{id})\circ(\text{id}\otimes|K_{Y,\Gamma}|)$ 视为定义“缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论” $\mathcal{V}^{\text{FN}}_{\text{sut}}$ 在缝合余边 $(Y, \Gamma)$ 上的取值。本文引言后文和 $\widehat{\text{BSDA}}$ 第 7 节将讨论这一缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的函子性；在证明这些性质时，与定理 1.7 中的 $[\text{BSDA}]$ 之间的关系尤其有用。

**例 1.8**。对于一个满足定义 1.4 假设的普通（非带边界）缝合三维流形 $(Y, \Gamma)$（即 $Y$ 的每个连通分支都与 $R^+$ 和 $R^-$ 均有非平凡交集），将 $(Y, \Gamma)$ 视为从 $\emptyset$ 到其自身的缝合余边，因此 $\mathcal{V}^{\text{FN}}_{\text{sut}}(Y, \Gamma)$ 可以视为

$\mathbb{Z}/_{\pm 1}$中的一个元素。我们有

$$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)=\begin{cases}\pm|H_1(Y,R^+)| & \text{if } H_2(Y,R^+)=H_2(Y,R^-)=0;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

为了证明定理 1.7，我们先证明以下引理，它类似于 [Pet18 的定理 4]。

**引理 1.9**。对于一个“单侧”的缝合余边 $(Y,\Gamma)$，从 $(\emptyset,\emptyset)$ 到 $(F,\Lambda)$，按照通常术语，记 $[\widehat{\mathrm{BSD}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 为元素 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\in\wedge^*H_1(F,S^+)$（相差一个符号）。我们有

$$[\widehat{\mathrm{BSD}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}=|K_{Y,\Gamma}|$$

相差一个符号，其中 $|K_{Y,\Gamma}|\in\wedge^*H_1(F,S^+)$ 的定义与定理 *1.7* 中相同。

为了证明引理 1.9，我们将一般缝合余边 $(Y,\Gamma)$ 对应的 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 与定理 5.7 中 Florens–Massuyeau 的亚历山大函子 [FM15] 在 $\mathbb{Z}$ 上的一个缝合版本联系起来。这种联系还使我们能够证明，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 在整体符号意义下与其定义中所作的选择无关，例如 $(F_i,\Lambda_i)$ 的弧图选择以及 $(Y,\Gamma)$ 的 Heegaard 图选择。在第 6 节中，我们由定理 5.7 的单侧情形推导出引理 1.9。

由引理 1.9 可知，定理 1.7 的证明方法是：针对一般的缝合余边（$Y$，$\Gamma$），从（$F_0$，$\Lambda_0$）到（$F_1$，$\Lambda_1$），具体分析$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$与 $[\widehat{\mathrm{BSDD}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}:=[\widehat{\mathrm{BSD}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$这两种定义之间的差异；后一种定义是将（$Y$，$\Gamma$）视为从（$\emptyset$，$\emptyset$）到（$-F_0\sqcup F_1$，$\Lambda_0\sqcup\Lambda_1$）的单侧余边来定义的。这一论证在很大程度上沿用了 [HLW17]的方法。

我们还将说明缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论如何恢复普通的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论。设 $W\colon\Sigma_0\to\Sigma_1$ 是闭曲面之间的一个配边（不对连通性作任何假设），并令（$F_i$，$\Lambda_i$）$=\mathrm{Sut}(\Sigma_i)$ 和（$Y$，$\Gamma$）$=\mathrm{Sut}(W,\gamma)$，其中任取无圈带状图 $\gamma$，如例 1.5 所示。我们将在下文第 6 节证明以下命题。

**命题 1.10**。在识别 $\wedge^*H_1(\Sigma_i)\cong\wedge^*H_1(F_i,S_i^+)$下，定理 *1.7* 中与 $(Y,\Gamma)$ 相关联的“缝合 *Frohman– Nicas* 拓扑量子场论”复合与 *Frohman– Nicas* 拓扑量子场论不变量 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$一致。

**注 1.11**。命题 1.10 表明，映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 恢复了 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的全部内容，而不仅仅是其在连通曲面和配边上的限制。在这一一般框架下，Frohman–Nicas 拓扑量子场论的半射影函子性变得相关；对于配边 $W$和 $W'$，有时我们有 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W')\circ\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)\neq 0$，但 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W'\circ W)=0$。另一方面，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 的函子性更加透明，并且如下文所述，我们总有

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}((Y',\Gamma')\circ(Y,\Gamma))]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}=[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y',\Gamma')]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\circ[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$$

相差一个符号。对此差异可以作如下解释：给定 $W$和 $W'$，令 $(Y,\Gamma)$ $=$Sut$(W,\gamma)$，以及 $(Y',\Gamma')$ $=$Sut$(W',\gamma')$，其中 $\gamma$ 和 $\gamma'$ 是任意选择的无环带状图。条件 $\mu(W',W) = 0$ 等价于要求粘合 $\gamma$和 $\gamma'$时，所得结果 $\gamma'\circ\gamma$仍然是无环的；例如，在图1中，$\gamma'\circ\gamma$ 将不是无环的。因此，半射影性零恰好出现在 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}$ 的函子性公式中，即当 $(Y',\Gamma')\circ(Y,\Gamma)$ 不再等同于对某个位于 $W'\circ W$ 中的无环带状图 $\tilde{\gamma}$所得到的 Sut$(W'\circ W,\tilde{\gamma})$ 时；复合 $(Y',\Gamma')\circ(Y,\Gamma)$ 是 Sut$(W'\circ W,\gamma'\circ\gamma)$，但 $\gamma'\circ\gamma$不是无环的。从这个意义上说，将 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$ 重新解释为 $\widehat{[\quad]}\mathrm{BSDA}(\mathrm{Sut}(W,\gamma))^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(\mathrm{Sut}(W,\gamma))$ 修正了半射影性。在 [Ker03] 中，半射影性被视为“非半单”拓扑量子场论的一个特征；这或许表明，除了 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}$ 之外的其他非半单拓扑量子场论也可能在缝合框架下得到富有成效的重新诠释。

**缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论作为对称幺半函子。** $\widehat{[\quad]}\mathrm{BSDA}(Y,\ \Gamma)^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$这一视角有助于研究定理 1.7 中 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的缝合类比的函子性。通过具体计算，我们将证明，与缝合配边 $(Y,\ \Gamma)$ 相关联的映射 $\widehat{[\quad]}\mathrm{BSDA}(Y,\ \Gamma)^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$在相差一个符号的意义下满足函子性，且不存在半投射性零点，也没有连通性限制。有了这一结果，我们自然会问：映射 $\widehat{[\quad]}\mathrm{BSDA}(Y,\ \Gamma)^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 是否能像通常的拓扑量子场论公理那样，组装成一个对称幺半函子，将以不交并为对称幺半结构的配边范畴映到以张量积为对称幺半结构的阿贝尔群范畴。我们将证明，只要恰当地选取定义域和陪域的对称幺半范畴，这一结论便成立。

**定义 1.12**。令 $\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 为对称幺半范畴，其对象为 $(F,\Lambda)[d]$，其中 $(F,\Lambda)$ 是一个缝合曲面，且 $d\in\mathbb{Z}$。我们将 $d$ 视为向下平移 $d$ 的次数，因此当我们定义 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F,\Lambda)[d])$ 时，直和项 $\wedge^k H_1(F,S^+)$ 将被置于次数 $k-d$ 上。

$\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 中从 $(F_0,\Lambda_0)[d_0]$ 到 $(F_1,\Lambda_1)[d_1]$ 的态射是一个从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合余边 $(Y,\Gamma)$，如上所述（忽略次数平移），并按配边的同构取等价类。复合采用通常的余bordism的粘合。对象 $(F,\Lambda)[d]$ 上的恒等协边为 $(F\times[0,1],\Lambda\times[0,1])$ $=:$ $(\mathrm{id}^{(F,\Lambda)},\Gamma_{\mathrm{id}})$，其定向方式使得 $F\times\{0\} = -F$ 和 $F\times\{1\} = F$（我们将 $[0,1]$ 看作右侧为 0、左侧为 1）。对象上的幺半群结构是不交并，并将次数平移相加；态射上的幺半群结构是不交并。对于 $(F,\Lambda)[d]$ 和 $(F',\Lambda')[d']$，对称化算子为 $((F\sqcup F')\times[0,1],(\Lambda\sqcup\Lambda')\times[0,1])$，其入边界与 $-(F\sqcup F')$ 识别，出边界与 $F'\sqcup F$ 识别，使用显然的识别。

**定义 1.13.** 令 $\mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}_{\pm1}$ 为对称幺半范畴，其对象为 $\mathbb{Z}$ 分次阿贝尔群 $V_*=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}V_k$。从 $V_*$ 到 $W_*$ 的态射是任意次数的齐次映射，模去乘以 $\pm1$的等价关系，并配以通常的复合与恒等态射。对象上的幺半群结构为 $\mathbb{Z}$ 分次阿贝尔群的通常张量积。

态射上的幺半群结构定义为

$$(f \otimes g)(x \otimes y) := (-1)^{|f||y|} f(x) \otimes g(y);$$

由于我们在态射上模掉整体符号，交换律成立，因此得到一个幺半群范畴。 $V_*$ 与 $W_*$ 的对称化算子是“超”对称化算子 $v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$。

关于 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 的对称幺半函子结构的主定理如下。

**定理 1.14.** 以下数据定义了一个对称幺半函子 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$，从$\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$到$\mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}_{\pm 1}$ 。

- 在对象上， $\mathcal{V}_{\mathrm{FNsut}}((F,\Lambda)[d])$ 是一个 $\mathbb{Z}$次分次阿贝尔群，其在次数 $k$上的直和项为 $\wedge^{k+d} H_1(F, S^+)$。
- 对于从$(F_0,\Lambda_0)[d_0]$ 到$(F_1,\Lambda_1)][d_1]$的态射$(Y,\Gamma)$， $\mathcal{V}FNsut\,(Y,\Gamma)$是一个从 $\wedge^* H_1(F_0,S_0^+)$ 到 $\wedge^* H_1(F_1,S_1^+)$的差一个符号的映射，由定理 *1.7* 中涉及$|K_Y,\Gamma|$的复合确定；等价地，$\mathcal{V}FNsut\,(Y,\Gamma) = [\widehat{\quad} BSDA(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}} comb$。作为未分次阿贝尔群之间的映射， $\mathcal{V}FNsut\,(Y,\Gamma)$与次数平移 $d_i$无关。只有映射 $\mathcal{V}FNsut\,(Y,\Gamma)$的次数取决于 $d_i$。
- 幺半群函子的结构映射

$$\Phi_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']} : \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F,\Lambda)[d]) \otimes \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F',\Lambda')[d']) \to \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F \sqcup F', \Lambda \sqcup \Lambda')[d+d'])$$

  将 $\alpha \otimes \beta$ 映到 $(-1)^{d|\beta|}\alpha \wedge \beta$。直观地说，我们将 $\alpha$ 视为“$\alpha$ 个 $d$ 奇变量”，将 $\beta$ 视为“$\beta$ 个 $d'$ 奇变量”；那么在构造 $\alpha \wedge \beta$时， $\alpha$ 的 $d$ 个奇变量必须越过 $\beta$ 移到右侧，从而产生符号 $(-1)^{d|\beta|}$。[1]

**注 1.15**。 对于一个普通协边 $W\colon \Sigma_0 \to \Sigma_1$ 以及 $\gamma$的任意无环选择，令 $(F_i,\Lambda_i) = \mathrm{Sut}(\Sigma_i, (\partial\gamma) \cap \Sigma_i)$。如第 6 节所示，我们可以将 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$ 解释为

$$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(\mathrm{Sut}(W,\gamma))\colon \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F_0,\Lambda_0)[0]) \to \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F_1,\Lambda_1)[0])$$

而不预先加入任何次数平移。这样做时， $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$ 有时是奇态射。另一方面，在 Geer–Young [GY25], 中，来自未卷绕 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的拓扑量子场论，其目标对称幺半范畴在超向量空间之间只有偶态射。这或许表明， $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(W)$ 最自然的解释是

$$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(\mathrm{Sut}(W,\gamma))\colon \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F_0,\Lambda_0)[g_0]) \to \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F_1,\Lambda_1)[g_1]),$$

它始终是偶态射。

**注 1.16**。 在 [Man24c 和 Man24a], 中，缝合曲面（$F$， $\Lambda$）的次数平移（一般取 $\mathbb{Q}$ 值）是基于（$F$， $\Lambda$）的拓扑结构以及对某些参数取值的选择来定义的。 [Man24a] 的设定与本文最为接近；而在 [Man24c]中， $\mathbb{Q}$-次数平移和奇偶移位分别定义，其中 $\mathbb{Q}$-次数对于

[1]与 [Man24c，注 1.1], 进行比较，其中的约定略有不同：奇变量被放在左侧，而不是右侧。

“超”符号无关，奇偶移位始终等于一个与亏格无关的量加上 $H_1(F,\ S^+)$ 的秩。相比之下，在 [Man24a], 中，$\mathbb{Q}$-次数平移取决于拓扑数据以及单个参数 $A\in\mathbb{Q}$；该平移通常为整数，在这种情况下，“超”符号的奇偶移位取为 $\mathbb{Z}$-次数平移模 2。当 $A=1/2$ $\mathbb{Q}$-次数平移等于一个与亏格无关的量减去 $H_1(F,\ S^+)$ 秩的一半时，这与注 1.15 中 $g_i=(1/2)(2g_i)$ 的平移一致。

$\mathbb{Q}$ 的次数平移在 [Man24a] 中作用于阿贝尔群 $\wedge^* H_1(F,P)$，其中 $P$ 在 $S^+$（圆或区间）的每个连通分支中各包含一个点；此群与 $\wedge^* H_1(F',(S^+)')$ 相同，其中 $(F',\Lambda')$ 是将 $(F,\Lambda)$ 中所有 $S^+$ 圆替换为一对由一个 $S^+$ 区间和一个 $S^-$ 区间组成的对象后得到的。注意，如果 $F$ 的所有连通分支都与 $S^+$ 非平凡相交，那么所有连通分支也都与 $(S^+)'$ 和 $(S^-)'$ 非平凡相交，因此 $(F',\Lambda')$ 满足本文的拓扑假设。如果 $F$ 连通、亏格为 $g$ 且只有一个边界分支，并且完全置于 $S^+$ 中，那么 [Man24a] 的次数平移为 $-g$，与注 1.15 一致。此平移作用于 $\wedge^* H_1(F',(S^+)')$，并且有 $(F',\Lambda')=\mathrm{Sut}(\Sigma_g,P)$，其中 $\Sigma_g$ 是闭的，而 $P$ 被视为 $\Sigma_g$ 中的一个点。

注 1.17. 我们在此简要讨论对偶。对于一个缝合曲面 $(F,\Lambda)$，$\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 中各种次数移位对象 $(F,\Lambda)[d]$ 对所有 $d\in\mathbb{Z}$ 都同构，因此我们只考虑 $(F,\Lambda)=(F,\Lambda)[0]$。对象 $(F,\Lambda)$ 和 $(-F,\Lambda)$ 在 $\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 中互为对偶；具体而言，恒等协边 $(\mathrm{id}_{(F,\Lambda)},\Gamma_{\mathrm{id}})$ 可视为从 $(F,\Lambda)\sqcup(-F,\Lambda)$ 到 $\emptyset$ 的配边，也可视为从 $\emptyset$ 到 $(-F,\Lambda)\sqcup(F,\Lambda)$ 的配边。这些配边满足三角恒等式，因而构成 $\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 中 $(F,\Lambda)$ 与 $(-F,\Lambda)$ 之间对偶性的求值态射和余求值态射。

由于 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 是一个对称幺半函子，将 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 应用于这些求值协边和余求值协边，会得到 $\mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}_{\pm1}$ 中 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(F,\Lambda)$ 与 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(-F,\Lambda)$ 之间对偶性的求值映射和余求值映射。在边界 Floer 的术语中，$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$这些配边相当于⌒ ⌒[BSAA] 和 [BSDD] 恒等协边的；去范畴化的恒等配边的 DD 双模和 AA 双模给出这种对偶性这一事实，也被 Hom–Lidman–Watson 在 [HLW17, 第 4 节3]中使用。我们的构造有一个优点：对我们而言，恒等配边的对偶映射⌒ ⌒“[BSAA] 和 [BSDD] ”本身就是函子性拓扑量子场论结构的一部分；它们是 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 应用于 $\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$中的求值协边和余求值协边的。

最后，我们指出，对于一个缝合曲面 $(F,\ \Lambda)$，可以将 $(F\times S^1,\ \Lambda\times S^1)$ 视为从 $\emptyset$ 到 $\emptyset$ 的缝合余边。我们有 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F\times S^1,\ \Lambda\times S^1))\in\mathbb{Z}_{\pm1}$，可将其计算为求值映射与余求值映射的复合。可以证明，这一复合给出分次阿贝尔群 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(F,\ \Lambda)$ 各齐次分量秩的交错和；在退化情形 $H_1(F,\ S^+)=0$ 中，此和为 $\pm1$，否则为零。相应地，若 $H_1(F,\ S^+)$ 非零，则 $H_2(F\times S^1,\ S^+\times S_1)$ 也非零，因此 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}((F\times S^1,\ \Lambda\times S^1))=0$，如例 1.8 所示。

自旋$^c$ **结构**。设 $W$ 是 $K$ 中一个纽结的补集，将其视为从 $\emptyset$到 $\Sigma=T^2$的配边。只确定到符号的元素 $|K_W|=\wedge^{\mathrm{top}}\ker(i_*\colon H_1(\Sigma)\to H_1(W))$

位于 $\wedge^* H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}$的中间直和项中；它是 $H_1(\Sigma) = \wedge^1 H_1(\Sigma)$ 内$K$ 的塞弗特经线的类。这个类所编码的数据不足以恢复 $K$的亚历山大多项式；通常的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论只能通过更复杂的分次迹构造来观察 $K$的亚历山大多项式，而该构造实际上并不属于函子性拓扑量子场论结构。

Florens–Massuyeau [FM15]定义了 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的一个扭版本，称为亚历山大函子，其对如上所述的纽结补空间 $W$ 的不变量确实能看到 $K$ 的亚历山大多项式。他们的亚历山大函子 $\mathbf{A}_G$ 将不变量赋予配备了从其基本群到一个固定的有限生成自由阿贝尔群 $G$ 的同态的配边。特别地，人们可以专注于某个特定配边 $W$，并取 $G = H_1(W)/\operatorname{tors}(H_1(W))$，而不考虑亚历山大函子在其他配边上的取值。

设 $(Y,\Gamma)$ 是从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合余边。对于涉及 Spin$^c$结构的结果，我们将假设 $Y$是连通的；只需在符号记账上稍作处理，便可利用上文所讨论的对称幺半函子结构中出现的不交并符号模式，将其推广到不连通情形。

令 $H := H_1(Y)$ 且 $G = H/\operatorname{tors}(H)$。令 $\overline{Y} \xrightarrow{p} Y$ 为 $Y$ 的最大自由阿贝尔覆盖，使得 $Y \xrightarrow{p} Y$ 的 Deck 群为 $G$。令 $\overline{F}_i = p^{-1}(F_i)$ 且 $\overline{S_i^+} = p^{-1}(S_i^+)$；注意，$\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(F_i,\ S_i^+)$ 与 $H_1(F_i,\ S_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G]$ 非规范同构。

利用与 $(Y,\ \Gamma)$ 相关的缝合流形上的 Spin$^c$ 结构，我们将定义一种去分类化的带边缝合不变量

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[G]}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_0,\overline{S}_0^+) \to \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+),$$

该不变量先验上取决于弧图和 Heegaard 图等选择，并将其与 Florens–Massuyeau 的亚历山大函子的一种版本联系起来；对于此处选择的 $G$，将其应用于 $(Y,\ \Gamma)$。通过与亚历山大函子的关系，我们将看到，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\ \Gamma)]^{\mathbb{Z}[G]}_{\text{组合}}$ 与这些选择无关，至多相差一个 $\pm G \subset \mathbb{Z}[G]$ 的乘子。

令 $\overline{R^+} = p^{-1}(R^+)$。我们将考虑的亚历山大函子版本基于有限表示的 $\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(Y,\ R^+)$。令

$$d = -\chi(Y,R^+) = \operatorname{rank} H_1(Y,R^+) - \operatorname{rank} H_2(Y,R^+). \tag{1}$$

注意，我们还有

$$d = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{Y},\overline{R}^+) - \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}[G]} H_2(\overline{Y},\overline{R}^+)$$

因为（正如我们将看到的） $H_*(\overline{Y},\overline{R}^+)$ 可以由一个自由 $\mathbb{Z}[G]$-模链复形计算得到；该链复形在每个次数上的基元素数量，与用于计算 $H_*(Y,R^+)$ 的自由 $\mathbb{Z}$-模链复形相同（这些复形仅在次数 1 和 2 上非零）。

当 $H_2(\overline{Y},\ \overline{R}^+) \neq 0$ 时，亚历山大函子将定义为零，映射$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\ \Gamma)]^{\mathbb{Z}[G]}_{\text{组合}}$ 也将为零，因此假设 $H_2(Y,\ R^+) = 0$，从而

$$d = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{Y},\overline{R}^+).$$

在这种情况下，$\overline{H_1(\overline{Y},\ R^+)}$ 存在一个亏格为 $d$ 的单射表示矩阵 $M$，其定义在 $\mathbb{Z}[G]$ 上（亏格定义为生成元数减去关系数，即 $M$ 的行数减去列数；“单射”表示 $M$ 的核为零）。

**定义 1.18**。与 Lescop [Les98], 一样，定义亚历山大函数

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}\colon \wedge^d_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{Y},\overline{R}^+) \to \mathbb{Z}[G],$$

该函数在所有取值同时乘以 $\pm G \subset \mathbb{Z}[G]$ 的同一元素后唯一确定；当 $H_2(Y,R^+) \neq 0$ 时，函数值为零。若 $\overline{H_2(Y,R^+)} = 0$，则任选一个单射的亏格-$d$ 表示矩阵 $M$，用于表示作为 $\mathbb{Z}[G]$-模的 $H_1(Y,R^+)$。于是 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}(u_1\wedge\cdots\wedge u_d) \in \mathbb{Z}[G]$，其中 $u_i \in H_1(Y,R^+)$，定义如下。任选一种将 $u_i$ 表示为生成元的 $\mathbb{Z}[G]$-线性组合的方式，通过在 $M$ 的右侧添加新列 $u_1,\ \ldots,\ u_d$ 来构造一个方阵，并取其行列式，即 $\mathbb{Z}[G]$ 的一个元素。正如我们将在命题 10.5 中看到的，更改表示矩阵 $M$ 会使 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}$ 的所有取值同时乘以 $\pm G \subset \mathbb{Z}[G]$ 的同一元素。

现在令 $n_1 = \operatorname{rank} H_1(F_1,S_1^+)$ 和 $c = n_1 + \chi(Y,R^+)$。注意，$d = -\chi(Y,R^+) = n_1 - c$。定义一个映射

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)\colon \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_0,\overline{S}_0^+) \to \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+),$$

在相差一个 $\pm G$ 的乘法因子意义下良定义，并且由方程可知其次数为 $c$

$$\omega(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)\otimes \mathrm{id})(x\otimes y)) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}\left(\bar{i}_*(x)\wedge \bar{i}_*(y)\right)$$

其中 $x \in \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_0,\overline{S}_0^{\pm})$、$y \in \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+)$，映射

$$\wedge\colon \wedge^p_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+) \otimes \wedge^q_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+) \to \wedge^{n_1}_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+)$$

当 $p+q=n_1$ 时，将 $z\otimes w$ 映射到 $z\wedge w$，否则映射为零；$\omega$ 是自由 $\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(F_1,S_1^+)$ 上任意选取的体积形式，$\bar{i}_*$ 表示从 $H_1(F_i,S_i^+)$ 到 $H_1(Y,R^+)$ 的包含诱导映射，而亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}$ 定义为：对于 $d'\neq d$，它在 $\wedge^{d'} H_1(Y,R^+)$ 中的输入上取零。注意，根据我们的符号约定，上述方程中的 $(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes \mathrm{id})(x\otimes y)$ 应解释为 $(-1)^{|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)||y|}\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)(x)\otimes y$，其中 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 的次数 $|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)|$ 为 $c$。

我们在 $G = H/\mathrm{tors}(H)$ 的情形下得到的主要 Spin$^c$ 结果如下。

**定理 1.19**。我们有

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[G]}_{\mathrm{comb}} = \mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)$$

相差一个 $\pm G \subset \mathbb{Z}[G]$ 的乘法因子。特别地，若 $H_2(Y,R^+)\neq 0$，则两边均为零。

**注 1.20**。上文提到的定理 5.7 是证明引理 1.9 的关键步骤，它是定理 1.19 的 $\mathbb{Z}$-类似版本；在亚历山大函子这一侧，我们有一个映射 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$，它基于一个$\mathbb{Z}$-系数缝合亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}$。遵循 Zarev 对带边界

Floer不变量可视为缝合 Floer 不变量之和的解释 [Zar10], , 在 $\mathrm{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 的定义中出现的量 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*x \wedge i_*y)$，可自然地解释为一个明确的符号乘以某个缝合 Floer 同调群的欧拉示性数；相关的缝合流形由 $(Y,\Gamma)$ 与右侧和左侧的“Zarev帽”配对得到，这些帽分别对应于 $x$ 和 $y$的选择。见下文推论 8.20。在 $\mathbb{Z}[G]$ 情形下，这一解释将构成我们证明定理 1.19 的重要部分；我们将用到 Friedl–Juhasz–Rasmussen 对缝合 Floer 同调欧拉示性数的分析，其中考虑了 Spin$^c$ 结构09] 。

**中的挠元** $H_1(Y)$。如上所述，设 $(Y,\Gamma)$ 是从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的连通缝合余边；设 $H = H_1(Y)$。我们不必像之前那样转到 $G = H/T$，其中 $T = \mathrm{tors}(H)$；也可以令 $\widehat{Y} \xrightarrow{\pi} Y$ 为 $Y$ 的最大阿贝尔覆盖，其中 $\widehat{R}^+ = \pi^{-1}(R^+)$ $\widehat{F}_i = \pi^{-1}(F_i)$，且 $\widehat{S}_i^+ = \pi^{-1}(S_i^+)$。我们将看到，在我们用于 $C_*(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+)$ 的胞腔模型中，只有 1-胞腔且微分为零，因此存在一个非典范同构$H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+) \cong H_1(F_i,S_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H]$，它是 $\mathbb{Z}[H]$-模之间的同构。我们将定义

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}\colon \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_0,\widehat{S}_0^+) \to \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)$$

这先验地取决于诸如弧图和 Heegaard 图之类的选择。

**注1.21**。 根据我们的结果可知，$[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合在定义中所作选择的不同，仅会导致结果相差 $\mathbb{Q}[H]$中的单位元之乘法。这并非我们所能期待的最强独立性结论；我们预计，$[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合在不同选择下仅相差 $\pm H \subset \mathbb{Z}[H]$的乘法，并且可以通过分析 $[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合在 Heegaard变换下如何变化来证明这一点。不过，我们将此留待今后研究，因为这在很大程度上与本文的目标无关。

与 Turaev 的最大阿贝尔挠量理论一样，我们可以如下理解群环 $\mathbb{Q}[H]$。对于任意特征 $\chi$: $T \to \mathbb{C}^*$，都有一个相应的代数同态$\mathbb{Q}[T] \to \mathbb{C}$，其像是一个分圆域 $\mathbb{F}_\chi$。若选取一个分裂 $H \cong T \oplus G$，便得到一个从 $\mathbb{Q}[H] = (\mathbb{Q}[T])[G]$ 到 $\mathbb{F}_\chi[G]$的同态，我们仍将其记作 $\chi$。特别地，$\mathbb{F}_\chi[G]$ 是一个 $\mathbb{Z}[H] \subset \mathbb{Q}[H]$上的模。

设（$\chi_1$，……，$\chi_m$）为特征$\chi$: $T \to \mathbb{C}^*$的模等价关系的完全代表元集，其中特征 $\chi$ 与 $\chi'$ 等价，若 $\mathbb{F}_\chi = \mathbb{F}_{\chi'}$ 且 $\chi'$ 是 $\chi$ 与 $\mathbb{F}_\chi$ 在 $\mathbb{Q}$上的伽罗瓦自同构的复合。特别地，我们取 $\chi_1$ 为平凡特征，故 $\mathbb{F}_{\chi_1} = \mathbb{Q}$。则

$$(\chi_1,\ldots,\chi_m)\colon \mathbb{Q}[H] \to \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$$

是 $\mathbb{Q}$-代数（以及 $\mathbb{Z}[H]$-模）的同构。

将复形$\widehat{\quad}\widehat{\quad}\widehat{\quad}\widehat{\quad}C_*(Y,R^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H]$（分别为 $C_*(Y,R^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$）的同调群记为 $H_*(Y,R^+;\mathbb{Q}[H])$（分别为 $H_*(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])$）。

**定义 1.22**。设 $d$ 如方程 (1) 中所定义。对于 $1 \le i \le n$，定义亚历山大函数

$$\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]} \colon \wedge^d_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]} H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \to \mathbb{F}_{\chi_i}[G],$$

定义良好，差一个乘以 $\mathbb{F}^*_{\chi_i} \cdot G \subset \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 的（整体）因子；若 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \neq 0$，则令其为零。若 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$，则按定义 1.18 定义 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$，，但将 $\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(Y, \overline{R^+})$ 替换为 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$-模 $H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$。

注意，模 $H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$，因此亚历山大函数 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$，，取决于将 $H$ 分裂为 $T \oplus G$ 的方式。不过，下面的定义给出的亚历山大函数将被证明与分裂方式的选择无关。

**定义 1.23**。定义亚历山大函数

$$\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Q}[H]} \colon \wedge^d_{\mathbb{Q}[H]} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]) \to \mathbb{Q}[H],$$

定义良义，差一个乘以 $\mathbb{Q}[H]$ 中单位元的（整体）因子，即为复合

$$\begin{aligned}\wedge^d_{\mathbb{Q}[H]} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]) &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \wedge^d_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]} H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \\ &\xrightarrow{\oplus_i \mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}} \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G] \\ &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}[H]\end{aligned}$$

其中所有箭头都使用同一个分裂选择 $H \cong T \oplus G$ 定义。

用 $H_*(F_i, S_i^+; \mathbb{Q}[H])$ 表示复形 $C_*(\widehat{F}_i, \widehat{S}_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H]$ 的同调群。我们将看到，$H_*(F_i, S_i^+; \mathbb{Q}[H]) \cong H_*(\widehat{F}_i, \widehat{S}_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H]$ 是典范的。定义一个映射

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y, \Gamma) \colon \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_0, S_0^+; \mathbb{Q}[H]) \to \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$$

在 $\mathbb{Q}[H]$ 中除相差单位元因子外定义良好，且次数为 $c$，其定义为

$$\omega(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y, \Gamma) \otimes \mathrm{id})(x \otimes y)) = \mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Q}[H]}\left(\widehat{i}_*(x) \wedge \widehat{i}_*(y)\right)$$

与 $\mathbb{Z}[G]$ 情形相同；这里 $\widehat{i}_*$ 表示从 $H_1(F_i, S_i^+; \mathbb{Q}[H])$ 到 $H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H])$ 的包含诱导映射，而 $\omega$ 是自由 $\mathbb{Q}[H]$-模 $H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$ 的任意体积形式。在 $[\widehat{\mathsf{BSDA}}]$ 一侧，我们将从 $[\widehat{\mathsf{BSDA}}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}[H]}{}_{\mathrm{comb}}$ 定义

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathrm{comb}} \colon \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_0, S_0^+; \mathbb{Q}[H]) \to \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$$

通过从 $\mathbb{Z}[H]$ 到 $\mathbb{Q}[H]$。考虑到 $H$ 中的挠元后，我们的主要 $\mathrm{Spin}^c$ 结果如下。

**定理 1.24**。我们有

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathrm{comb}} = \mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y, \Gamma)$$

除以 $\mathbb{Q}[H]$ 中的单位元外。

**注 1.25**。 转到 $\mathbb{Q}[H]$ 对于在 $H$ 具有挠元时的一般连通配边（$Y$，$\Gamma$）建立上述关系至关重要。如果我们改为在 $\mathbb{Z}[H]$上工作，那么每当 $H_2(\widehat{Y},\ \widehat{R}^+) \neq 0$时，将 BSDA( $[\widehat{\quad\quad}(Y,\ \Gamma)$ $]^{\mathbb{Z}[H]}{}_{\mathrm{comb}}$ 与 $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}[H]}(Y,\ \Gamma)$联系起来的类似结果便$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$不成立；只有当 $H_2(Y,\ R^+) = 0$ 时，该理论才成立。另见注 10.10。

**补充说明**。 这里我们作一些补充说明。

**注 1.26**。 本文中的大多数拓扑量子场论映射仅在整体符号意义下定义。我们不尝试消除这种符号歧义的一个原因是，要得到对称幺半函子，我们需要一个作为映射目标的对称幺半目标范畴。在这个目标范畴中，我们希望允许 $\mathbb{Z}$ 分次阿贝尔群之间的偶映射与奇映射（类似于超向量空间）；如注 1.15 所述，在普通的非缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论中，这一点或许可以避免，但在缝合版本中则无法避免。若不模去整体符号，偶映射与奇映射合在一起并不构成幺半群范畴，因为交换律不成立；相反，成立的是 Brundan–Ellis [BE17] 中所述的“超”交换律。

值得注意的是，在 Kerler [Ker03], 中，从 Hennings 拓扑量子场论的角度看，采用 2-框架余边时，符号歧义得以消除。在我们的情形中，也许可以加入 2-框架来消除符号歧义；但鉴于上述关于幺半群范畴的问题，我们在此不再进一步探讨这种可能性。

另一方面，Hom–Lidman–Watson 利用带边 Heegaard Floer 同调中所作的选择，为配边的 Frohman–Nicas 拓扑量子场论映射指定一个符号；见[HLW17，第2节。1]。然而，在这些符号下，余边映射并非严格函子性的；复合仅在相差一个整体符号的意义下得到保持。

**注记 1.27.** 在 [Pet18], 的引言中，Petkova 提到，一个带边流形（例如边界为 $\Sigma$）若在其内部另配有一条纽结，则可赋予带边 Heegaard Floer 不变量（minus 版与 hat 版），并带有额外的“内部”$\mathbb{Z}$-分次，其去范畴化取值于 $\wedge^* H_1(\Sigma)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$。从带边缝合视角来看，应当可以把 hat 版解释为通过挖去该纽结而得到的相关缝合余边的带边缝合不变量；额外的 $\mathbb{Z}$-分次应来自该缝合余边上的 Spin$^c$ 结构。不过，我们在此不展开细节。

**注记1.28.** 在 [Man24b、Man24c、Man24a], 中，缝合曲面比本文所考虑的更一般；它们允许包含全-$S^+$ 连通分支、全-$S^-$ 连通分支以及闭分支。这类缝合曲面无法用弧图表示，因此本文通常不考虑它们，但请参见下文的注记1.32。

**注 1.29**。 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的缝合视角与文献中的多种现象十分契合：

- 在将 Frohman–Nicas 拓扑量子场论与 Hennings 拓扑量子场论联系起来时，Kerler [Ker03] 采用的范畴中，对象是带有一个边界分支的（连通）曲面，而非闭曲面。更一般地说，带非空边界的曲面也在 Kerler–Lyubashenko 关于带角三维流形的非半单拓扑量子场论中发挥着核心作用 [KL01]。

- Florens–Massuyeau 也使用 $F_g$ 带一个边界分支的连通曲面，并选取一个基点 $\star$ 于 $\partial F_g$ （我们会将 $\star$ 加粗以得到一个 $S^+$ 区间）。对于配备了同态 $\varphi$ （其定义域为 $H_1(F_g)$，值域为有限生成自由阿贝尔群 $G$）的对象 $(F_g, \star)$，他们赋予其一个 $\mathbb{Z}[G]$-模 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1^{\varphi}(F_g, \star)$，而非（例如）$\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1^{\varphi}(F_g)$，这与我们使用相对同调 $H_1(F, S^+)$相一致。

- 对于一个连接两个连通闭曲面的双侧配边 $W$，若有一条弧 z 位于 $W$中并连接两个边界分支，[HLW17，定理 4.5]给出的前因子为$|H_1(W, \partial W \cup \mathsf{z})|$；不能将其替换为 $|H_1(W, \partial W)|$，因为 $H_1(W, \partial W)$是无限的。若令 $\gamma$ 表示 z 的任意框架，并令 $(Y, \Gamma) = \mathrm{Sut}(W, \gamma)$，其中 $(F_i, \Lambda_i)$ 按相应方式定义，那么 $|H_1(W, \partial W \cup \mathsf{z})|$ 就与我们的缝合前因子$|H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0)|$一致。

- 例 1.5 中的带状图令人联想到 de Renzi [DR22], 中那类非半单拓扑量子场论里的带状图，其中一个例子是 Geer–Young 的$\mathcal{D}^{q,\ int}$ 拓扑量子场论，见 [GY25]。在 [DR22] 和 [GY25], 的框架中，拓扑量子场论定义范畴中的态射是配备了着色带状图和满足容许性准则的上同调类的三维余边界。我们将 Frohman–Nicas 形式体系推广到缝合余边，特别是通过对例 1.5 作显然的推广，为配备带状图的三维余边界给出了 Frohman–Nicas 风格的映射。

**注释 1.30.** 定理 1.19 和定理 1.24 中的映射在函子性方面存在一个基本问题；与缝合曲面 $(F,\ \Lambda)$ 相关联的态空间取决于配边 $(Y,\ R^+)$，而不仅仅取决于 $(F,\ \Lambda)$。Florens–Massuyeau 的方法是为配备了从其第一同调群到某个固定有限生成自由阿贝尔群（记作 $G_{\mathrm{FM}}$）的同态 $\varphi$ 的配边赋予不变量。对于任意固定的 $G_{\mathrm{FM}}$，总存在某些配边，其 $H_1$ 的秩大于 $G_{\mathrm{FM}}$的秩，因此这种方法总会在某些配边上丢失信息。

更具普适性的方法（如庞特里亚金对偶）是尝试取 $G_{\mathrm{FM}} = U(1)$或 $\mathbb{C}^*$，尽管这些阿贝尔群并非有限生成。这样一来，曲面和配边所携带的额外数据就会是 [GY25]中的上同调类。值得注意的是，Costantino–Gukov–Putrov在[CGP23, 第5节2] 中从一般角度讨论的“装饰拓扑量子场论”，同样定义在由上同调类装饰的曲面和配边上。

**注 1.31.** 本文讨论维数为 $2{+}1$ 的拓扑量子场论结构；相比之下，第一作者的论文 [Man24b, Man24c, Man24a] 表明，缝合曲面的态空间 $\wedge^* H_1(F, S^+)$ 满足粘合性质，类似于维数为 $1{+}1$ 的开闭拓扑量子场论中的情形，

其取值为代数和双模。在这种低维拓扑量子场论结构中，一个 $S^+$ 区间被赋予代数 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$；带有 $m$ $S^+$ 个区间的缝合曲面被赋予 $\wedge^* H_1(F, S^+)$，并将其视为 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes m}$ 上的模，同时还明确描述了代数作用。

若能将本文的构造与 [Man24b、Man24c、Man24a] 统一起来，构建某种维数为 1+1+1的二维函子性“扩展”拓扑量子场论结构，将是理想的。第一步可以研究：对于一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边 $(Y, \Gamma)$，差一个符号的映射 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(Y, \Gamma)$ 在何种条件下会与$\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$上的某些 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$作用相交织，并与 $\wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$ 上的相应作用相交织。例如，若 $(Y, \Gamma)$ 的 $R^+$ 区域包含一条带，它连接 $F_0$ 的一个 $S^+$ 区间 $I_0$ 与 $F_1$ 的一个 $S^+$ 区间 $I_1$，那么可以考察 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(Y, \Gamma)$ 是否将 $I_0$ 上的 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$作用与 $I_1$ 上的 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$作用相交织。我们将这个问题留待未来研究。

**注记1.32**。当 $F$ 具有 $S^+$ 个圆时，[Man24a] 中存在一种更为复杂的模结构，其中既涉及圆的作用，也涉及区间的作用。选取一个点集 $P$，使每个 $S^+$圆上各有一个点；于是，对于每个 $S^+$区间，$\wedge^* H_1(F, P)$ 具有 $\mathbb{Z}[E]/(E^2) = U_{\mathbb{Z}}^+(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的作用；对于每个 $S^+$圆，具有 $\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE) = U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的作用。

等价地，我们可以通过将 $F$的每个 $S^+$圆替换为一对由一个 $S^+$区间和一个 $S^-$区间组成的对象，构造一个缝合曲面（$F', \Lambda'$）；我们有 $\wedge^* H_1(F, P) = \wedge^* H_1(F', (S^+)')$，因此后一个群对于 $F$的 $S^+$ 个区间具有 $U_{\mathbb{Z}}^+(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的作用，对于 $F$的 $S^+$ 个圆具有 $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的作用。

随后，我们可以为 $S^+$ 连通分支 $F$选择着色，即为 $F$ 的每个 $S^+$ 区间选择一个$U_{\mathbb{Z}}^+(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上的模，并为 $F$的每个 $S^+$ 圆选择一个 $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上的模。如果我们将 $\wedge^* H_1(F', (S^+)')$ 与这些相应代数上的模进行张量积，就会得到一个“带色缝合曲面”的拓扑量子场论态空间。

这些态空间与 [GY25], 中的态空间更为接近；在后者中，曲面上的穿孔由 Geer–Young 的“展开”版本 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的某些表示着色，其中 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$。如果我们通过同态$\varphi$: $H_1(F) \to \mathbb{C}^*$引入上同调类，如注释 1.30 中所述，那么合理的设想是，我们可以在态空间 $\wedge^* H_1^{\varphi}(F', (S^+)')$ 上得到某种类似于 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的作用，从而（通过在 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ 上取张量积）得到带色缝合曲面的态空间，其着色方式与 [GY25] 中的相同。我们希望这些态空间至少能恢复 Geer–Young 的态空间中的某个子集；参见 [Man24c、Man24a]，其中针对 $\varphi$ 为平凡情形提出了更具体的猜想。我们还注意到，在 [Mik15，第5节 5.2.2], 中，Mikhaylov 将“$\mathfrak{psl}(1|1)$ Chern–Simons 拓扑量子场论”（一种物理学构造，Geer–Young 的拓扑量子场论旨在作为其数学实现）在零亏格穿孔曲面上的态空间描述为扭曲相对同调群的外代数。

与 [Man24b、Man24c、Man24a], 不同，本文研究的是三维余 bordism 的不变量，而不仅仅是维数为 $\leq 2$ 的不变量，因此我们希望本文的结果能够超越态空间，并以 Frohman–Nicas 的风格，对 Geer–Young 拓扑量子场论的部分三维内容给出一种初等的同调构造，而该理论

目前是通过涉及普适构造的更间接方法来定义的。不过，我们将这项研究留待未来工作。

结构安排。第 2 节回顾有关弧图和 Heegaard 图的背景材料，这些图表示缝合曲面和缝合配边。第 3 节讨论由 Heegaard 图得到的 CW 分解。第 4 节利用额外的选择集 $\Xi$ 定义 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$。第 5 节将 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 与 Florens–Massuyeau 的亚历山大函子的一个缝合版本联系起来，并证明 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 除整体符号外与选择 $\Xi$ 无关。第 6 节证明引理 1.9 和定理 1.7，建立 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 与缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论之间的联系。第 7 节建立缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的对称幺半结构。第 8 节讨论 Zarev帽及其与缝合 Floer 同调的关系。第 9 节定义 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 的 Spin$^c$ 版本 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}[G]}$ comb 和 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Q}[H]}$ comb；第 10 节则将这些版本与 Florens–Massuyeau 的亚历山大函子的缝合版本联系起来，其中系数分别取在 $\mathbb{Z}[G]$ 和 $\mathbb{Q}[H]$ 上。

**致谢**。 作者感谢 Tye Lidman 和 Gw´ena¨el Massuyeau 就相关问题进行了有益的交流。第一作者获得了美国国家科学基金会 DMS-2151786 和 DMS-2502205 项目的资助。

## 2. Background

**2.1. 弧图与缝合曲面**。 满足定义 1.3 中假设的缝合曲面可以用称为弧图的组合数据表示。我们首先回顾其表示方式。

**定义2.1**。 一个弧图 $\mathcal{Z}=(\mathbf{Z},\ \mathbf{a}\sim,\ t)$由以下数据组成：

- 一个紧致定向一维流形$\mathbf{Z}=\bigsqcup_i Z_i$，由有限个定向闭区间和定向圆组成 $Z_i$；
- 一个集合$\mathbf{a}$，由$\mathbf{Z}$ 中的有限个互异点组成（区间分支的边界上没有点$\mathbf{Z}$），其中 $|\mathbf{a}|=2k$ 对某个 $k\geq 0$成立；
- 一个等价关系（“二对一匹配”） $\sim$，定义在$\mathbf{a}$ 上，其等价类的大小均为 2；
- 选择 $t$ $\mathcal{Z}$ 是否为“$\alpha$-弧图”（称为 $t=\alpha$），或为“$\beta$-弧图”（称为 $t=\beta$）。

我们将$\mathbf{Z}$ 的区间和圆竖直绘制，并将区间的箭头朝上。对于$\alpha$-弧图，我们将圆绘制为顺时针定向；对于 $\beta$-弧图，则将圆绘制为逆时针定向。我们通过用一条弧连接每个等价类中的两个点来表示等价关系 $\sim$，这条弧称为匹配弧。对于 $\alpha$-弧图，我们将匹配弧绘制为红色，并放在$\mathbf{Z}$的左侧；对于 $\beta$-弧图，则将匹配弧绘制为蓝色，并放在$\mathbf{Z}$的右侧。

图2左侧给出了一个 $\alpha$-弧图的示例，右侧给出了一个 $\beta$-弧图的示例。为突出我们允许**Z**中既有圆也有区间，图2中的 $\alpha$-弧图在**Z**中同时包含一个圆和一个区间。

**注 2.2.** Zarev [Zar10] 中的图 7 展示了更多 $\alpha$-弧图和$\beta$-弧图的示例。Zarev 使用的视觉约定略有不同；他将 $\alpha$-弧画在**Z**的右侧，将 $\beta$-弧画在**Z**的左侧，因此，为了符合我们的约定， [Zar10 的图7] 应在平面内左右翻转。关于我们为何更改约定，请参见注 2.5 和注 2.14。

**注 2.3.** 弧图的数据中不包含匹配弧的定向以及匹配弧集合的排序等信息；必要时我们会在之后选择此类数据。

**定义 2.4** （参见 [Zar09] 的第 2.1 节）. 若 $\mathcal{Z} = (\mathbf{Z}, \mathbf{a} \sim, t = \alpha)$ 是一个 $\alpha$-弧图，则与之相关联的缝合曲面 $F(\mathcal{Z}) = (F, \Lambda)$ 的定义 $\mathcal{Z}$ 在我们的约定下如下所示。

- 从由矩形和环带的不交并构成的$\mathbf{Z} \times [0, 1]$开始。为$\mathbf{Z} \times [0, 1]$ 定向，使$\mathbf{Z} \times \{0\}$ 上的诱导定向与$\mathbf{Z}$ 的定向一致，而$\mathbf{Z} \times \{1\}$ 上的诱导定向与 $Z_i$上的定向相反。

- 令 $\Lambda$ 为 $\partial\mathbf{Z} \times \{1/2\}$。令 $S^+$ 为

$$(\partial\mathbf{Z} \times [0, 1/2]) \cup (\mathbf{Z} \times \{0\});$$

  注意到 $S^+$ 与**Z**同胚，且**Z** 上的定向与 $S^+$上的边界定向一致。

- 对于 $\sim$的每个等价类，在$\mathbf{Z} \times \{1\}$ 上该等价类的两个点处，以可定向的方式附加一个二维 1-把手。注意，如果这样的柄添加发生在所构造曲面的单个连通分支内，那么附加该把手只有一种可定向的方式；而如果柄添加连接曲面的两个先前分离的连通分支，那么两种附加方式得到的曲面同构。因此，进行柄添加时，无须指定该等价类中各点上的框架。

注意， $S^-$ 是对其进行手术（手柄添加的边界效应）后得到的 1-流形

$$(\partial\mathbf{Z} \times [1/2, 1]) \cup (\mathbf{Z} \times \{1\}).$$

如果 $\mathcal{Z}$ 是 $\beta$-弧图而不是 $\alpha$-弧图（$t = \beta$），我们通过对 $\alpha$ 情形下的定义作如下修改来定义 $F(\mathcal{Z})$：保持$\mathbf{Z} \times [0, 1]$的定向不变，但将手柄添加施加于$\mathbf{Z} \times \{0\}$，而非$\mathbf{Z} \times \{1\}$。此时， $S^-$与**Z** 同胚，而 $S^+$ 由手术得到；**Z** 上的定向与 $S^-$上的边界定向相反。

图2展示了一个与 $\alpha$-弧图相关联的缝合曲面示例；图中所示的 $\beta$-弧图也对应同一个缝合曲面。我们通常

将带有余维 2 角的 $F(\mathcal{Z})$ 描绘出来，以强调 $F(\mathcal{Z})$ 的构造方式。这些角可以唯一地（在微分同胚意义下）光滑化，从而得到一个具有 $S^1$ 个边界分支的光滑曲面。

**注 2.5**。 Zarev 在 $F(\mathcal{Z})$ 上所取的定向，与定义 2.4 中指定的定向相反；解释见注 2.14。若按照我们在平面上绘制弧图 $\mathcal{Z}$ 时采用的视觉约定，将平面中的弧图加厚，并赋予其作为 $\mathbb{R}^2$ 中一个区域的标准定向，就会得到 $F(\mathcal{Z})$ 上的正确定向。Zarev 的视觉约定及其对 $F(\mathcal{Z})$ 的定义也同样如此。

[Zar10] 的图8展示了与 [Zar10 的图 7] 中弧图相对应的缝合曲面；若要采用我们的约定，应将 [Zar10 图 8] 左侧的曲面在平面内左右镜像，并反转其定向，使镜像后的曲面具有作为 $\mathbb{R}^2$ 中区域的标准定向。

由定义 2.4 构造的所有缝合曲面 $F(\mathcal{Z})$ 都满足定义 1.3 的拓扑假设；事实上，在 $\mathbf{Z} \times [0,1]$ 进行手柄添加之前，每个连通分支 $Z_i \times [0,1]$都同时具有 $S^+$ 边界（例如 $Z_i \times \{0\}$）和 $S^-$ 边界（例如 $Z_i \times \{1\}$），而手柄添加绝不会产生边界避开 $S^+$ 或 $S^-$ 的曲面连通分支。反过来，我们有以下命题，并将在下文证明。

**命题 2.6**。 满足定义 *1.3*假设的每个缝合曲面（$F$、 $\Lambda$）都可以写成 $F$（$\mathcal{Z}$）的形式，其中 $F$为某个弧图 $\mathcal{Z}$，且可以取为 $\alpha$ 型或 $\beta$ 型。

存在称为弧滑动的变换，可以将同一缝合曲面（$F$， $\Lambda$）的任意两个弧图联系起来，但这里不需要用到它们。

**定义 2.7**。 设 $\mathcal{Z} =$（$\mathbf{Z}$，$\mathbf{a} \sim$，$t$）为一个弧图。

- 设 $-\mathcal{Z}$为图（$-\mathbf{Z}$，$\mathbf{a} \sim$，$t$），其中$\mathbf{Z}$ 上的定向已反转。
- 设$\mathcal{Z}$为与 $\mathcal{Z}$ 相同的图，但将类型 $t$ 从 $\alpha$ 改为 $\beta$，或反之。
- 设 $\mathcal{Z}^* =$（$\mathbf{Z}^*$，$\mathbf{a}^*$，$\sim^*$，$t^*$）为如下定义的图：首先，构造缝合曲面 $F$（$\mathcal{Z}$）。如果 $\mathcal{Z}$是一个 $\alpha$-弧图，则令$\mathbf{Z}^*$表示 $F$（$\mathcal{Z}$）的 $S^-$ 边界，但采用与边界定向相反的定向。如果 $\mathcal{Z}$ 是一个 $\beta$-弧图，则令$\mathbf{Z}^*$ 表示 $F$（$\mathcal{Z}$）的$S^+$ 边界，并采用边界定向。令 $\mathbf{a}^*$ 表示在 $F$（$\mathcal{Z}$）的定义中添加的**1**-手柄的带圈（每个带圈含两个点）的并集。令 $\sim^*$ 为一个等价关系，其等价类就是这些带圈。令$t^*$ 为 $t$的相反类型，即如果 $t = \alpha$，则 $t^* = \beta$，反之亦然。我们称 $\mathcal{Z}^*$ 为与对偶的弧图。

[Zar10] 中的图 7 展示了对于一个 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$，弧图 $-\mathcal{Z}$、 $\mathcal{Z}$ 和 $-\mathcal{Z}$。从 $\mathcal{Z}$ 构造 $\mathcal{Z}^*$ 的过程如图 2 所示。

**命题 2.8.** 定义 *2.7* 中对弧图 $\mathcal{Z}$ 进行的操作，会对缝合曲面 $F(\mathcal{Z})$产生以下影响。

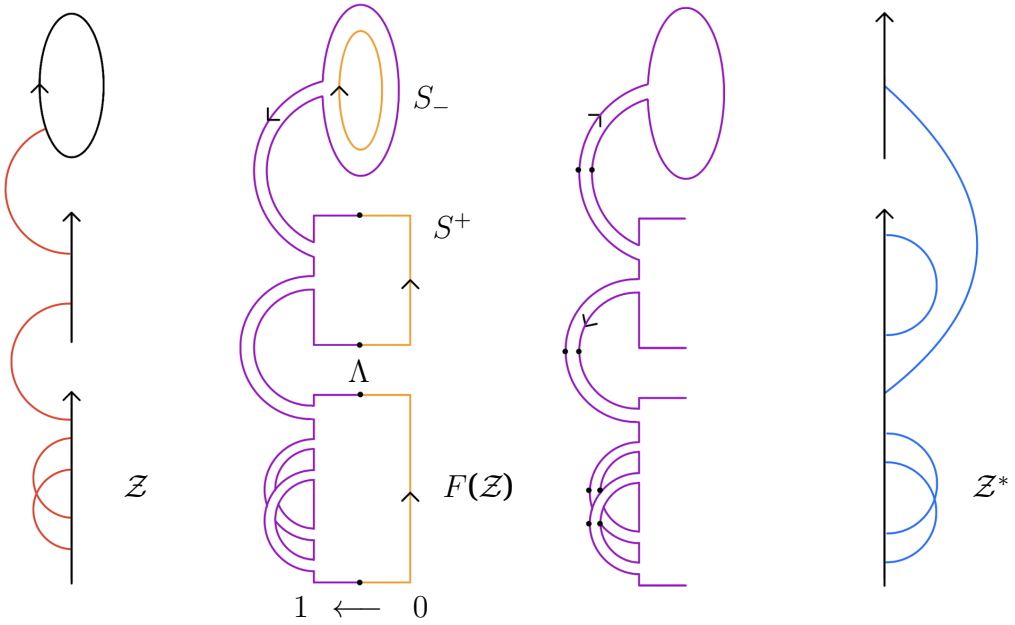



FIGURE 2. 从左至右：一个 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$；与之关联的缝合曲面 $F(\mathcal{Z})$（我们将 $S^+$ 画成橙色，将 $S^-$ 画成紫色）；标示出带圈且边界定向反转的 $S_-$；以及与 $\mathcal{Z}$对偶的 $\beta$-弧图 $\mathcal{Z}^*$。

- 我们有 $F(-\mathcal{Z}) = -F(\mathcal{Z})$，其中，对于缝合曲面 $(F, \Lambda)$，记 $-(F, \Lambda)$ 为同一缝合曲面，但将 $F$ 的定向反转，同时保持 $S^+$ 和$S^-$ 的角色不变。

- 我们有 $F(\overline{\mathcal{Z}}) = \overline{F(\mathcal{Z})}$，其中，对于缝合曲面 $(F, \Lambda)$，我们用$(F, \Lambda)$ 表示$\overline{(F, \Lambda)}$，其 $F$ 的定向反转，且 $S^+$ 与 $S^-$ 的角色互换。
- 我们有 $F(\mathcal{Z}^*) = F(\mathcal{Z})$。

Zar10] 中的图8 [展示了 Zar10 的图 7] 中， [所对应的弧图 $\mathcal{Z}$、 $-\mathcal{Z}$、 $\overline{\mathcal{Z}}$ 和 $-\overline{\mathcal{Z}}$ 的缝合曲面；为符合我们的约定，应按注 2.5 修改 Zarev 的视觉约定。

命题 *2.6* 的证明。 只需证明 $(F, \Lambda)$ 连通时结论成立。首先假设 $F$ 没有 $S^+$ 区间。在这种情况下，根据曲面分类，$(F, \Lambda)$ 由以下数据刻画：

- 一个亏格 $g \geq 0$;
- 若干个 $p \geq 1$ 边界圆;
- 若干个 $q \geq 1$ 边界圆。

图3顶部所示的 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$ 表示 $(F, \Lambda)$；相应的图 $\mathcal{Z}^*$ 是一个表示 $(F, \Lambda)$ 的 $\beta$-弧图。

现在假设 $F$ 至少有一个 $S^+$ 区间。在这种情况下，根据曲面分类，$(F, \Lambda)$ 由以下数据刻画：

- 一个亏格 $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

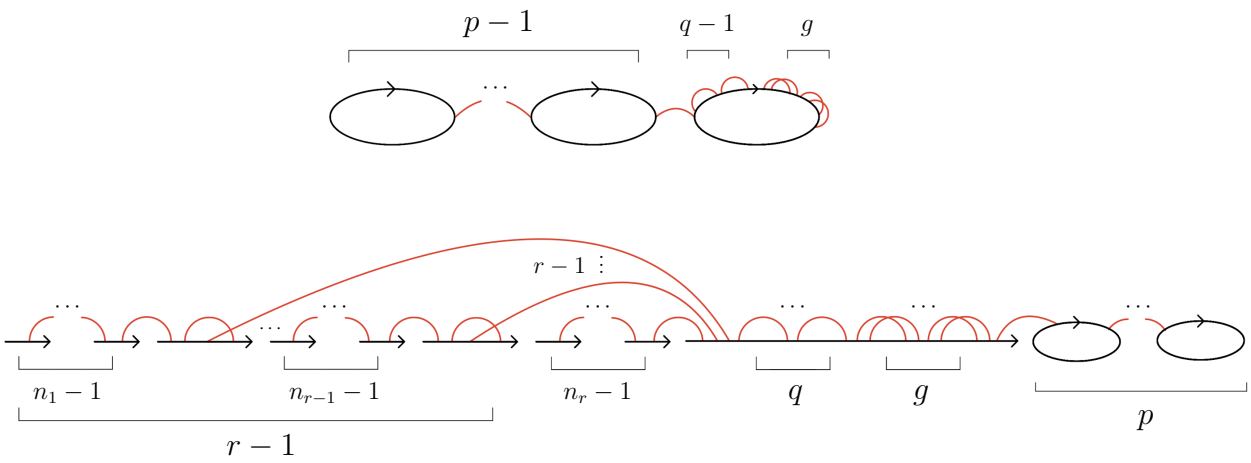



FIGURE 3. 上图：一个亏格为 $g$ 的缝合曲面 $(F,\Lambda)$ 的弧图，其中没有$S^+$区间。下图：一个亏格为 $g$ 的缝合曲面 $(F,\Lambda)$ 的弧图，其 $r$ 混合边界圆上有 $(\sum_{i=1}^{r} n_i)$ 个 $S^+$ 区间。为节省空间，上述弧图相对于定义2.1中的约定顺时针旋转了 $90^\circ$ 。

- 若干个 $p \geq 0$ 边界圆;
- 若干个 $q \geq 0$ $S^-$ 边界圆;
- 若干个同时含有 $S^+$ 区间和 $S^-$ 区间的“混合”边界圆;
- 对于 $1 \leq i \leq r$，混合边界圆上有若干个 $S^+$ 区间。

图3底部所示的 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$ 表示 $(F,\Lambda)$ ；相应的图 $\mathcal{Z}^*$ 是一个 $\beta$-弧图，表示 $(F,\Lambda)$ 。□

## 2.2. **Heegaard 图与缝合配边。**

**定义2.9** （参见 [Zar09]的**定义 4.1**。）一个 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图$\mathcal{H} = (\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \mathcal{Z}_0,\ \mathcal{Z}_1,\ \psi)$，从弧图 $\mathcal{Z}_0$（绘于右侧）到弧图$\mathcal{Z}_1$（绘于左侧），由以下数据构成:

- 一个称为 Heegaard 曲面的紧致定向曲面 $\Sigma$ ;
- 两个 $\alpha$弧图 $\mathcal{Z}_0 = (\mathbf{Z}_0,\ \mathbf{a}_0,\ \sim_0,\ t_0 = \alpha)$和 $\mathcal{Z}_1 = (\mathbf{Z}_1,\ \mathbf{a}_1,\ \sim_1,\ t_1 = \alpha)$;
- 一个保向识别 $\psi$ ，将$\mathbf{Z}_1$ 和 $-\mathbf{Z}_0$ 与$\partial\Sigma$的两个不相交子集对应；令

$$\partial_{\text{non-gluing}}(\Sigma) := \partial\Sigma \setminus \psi(\mathbf{Z}_1 \sqcup -\mathbf{Z}_0).$$

- 一个有限集 $\boldsymbol{\alpha}^a$, 位于 内，由两两不相交的嵌入弧（入射 $\boldsymbol{\alpha}$ 弧）组成，这些弧仅在端点处与 $\Sigma$相交；其端点为 $\psi(\mathbf{a}_0) \subset \psi(\mathbf{Z}_0)$，且$\mathbf{a}_0$ 中的两点在 $\sim_0$ 下匹配，当且仅当它们在 $\psi$ 下是同一条入射 $\boldsymbol{\alpha}$ 弧的两个端点;

- 一组有限个 $\boldsymbol{\alpha}^a$, 出射 的两两不相交嵌入弧（出射 $\boldsymbol{\alpha}$ 弧），位于 $\Sigma$ 中，且 $\partial\Sigma$ 仅在端点处相交，这些端点为 $\psi(\mathbf{a}_1) \subset \psi(\mathbf{Z}_1)$，使得 $\mathbf{a}_1$ 上的两个点被 $\sim_1$ 配对，当且仅当它们在 $\psi$ 下是同一条出射 $\boldsymbol{\alpha}$ 弧的两个端点,

且这些弧与入射 α 弧两两不相交；

- 有限个 $\boldsymbol{\alpha}^c$ 两两不相交的简单闭曲线（$\boldsymbol{\alpha}$ 圆圈），位于 $\Sigma$ 的内部，且与集合 $\boldsymbol{\alpha}^a$ 两两不相交：$=\boldsymbol{\alpha}^a$, 出射$\cup\boldsymbol{\alpha}^a$, 入射的 α 弧；
- 有限个 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^c$ 两两不相交的简单闭曲线（$\boldsymbol{\beta}$ 圆圈），位于 $\Sigma$ 的内部，并与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相交：$=\boldsymbol{\alpha}^a\cup\boldsymbol{\alpha}^c$ 横截地。

图 4 给出了一个 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图的例子。

**注 2.10.** 我们不将诸如 $\alpha$曲线和 $\beta$曲线的排序或定向等数据纳入 Heegaard 图的数据中；必要时，我们会在之后选定这些数据。

**定义 2.11.** 以下是 Heegaard 图的其他类型，它们是对定义2.9的简单调整或特例：

(a) $\alpha$-$\beta$ 带边、 $\beta$-$\alpha$ 带边和 $\beta$-$\beta$ 带边缝合 Heegaard 图的定义与定义 2.9 类似，区别在于，若图的右侧（分别为左侧）是 $\beta$带边的，则 $\mathcal{Z}_0$ （分别为 $\mathcal{Z}_1$）必须具有 $t_0=\beta$ （分别为 $t_1=\beta$）；此时，不再有入射（分别为出射）的 $\alpha$-弧，而是入射（分别为出射）的 $\beta$-弧；这些弧必须与 $\alpha$ 曲线横截相交，并且必须与 $\mathcal{H}$中的所有其他 $\beta$ 曲线不相交。(b) 若 $\mathcal{Z}_i$ 具有 $t_i=\alpha$ （分别为 $t_i=\beta$）和 $\mathcal{Z}_j=\emptyset$，其中 $j=i+1$ 模 2，则称 $\mathcal{H}$ 为$\alpha$带边缝合 Heegaard 图（分别为 $\beta$带边缝合 Heegaard 图）。除注 2.12 中解释的差异外，这些定义与 [Zar09，定义 4.1]，（对于 $\beta$带边图，参见 [Zar10，第 19] 页）一致。(c) 若 $\mathcal{Z}_0=\mathcal{Z}_1=\emptyset$，则称 $\mathcal{H}$ 为缝合 Heegaard 图。这与 [Juh06，定义 2.7]以及 [FJR09，定义 2.4]中的缝合 Heegaard 图一致。

**注记 2.12.** 定义2.11(b)比 Zarev 对带边缝合海加德图的定义 [Zar09, Definition 4.1] 更一般，原因有二：一是我们允许$\mathbf{Z}_i$ 中既有圆也有区间；二是我们不施加任何同调线性无关性限制（特别是，我们的 Heegaard 曲面 $\Sigma$ 可以有闭分支）。

**定义 2.13** （参见 [Zar09], 对命题 4.4 的证明）。设 $\mathcal{H}$ 是一个从 $\mathcal{Z}_0$ 到 $\mathcal{Z}_1$ 、Heegaard 曲面为 $\Sigma$的带边缝合 Heegaard 图。与 $\mathcal{H}$ 相关联的缝合余边 $Y(\mathcal{H})$从 $F(\mathcal{Z}_0)$ 到 $F(\mathcal{Z}_1)$ 由以下步骤构成。

- 将 $\Sigma$ 加厚，得到 $Y^0:=\Sigma\times[0,1]$，并定向使得在诱导的边界定向下，$\Sigma\times\{1\}$ 与 $\Sigma$ 定向相同，而 $\Sigma\times\{0\}$ 定向相反。

- 定义 $\Gamma$ 为 $\partial_{\text{非–粘合}}(\Sigma)\times\{1/2\}$。
- 将 $F(\mathcal{Z}_0)$ 与 $\partial Y^0$ 的如下子集识别：$\psi(\mathbf{Z}_0)\times[0,1]$ 与 $\Sigma\times\{1\}$中每条入射侧 $\alpha$-弧周围的一条小带的并，或者与 $\Sigma\times\{0\}$中每条入射侧 $\beta$-弧周围的一条小带的并，具体取决于 $\mathcal{H}$ 在入射侧是 $\alpha$-边界还是 $\beta$-边界。

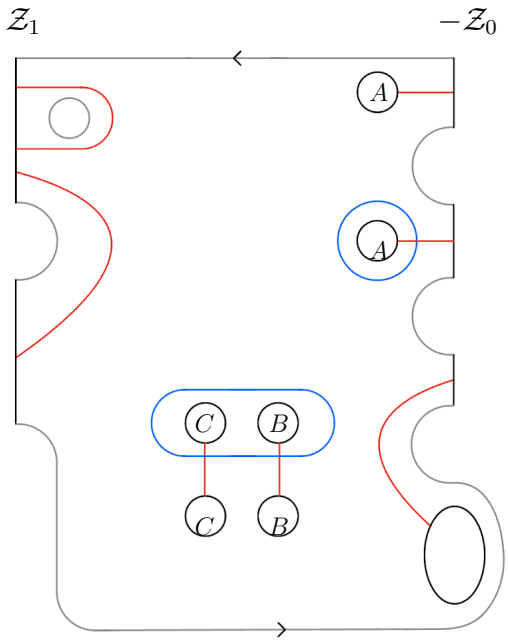



FIGURE 4. 一个从 $\mathcal{Z}_0$ 到 $\mathcal{Z}_1$的 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图 $\mathcal{H}$ 。子集 $\psi$（$\mathbf{Z}_1 \sqcup -\mathbf{Z}_0$） $\subset \partial\Sigma$ 用黑色绘制，而 $\partial_{\text{non-gluing}}$（$\Sigma$） $\subset \partial\Sigma$用灰色绘制。标记为 $A$、 $B$和 $C$ 的圆对（也用黑色绘制）应粘合在一起，形成圆柱体；图 5 展示了这种圆柱体更具三维感的图示。我们按照标准定向绘制 $\Sigma$，将其视为 $\mathbb{R}^2$的一个区域，与图 5 和注 2.14 一致。采用这一选择后，弧图绘制为朝下，而非定义2.1下方约定中的朝上；这纯粹是呈现方式上的差异，因为弧图没有优先的平面方向。

具体而言，应将子集 $\mathbf{Z}_0 \times [0,1] \subset F(\mathcal{Z}_0)$ 与 $\psi(\mathbf{Z}_0) \times [0,1] \subset \partial Y^0$ 通过映射 $\psi \times \mathrm{id}_{[0,1]}$，识别，并将 $F(\mathcal{Z}_0)$中的 1-手柄与 $\Sigma \times \{1\}$ 中入射侧 $\alpha$-弧周围的带，或 $\Sigma \times \{0\}$中入射侧 $\beta$-弧周围的带识别；随后，该识别在无关紧要的选择下唯一，且为反向保持定向。

- 类似地，将 $F$（$\mathcal{Z}_1$）与 $\partial Y^0$ 中的子集识别起来；该子集由 $\psi$（$\mathbf{Z}_1$） $\times [0,1]$以及每条出射 $\alpha$弧在 $\Sigma \times \{1\}$ 中或每条出射 $\beta$弧在$\Sigma \times \{0\}$中的一条窄带组成。该识别是保向的。
- 令

$$R_0^+ := (\partial_{\text{non-gluing}}(\Sigma) \times [0,1/2]) \cup (\Sigma \times \{0\} \setminus \operatorname{int}(F(\mathcal{Z}_1) \cup F(\mathcal{Z}_0)))$$

and

$$R_0^- := (\partial_{\text{non-gluing}}(\Sigma) \times [1/2,1]) \cup (\Sigma \times \{1\} \setminus \operatorname{int}(F(\mathcal{Z}_1) \cup F(\mathcal{Z}_0))).$$

注意，如果 $\mathcal{H}$ 是 $\alpha$-$\alpha$ 边界的，那么 $\Sigma \times \{0\}$ 与 $\operatorname{int}(F(\mathcal{Z}_1) \cup F(\mathcal{Z}_0))$ 不相交，因此在这种情况下，我们有 $R_0^+ = (\partial_{\text{non-gluing}}(\Sigma) \times [0,1/2]) \cup (\Sigma \times \{0\})$。类似地，如果 $\mathcal{H}$是 $\beta$-$\beta$ 边界的，那么 $R_0^- = (\partial_{\text{non-gluing}}(\Sigma) \times [1/2,1]) \cup (\Sigma \times \{1\})$。

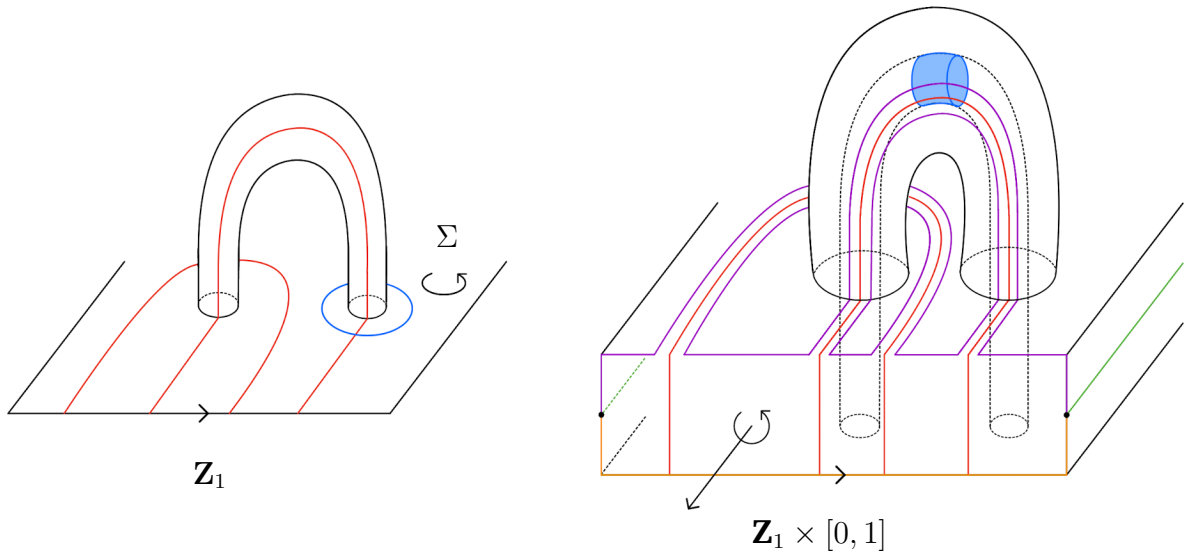



FIGURE 5. 左：带边缝合海加德图的一部分 $\mathcal{H}$ ，其 Heegaard 曲面为 $\Sigma$。右：缝合余边$Y$（$\mathcal{H}$）的出射侧或$\mathbf{Z}_1$ 侧；前方的矩形面为$\mathbf{Z}_1 \times [0,1]$。按照约定，我们通常会将 $R^+$ 涂成灰色，但在更复杂的图中，例如本图，这一约定可以放宽。

- 对每个 $\alpha$-圆和 $\beta$-圆，向 $Y^0$ 添加一个三维2-柄，其中附着在 $\alpha$- $\Sigma \times \{1\}$ 圆上的 $\alpha$ 2-柄视为位于 $\Sigma \times \{1\}$ 内部，而附着在 $\beta$- $\Sigma \times \{0\}$圆上的 $\beta$ 2-柄视为位于 $\Sigma \times \{0\}$内部。令 $Y$ 表示所得的三维流形。这些柄添加不会改变$F(\mathcal{Z}_i)$、 $\Lambda_i$和 $\Gamma$； $\alpha$ 柄添加对 $\partial Y^0$ 的影响是在 $R_0^-$上做一次手术。令 $R^- \subset \partial Y$ 表示手术后的结果。类似地， $\beta$柄添加的影响是在 $R_0^+$上做一次手术；令 $R^+ \subset \partial Y$ 表示手术后的结果。

图 5 展示了如何根据带边缝合海加德图 $\mathcal{H}$构造缝合余边 $Y$（$\mathcal{H}$），重点展示其 $\mathcal{H}$ 和 $Y$（$\mathcal{H}$）的出射侧或$\mathbf{Z}_1$ 侧。

注 2.14。我们的约定源于这样一个决定：将缝合曲面（$F, \Lambda$）的去分次化带边缝合不变量视为 $\wedge^* H_1$（$F, S^+$），而非$\wedge^* H_1$（$F, S^-$）。等价地，我们选择将 $\alpha$-弧图作为表示缝合曲面的主要方式，而非 $\beta$-弧图； $\alpha$-弧图的匹配弧给出 $H_1$（$F, S^+$）中的元素，而 $\beta$-弧图的匹配弧给出$H_1$（$F, S^-$）中的元素。相应地，对于缝合余边（$Y, \Gamma$），我们将更多关注$H_1$（$Y, R^+$），而非 $H_1$（$Y, R^-$）；对于（$Y, \Gamma$）的 $\alpha$-$\alpha$ Heegaard 图，我们将提取一个空间的相对 CW 分解，该空间与 $Y$ 同伦等价，且此分解相对于$R^+$ （而非 $R^-$，例如 [FJR09] 中所用的方式）。

定义 2.13 还采用了通常的约定：从 Heegaard 图构造缝合余边时，图的 $\alpha$ 一侧给出 $R^-$，而 $\beta$ 一侧给出 $R^+$。这一选择对应于下文定义 9.1 中我们将相对 Spin$^c$ 结构与 Heegaard 图生成元关联的方式，这也符合通常的约定。因此，

在相对于 $R^+$ 的 CW 分解中，我们希望图的 $\beta$ 圆给出 1-胞腔，而 $\alpha$ 圆给出 2-胞腔。就手柄分解而言，我们希望 $\beta$ 圆给出 1-手柄，而 $\alpha$ 圆给出 2-手柄，这与通常的约定相反。

这些选择，加上相对手柄分解或 CW 分解自“底部向上”构建这一约定，决定了我们的定向约定如下。给定一个带边缝合海加德图 $\mathcal{H}$，当我们加厚 $\Sigma$ 以开始构造 $Y(\mathcal{H})$时，我们设想（局部的一部分） $\Sigma$ 嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的 $z=0$ 平面内（其作为 $\mathbb{R}^2$子集具有通常的“逆时针”定向），并且 $\Sigma\times[0,1]$ 嵌入在 $\mathbb{R}^3$中从 $z=0$ 到 $z=1$ 的区域内。我们赋予 $\Sigma\times[0,1]$ 在 $\mathbb{R}^3$中区域通常的“右手定则”定向；这一选择决定了 $Y(\mathcal{H})$上的定向。于是，$\partial(Y(\mathcal{H}))$上的边界定向可视为 $\mathbb{R}^3$中某个区域边界上通常的“外法向量置于末位”定向。

对于弧图定向与 Heegaard 图定向之间的关系，我们额外规定 $\partial\Sigma$ 的出射子集（即左侧子集）为$\mathbf{Z}_1$，而 $\partial\Sigma$的入射子集（即右侧子集）为 $-\mathbf{Z}_0$。因此，在图 5 的左侧，$\mathbf{Z}_1$ 应从左向右定向。

我们可以将与 $F(\mathcal{Z}_1)$ 对应的 $F_1$ 上的边界定向，与 $\partial(Y(\mathcal{H}))$ 上的定向进行比较；根据外法向量规则，从图 5 的视角看，$F_1$ 取逆时针定向。因此，如果 $\mathcal{H}$ 在左侧是 $\alpha$-边界的，那么 $F_1$ （在 $z=0$ 平面中）的底部应从左向右定向，与$\mathbf{Z}_1$ 上的定向一致。换言之，对于一个 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$， $F(\mathcal{Z})$ 的 $S^+$ 区域应与$\mathbf{Z}$定向相同。

相比之下，通常的约定与上述相同，唯一不同的是将 $\alpha$ 把手加在 $\Sigma\times[0,1]$ 的底部，并将 $\beta$ 把手加在顶部；参见 [LOT08，图 4。1] 和 [LOT10，图 3]，以及 [Zar09，图 6]。因此，对于一个 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$， $F(\mathcal{Z})$ 的 $S^+$ 区域应与$\mathbf{Z}$定向相反，这也解释了我们为何在定义 2.4 中更改约定。

**注 2.15.** 在 $\mathcal{H}$ 是普通缝合海加德图的特殊情形下（此时$\mathcal{Z}_0=\mathcal{Z}_1=\emptyset$，如定义 2.11(c) 所示），与 $\mathcal{H}$ 相关联的缝合余边 $Y(\mathcal{H})$ 是一个没有带边边界的普通缝合流形，即满足 $F_0=F_1=\emptyset$。相对于 [FJR09] 和 [Juh06], 的约定，我们构造的 $Y(\mathcal{H})$ 所得的缝合流形整体定向相反，但其区域 $R^+$ 和$R^-$ 彼此重合。

由定义 2.13 构造的所有缝合协边 $Y(\mathcal{H})$ 均满足定义 1.4 的拓扑假设；事实上，定义 2.13 中三维流形 $Y^0$ 的每个连通分支都与 $R_0^+$ 和 $R_0^-$ 相交于非空集，因为 $\Sigma\times\{0\}\setminus\operatorname{int}(F(\mathcal{Z}_1)\cup F(\mathcal{Z}_0))$ 和 $\Sigma\times\{1\}\setminus\operatorname{int}(F(\mathcal{Z}_1)\cup F(\mathcal{Z}_0))$ 均非空。柄添加不会产生边界避开 $R^+$ 或 $R^-$ 的 $Y$ 连通分支。反过来，我们有如下命题。

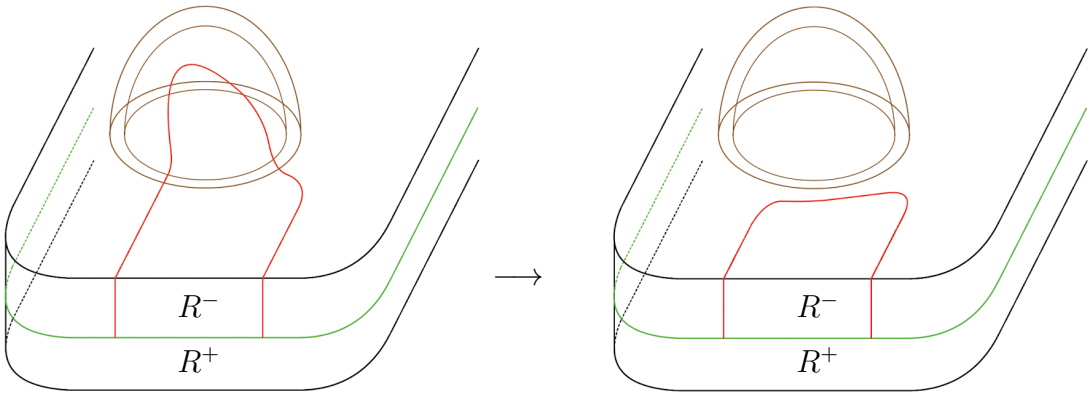



FIGURE 6. 对 $F_1$ 中一条弧进行同痕，使其避开手术过程中添加到 $R^- \setminus \Sigma$ 的圆盘$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，如命题 2.16 的证明所示

**命题 2.16.** 每个满足定义 *1.4* 假设的缝合余边 $(Y,\Gamma)$ 都可以写成 $Y(\mathcal{H})$，其中某个带边缝合海加德图为 $\mathcal{H}$，且该图可以取为类型 $\alpha$-$\alpha$、$\alpha$-$\beta$、$\beta$-$\alpha$ 或 $\beta$-$\beta$。

证明。我们首先构造一个表示 $(Y,\Gamma)$ 的 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图。令 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $(Y,\Gamma,R^+,R^-)$ 为满足 $Y=Y$、$R^+=R^+$ 和 $R^-=F_1\cup R^-\cup F_0$ 的缝合三维流形。$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$根据假设，$Y$ 的每个连通分支都与 $R^+$ 和 $R^-$ 非平凡相交。根据 Juhasz$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$[Juh06，命题 2.13]，，存在一个缝合 Heegaard 图 $\mathcal{H}=(\Sigma,\tilde{\alpha},\beta)$，它定义$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $(Y,\Gamma,R^+,R^-)$。注意，$\partial Y$的子集 $R^-$ 是通过在 Heegaard 曲面 $\Sigma$上进行手术得到的（这是添加 $\alpha$ $\widetilde{\quad}$柄所产生的边界效应）。

选取 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}_i$ 以及 $(F_i,\Lambda_i)$ 与 $F(\mathcal{Z}_i)$ 的识别。在这些识别下，$\mathcal{Z}_i$ 的匹配弧变成 $F_i$ 中的弧，因而也变成 $R^-$ 中的弧。经过同痕，我们可以 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$安排使 $R^-$ 中的这些弧避开 $R^-$ 的“新圆盘”；这些圆盘在 $\Sigma$ 中并不存在，$\widetilde{\quad}$而是在手术过程中添加的。将 $\Sigma$ 中的这些弧视为入射和出射$\alpha$-弧，我们得到一个表示 $(Y,\Gamma)$ 的带边缝合海加德图。参见图6。

对于 $\beta$-缝合图，论证是类似的，但我们使用 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$

定义 2.17（参见 [Zar09]的第 4.6 节）。设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 分别是从 $\mathcal{Z}_0$ 到 $\mathcal{Z}_1$ 以及从 $\mathcal{Z}_1$ 到 $\mathcal{Z}_2$ 的带边缝合海格图，其 Heegaard 曲面分别为 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$。设$\mathcal{Z}_1 = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{a1}, \sim_1, t_1)$。假设在它们的 $\mathcal{Z}_1$侧， $\mathcal{H}$和 $\mathcal{H}'$要么都为 $\alpha$边框型，要么都为 $\beta$边框型。通过使用给定的识别，将 $\mathcal{H}$ 的出射（左）边界 $\mathbf{Z}_1 \subset \Sigma$ 与 $\mathcal{H}'$ 的入射（右）边界$-\mathbf{Z}_1 \subset \Sigma'$ 沿 $\mathbf{Z}_1$ 及其在$\Sigma$ 和 $\Sigma'$边界上的子集之间进行粘合，我们可以得到一个从 $\mathcal{Z}_0$到 $\mathcal{Z}_2$ 的带边缝合海格图 $\mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H}$ 。 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 交界处的 $\alpha$弧或 $\beta$弧粘合后会形成闭圆。

**定义 2.18.** 若 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边，且 $(Y', \Gamma')$ 是一个从 $(F_1, \Lambda_1)$ 到 $(F_2, \Lambda_2)$ 的缝合余边，则利用 $F_1$ 到 $\partial Y$ 以及 $-F_1$ 到 $\partial Y'$ 的嵌入，沿着 $-F_1 \subset \partial Y'$ 与 $F_1 \subset \partial Y$ 之间给定的反向定向识别，将 $Y'$ 和 $Y$ 粘合，从而定义一个从 $F_0$ 到 $F_2$ 的缝合余边 $Y' \cup_{F_1} Y$。

**命题 2.19.** 若我们有两个如定义*2.17*中的带边缝合海加德图 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ ，那么

$$Y(\mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H}) \cong Y(\mathcal{H}') \cup_{F(\mathcal{Z}_1)} Y(\mathcal{H}).$$

证明. 两边表面上的主要区别是：若先将图粘合形成 $\mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H}$ ，再取 $Y(\mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H})$，乍看之下，结果似乎是将 $Y(\mathcal{H}')$ 和 $Y(\mathcal{H})$ 沿着 $\mathbf{Z}_1 \times [0,1]$ 粘合，而不是沿着更大的曲面 $F_1 = F(\mathcal{Z}_1)$ 粘合；后者还包含了围绕两侧被粘合的 $\alpha$ 弧或 $\beta$ 弧的带状区域。不过，每当 $\mathcal{H}$ 中的一条弧通过图的粘合与 $\mathcal{H}'$ 中的一条弧相接时， $\mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H}$ 中也会出现一个新的 $\alpha$ 弧或 $\beta$ 圆。在这些新圆上添加三维 2-手柄，其效果是将 $(F_1 \setminus (\mathbf{Z}_1 \times [0,1])) \subset Y(\mathcal{H})$ 与 $(F_1 \setminus (\mathbf{Z}_1 \times [0,1])) \subset Y(\mathcal{H}')$ 粘合起来，从而在缝合协边同构意义下得到 $Y(\mathcal{H}') \cup_{F(\mathcal{Z}_1)} Y(\mathcal{H})$。□

**例 2.20** （参见 [LOT10] 的构造 8.18）。设 $\mathcal{Z} = (\mathbf{Z}, \mathbf{a} \sim, t = \alpha)$ 为一个 $\alpha$-弧图，且 $(F, \Lambda) = F(\mathcal{Z})$。 $\mathcal{Z}$ 的 $\alpha$-$\beta$ 半恒等 ***Heegaard*** 图 是如下的 $\alpha$-$\beta$带边缝合海加德图 $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}, \psi)$ ：

- $\Sigma$ 是定向曲面 $F$；注意，我们可以将 $\partial\Sigma$ 写作 $\mathbf{Z} \cup_\Lambda -\mathbf{Z}^*$。将 $\Lambda$ 中的每个点 $p$ 加厚为 $\partial\Sigma$ 中的一个小闭区间 $p \times [0,1]$ ，并相应地缩小 $\mathbf{Z}$ 和 $-\mathbf{Z}^*$，使得

$$\partial\Sigma = \mathbf{Z} \cup_{\Lambda \times \{0\}} (\Lambda \times [0,1]) \cup_{\Lambda \times \{1\}} -\mathbf{Z}^*.$$

- 在输出侧（左侧）， $\psi$ 以显然的方式将 $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{Z} \subset \partial\Sigma$ 识别起来（此识别是保向的）；
- 在输入侧（右侧）， $\psi$ 以显然的方式将 $-\mathbf{Z}^*$ 与 $-\mathbf{Z}^* \subset \partial\Sigma$ 识别起来（此识别是保向的）；
- 不存在 $\alpha$-圆，且出射弧是 $\alpha$-弧，由用于从 $\mathcal{Z}$构造 $\Sigma = F$ 的二维 1-把手的核给出；
- 不存在 $\beta$-圆，入射弧是由用于从 $\mathcal{Z}$构建 $\Sigma = F$ 的二维 1-把手的余核给出的 $\beta$-弧。

$\beta$-$\alpha$ 半恒等 ***Heegaard*** 图for $\mathcal{Z}$ 是 $\beta$-$\alpha$ 带边缝合海加德图$\mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha} = (\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{Z}^*,\ \psi)$, 其中:

- $\Sigma$ 是 $F$，但其定向相反；注意，我们可以将 $\partial\Sigma$ 写成 $\mathbf{Z}^* \cup_\Lambda -\mathbf{Z}$。将 $\Lambda$ 中的每个点 $p$ 加粗为 $\partial\Sigma$ 中的一个小闭区间 $p \times [0,1]$，并相应地缩小 $\mathbf{Z}^*$ 和 $-\mathbf{Z}$，使得

$$\partial\Sigma = \mathbf{Z} \cup_{\Lambda\times\{0\}} (\Lambda \times [0,1]) \cup_{\Lambda\times\{1\}} -\mathbf{Z}^*.$$

- 在输出侧（左侧），$\psi$ 以显然的方式将 $\mathbf{Z}^*$ 与$\mathbf{Z}^* \subset \partial\Sigma$ 识别起来（此识别保向）；

- 在输入侧（右侧），$\psi$ 以显然的方式将 $-\mathbf{Z}$ 与 $-\mathbf{Z} \subset \partial\Sigma$ 识别起来（此识别保向）；
- 没有 $\beta$-圆，出射弧是 $\beta$-弧，由用于从 $\mathcal{Z}$构造 $\Sigma = F$ 的二维 1-把手的余核给出；

- 没有 $\alpha$-圆，入射弧是 $\alpha$-弧，由用于从 $\mathcal{Z}$构造 $\Sigma = F$ 的二维 1-把手的核给出。

$\mathcal{Z}$ 的两类半恒等 Heegaard 图都表示 $F(\mathcal{Z})$上的恒等缝合余 bordism。图 7 展示了图2中弧图 $\mathcal{Z}$ 的 $\alpha$-$\beta$ 与 $\beta$-$\alpha$ 半恒等 Heegaard 图。

**例 2.21** （参见 [LOT15]的定义 5.35）。 设 $\mathcal{Z}$ 为一个弧图。 $\mathcal{Z}$ 的 $\alpha$-$\alpha$ 恒等海加德图 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 是带边缝合海加德图 $\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$。

由于 $\mathcal{Z}$ 的半恒等图表示 $F(\mathcal{Z})$上的恒等缝合余 bordism，恒等海加德图亦然。我们可以类似地定义 $\beta$-$\beta$ 恒等海加德图，尽管本文不会使用它们。

下面我们证明，每一个缝合余边都可由带有一个特定分解的 Heegaard 图表示。我们将这一分解视为把一个 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图置于标准形。这一形式将贯穿全文，用以简化诸多论证，包括我们在 $\mathbb{Z}$上的主要结果定理 1.7 的证明。这一形式也为我们的构造做好准备，以便过渡到纯缝合情形（见命题 8.18），并用以定义 $[\mathrm{BSDA}]_{\mathrm{comb}}$ 的 Spin$^c$感知版本（见第 9 节）。我们在推论 4.15 中证明，在 $\mathbb{Z}$ 情形下假定这一形式至多只差一个整体符号，因而无关紧要。

**推论 2.22**。 满足定义 *1.4* 假设的每个缝合余边$(Y,\Gamma)$ 都可以写成 $Y(\mathcal{H})$ 的形式，其中 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图 $\mathcal{H}$ 具有形式$\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} := \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$，而 $\mathcal{H}'$ 是一个 $\beta$-$\beta$ 带边界的 ***Heegaard*** 图，对应于 $Y$，其左弧图为 $\mathcal{Z}_1^*$，右弧图为 $\mathcal{Z}_0^*$，分别对应两个 $\alpha$弧图 $\mathcal{Z}_0$、$\mathcal{Z}_1$。

证明。 根据命题 2.16，我们可以将 $Y$写作 $Y(\mathcal{H})$，其中 $\alpha$-$\alpha$ 是带边界的缝合 Heegaard图 $\mathcal{H}$，其左弧图为 $\mathcal{Z}_1$，右弧图为 $\mathcal{Z}_0$。令

$$\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} = \mathcal{H}_{\mathrm{id}} \cup_{\mathcal{Z}_1} \widetilde{\mathcal{H}} \cup_{\mathcal{Z}_0} \mathcal{H}_{\mathrm{id}}$$

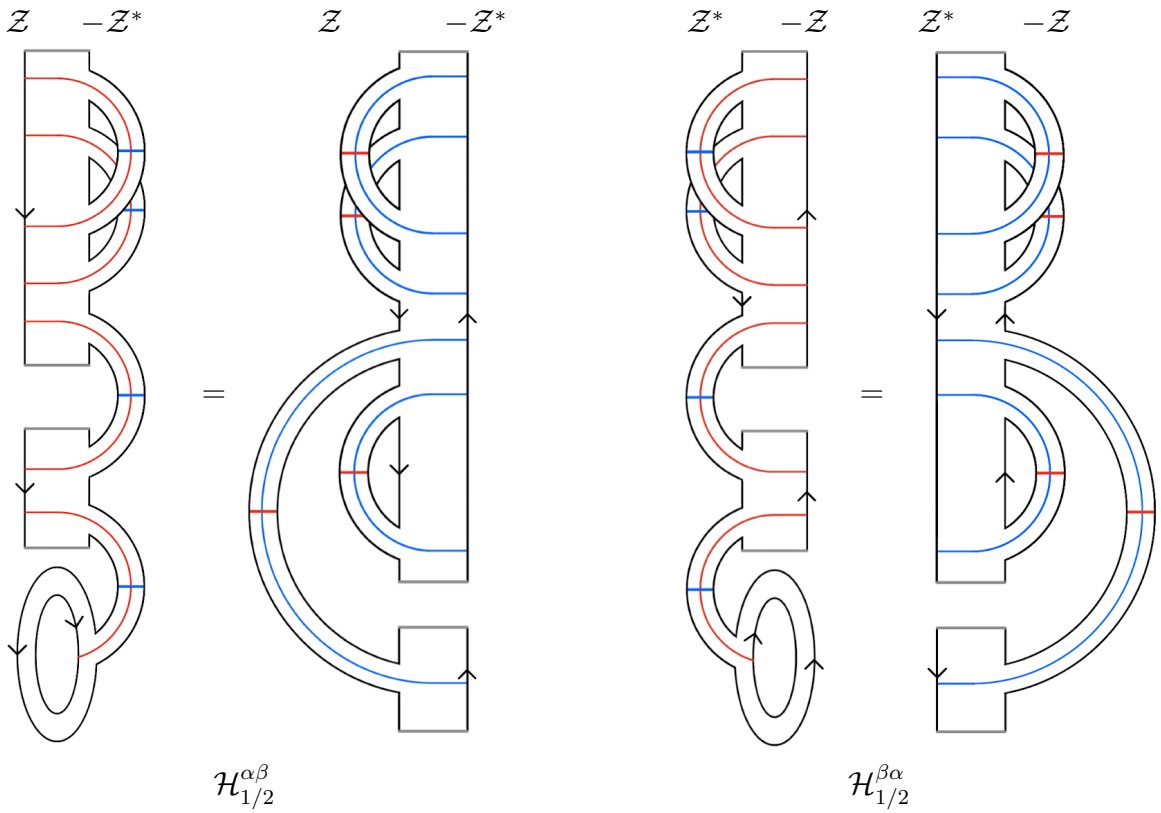



FIGURE 7. 最左侧一对：弧图 $\mathcal{Z}$ （来自图2）的 $\alpha$-$\beta$ 半恒等图的两种表示。最右侧一对：同一弧图 $\mathcal{Z}$的 $\beta$-$\alpha$ 半恒等图的两种表示。例 2.20中概述的构造先验地产生第一幅和第三幅图。我们选择展示等价的第二幅和第四幅图，因为它们更便于构造推论 2.22中出现的 $\mathcal{H}_{\text{norm}} = \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$。

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha} \cup_{\mathcal{Z}_1} \widetilde{\mathcal{H}} \cup_{\mathcal{Z}_0} \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha} \\
&= \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{H}' := \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha} \cup_{\mathcal{Z}_1} \widetilde{\mathcal{H}} \cup_{\mathcal{Z}_0} \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$。 □

**注记 2.23.** 推论 4.15中的 $\beta$-$\beta$ 带边图 $\mathcal{H}'$ 也表示$(Y, \Gamma)$，因为半恒等图表示恒等缝合余bordism。

## 3. CW DECOMPOSITIONS

**3.1. 由 Heegaard 图得到的分解。** 设 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边，并满足定义 1.4 的假设。选取一个 $\alpha$-$\alpha$ Heegaard 图 $\mathcal{H}$ 来表示 $(Y, \Gamma)$。令 $\Sigma$ 为 $\mathcal{H}$ 的 Heegaard 曲面。回顾一下，缝合余边 $Y$ 是由 Heegaard 图 $\mathcal{H}$ 按如下方式构造的。

- 从 $\Sigma \times [0,1]$ 开始，并在底侧沿 $\Sigma$ 的所有 $\beta$-圆附加 2-手柄。此时，加厚的底边界为 $R^+ \times [0,1]$。
- 在顶部为 $\Sigma$ 的所有 $\alpha$-圆添加 2-手柄。

等价地:

- 从 $R^+ \times [0,1]$ 开始，并在顶部为 $\Sigma$ 的所有 $\beta$-圆添加 1-柄。加厚后的顶部边界现在是 $\Sigma \times [0,1]$。
- 在顶部为 $\Sigma$ 的所有 $\alpha$-圆添加 2-手柄。

第二种构造将 $Y$ 表示为一个缝合手柄复形

$$\mathcal{A} = (Y, R^+ \times I, \mathcal{E})$$

其定义见 [FJR09，定义 3.8]。特别地，对于 1-手柄集合和 2-手柄集合的任意排序， $\mathcal{E}$ 是三维手柄的有序列表

$$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_b, e_{b+1}, \ldots, e_{b+a})$$

其中:

- $e_1$，……， $e_b$ 是对应于 $\mathcal{H}$的 $\beta$-圆的三维1-手柄;
- $e_{b+1}$，……， $e_{b+a}$ 是对应于 $\mathcal{H}$的 $\alpha$-圆的三维 2-手柄。

1-手柄在排序中位于2-手柄之前，且各1-手柄彼此不相交，各2-手柄也彼此不相交，因此按照 [FJR09 第 3 节5]的术语， $\mathcal{A}$ 是一个良好的缝合手柄复形。由于 $\mathcal{A}$ 是良好的，此时手柄的排序实际上无关紧要，不过稍后我们会对排序作出各种选择。正如 [FJR09 注 3.11], 中所讨论的，将手柄收缩到其核上，可得到一个空间$\mathfrak{Y}$ 的 CW分解，该空间与 $Y$相对于 $R^+ = R^+ \times \{0\} \subset R^+ \times [0,1]$同伦等价。

这个相对 CW 分解的 1-胞腔由 $b$ 弧组成，每条弧的端点都位于 $R^+$的内部。与 [FJR09，注 3.11], 类似，取一个 $\mathfrak{R}^+$ 的 CW 分解$R^+$ （胞腔维数为 0、1 和 2）；此外，我们假设这个 CW 分解按以下方式构造（见图8）。

- 取 $\partial\Sigma$ 的一个一维 CW 分解，使得 $\Lambda \subset \partial\Sigma$ 中的所有点以及 $\partial\Sigma$中 $\alpha$ 弧的所有端点都是该分解的 0-胞腔。
- 令 $\Sigma$ 表示从 $\Sigma^\circ$ 中去掉每个 $\beta$ 圆的一个管状邻域（开环带）后所得的空间。
- 注意， $\partial\Sigma^\circ$ 是 $\partial\Sigma$ 与两个圆的 $C$不交并， $C'$ 每个 $\Sigma$中的 $\beta$ 圆都对应这两个圆。取 $\Sigma$ 中的一个 $\beta$圆；令 $x_m$ 为这个 $\beta$圆与 $\alpha$ 弧和圆的交点 $x_1$、……、。由于 $C$ 和 $C'$ 是该 $\beta$ 圆的平行推离，每个点$x_i$ 都确定了 $C$ 中的一个点$x_i^C$以及 $C'$中的一个点$x_i^{C'}$ 。选择 $C$ 和 $C'$ 的 CW 分解，使得点$x_i^C$是 $C$ 的 0-胞腔，点$x_i^{C'}$ 是$C'$的 0-胞腔。由此得到 $\partial\Sigma^\circ$ 的一个 CW 分解。

- 将 $\partial\Sigma^\circ$ 的这个 CW分解扩展为整个 $\Sigma^\circ$ 的 CW分解，使得每条与某个 $\beta$ 圆至少相交一次的 $\Sigma$ 中的 $\alpha$ 弧或圆（因此该 $\alpha$弧或圆现在被切分为 $\Sigma^\circ$的 $\geq 1$ 条弧，每条弧的端点均位于 $\partial\Sigma^\circ$的0-胞腔上），都将其每条 $\Sigma^\circ$ 的 $\geq 1$ 弧作为 CW 分解中的一个1-胞腔。对于 $\Sigma$ 中的一条 $\alpha$ 弧，若它

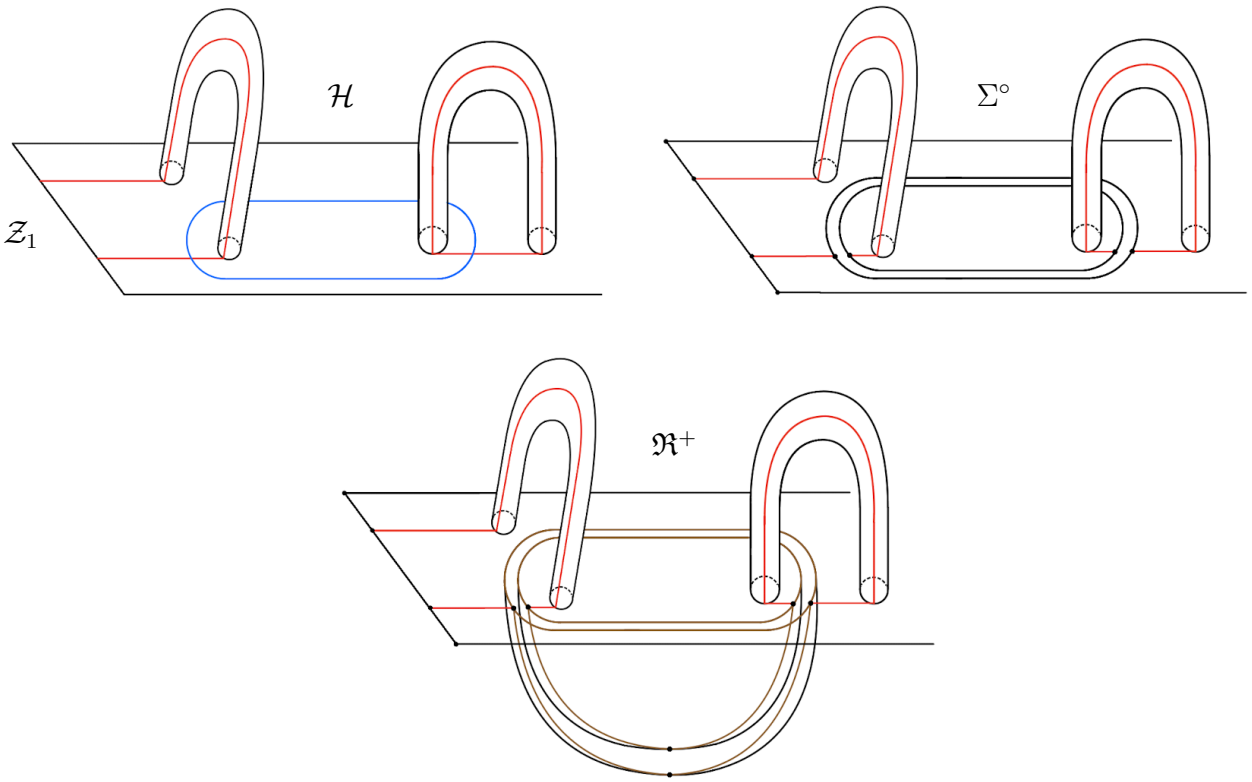



FIGURE 8. 左上： $\mathcal{H}$ 的一部分局部图，显示出射边界。右上： $\Sigma^\circ$的 CW 分解。下方：$\mathfrak{R}^+$的 CW 分解。棕色弧线是 $D^2$ 的 CW 分解中的 1-胞腔；相邻的黑色曲线以透视方式描绘圆盘本身，它们不属于 CW 结构。在后续的一些图中，为了简洁起见，我们不再区分二者，将棕色 1-胞腔画成与这些黑色曲线重叠。

与任何 $\beta$ 圆都不相交，则将该弧作为 $\Sigma^\circ$的一个1-胞腔。对于$\Sigma$ 中的一个 $\alpha$ 圆，若它与任何 $\beta$ 圆都不相交，则在该 $\alpha$ 圆上选取一点，将其作为 $\Sigma^\circ$的一个0-胞腔，并将该 $\alpha$ 圆的其余部分作为 $\Sigma^\circ$的一个1-胞腔。

- 我们通过沿着 $\Sigma^\circ$ 的每个不在 $\Sigma$ 边界上的边界分支各粘合一个圆盘，从 $\Sigma^\circ$ 得到 $R^+$ 。对于这样的边界分支 $C$，我们已经为 $C$ 选定了一个 CW 分解，例如含有 $m$ 0 个 1-胞腔的分解。将其扩展为 $D^2$ 的 CW 分解，其中有 $(m+1)$ 个 0-胞腔（$m$ 个位于边界上，另有一个位于中心）、 $2m$ 1 个 1-胞腔（$m$ 个位于边界上，另有 $m$ 个将边界上的 0- 胞腔与中心相连），以及 $m$ 2 个 2- 胞腔。将这些 CW 分解与我们对 $\Sigma^\circ$ 的 CW 分解结合起来，便得到 $R^+$ 的 CW 分解 $\mathfrak{R}^+$ 。

We t因此具有 $\mathfrak{Y}$ 的绝对 CW分解，并且 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$ 是一个 CW 对 .

**3.2. 胞腔定向。** 在上述 CW复形中，我们尚未选择胞腔的定向。为了在下文讨论胞腔链复形，我们需要完成这一步。

在 Heegaard 图 $\mathcal{H}$ 中，为每个闭合的 $\alpha$ 圆和 $\beta$ 圆选择一个定向。我们按如下方式使用这些定向来确定 $\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$ 的胞腔定向。

- $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的 2-胞腔对应于 $\mathcal{H}$的 $\alpha$ 圆；2-胞腔的边界是该$\alpha$ 圆。为 2-胞腔定向，使其定向边界与 $\alpha$ 圆上给定的定向一致。

$\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$ 的 1-胞腔对应于 $\mathcal{H}$的 $\beta$ 圆。与 $\beta$ 圆对应的三维 $\beta$ 1-把手具有余核 $D^2$，其边界为 $\beta$ 圆；它具有核 $D^1$，而这个 $D^1$ 是 $\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$的 1-胞腔。为余核定向，使其定向边界与 $\beta$ 圆上给定的定向一致。然后为核定向，使得如果 0 表示三维 $\beta$ 把手的中心点，且 $T_0$ 表示 0 处的切空间，那么（$T_0$核的定向基）$\cup$（$T_0$余核的定向基）构成三维 $\beta$ 把手在 0 处切空间的定向基。见图 9。

为 任意地为 $\mathfrak{R}^+$ 的胞腔定向；我们所做的一切都不会依赖这些定向 s.

给定所选的定向，我们得到一个胞腔链复形 $C_*^{\text{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$，它仅在次数 1 和 2 上非零，并且链群 $C_1$ 和 $C_2$ 各有一组胞腔基。我们有典范同一

$$H_1^{\text{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+) \cong H_1^{\text{sing}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+) \cong H_1^{\text{sing}}(Y, R^+).$$

为了得到胞腔微分 $\partial_2$ 的显式矩阵，我们选取 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 圆集和 $\beta$ 圆集的排序。给定这些有序基，令 $M_{\mathcal{H}}$ 为此胞腔链复形中胞腔微分 $\partial_2$ 的矩阵。注意，$M_{\mathcal{H}}$ 是 $H_1(Y, R^+)$ 的表示矩阵。

**命题 3.1**。在 $C_*^{\text{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$ 的胞腔微分 $\partial_2$ 的矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 中，与输入 $\alpha$ 圆 $C$ 和输出 $\beta$ 圆 $C'$ 对应的矩阵项，是对交点 $x \in C \cap C'$ 的局部交数 $C'_x \cdot C_x$ 求和（即“当 $\beta \cdot \alpha = +1$ 时为 $+1$，当 $\beta \cdot \alpha = -1$ 时为 $-1$”）。

证明。根据一般原理，矩阵元是对 $x \in C \cap C'$ 求和得到的，其中每一项是与 $x$ 相关的某个局部符号；我们来验证该符号确如所述。论证如图 10 所示；左侧展示了 $\beta \cdot \alpha = +1$ 类型的局部交点，并验证 $\alpha$ 2- 胞腔的边界沿正方向穿过 $\beta$ 1- 胞腔。右侧展示了 $\beta \cdot \alpha = -1$ 类型的局部交点，并验证 $\alpha$ 2-胞腔的边界沿负方向穿过 $\beta$ 1-胞腔。□

现在假设 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{norm}}$，如推论 2.22 所述。在对 $\beta\,\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 的圆进行排序时，我们要求首先排列由 $\mathcal{H}'$ 的出射 $\beta$ 弧粘合而成的 $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 圆，其次排列 $\mathcal{H}'$ 的 $\beta$ 圆，最后排列由 $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 的入射 $\beta$ 弧粘合而成的 $\beta$ 圆

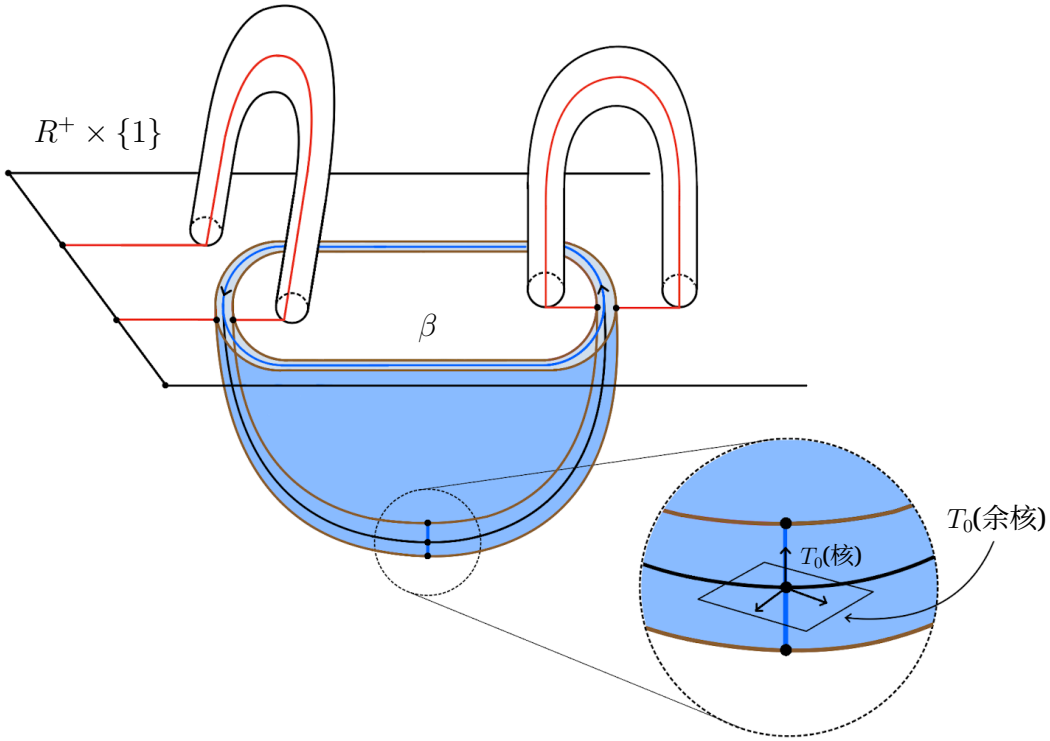



FIGURE 9. 图8中所示的 $\mathcal{H}$ 的 $\beta$ 圆所对应的 1-柄以蓝色阴影标出；其附着边界由两个棕色圆组成，其余核为 $\beta$。如图所示，若从上方观察时，所选的 $\beta$ 圆的定向为逆时针，则必须使用指向内侧的法向量为该 1-柄的余核定向，使得诱导的边界定向与该 $\beta$ 圆的给定定向一致。

$\mathcal{H}'$。我们可以将 $M_{\mathcal{H}_{\text{norm}}}$ 示意地写作

$$M_{\mathcal{H}_{\text{norm}}} = \begin{matrix} \\ \beta^{\text{out}} \\ \beta^{c} \\ \beta^{\text{in}} \end{matrix} \begin{matrix} \alpha^{c} \\ \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

$\alpha^c$在第 6 节中，我们将遇到$M_{\mathcal{H}_{\text{norm}}}$的子矩阵 $\begin{matrix} \alpha^{c} \\ \beta^{c} \end{matrix} \begin{bmatrix} * \end{bmatrix}$。

$\alpha^c$**命题 3.2**。 $M_{\mathcal{H}_{\text{norm}}}$ 的子矩阵 $\begin{matrix} \alpha^{c} \\ \beta^{c} \end{matrix} \begin{bmatrix} * \end{bmatrix}$ 是 $H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0)$的表示矩阵。

证明。 将 $Y$ 视为与 $\beta$-$\beta$ 带边缝合海加德图 $\mathcal{H}'$ 相关联的缝合余边，并应用上述分析。注意，从 $\mathcal{H}'$ 构造 $Y$ 的过程将 $Y$ 表示为相对于 $(F_1 \cup R^+ \cup F_0) \times I$ 的缝合手柄复形。□

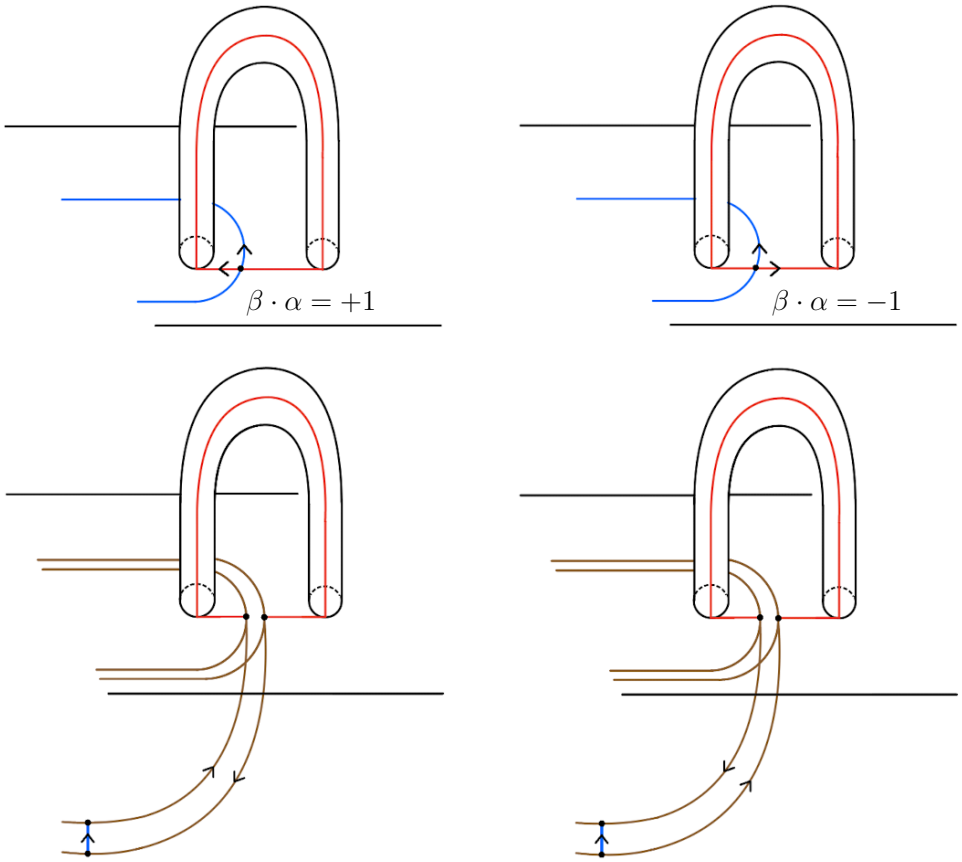



FIGURE 10. 图 8 和图 9 展示了与 $\mathcal{H}$ 相关的 CW 复形 $\mathfrak{Y}$ 的局部部分上命题 3.1 的直观论证。

3.3. **关于 $F_i$ 的规范化选择与子复形。** 继续假设 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{norm}}$ 满足推论 2.22。在此情形下，我们将定义子复形 $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{S}_i^+ \subset \mathfrak{F}_i$，使得 $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{R}^+ = \mathfrak{S}_i^+$，且 $(\mathfrak{F}_i,\ \mathfrak{S}_i^+)$ 与 $(F_i,\ S_i^+)$ 同伦等价。

首先注意，由于 $\partial\Sigma^\circ$ 因而 $\partial\Sigma$ 是 $\mathfrak{R}^+$ 的子复形，并且 $\Lambda$ 的所有点都是 $\partial\Sigma$ 的 0-胞腔，因此我们已经得到 $S_0^+$ 和 $S_1^+$ 的 CW 分解，它们是 $\mathfrak{R}^+$ 的子复形。我们将在下文通过稍微扩展这些子复形来定义 $\mathfrak{S}_i^+$。

现在，由于我们取了 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{norm}}$，每条进入的 $\alpha$ 弧都与 Heegaard 曲面 $\Sigma$ 上恰好一个 $\beta$ 圆相交。因此，$\alpha$ 弧与 $\Sigma^\circ$ 的交由两个区间组成，每个区间都是 $\mathfrak{R}^+$ 的一个 1-胞腔，其中一个端点位于 $S^+$，另一个端点位于两个圆之一上；这两个圆是由与 $\alpha$ 弧相交的 $\beta$ 圆的平行推离得到的 $C,\ C' \subset \partial\Sigma^\circ$。$\mathfrak{R}^+$ 还有另外两个 1-胞腔，它们位于粘合到 $\Sigma^\circ$ 上的 $D^2$ 中，这些 $D^2$ 沿着 $C$ 和 $C'$ 粘合以形成 $R^+$；这两个胞腔从 $D^2$ 的中心延伸至 $C$ 和 $C'$ 上被切开的 $\alpha$ 弧的端点。最后，$\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$ 有一个 1-胞腔连接两个 $D^2$ 的中心。

令 $\mathfrak{F}_0$ 表示 $\mathcal{H}$ 的所有入射 $\alpha$ 弧中的这些胞腔及其边界 0-胞腔的并，再加上 $\mathfrak{R}^+$ 内给定的 $S_0^+$ CW分解。令 $\mathfrak{S}_0^+$ 表示

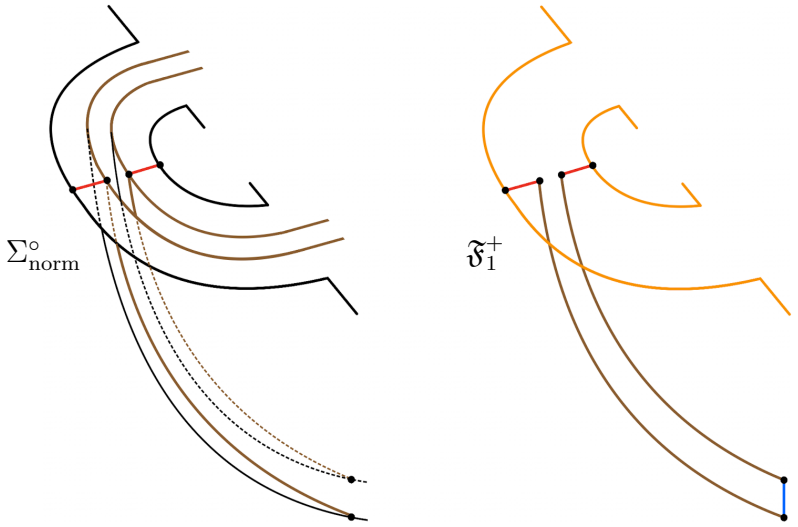



FIGURE 11. 左： $\Sigma^{\circ}_{\mathrm{norm}}$ 在一条出射 $\alpha$ 弧附近的CW分解的局部视图。右：CW 分解$\mathfrak{F}_1^+$与 $\mathfrak{S}_1^+$。所示的所有0-胞腔和1-胞腔均位于 $\mathfrak{F}_1^+$中；子复形 $\mathfrak{S}_1^+$通过删除蓝色1-胞腔得到。

$\mathfrak{F}_0$ 中除 $\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$ 里的胞腔之外所有胞腔的并（即，令 $\mathfrak{S}_0^+ = \mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{R}^+$）。注意， $\mathfrak{S}_0^+$ 包含我们原有的 $S_0^+$ CW分解，以及针对 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的每条入射 $\alpha$ 弧额外添加的四个 1-胞腔。用类似方式定义 $\mathfrak{F}_1$，使用 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的出射 $\alpha$ 弧，并令 $\mathfrak{S}_1^+ = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}^+$。见图11。

考虑图12所示的各对之间的包含映射。这些包含映射在相对第一同调群上都诱导出同构，并且我们有如下交换图

(2)

$$
\begin{array}{ccc}
H_1(F_i, S_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(Y, R^+) \\
\uparrow{\scriptstyle i_*} & & \uparrow{\scriptstyle =} \\
H_1(F_i^{\mathrm{shrunk}}, S_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(Y, R^+) \\
\downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
H_1(F_i^{\mathrm{shrunk}} \cup (\mathrm{disks}), S_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(Y, R^+) \\
\uparrow{\scriptstyle i_*} & & \uparrow{\scriptstyle i_*} \\
H_1(\mathfrak{F}_i, S_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+) \\
\downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
H_1(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{S}_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)
\end{array}
$$

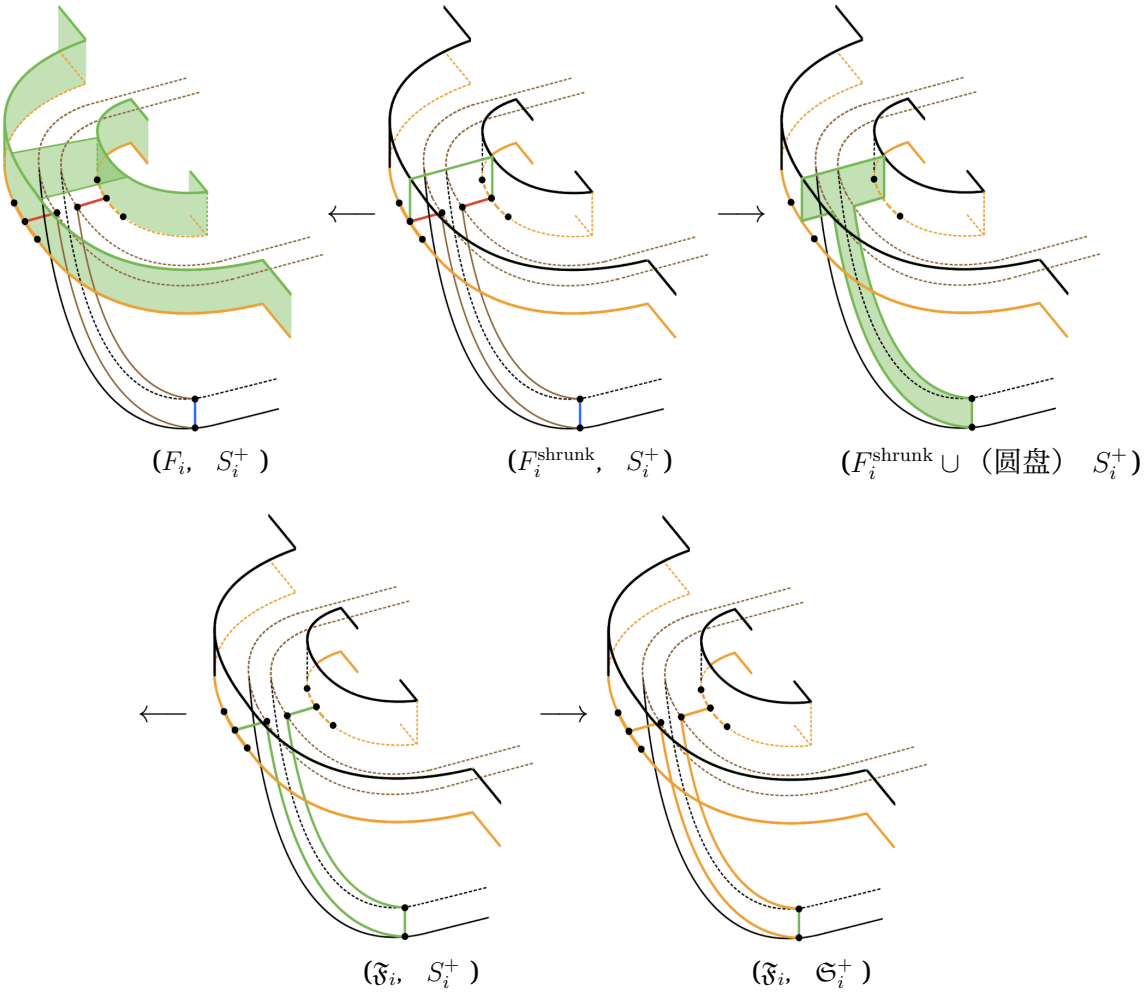



FIGURE 12. 对子空间的包含映射。在每种情况下，较大的空间用绿色绘制（不要与我们用绿色绘制 Γ的惯例混淆），较小的空间用橙色绘制。

**推论 3.3.** 这个方形

$$\begin{array}{ccc} H_1(F_i, S_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(Y, R^+) \\ \cong\uparrow & & \uparrow i_* \\ H_1(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{S}_i^+) & \xrightarrow[i_*]{} & H_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+) \end{array}$$

交换，其中左侧的映射是图 (2) 左侧同构的复合。

我们可以如下描述图表（2）左侧的 $H_1(F_i,\ S_i^+)$ 与 $H_1(\mathfrak{F}_i,\ \mathfrak{S}_i^+)$ 之间的复合同构：$H_1(F_i,\ S_i^+)$ 的通常基元素是 $\gamma$ 在 $(F_i,\ S_i^+)$ 中对应于图 $\mathcal{Z}_i$ 的匹配弧的同调类。从图表（2）左上角到左下角的映射将这样的基元素 $\gamma$ 映射为 $H_1(\mathfrak{F}_i,\ \mathfrak{S}_i^+)$ 中相应一维胞腔的同调类，再乘以适当的符号。

如果我们按照下述命题，利用 $\mathcal{Z}_i$ 的匹配弧上的定向来为 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的 $\beta$ 圆选择定向，就能确保该符号始终为 $-1$。

**命题 3.4**。 为 $\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_1$中的每条匹配弧选择一个定向。对 ***Heegaard*** 图 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 的$\alpha$-弧进行定向，使其满足 （$Y$、 $\Gamma$）：

- 在图的左侧（出射）， $\alpha$ 弧的定向与 $\mathcal{Z}_1$的匹配弧相同。
- 在图的右侧（入射）， $\alpha$ 弧的定向与 $\mathcal{Z}_0$的匹配弧相反。

此外，假设 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的 $\beta$ 圆的定向满足

- 在图的左侧（出射）， $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}$ 中的局部交点具有 $\beta \cdot \alpha^{a,\ 出} = -1$;
- 在图的右侧（入射）， $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 中的局部交点具有$\beta \cdot \alpha^{a,\ 入} = +1$。

那么，在同构 $H_1(F_{\mathfrak{s}}, S_i^+) \cong H_1(\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{S}_i^+)$ 下，图(2)左侧的基元素 $\gamma$ ***of*** $H_1(F_{\mathfrak{s}}, S_i^+)$ 会被映到 $-1$ 乘以 $\mathfrak{F}_i \setminus \mathfrak{S}_i^+$ 中对应的一维胞腔的同调类，其中该基元素对应于 $\mathcal{Z}_i$ 的一条定向匹配弧。

证明。 论证与命题 3.1 的证明类似，不同之处在于，我们这里有一条 $\alpha$ 弧，而不是一个闭合的$\alpha$ 圆。同一张图（图 10）表明，在图的左侧／出射侧，局部交点 $\beta\cdot\alpha$为 $-1$ 的位置处，Heegaard 图中的 $\alpha$弧的定向与相关的 $\beta$ 1-胞腔相反。由于这一侧的 $\alpha$ 弧与 $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧定向相同，因此在这种情况下，命题陈述中的符号为 $-1$ 。

该图还表明，在图的右侧／入射侧，局部交点 $\beta\cdot\alpha$ 为 $+1$ 的位置处，Heegaard 图中的 $\alpha$ 弧的定向与相关的$\beta$ 1-胞腔相同。由于这一侧的 $\alpha$ 弧与 $\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧定向相反，因此在这种情况下，命题陈述中的符号也为 $-1$ 。□

## 4. [BSDA] WITHOUTSpin$^c$ STRUCTURES

**定义 4.1.** 设 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, \psi)$ 为一个带边缝合海加德图。 $\mathcal{H}$ 的一个生成元 是 $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta}$ 中交点的集合$\mathbf{x}$，使得每个 $\alpha$-圆和 $\beta$-圆恰好被占据一次，且每个 $\alpha$-弧和 $\beta$-弧至多被占据一次。我们将生成元的集合称为 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$。

对于$\mathbf{x} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$，我们令 $o_R(\mathbf{x})$为 $\mathcal{H}$ 中在 $x$里被占据的入射弧（视情况为$\alpha$ 或 $\beta$ ）的集合，并令$o_R(\mathbf{x})$为在$\mathbf{x}$中未被占据的入射弧的集合。类似地，我们令 $o_L(\mathbf{x})$为在$\mathbf{x}$中被占据的出射弧的集合，并令$o_L(\mathbf{x})$为在$\mathbf{x}$中未被占据的出射弧的集合。按照标准的记号滥用，我们也用 $o_R(\mathbf{x})o_R(\mathbf{x})$ $o_L(\mathbf{x})$和 $o_L(\mathbf{x})$来表示相应的指标集。

**注 4.2**。 在下面的定义及其他地方，我们将使用与 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图 $\mathcal{H}$ 相关的各种常数；为方便起见，我们在此列出这些常数。

- 对于 $i=0$，1，我们令 $n_i$ 为 $H_1(F_i,\ S_i^+)$ 的秩。
- 对于 $\wedge^* H_1(F_0,\ S_0^+)$ 的一个基元素，我们令 $k$ 表示楔因子的数量。
- 对于 $\wedge^* H_1(F_1,\ S_1^+)$ 的一个基元素，我们令 $l$ 表示楔因子的数量。
- 我们分别令 $a$ 和 $b$ 表示 $\mathcal{H}$ 中的 $\alpha$ 圆和 $\beta$圆的数量。
- 我们令 $c=n_1+\chi(Y,\ R^+)$；我们将证明，下面定义的映射 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{组合}}$ 的次数为 $c$。

**定义 4.3.** 设 $(Y,\ \Gamma)$ 是一个从 $(F_0,\ \Lambda_0)$ 到 $(F_1,\ \Lambda_1)$ 的缝合余边。定义一个映射

$$[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}\colon\ \wedge^*\ H_1(F_0,S_0^+)\to\wedge^* H_1(F_1,S_1^+)$$

如下，其中 $\Xi$ 表示下文所作的选择集 。

- 选择表示（$F_i,\Lambda_i$）的 $\alpha$ 弧图 $\mathcal{Z}_i$，并选择一个表示（$Y,\Gamma$）的 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图 $\mathcal{H}=(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathcal{Z}_0,\mathcal{Z}_1,\psi)$ 。
- 对 $\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧进行排序，并为每条匹配弧选择一个定向。令 $\gamma_{\text{in}i}$ 表示 $H_1(F_0,S_0^+)$ 中的元素，该元素由带有所选定向的 $i^{th}$ 匹配弧表示。对于介于 0 和 $n_0$ 之间的每个 $k$，这些元素

$$\gamma_I^{\text{in}}=\gamma_{i_1}^{\text{in}}\wedge\cdots\wedge\gamma_{i_k}^{\text{in}}$$

对于 $I=(i_1,\ldots,i_k)$ 、 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n_0$ 构成了 $\wedge^k H_1(F_0,S_0^+)$ 上的一个基，其中 $\mathbb{Z}$ 为环。
- 对 $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧进行排序，并为每条匹配弧选择一个定向。令 $\gamma_{\text{out}i}$ 表示 $H_1(F_1,S_1^+)$ 中的元素，该元素由带有所选定向的 $i^{th}$ 匹配弧表示。对于介于 0 和 $n_1$ 之间的每个 $l$，这些元素

$$\gamma_J^{\text{out}}=\gamma_{j_1}^{\text{out}}\wedge\cdots\wedge\gamma_{j_l}^{\text{out}}$$

对于 $J=(j_1,\ \ldots,\ j_l),\ 1\le j_1<\cdots<j_l\le n_1$ 是 $\wedge^l H_1(F_1,\ S_1^+)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的一组基。
- 为 $\mathcal{H}$ 的闭 $\alpha$-圆 $\alpha_1^c,\ \ldots,\ \alpha_a^c$ 选择一个排序和定向，并对 $\beta$-圆 $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_b$ 作同样处理。
- 与命题 3.4 中一样，将 $\mathcal{H}$ 的入射 $\alpha$-弧 $\alpha^a_{,\ \text{in}\,i}$ 定向为与 $\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧方向相反。将 $\mathcal{H}$ 的出射 $\alpha$-弧 $\alpha^a_{,\ \text{out}\ i}$ 定向为与 $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧方向相同。

- 按如下方式排列 $\mathcal{H}$ 的全部曲线:

$$(\alpha_1^{a,\text{out}},\ldots,\alpha_{n_1}^{a,\text{out}},\alpha_1^c,\ldots,\alpha_a^c,\alpha_1^{a,\text{in}},\ldots,\alpha_{n_0}^{a,\text{in}})$$

（即先排列出射 $\alpha$-弧，再排列 $\alpha$-圆，最后排列入射 $\alpha$-弧）。

基于这些选择 $\Xi$，我们稍后将证明它们对构造的影响仅限于一个整体符号，现在按如下方式定义映射 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$（严格定义，不是模符号定义）。

- 给定一个生成元 $\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$，定义 $\sigma_{\mathbf{x}}$ 为从 $\{\beta$ 圆到 $\{\alpha$ 曲线的有序集合之间的置换，这两个集合的大小均为 $b$ ；其中，$\{\alpha$ 曲线是在$\mathbf{x}\}$ 中被占据的曲线，该置换将 $\beta_i$ 映射到与 $\beta_i$共享$\mathbf{x}$中一点的$\alpha$曲线。

- 令 $k$ 表示$\mathbf{x}$ 中被占据的入射 $\alpha$ 弧的数量，令 $l$ 表示$\mathbf{x}$中未被占据的出射 $\alpha$ 弧的数量。
- 设 $S_1 \sqcup S_2$ 是 $\{1,\dots,n_i\}$ 的任意一个划分，使得 $S_1$ 和 $S_2$ 继承 $\{1,\dots,n_i\}$所诱导的排序。接着定义 $\sigma_{S_1,\ S_2\leftrightarrow\mathrm{std}}$ 为一个置换，它将 $S_1$ 中的元素按递增顺序排列在位置 1，……，$|S_1|$，并将$S_2$ 中的元素按递增顺序排列在位置 $|S_2|+1$，……，$n_i$。特别地，$\sigma_{o_L(\mathbf{x})o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}$ 是 $\{1,\dots,n_1\}$ 的一个置换，它按顺序将未占据的出射 $\alpha$-弧的指标（即 $o_L(\mathbf{x})$) 映射到 $\{1,\dots,l\}$，并将已占据的出射 $\alpha$- 弧的指标（即 $o_L(\mathbf{x})$) 映射到 $\{l+1,\dots,n_1\}$。
- 对于 $x\in\mathbf{x}$，令 $i(x)$ 表示由下式定义的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的元素

$$i(x)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad \beta_x\cdot\alpha_x=1\\ 1 & \text{if}\quad \beta_x\cdot\alpha_x=-1\end{cases}$$

其中，$\beta_x\cdot\alpha_x$ 是 $x$的局部交数；若（$\beta_x,\alpha_x$）构成 $\Sigma$ 在 $x$处切平面的定向基，则其为 1；若（$\beta_x,\alpha_x$）构成反定向基，则其为 $-1$ 。注意，$(-1)^{i(x)}$ 是 $x$的局部交数。

- 令 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 定义为

$$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})=\sum_{x\in\mathbf{x}} i(x)+\mathrm{inv}(\sigma_{\mathbf{x}})+\mathrm{inv}(\sigma_{\bar{o}_L(\mathbf{x})o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}})+ak+n_1k \mod 2 \tag{3}$$

其中，inv 表示每个置换的逆序数。

- 最后，我们令 $[\widehat{\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)}]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 为一个由其在 $\wedge^k H_1(F_0,S_0^+)$的基元素 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$上的作用所确定的 $\mathbb{Z}$-线性映射，定义为

$$\gamma_I^{\mathrm{in}}\mapsto\sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}):\\ o_R(\mathbf{x})=I,\\ \bar{o}_L(\mathbf{x})=J}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})}\,\gamma_J^{\mathrm{out}}, \tag{4}$$

其中，我们将 $o_R(\mathbf{x})$和 $o_L(\mathbf{x})$分别视为 $\{1,\dots,n_0\}$ 和 $\{1,\dots,n_1\}$ 的子集。

**注记 4.4**。 记号 $[\widehat{\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)}]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 不应被理解为文献中已经定义了一个底层的带边 Floer 双模 $\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)$；此类双模仅在比我们这里采用的拓扑假设更严格的条件下才有定义。

**注记 4.5**。 应将公式（3）与 [HLW17 的定义 3.20] 进行比较。在 Hom–Lidman–Watson 的设定中，$n_1=2g_1$ 总是偶数，因此他们的结果中不会出现公式（3）中的项 $n_1k$ 。我们还注意到，在我们的记号中，项 $ak$ 对应于他们的项$t(g-k_L-k_R)$。在那里，$g-k_L-k_R$统计 $\mathcal{H}$中的 $\alpha$圆的数量，而对于任意生成元 $\mathbf{x}$，$t=|\mathrm{Im}(\sigma)\cap A|$统计被占据的右侧 $\alpha$弧的数量。

**注 4.6**。 原则上，我们可以通过将局部交数 $\beta_x\cdot\alpha_x$替换为其相反数 $\alpha_x\cdot\beta_x$来定义 $i(x)$。由于 $|\mathbf{x}|=b$，这一改变除了整体符号外不会产生影响

$(-1)^{b}$。我们选择采用约定 $\beta_x \cdot \alpha_x$，部分原因是，在第 8.5 节中，为了与 [FJR09]的约定建立联系，需要交换$\alpha$ 和 $\beta$ 曲线。请注意，为确保在作出选择 $\Xi$后，BSDA$(Y,\Gamma;\Xi)$ $]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$的定义是严格确定的，而不仅仅是确定到符号，固定采用其中一种约定非常重要。

**命题 4.7.** 映射 $[\widehat{\phantom{x}}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 的次数为 $c := n_1 + \chi(Y, R^+)$。

证明。 设 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$是 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$ 的一个基元素，且满足 $|I| = k$。设 $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 是任意一个满足 $o_R(\mathbf{x}) = I$ 的生成元，并设 $J = o_L(\mathbf{x})$ 和 $l = |J|$。我们将证明 $l = k + c$。

$\mathbf{x}$ 中被占据的出射 $\alpha$-弧的数量为 $n_1 - l$，被占据的入射 $\alpha$-弧的数量为 $k$。因此，$\mathbf{x}$ 中被占据的 $\alpha$-弧总数为 $n_1 - l + k$。被占据的 $\alpha$-弧数量等于 $b - a$，即 $\mathcal{H}$ 的 $\beta$-圆数量减去 $\alpha$-圆数量。根据第 3 节， $\mathcal{H}$ 给出了一个空间 $\mathfrak{Y}$ 的 CW分解，该空间与 $Y$ 同伦等价，且相对于 $R^+$，仅含有 1-胞腔和 2-胞腔，其中 1-胞腔对应于 $\mathcal{H}$ 的 $\beta$-圆，2-胞腔对应于 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$-圆。因此， $\chi(Y, R^+) = a - b$，所以

$$n_1 - l + k = -\chi(Y, R^+)$$

因此 $l = k + n_1 + \chi(Y, R^+) = k + c$。 □

**注 4.8.** 为了更贴近 Hom–Lidman–Watson，我们可以在方程 (4) 中将 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 替换为 $(-1)^{|I|}\gamma_I^{\mathrm{in}}$，并将 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$替换为 $(-1)^{|J|}\gamma_J^{\mathrm{out}}$；参见 [HLW17，定理 4.13] 的证明。根据命题 4.7，结果会相差整体符号 $(-1)^c$，在大多数情况下我们将不考虑整体符号。

**例 4.9.** 设 $(Y, \Gamma)$ 是一个缝合三维流形，也就是说，它是一个从 $\emptyset$ 到 $\emptyset$的缝合余边。在此情形下，定义 4.3 中的选择 $\Xi$ 相当于一个缝合 Heegaard 图 $\mathcal{H}$ （如定义 2.11(c) 中所述），它表示 $(Y, \Gamma)$，为 $\mathcal{H}$的每个 $\alpha$ 圆和 $\beta$ 圆指定定向，并对 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 圆集和 $\beta$ 圆集分别排序。

给定这样的选择 $\Xi$，我们有一个映射 $[\widehat{\phantom{x}}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$，从 $\mathbb{Z}$到 $\mathbb{Z}$（将 $\mathbb{Z}$ 与$\wedge^0(0)$ 视为相同），可以将其看作一个整数。这个整数是对所有 $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 求和所得，求和项为 $(-1)^{\mathrm{gr_{DA}}(\mathbf{x})}$；这样的 $\mathbf{x}$自然对应于 $\mathcal{H}$的 $\alpha$ 个圆与$\beta$ 个圆之间的双射。

如果 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 个圆与 $\beta$ 个圆的数量 $a$ 和 $b$ 不相等，那么就不存在这样的双射，因此 $[\widehat{\phantom{x}}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = 0$。否则，由于我们已对 $\alpha$ 个圆与 $\beta$ 个圆的集合进行了排序，这样的双射可以视为对 $a$个字母的置换。对于$\mathbf{x} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$，对应的置换如定义 4.3 中的 $\sigma_{\mathbf{x}}$ 所示。我们有

$$\mathrm{gr_{DA}}(\mathbf{x}) = \sum_{x \in \mathbf{x}} i(x) + \mathrm{inv}(\sigma_{\mathbf{x}})$$

（$\mathrm{gr_{DA}}(\mathbf{x})$ 中的其他项均为零），因此

$$(-1)^{\mathrm{gr_{DA}}(\mathbf{x})} = \left(\prod_{x \in \mathbf{x}} (-1)^{i(x)}\right) (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{\mathbf{x}})};$$

注意，与之前一样，若 $x \in \beta_x \cap \alpha_x$，则 $(-1)^{i(x)} = \beta_x \cdot \alpha_x$。

回忆一下，根据命题 3.1，在由选择 $\Xi$ 确定的有序基下，表示$C_*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$的胞腔微分 $\partial_2$ 的矩阵 $M_{\mathcal{H}}$，其对应于 $\beta_i$ 的行与对应于 $\alpha_j$ 的列的元素为交点符号 $\beta_i \cdot \alpha_j$。利用行列式的排列展开，我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = \det M_{\mathcal{H}}.$$

4.1. **BSDA 的函子性**] **在** $\mathbb{Z}$**上**。现在我们证明，在适当的选择 $\Xi$ 下，$[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y, \Gamma; \Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 与粘合及恒等配边相容。设 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边，且 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_1, \Lambda_1)$ 到 $(F_2, \Lambda_2)$ 的缝合配边。~ ~ ~按照定义 4.3，为 $(Y, \Gamma)$ 固定一个选择集 $\Xi$。

**注 4.10.** 为便于记账，如注 4.2 所示，我们记录缝合曲面 $(F_2, \Lambda_2)$ 以及在 $\Xi$ 中选取的 Heegaard 图 $\mathcal{H}$ 所关联的常数。

- 令 $n_2$ 为 $H_1(F_2, S_2^+)$ 的秩。
- 对于 $\wedge^* H_1(F_2, S_2^+)$ 的一个基元素，令 $m$ 为楔因子的数量。
- 令 $\tilde{\gamma}_{\mathrm{out}k}$ 表示 $H_1(F_2, S_2^+)$ 中由 ~$\mathcal{Z}_2$ 的 $k^{th}$ 条匹配弧所表示的元素，其定向取为选定的定向，指标 $k$ 由 $\Xi$ 固定的排序决定。对于介于 0 和 $n_2$ 之间的每个 $m$，这些元素

$$\tilde{\gamma}^{\mathrm{out}}_K = \tilde{\gamma}^{\mathrm{out}}_{k_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\gamma}^{\mathrm{out}}_{k_m}$$

对于 $K = (k_1, \ldots, k_m)$，$1 \le k_1 < \cdots < k_m \le n_2$ 构成 $\wedge^m H_1(F_2, S_2^+)$ 关于 $\mathbb{Z}$ 的一组基（不要与定理 1.7 中出现的常数 $K$ 混淆）。~ ~

- 我们分别令 $\tilde{a}$ 和 $b$~表示 $\mathcal{H}$中的 $\alpha$ 圈和 $\beta$-圈的数量。
- 我们令 $d = n_2 + \chi(Y, R^+)$，根据命题 4.7，它等于 $[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(\tilde{Y}, \tilde{\Gamma}; \tilde{\Xi})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 的次数。

~ ~ ~**定义 4.11.** 我们称选择集 $\Xi$（对应于（$Y$, $\Gamma$））和选择集 $\Xi$（对应于（$Y$, $\Gamma$））是可复合的，若它们满足以下限制。

- 表示（$F_1$, $\Lambda_1$）的弧图 $\mathcal{Z}_1$ 的选择，在 $\Xi$ 和 $\Xi$中必须相同。~
- $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧的排序和定向的选择，在~ $\Xi$ 和 $\Xi$中必须相同。

~ ~对于可复合选择集 $\Xi$ 和 $\Xi$，我们定义一个特定的选择集，记作 $\Xi \cup \Xi$，对应于从（$F_0$, $\Lambda_0$）到（$F_2$, $\Lambda_2$）的粘合余边（$Y \cup_{F_1} Y$, $\Gamma \cup_{\Lambda_1} \Gamma$），如下所述。

- 设用于表示（$F_i$, $\Lambda_i$）的弧图 $\mathcal{Z}_i$ 的选择适用于 $i = 0$, 2；此外，$\mathcal{Z}_i$中弧的排序和定向的选择，在 $\Xi \cup \Xi$ 中应与在 $\Xi$和 $\Xi$中的相同。~

- 选择定义 2.17 中的 Heegaard 图 $\mathcal{H} \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H}$ 来表示配边~ ~$(Y \cup_{F_1} Y, \Gamma \cup_{\Lambda_1} \Gamma)$，并附加限制：闭合的 $\alpha$-圆和 $\beta$-圆的排序与定向~ ~在 $\mathcal{H} \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H}$ 中的排序与定向相同，也就是说，与它们在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}$中的排序与定向相同。

• 令 $\alpha^{c,\text{新}}$ 表示通过沿着 $\psi(\mathbf{a}_1)$将 $\mathcal{H}$ 的出射（左侧）弧 $\alpha^{a,\text{out}}$ 与 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的入射（右侧）弧 $\tilde{\alpha}^{a,\text{in}}$ 粘合而成的 $\mathcal{H}\cup_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{H}$ 闭合 $\alpha$-圆。为这些新的$\alpha$-圆赋予由此粘合唯一确定的排序与定向。

• 将 $\mathcal{H}\cup_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{H}$ 中所有的 $\alpha$-圆按以下方式排序

$$(\tilde{\alpha}_1^c,\dots,\tilde{\alpha}_{\tilde{a}}^c,\alpha_1^{c,\text{new}},\dots,\alpha_{n_1}^{c,\text{new}},\alpha_1^c,\dots,\alpha_a^c).$$

由此可知，$\mathcal{H}\cup_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{H}$ 中所有 $\alpha$-曲线的集合具有全序

$$(\tilde{\alpha}_1^{a,\text{out}},\dots,\tilde{\alpha}_{n_2}^{a,\text{out}},\tilde{\alpha}_1^c,\dots,\tilde{\alpha}_{\tilde{a}}^c,\alpha_1^{c,\text{new}},\dots,\alpha_{n_1}^{c,\text{new}},\alpha_1^c,\dots,\alpha_a^c,\alpha_1^{a,\text{in}},\dots,\alpha_{n_0}^{a,\text{in}}).$$

• 若 $\mathcal{H}$ 中的 $\beta$-圆按 $\Xi$ 排序为 $(\beta_1,\ .....,\ \beta_b)$，且 $\mathcal{H}$ 中的 $\beta$-圆按 $\Xi$ 排序为 $(\beta_1,\ .....,\ \beta_{\tilde{b}})$，则将 $\beta$-圆的全集 $\mathcal{H}\cup_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{H}$ 按以下方式排序

$$(\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_{\tilde{b}},\beta_1,\dots,\beta_b).$$

**命题 4.12.** 设 $(Y,\Gamma)$ 是一个从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合余边，且 $(Y,\Gamma)$是一个从 $(F_1,\Lambda_1)$ 到 $(F_2,\Lambda_2)$的缝合余边。固定可复合选择集 $\Xi$ 和 $\Xi$，分别对应于 $(Y,\Gamma)$ 和 $(Y,\Gamma)$。给定这些选择，我们可以定义一个映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\tilde{Y}\cup_{F_1}Y,\tilde{\Gamma}\cup_{\Lambda_1}\Gamma;\tilde{\Xi}\cup\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^* H_1(F_0,S_0^+)\to\wedge^* H_1(F_2,S_2^+)$$

如方程 (4) 所示，使用选择集 $\Xi\cup\Xi$。在这种情况下，复合规则

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\tilde{Y}\cup_{F_1}Y,\tilde{\Gamma}\cup_{\Lambda_1}\Gamma;\tilde{\Xi}\cup\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}=[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\tilde{Y},\tilde{\Gamma},\tilde{\Xi})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\circ[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\tag{5}$$

在整体符号意义下成立。

证明。设 $\gamma_I^{\text{in}}$ 是 $\wedge^k H_1(F_0,S_0^+)$ 的任意一个基元素。方程 (5) 的左边作用于 $\gamma_I^{\text{in}}$ 上时为

$$\sum_{\substack{\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\tilde{\mathcal{H}}\cup_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{H}):\\ o_R(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})=I,\\ \bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})=K}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})}\gamma_K^{\text{out}}\tag{6}$$

右边作用于 $\gamma_I^{\text{in}}$ 上时为

$$\sum_{\substack{\tilde{\mathbf{x}}\in\mathfrak{S}(\tilde{\mathcal{H}}):\\ o_R(\tilde{\mathbf{x}})=J,\\ \bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}})=K}}\ \sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}):\\ o_R(\mathbf{x})=I,\\ \bar{o}_L(\mathbf{x})=J}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\tilde{\mathbf{x}})}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})}\gamma_K^{\text{out}}=\sum_{\substack{\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}:\\ o_R(\mathbf{x})=I,\\ \bar{o}_L(\mathbf{x})=o_R(\tilde{\mathbf{x}}),\\ \bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}})=K}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\tilde{\mathbf{x}})+\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})}\gamma_K^{\text{out}}.\tag{7}$$

我们的目标是证明公式 6 和 7 相差一个整体因子 $\pm1$。首先，我们说明指标集之间存在一一对应关系

$$\{\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}\mid o_R(\mathbf{x})=I,\ \bar{o}_L(\mathbf{x})=o_R(\tilde{\mathbf{x}}),\ \bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}})=K\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\tilde{\mathcal{H}}\cup\mathcal{H})\mid o_R(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})=I,\ \bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})=K\}.$$

这是因为 $o_R(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}) = o_R(\mathbf{x})$ 且 $o_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}) = o_L(\tilde{\mathbf{x}})$，再结合生成元 $\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}$ 的构造方式。具体来说，对于每个 $i$，如果形成 $\alpha^c$ 的 $\mathcal{H}$侧的 $\alpha$–弧（即 $\tilde{\alpha}^{a,\,\mathrm{in}}_i$）在 $\tilde{\mathbf{x}}$ 中被占据，那么要使 $\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}$ 成为生成元，对应的 $\mathcal{H}$ 侧的 $\alpha$–弧（即 $\alpha^{a,\,\mathrm{out}}_i$）就必须未被占据，反之亦然。因此，对于每个生成元 $\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}$，条件 $o_L(\mathbf{x}) = o_R(\tilde{\mathbf{x}})$ 都是隐含的。

接下来我们将证明，除去一个与 $k$ 无关的符号，$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}) = \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$，更确切地说，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{x}\cup x\in\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}} i(\tilde{x}\cup x) + \mathrm{inv}(\sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{\overline{o}_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})o_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}) + (a+\tilde{a}+n_1)k + n_2k\\
&= \sum_{\tilde{x}\in\tilde{\mathbf{x}}} i(\tilde{x}) + \mathrm{inv}(\sigma_{\tilde{\mathbf{x}}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{\overline{o}_L(\tilde{\mathbf{x}})o_L(\tilde{\mathbf{x}})\leftrightarrow\mathrm{std}}) + \tilde{a}l + n_2l\\
&+ \sum_{x\in\mathbf{x}} i(x) + \mathrm{inv}(\sigma_{\mathbf{x}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{\overline{o}_L(\mathbf{x})o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}) + ak + n_1k.
\end{aligned}$$

首先注意到，由构造可知

$$\sum_{\tilde{x}\cup x\in\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}} i(\tilde{x}\cup x) = \sum_{\tilde{x}\in\tilde{\mathbf{x}}} i(\tilde{x}) + \sum_{x\in\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}} i(x).$$

现在我们要证明逆序数具有可加性。为此，我们用交叉弦图表示相关的置换，其定义如下。

- 按照 $\Xi$ 规定的顺序，从下到上沿平面中的 $y$-轴列出 $\mathcal{H}$ 中 $\beta$ 圆的指标 $\{1,\dots,b\}$；按照 $\Xi$ 规定的顺序，从下到上沿平面中的任意一条直线 $x=\varepsilon$ 列出 $\mathcal{H}$ 中 $\alpha$ 曲线的指标 $\{1,\dots,n_0+a+n_1\}$。将指标列表 $\alpha$ 按类型分成若干块：$\boldsymbol{\alpha}^{a,\,\text{出}}\sqcup\boldsymbol{\alpha}^{c}\sqcup\boldsymbol{\alpha}^{a,\,\text{入}}$ 其中底部是$\boldsymbol{\alpha}^{a,\,\text{出}}$ 块。
- 对于每个 $i\in\{1,\dots,b\}$，从左侧的 $i$ 到右侧的 $\sigma_{\mathbf{x}}(i)$ 画一条实水平线段。
- 对于每个 $j\in o_L(\mathbf{x})\subset\boldsymbol{\alpha}^{a,\,\text{出}}$，从右侧的 $j$ 画一条竖直虚线线段，终止于图的底部。画虚线弦时，确保它们彼此不交叉。

当且仅当 $i<j$ 且 $\sigma_{\mathbf{x}}(i) > \sigma_{\mathbf{x}}(j)$ 时，两条实线段 $i\to\sigma_{\mathbf{x}}(i)$ 和 $j\to\sigma_{\mathbf{x}}(j)$ 相交。因此，“实线—实线”交叉的数量等于 $\sigma_{\mathbf{x}}$ 中逆序的数量。当 $\sigma_{\mathbf{x}}(i) < j$ 时，实线段 $i\to\sigma_{\mathbf{x}}(i)$ 会在 $j\in J$ 处与虚线段相交，即占据的出射指标 $\sigma_{\mathbf{x}}(i)\in J^c$ 位于未占据指标 $j\in J$ 之前。因此，“实线—虚线”交叉的数量等于 $\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}} = \sigma_{o_L(\mathbf{x})\,o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}$ 中逆序的数量。我们将虚线—实线交叉视为 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$ 的左幂等元贡献。

使用以下指令构造一个类似的图，计算 $\mathrm{inv}(\sigma_{\tilde{\mathbf{x}}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{o_L(\tilde{\mathbf{x}})\,o_L(\tilde{\mathbf{x}})\leftrightarrow\mathrm{id}})$，并将块 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{a,\,\mathrm{out}}\sqcup\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{c}\sqcup\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{a,\mathrm{in}}$ 置于右侧。$\mathbf{x}$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的交叉弦图如图13所示。

给定$\mathbf{x}$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}$的交叉弦图，我们按如下方式构造 $\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}$的交叉弦图。

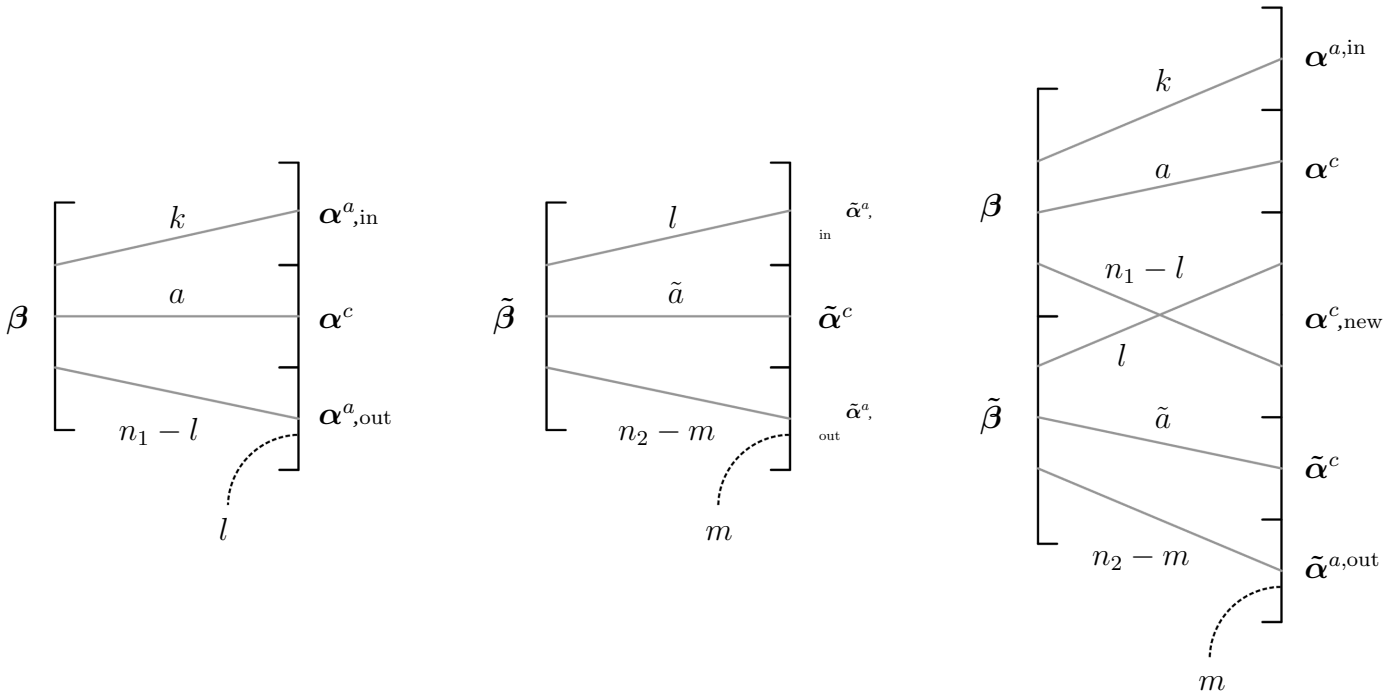



FIGURE 13. 从左至右：$\mathbf{x}$、 $\tilde{}\mathbf{x}$和 $\tilde{}\mathbf{x} \cup \mathbf{x}$的交叉弦图。指标表示为避免视觉杂乱而分组的弦簇。请注意，此类分组可能包含未显示的内部实线-实线或实线-虚线交叉。还请注意，沿 $\beta$轴的排序仅为示意图：例如，终止于 $\alpha^{a,\text{in}}$ 的 $k$ 股线不必始自最上方的 $\beta$–指标。最后请注意，最右侧图中的 $n_1 - l$ 股线与 $l$ 股线不一定总是彼此全部交叉。这里这样绘制，是为了表示此处可能出现此前不存在的新交叉。

- 将$\mathbf{x}$ 的交叉弦图叠放在 $\tilde{}\mathbf{x}$的交叉弦图上方。将块 $\boldsymbol{\alpha}^{a,\text{out}}$和 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{a,\text{in}}$识别为同一块，并将该块重新标记为 $\boldsymbol{\alpha}^{c,\text{new}}$。拼接两个图的 $\beta$轴，形成 $\tilde{}\mathbf{x} \cup \mathbf{x}$的完整 $\beta$轴。新图自下而上列出 $\tilde{}\mathcal{H} \cup \mathcal{H}$ 的 $\beta$ （左）指标和 $\alpha$ （右）指标，顺序按照 $\Xi \cup \Xi$指定。
- 在识别 $\boldsymbol{\alpha}^{a,\text{out}} \sim \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{a,\text{in}}$ 后， $l$ 上方图中的所有 $j \in o_L(\mathbf{x})$虚线股都变成了连接 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{c,\text{new}}$的实线股子集，表示粘合生成元 $\tilde{}\mathbf{x} \cup \mathbf{x}$中的新占据模式。

交叉股线　　生成元 $\tilde{}\mathbf{x} \cup \mathbf{x}$的股线图见图13。根据构造可知　　t

$$\begin{aligned}&\operatorname{inv}(\sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x}}) + \operatorname{inv}(\sigma_{\bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})o_L(\tilde{\mathbf{x}}\cup\mathbf{x})\leftrightarrow\text{std}})\\ &= \operatorname{inv}(\sigma_{\mathbf{x}}) + \operatorname{inv}(\sigma_{\tilde{\mathbf{x}}}) + \operatorname{inv}(\sigma_{\bar{o}_L(\mathbf{x})o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\text{std}}) + \operatorname{inv}(\sigma_{\bar{o}_L(\tilde{\mathbf{x}})o_L(\tilde{\mathbf{x}})\leftrightarrow\text{std}});\end{aligned}$$

关键在于，图13最右侧图中标记为 $n_1 - l$ 和 $l$的两条股线之间的交叉数，与图13最左侧图中标记为 $n_1 - l$ 的实线股和标记为 $l$ 的虚线股之间的交叉数相同。

最后，我们证明修正项满足

$$(a+\tilde{a}+n_1)k+n_2k=(\tilde{a}l+n_2l)+(ak+n_1k)$$
$$(a+\tilde{a}+n_1)k+n_2k+(\tilde{a}l+n_2l)+(ak+n_1k)=0 \mod 2$$

为此，我们将该表达式模 2 化简，舍弃所有不依赖于 $k$ 的项。这些符号最终会从 $\widehat{[\mathrm{BSDA}(\tilde{Y}\cup_{F_1}Y,\ \tilde{\Gamma}\cup_{\Lambda_1}\Gamma;\ \tilde{\Xi}\cup\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}}$ 中作为一个整体符号提出，而我们将其忽略。在计算中，我们利用关系 $l=k+c$ 和 $m=l+d$，将 $l$ 或 $m$ 的任意因子化为 $k$ 的因子，模去不依赖于 $k$ 的项。我们有

$$\begin{aligned}(a+\tilde{a}+n_1)k+n_2k+(\tilde{a}l+n_2l)+(ak+n_1k)&=(\tilde{a}+n_2)k+\tilde{a}l+n_2l\\&=(\tilde{a}+n_2)k+\tilde{a}(k+c)+n_2(k+c)\\&=2(\tilde{a}+n_2)k+(\tilde{a}+n_2)c\\&=0+(k\text{-independent terms}) \mod 2.\end{aligned}$$

□

**命题 4.13**。 记 $(\mathrm{id}_{(F,\Lambda)},\Gamma_{\mathrm{id}})$ 为从 $(F,\Lambda)$ 到其自身的恒等缝合余 ***bordism*** $(F\times[0,1],\Lambda\times[0,1])$，如定义 ***1.12*** 中所述。我们可以为该恒等配边赋予一个选择集 $\Xi_{\mathrm{id}}$，定义如下。

- 选择一个 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}$ 来表示 $(F,\Lambda)$，并确定 $\mathcal{Z}$ 中匹配弧的排序和定向。假设 $\mathcal{Z}$ 的入射副本和出射副本具有相同的匹配弧排序和定向。
- 选择例 ***2.21*** 中的恒等 ***Heegaard*** 图 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}=\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}\cup_{\mathcal{Z}^*}\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 来表示 $(\mathrm{id}_{(F,\ \Lambda)}\Gamma_{\mathrm{id}})$。
- 按照定义 ***4.3*** 的要求，为 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 作出所有选择，但暂不确定 $\beta$-圆的排序和定向，我们将在下文具体说明。
- 对 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 的 $\beta$-圆进行排序，使 $i^{th}$ $\beta$-圆与$\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 的 $i^{th}$ 入射 **α**-弧有非平凡交点。对 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 的 $\beta$-圆进行定向，使 $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 中的局部交数符号$\beta\cdot\alpha^{a,\ \text{入}}$始终为 $+1$；这迫使$\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}$ 中的所有局部交数符号 $\beta\cdot\alpha^{a,\ \text{出}}$ 均为 $-1$，因为 $\mathcal{Z}$ 两个副本中的弧定向必须一致。

作出这些选择后 $\Xi_{\mathrm{id}}$，映射

$$\widehat{[\mathrm{BSDA}}(\mathrm{id}_{(F,\Lambda)},\Gamma_{\mathrm{id}};\Xi_{\mathrm{id}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^*H_1(F,S^+)\to\wedge^*H_1(F,S^+)$$

与 $\wedge^*H_1(F,S^+)$ 上的恒等映射相差一个整体符号。

证明。 为 $(F,S^+)$ 赋予与注 4.2 中入射曲面 $F_0$ 所对应的相同常数，并将 $n_0$ 重命名为 $n:=$秩 $H_1(F,S^+)$。注意，

$$c=n+\chi(F\times[0,1],S^+\times[0,1])=n+\chi(F,S^+)=n-n=0.$$

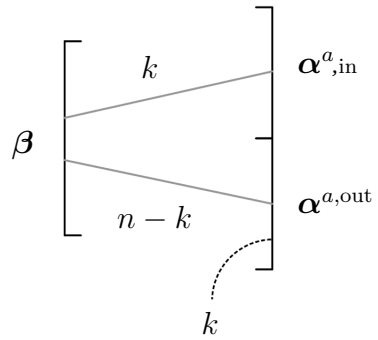



FIGURE 14. 在$\Xi_{\mathrm{id}}$ 中的选择下，$\mathbf{x} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\mathrm{id}})$的交叉股线图，见命题 4.13。在每个由 $k$ 或 $n-k$ 实线股组成的块内，所有股线彼此平行，因此不会出现内部交叉，这与 $\Xi_{\mathrm{id}}$施加的排序一致。

我们想要证明，对于每个$\mathbf{x}$，$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) = 0$模 2。首先注意，在 $\Xi_{\mathrm{id}}$ 中，局部交点贡献满足

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathbf{x}} i(x) &= |o_L(\mathbf{x})|\cdot 1 + |o_R(\mathbf{x})|\cdot 0\\ &= n-l\\ &= n-k-c\\ &= k + (k\text{-independent terms}) \mod 2.\end{aligned}$$

接下来，我们考察图14中$\mathbf{x}$ 的交叉弦图。根据 $\Xi_{\mathrm{id}}$中的排序约定可知，所有 $2^n$ 交叉弦图在 $k$ 和 $n-k$ 实线弦的簇内均没有内部交叉。相反，交叉只发生在不同块之间，表现为实线与实线或实线与虚线的交叉。因此，实线之间的交叉数即为逆序数

$$\mathrm{inv}(\sigma_{\mathbf{x}}) = \mathrm{inv}(\sigma_{o_L(\mathbf{x})\bar{o}_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}),$$

而实线-虚线交叉数为 $\mathrm{inv}(\sigma_{o_L(\mathbf{x})\, o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}})$。见图14。我们可以将总逆序数简化为

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}(\sigma_{o_L(\mathbf{x})\bar{o}_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{\bar{o}_L(\mathbf{x})\, o_L(\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{std}}) &= \#\{(i,j) : i\in J^c,\ j\in J, i>j\}\\ &\quad + \#\{(i,j) : i\in J^c,\ j\in J, j>i\}\\ &= \#\{(i,j) : i\in J,\ j\in J^c\}\\ &= |J|\cdot|J^c|\\ &= (k+c)(n-k-c)\\ &= k(n-k)\\ &= kn-k^2\\ &= kn-k \mod 2.\end{aligned}$$

对于修正项，由于 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 中没有 $\alpha$-圆，因此我们有 $ka = 0$。最后， $n_1 k$项就是 $nk$。因此，

$$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) = k + kn - k + nk = 0 \mod 2.$$

□

**注记 4.14**。 $\Xi_{\mathrm{id}}$ 中的定向约定使上述符号验证尤其简单，并确保与下文的推论 4.15 相容。将 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 中的所有曲线整体反向定向，是另一个容易验证的情形：此时无需对任何与 $k$ 无关的项取模，就有 $\sum_{x\in\mathbf{x}} i(x) = k$ ，因此对于所有 $\mathbf{x}$，仍有 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) = 0$ 。

一般而言，对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$ 中更复杂的定向模式或任意 Heegaard 图，很可能存在一种适用于任意选择的论证。不过，由于我们稍后将证明，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 除整体符号外与这些选择无关，因此这里采用这种更简单的方法。

4.2. **的选择与不交并**。 回顾一下，我们常常会处理形如 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 的 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图，其中 $\mathcal{H}'$ 是一个 $\beta$-$\beta$ 带边缝合图，如推论 2.22 中所述。这里我们记录一组选择，它假设存在这样的分解，并采用命题 3.4 中的定向模式。作为本节的结尾，我们讨论配边不交并的选择；这将在定理 1.14 的证明中用到。

**推论 4.15.** 对于定义 *4.3* 中的任意选择集，映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$与使用满足以下条件的任意选择集计算得到的映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 相差一个符号。

- 与推论 *2.22* 中一样，*Heegaard* 图的形式为 $\mathcal{H}_{\text{标准化}} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ ，其中 $\beta$-$\beta$ 是带边缝合海加德图 $\mathcal{H}'$；
- $\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_1$ 中弧的定向和排序，在 $\Xi_{\text{标准化}}$ 中的情况与 $\Xi$中相同；
- 与命题 *3.4* 中一样，在图的左侧（出射）， $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}$ 中的局部交点具有 $\beta \cdot \alpha = -1$；在图的右侧（入射）， $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 中的局部交点具有 $\beta \cdot \alpha = +1$；
- 在 $\beta$-圆的 $\mathcal{H}_{\text{范数}}$排序中，由 $\beta$的弧与 $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}$ 及 $\mathcal{H}'$粘合而成的圆，按照 $\mathcal{Z}_1$ 的弧排序（等价地，按照 $\mathcal{Z}_1^*$ 的弧排序），并排在$\beta$-圆之前；而由 $\beta$的弧与 $\mathcal{H}'$ 及 $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 粘合而成的圆，则按照 $\mathcal{Z}_0$ 或 $\mathcal{Z}_0^*$ 的弧排序，并排在 $\beta$-圆之后 $\mathcal{H}'$。

证明。 给定 $\Xi$，令 $\Xi_{\mathrm{norm}}$ 表示定义 4.3 中的选择集，其中：

- Heegaard 图 $\mathcal{H}_{\text{范数}}$ 是

$$\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} = \mathcal{H}_{\mathrm{id}} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H} \cup_{\mathcal{Z}_0} \mathcal{H}_{\mathrm{id}} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} (\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H} \cup_{\mathcal{Z}_0} \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}) \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2},$$

  where $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1} \mathcal{H} \cup_{\mathcal{Z}_0} \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} =: \mathcal{H}'$;

- $\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_1$ 中的弧的定向和排序与 $\Xi_{\text{范数}}$ 中 $\Xi$的相同；

- $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 中源自 $\alpha$和 $\beta$圆的 $\alpha$圆与 $\beta$圆的定向保持不变；

- $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 中新圆 $\alpha$的定向，若其由左侧 $\mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$ 和$\mathcal{H}$ 上的 $\alpha$弧，或右侧 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$ 上的 $\alpha$弧粘合而成，则由$\mathcal{H}$中 $\alpha$弧的定向诱导；

- $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 中新圆 $\beta$的定向，若其由左侧 $\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$ 和$\mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$上的 $\beta$弧粘合而成，则选取定向使得 $\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$ 中的局部交数符号 $\beta\cdot\alpha$ 始终为$-1$；

- $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ 中新圆 $\beta$的定向，若其由右侧 $\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$ 和$\mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$ 上的 $\beta$弧粘合而成，则选取定向使得 $\mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$ 中的局部交数符号 $\beta\cdot\alpha$ 始终为 $+1$；

- $\mathcal{H}$的 $\alpha$-圆的排序$_{\text{范数}}$ 将新的 $\alpha$-圆放在左侧（按照 $\mathcal{Z}_1$的弧排序），接着是 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$-圆（按照 $\Xi$排序），最后将新的 $\alpha$-圆放在右侧（按照 $\mathcal{Z}_0$的弧排序）；

- $\mathcal{H}$的 $\beta$-圆的排序$_{\text{范数}}$ 将新的 $\beta$-圆放在左侧（按照 $\mathcal{Z}_1$的弧排序），接着是 $\mathcal{H}$ 的 $\beta$-圆（按照 $\Xi$排序），最后将新的 $\beta$-圆放在右侧（按照 $\mathcal{Z}_0$的弧排序）。

那么， $\Xi_{\text{norm}}$ 满足该陈述对 $\mathcal{H}'=\mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}\cup_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{H}\cup_{\mathcal{Z}_0}\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$的要求。此外， $\Xi_{\text{norm}}$ 是通过将命题 4.13 中定义的、用于 $\mathcal{H}_{\text{id}}$ 的可复合选择集 $\Xi_{\text{id}}$ 与左右两侧用于 $\mathcal{H}$ 的选择 $\Xi$ 粘合而得到的，如定义 4.11 所示。由命题 4.12 和 4.13 可知

$$\begin{aligned}[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\text{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}} &= [\widehat{\text{BSDA}}(\text{id};\Xi_{\text{id}})]\circ[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}\circ[\widehat{\text{BSDA}}(\text{id};\Xi_{\text{id}})]\\ &= [\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}\end{aligned}$$

模去符号。 □

~ ~定义 4.16. 设 $(Y,\Gamma)$ 是从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合余边，且 $(Y,\Gamma)$ 是从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合余边。给定 $(Y,\Gamma)$ 的选择集 $\Xi$ 和 $(Y,\Gamma)$ 的选择集 $\Xi$~ ~ ~ ~ ~，我们将从~ ~ ~ ~(F0 ⊔ F0, Λ0 ⊔ Λ0) 到 $(F_1\sqcup F_1,\Lambda_1\sqcup\Lambda_1)$ 的缝合余边 $(Y\sqcup Y,\Gamma\sqcup\Gamma)$ 的一个选择集记为 $\Xi\sqcup\Xi$，定义如下。

- 选择弧图 $\mathcal{Z}_i\sqcup\mathcal{Z}_i$，使其表示 $i=0,1$~ ~ ~的 $(F_i\sqcup F_i,\Lambda_i\sqcup\Lambda_i)$，其中 $\mathcal{Z}_i$ ~ ~和 $\mathcal{Z}_i$ 分别是在 $\Xi$ 和 $\Xi$ 中固定的弧图。~
- 假设 $\mathcal{Z}_i\sqcup\mathcal{Z}_i$ 中匹配弧的排序和定向分别与 $\Xi$和 $\Xi$中~相同。将 $\mathcal{Z}_i$ 中的匹配弧排在 $\mathcal{Z}_i$ 中的匹配~弧之前。~ ~ ~ ~

- 选择 Heegaard 图 $\mathcal{H}\sqcup\mathcal{H}$ 来表示（$Y\sqcup Y$， $\Gamma\sqcup\Gamma$），其中 $\mathcal{H}$和 $\mathcal{H}$~分别是在 $\Xi$ 和 $\Xi$ 中固定的 Heegaard 图。

- 假设 $\mathcal{H}$ 和~ ~$\mathcal{H}$ 中的 $\alpha$-圆与 $\beta$-圆的排序和定向分别与 $\Xi$ 和 $\Xi$ 中的相同。将 $\tilde{\mathcal{H}}$的 $\alpha$-圆和 $\beta$-圆排在 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$-圆和 $\beta$-圆之前，从而使全体 $\alpha$-圆按以下方式排序

$$(a_1^c, \dots, \alpha_a^c, \tilde{\alpha}_1^c, \dots, \tilde{\alpha}_{\tilde{a}}^c)$$

并且全部 $\beta$-圆按以下方式排序

$$(\beta_1 \dots, \beta_b, \tilde{\beta}_1 \dots, \tilde{\beta}_{\tilde{b}}).$$

注意，全部 $\alpha$-曲线按以下方式排序

$$(\alpha_1^{a,\mathrm{out}}, \dots, \alpha_{n_1}^{a,\mathrm{out}}, \tilde{\alpha}_1^{a,\mathrm{out}}, \dots, \tilde{\alpha}_{\tilde{n_1}}^{a,\mathrm{out}}, \alpha_1^c, \dots, \alpha_a^c, \tilde{\alpha}_1^c, \dots, \tilde{\alpha}_{\tilde{a}}^c, \alpha_1^{a,\mathrm{in}}, \dots, \alpha_{n_0}^{a,\mathrm{in}}, \tilde{\alpha}_1^{a,\mathrm{in}}, \dots, \tilde{\alpha}_{\tilde{n_0}}^{a,\mathrm{in}}).$$

## 5. Sutured Alexander functor over $\mathbb{Z}$

在本节中，我们构造 Florens–Massuyeau 亚历山大函子的一个缝合的、取值于 $\mathbb{Z}$的版本，并证明：对任意选择集 $\Xi$，它与映射 $[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 至多相差一个符号；由此可知，$[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 是$(Y,\Gamma)$的不变量，至多相差一个整体符号。

**5.1. 亚历山大函数（定义在 $\mathbb{Z}$ 上）。**设$(Y,\Gamma)$是从$(F_0,\Lambda_0)$到$(F_1,\Lambda_1)$的缝合余边。设 $\Xi$ 为定义 4.3 中的选择集，其中包括$(Y,\Gamma)$的一个 $\alpha$-$\alpha$ 带边界的 Heegaard 图 $\mathcal{H}$ 。设 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$-圆个数为 $a$ ， $\beta$-圆个数为 $b$。

设 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{R}^+)$ 为我们在第 3 节中与 $\mathcal{H}$ 相关联的 CW 对（外加对 $R^+$ 的 CW分解 $\mathfrak{R}^+$ 这一额外选择）；为定向胞腔所需的、 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 圆与 $\beta$ 圆上的定向来自选择集 $\Xi$。胞腔链复形 $C_*^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y},\mathfrak{R}^+)$ 计算 $H_*(Y,R^+)$，且仅依赖于 $\mathcal{H}$ 与 $\Xi$ （而不依赖于 $R^+$ 的 CW分解 $\mathfrak{R}^+$ ）；它在次数 1 上同构于 $\mathbb{Z}^b$ ，在次数 2 上同构于 $\mathbb{Z}^a$ ，在其余次数上为零。如第 3.2 节所述，在 2-胞腔与 1-胞腔的基下表示胞腔微分 $\partial_2$ 的矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 是 $H_1(Y,R^+)$ 的表示矩阵。由命题 3.1 可知， $M_{\mathcal{H}}$ 的各项是 $\mathcal{H}$ 中曲线的代数交数“$\beta\cdot\alpha$”。

$M_{\mathcal{H}}$ 的亏格 $d$（生成元个数减去关系个数）为 $b-a$，在此情形下等于 $-\chi(Y,R^+)$（参见命题 4.7 的证明）。矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 为单射（核为零）当且仅当 $H_2(Y,R^+)=0$，因为 $M_{\mathcal{H}}$ 的核同构于 $H_2(Y,R^+)$。我们将这些事实总结于下述引理；其证明是显然的。

**引理 5.1。** 若 $H_2(Y,R^+)=0$，则亏格-$d$ 表示矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 对应于 $H_1(Y,R^+)$是单射；特别地， $d\geq 0$。若 $H_2(Y,R^+)\neq 0$，则矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 永远不是单射。

**定义 5.2。** （参见 [Les98，第 3 节。1] 以及 [FM15，定义 2。2]）设 $d=-\chi(Y,R^+)$。定义 $\mathbb{Z}$值亚历山大函数

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}\colon \wedge^d H_1(Y,R^+)\to\mathbb{Z},$$

定义良好，但只确定到一个（整体）符号，具体如下。若 $H_2(Y,\ R^+)$ 非零，则将 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\ \Gamma}$ 定义为零函数。否则， $d\geq 0$ 和 $H_1(Y,\ R^+)$ 有一个单射表示

矩阵 $M$，其亏格为 $d$；例如，与上述一组选择 $\Xi$ 相关联的矩阵 $M_{\mathcal{H}}$。定义 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}$：将 $\wedge^d H_1(Y,\ R^+)$ 中的一个元素 $u_1\wedge\cdots\wedge u_d$ 映射为 $\mathbb{Z}$ 中的以下元素。对每个 $i$，任取 $u_i$ 的一个表达式 $u_i$，使其为生成元的 $\mathbb{Z}$-线性组合；从 $M$ 构造一个方阵，方法是在右侧添加新列 $u_1,\ \ldots,\ u_d$，然后取其行列式，这是 $\mathbb{Z}$ 中的一个元素。我们将 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}(u_1\wedge\cdots\wedge u_d)$ 定义为 $\mathbb{Z}$ 中的这个元素。

**引理 5.3.** 定义 *5.2* 中的亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}$ 与代表元 $u_1,\ldots,u_d$ 的选取无关。

证明。固定一个关于 $H_1(Y,\ R^+)$ 的表示矩阵 $M$，以计算 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}$。$H_1(Y,\ R^+)\cong\mathbb{Z}^b/\operatorname{im} M$ 的任意两个不同代表元 $u_i$ 和 $u_i'$ 相差一个 $\operatorname{im} M$ 中的元素，即对于某个 $v_i\in\mathbb{Z}^a$，有 $u_i = u_i' + Mv_i$。但是，$Mv_i$ 是 $M$ 各列的线性组合；将列的线性组合加到另一列上，行列式保持不变（而不只是相差一个符号），因此

$$\det([M|\overline{u}_1\cdots\overline{u}_i'\cdots\overline{u}_d]) = \det([M|\overline{u}_1\cdots\overline{u}_i\cdots\overline{u}_d]).$$

对每个 $i$ 应用这一点即可证明该结论。 □

**命题 5.4.**（参见 [Les98，第 3 节。1]）除整体（全局）符号外，定义 *5.2* 中的亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}$ 仅取决于阿贝尔群 $H_1(Y,R^+)$ 和亏格 $d$，而与单射表示矩阵 $M$ 的具体选取无关。

证明。假设 $M\neq M$ 是 $H_1(Y,R^+)$ 的亏格为 $d$ 的单射表示矩阵。根据定义，$M$ 和 $M$ 给出短正合列

$$\begin{aligned} 0\to\mathbb{Z}^a &\xrightarrow{M}\mathbb{Z}^b\xrightarrow{\pi}H_1(Y,R^+)\to 0\\ 0\to\mathbb{Z}^{\tilde{a}} &\xrightarrow{\widetilde{M}}\mathbb{Z}^{\tilde{b}}\xrightarrow{\tilde{\pi}}H_1(Y,R^+)\to 0 \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $d=b-a=\tilde{b}-\tilde{a}$。令 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,M}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,M}$ 分别表示使用 $M$ 和 $M$ 定义的相应亚历山大函数 $\widetilde{\ }$。令 $u_1\wedge\cdots\wedge u_d\in\wedge^d H_1(Y,R^+)$。我们的目标是证明

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,M}(u_1\wedge\cdots\wedge u_d)=\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,\widetilde{M}}(u_1\wedge\cdots\wedge u_d)$$

在相差一个与 $u_1\wedge\cdots\wedge u_d$ 无关的整体符号的意义下。我们沿用证明 Schanuel 引理的策略，通过由 $M$ 和 $M$ 构造的 $H_1(Y,R^+)$ 的辅助表示。考虑复合

$$0\to\mathbb{Z}^{a+\tilde{b}}\xrightarrow{M_1}\mathbb{Z}^{b+\tilde{b}}\xrightarrow{\pi\oplus\tilde{\pi}}H_1\left(Y,R^+\right)\to 0 \tag{9}$$

其中

$$M_1 \coloneqq \begin{array}{c} \begin{matrix} a & \tilde{b} \end{matrix}\\ \begin{bmatrix} M & -\eta\\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{matrix} b\\ \tilde{b} \end{matrix}\end{array}$$

且 $\eta\colon\ \mathbb{Z}^b \to \mathbb{Z}^b$ 是 $\tilde{\pi}$ 经由 $\pi$的任意提升，即 $\pi \circ \eta = \tilde{\pi}$。注意，由于 $\mathbb{Z}^b$ 是自由的，因此也是投射的，故可保证 $\eta$ 存在。还有一个类似的复合

$$0 \to \mathbb{Z}^{\tilde{a}+b} \xrightarrow{M_2} \mathbb{Z}^{\tilde{b}+b} \xrightarrow{\tilde{\pi}\oplus\pi} H_1\left(Y, R^+\right) \to 0 \tag{10}$$

其中

$$M_2 \coloneqq \begin{bmatrix} \widetilde{M} & -\eta' \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \tilde{a} & b \\ \tilde{b} \\ b \end{matrix}$$

和 $\eta'\colon\ \mathbb{Z}^b \to \mathbb{Z}^b$ 是一个映射，使得 $\tilde{\pi} \circ \eta' = \pi$。我们将证明 (9) 和 (10) 是 $H_1(Y,\ R^+)$ 的自由分解，即 $M_1$和 $M_2$分别是 $H_1(Y,\ R^+)$的亏格为 $b-a$和 $b-\tilde{a}$的单射表示矩阵。具体而言，我们将证明 $\operatorname{im} M_1 = \ker(\pi \oplus \tilde{\pi})$；$\operatorname{im} M_2 = \ker(\tilde{\pi} \oplus \pi)$则可类似证明。

我们可以将 $M_1$解释为一个线性映射 $M_1(x,\ y) = (M(x) - \eta(y),\ y)$。由于

$$\begin{aligned}
(\pi \oplus \tilde{\pi})\left(M_1(x,y)\right) &= (\pi \oplus \tilde{\pi})\left(M(x) - \eta(y), y\right) \\
&= (\pi(M(x)) - \pi(\eta(y))) + \tilde{\pi}(y) \\
&= 0 - \tilde{\pi}(y) + \tilde{\pi}(y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

对任意 $(x,\ y)$，其中在第三个等号处，我们利用了由定义 $M$ 的正合序列可知 $\pi \circ M = 0$。

对于反向包含，设 $(x, y) \in \ker(\pi \oplus \tilde{\pi})$。我们有

$$\begin{aligned}
\pi(x) + \tilde{\pi}(y) &= 0 \\
\pi(x) + \pi(\eta(y)) &= 0 \\
\pi(x + \eta(y)) &= 0
\end{aligned}$$

这意味着 $x + \eta(y) \in \ker\ \pi = \operatorname{im}\ M$。因此存在某个 $z \in \mathbb{Z}^a$，使得

$$\begin{aligned}
M(z) &= x + \eta(y) \\
M(z) - \eta(y) &= x
\end{aligned}$$

于是 $(x, y) = (M(z) - \eta(y),\ y) = M_1(z, y)$，从而证明了该断言。

已知 (9) 和 (10) 是关于$H_1(Y, R^+)$ 的单射亏格-$d$ 表示，现在我们证明，相应的亚历山大函数与分别使用 $M$ 和 $M$ 计算所得的结果相同（相差一个符号）$\widetilde{\ }$：

(I) ($\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\ \Gamma,\ M} = \pm\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\ \Gamma,\ M_1}$)：任选代表元 $u_i \in \mathbb{Z}^b$，计算 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\ \Gamma,\ M}$。根据引理 5.3，我们可以自由选用代表元

$$\overline{u}_i' = \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

来计算 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_1}$。于是有

$$\begin{aligned}\det([M_1|\overline{u}'_1\cdots\overline{u}'_d]) &= \det\left[\begin{array}{c|c|ccc} M & -\eta & \overline{u}_1 & \cdots & \overline{u}_d \\ \hline 0 & I & \multicolumn{3}{c}{0} \end{array}\right] \\ &= (-1)^{\tilde{b}d}\det\left[\begin{array}{c|ccc|c} M & \overline{u}_1 & \cdots & \overline{u}_d & -\eta \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & I \end{array}\right] \\ &= (-1)^{\tilde{b}d}\det([M|\overline{u}_1\cdots\overline{u}_d])\det(I) \\ &= (-1)^{\tilde{b}d}\det([M|\overline{u}_1\cdots\overline{u}_d]).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_1}$ 相差一个整体符号 $(-1)^{\tilde{b}d}$。

**(II)** $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_2} = \pm\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y',\,\Gamma,\,\widetilde{M}})$：与前一点类似即可得到。在此情形下，整体符号为 $(-1)^{\tilde{b}d}$。

为完成证明，我们因此可以证明$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_1} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_2}$ 相差一个符号。我们通过将表示式（9）和（10）组装成一个更大的图来实现这一点

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{a+\tilde{b}} & \xrightarrow{M_1} & \mathbb{Z}^{b+\tilde{b}} & \xrightarrow{\pi\oplus\tilde{\pi}} & H_1(Y,R^+) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle I} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\tilde{a}+b} & \xrightarrow{M_2} & \mathbb{Z}^{\tilde{b}+b} & \xrightarrow{\tilde{\pi}\oplus\pi} & H_1(Y,R^+) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $S\colon\ \mathbb{Z}^{b+b}\to\mathbb{Z}^{b+b}$ 是交换映射 $S(x,\ y) = (y,\ x)$。右侧方格自动交换。我们声称存在唯一的 $\mathbb{Z}$-线性映射 $\varphi$ 使得左侧方格交换，并且这进一步迫使 $\varphi$ 成为一个同构。令 $x\in\mathbb{Z}^{a+b}$。由于顶行的正合性，$(\pi\oplus\tilde{\pi})\circ M_1 = 0$，右侧方格的交换性意味着

$$(\tilde{\pi}\oplus\pi)\big(S(M_1(x))\big) = I\big((\pi\oplus\tilde{\pi})(M_1(x))\big) = (\pi\oplus\tilde{\pi})(M_1(x)) = 0$$

因此 $S(M_1(x))\in\ker(\tilde{\pi}\oplus\pi)$。根据底部一行的正合性，$\ker(\tilde{\pi}\oplus\pi) = \operatorname{im} M_2$，因此存在某个 $\varphi(x)\in\mathbb{Z}^{\tilde{a}+b}$ 使得 $M_2(\varphi(x)) = S(M_1(x))$。由于 $M_2$ 是单射的，该元素$\varphi(x)\in\mathbb{Z}^{\tilde{a}+b}$ 是唯一的。我们通过此对应定义 $\varphi\colon\ \mathbb{Z}^{a+b}\to\mathbb{Z}^{\tilde{a}+b}$；根据构造，左方形交换。为了证明 $\varphi$ 必然是同构，我们直接验证其单射性和满射性（受到 [Les96, 引理 A.2.21]中证明的启发）。

对于单射性，假设 $\varphi(x) = 0$。交换性意味着

$$S(M_1(x)) = M_2(\varphi(x)) = M_2(0) = 0,$$

因此 $M_1(x) = 0$，因为 $S$ 是同构。$M_1$ 的单射性意味着我们必须有$x = 0$，所以 $\varphi$ 是单射的。

为证明满射性，设 $y\in\mathbb{Z}^{\tilde{a}+b}$。由底部行的正合性，$M_2(y)\in\ker(\tilde{\pi}\oplus\pi)$。右侧方块的交换性给出 $(\tilde{\pi}\oplus\pi)\circ S = I\circ(\pi\oplus\tilde{\pi})$，因此 $(\tilde{\pi}\oplus\pi) = (\pi\oplus\tilde{\pi})\circ S^{-1}$。这意味着

$$(\tilde{\pi}\oplus\pi)\big(M_2(y)\big) = (\pi\oplus\tilde{\pi})\big(S^{-1}(M_2(y))\big) = 0,$$

因此 $S^{-1}(M_2(y)) \in \ker(\pi \oplus \tilde{\pi}) = \operatorname{im} M_1$，这是由顶部行的正合性得出的。因此，存在 $x \in \mathbb{Z}^{a+b}$，使得 $M_1(x) = S^{-1}(M_2(y))$，或者等价地，$S(M_1(x)) = M_2(y)$。根据 $\varphi$的定义，这意味着 $\varphi(x) = y$，所以 $\varphi$ 是满射的。既然我们已经建立了映射 $\varphi$，现在可以继续证明。

(III) ($\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_1} = \pm\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_2}$)：任选代表元 $u_i' = \begin{bmatrix} u_i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{b+\tilde{b}}$ 进行计算$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_1}$。交换性给出 $S \circ M_1 = M_2 \circ \varphi$。在该方程两边分别添上列 $Su_i' = \begin{bmatrix} 0 \\ u_i \end{bmatrix}$，可得

$$[SM_1|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d'] = [M_2\varphi|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d']$$
$$S \cdot [M_1|\overline{u}_1' \cdots \overline{u}_d'] = [M_2|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d'] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \varphi & 0 \\ \hline 0 & I_{d\times d} \end{array}\right].$$

取行列式可得

$$\begin{aligned} \det(S)\det[M_1|\overline{u}_1' \cdots \overline{u}_d'] &= \det[M_2|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d']\det(\varphi) \\ \det[M_1|\overline{u}_1' \cdots \overline{u}_d'] &= \det(\varphi)\det(S^{-1})\det[M_2|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d'] \\ &= u \cdot \det[M_2|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d'], \end{aligned}$$

其中 $u = \det(\varphi)\det(S^{-1})$ 是基环 $\mathbb{Z}$ 中的一个单位。事实上，$\varphi$ 和 $S$ 都可逆，因此它们的行列式都是单位元，从而它们的乘积也是单位元。[2] 也就是说，

$$\det[M_1|\overline{u}_1 \cdots \overline{u}_d] = \pm\det[M_2|S\overline{u}_1 \cdots S\overline{u}_d]$$

因为 $\mathbb{Z}$ 中的单位元是 $\pm 1$。注意，$\det(\varphi)$ 与 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$ 无关。

由于 $(\tilde{\pi}\oplus\pi)\circ S = \pi\oplus\tilde{\pi}$，映射到 $u_i$ 的代表元 $u_i'$ 在 $\pi\oplus\tilde{\pi}$ 下也映射到 $u_i$，这是由 $(\tilde{\pi}\oplus\pi)\circ S$ 得出的。因此，$Su_i'$ 是计算$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma,\,M_2}$时可用的一组有效列，我们可以根据引理 5.3 自由选择这些列。因此，

$$\det[M_1|\overline{u}_1' \cdots \overline{u}_d'] = \pm\det[M_2|S\overline{u}_1' \cdots S\overline{u}_d']$$
$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,M_1}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d) = \pm\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,M_2}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d).$$

将等式 (I)、(II) 和 (III) 合并起来，我们得到

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,M}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma,\widetilde{M}}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d)$$

相差一个与 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$ 无关的整体符号。 □

**5.2. 亚历山大函子在 $\mathbb{Z}$上。** 既然我们已经确立了$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}$的良定义性，便可据此定义亚历山大函子。回想，在任意交换环$R$上，若 $M$ 是秩为 $n$ 的自由 $R$-模，则一个体积形式 在 $M$ 上是 $R$-线性同构的一种选取

[2]特别地，$\det(S^{-1}) = (-1)^{b\tilde{b}}$。因此，也可以将此等式理解为相差乘以$\pm 1$ 以及基环中的另一个单位 $\det(\varphi)$。这一观点预示了 $\mathbb{Z}[G]$情形，在该情形下，类似的命题 10.5 将在相差乘以 $\pm G$中的元素的意义下成立。

$\omega$: $\wedge_R^n M \to R$; 等价地，即秩一自由模 $\wedge_R^n M \cong R$的一个生成元的选取。任意两种生成元的选取（从而任意两种体积形式）相差基环 $R$中的一个单位。

现在令 $n_i =$秩 $H_1(F_i, S_i^+)$ 和 $c = n_1 + \chi(Y, R^+)$。注意， $d = -\chi(Y, R^+) = n_1 - c$。用 $i_*$ 表示以下映射之一

$$H_1(F_i, S_i^+) \to H_1(Y, R^+)$$

由对的包含映射 $i : (F_i, S_i^+) \to (Y, R^+)$诱导。

**命题 5.5.** 存在一个 $\mathbb{Z}$-线性映射

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma) \colon \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \to \wedge^* H_1(F_1, S_1^+),$$

该映射在相差一个符号的意义下唯一，且次数为 $c$，满足

$$\omega(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma) \otimes \mathrm{id})(x \otimes y)) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_* x \wedge i_* y) \tag{11}$$

其中 $x \in \wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$、 $y \in \wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$，映射

$$\wedge \colon \wedge^p H_1(F_1, S_1^+) \otimes \wedge^q H_1(F_1, S_1^+) \to \wedge^{n_1} H_1(F_1, S_1^+)$$

当 $p + q = n_1$ 时，将 $z \otimes w$ 映射到 $z \wedge w$，否则映射为零； $\omega$ 表示自由 $\mathbb{Z}$-模 $H_1(F_1, S_1^+)$ 上的任意体积形式；张量积 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma) \otimes \mathrm{id}$ 按照定义 *1.13* 中的超符号规则计算，其中 $|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma)| = c$；亚历山大函子 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}$ 定义为：对于 $d' \neq d$，其在 $\wedge^{d'} H_1(Y, R^+)$ 中的输入上取值为零。

证明。证明安排如下。按照定义 4.3，固定 $H_1(F_0, S_0^+)$ 的一组基 $\{\gamma_1^{\mathrm{in}}, \ldots, \gamma_{n_0}^{\mathrm{in}}\}$ 和 $H_1(F_1, S_1^+)$ 的一组基$\{\gamma_1^{\mathrm{out}}, \ldots, \gamma_{n_1}^{\mathrm{out}}\}$。我们首先证明，相对于 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$ 的入射基 $\{\gamma_I^{\mathrm{in}}\}$ 和 $\wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$ 的出射基$\{\gamma_J^{\mathrm{out}}\}$， $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma)$ 的矩阵系数由定义关系 (11) 唯一确定。也就是说，对于每对基元素 $(\gamma_I^{\mathrm{in}}, \gamma_J^{\mathrm{out}})$，我们要求当 $x = \gamma_I^{\mathrm{in}}$ 和 $y = \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}$ 时（其中 $J^c$ 是 $J$ 的补集），(11) 成立。这就迫使 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma)(\gamma_I^{\mathrm{in}})$ 中 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$ 的系数具有一个显式公式，因此该映射在所选基上的取值是唯一确定的。接着，我们验证对于任意的 $x$ 和 $y$，定义关系 (11) 仍然成立。最后，我们确定 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma)$ 的次数，并证明 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y, \Gamma)$ 除整体符号外与体积形式的选择无关。

为方便起见，固定体积形式 $\omega$ 使得

$$\omega(\gamma_1^{\mathrm{out}} \wedge \cdots \wedge \gamma_{n_1}^{\mathrm{out}}) = +1.$$

注意，

$$\gamma_J^{\mathrm{out}} \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}})} \cdot \gamma_1^{\mathrm{out}} \wedge \cdots \wedge \gamma_{n_1}^{\mathrm{out}}$$

其中 $\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}}$ 如定义 4.3 中所给。对两边应用 $\omega$，得到

$$\omega(\gamma_J^{\mathrm{out}} \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}})}.$$

**唯一性**：若在方程 (11) 中取 $x = \gamma_I^{\mathrm{in}}$ 和 $y = \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}$，应用超符号规则后，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}) &= \omega\big(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes \mathrm{id})(\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})\big) \\
&= \omega\big((-1)^{c(n_1-l)}\,\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)(\gamma_I^{\mathrm{in}}) \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\big) \\
&= (-1)^{c(n_1-l)}\,\omega\left(\sum_{J'} a_{I,J'}\,\gamma_{J'}^{\mathrm{out}} \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\right) \\
&= (-1)^{c(n_1-l)}\sum_{J'} a_{I,J'}\,\omega(\gamma_{J'}^{\mathrm{out}} \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}) \\
&= (-1)^{c(n_1-l)}\,a_{I,J}\,(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow \mathrm{std}})},
\end{aligned}$$

因为 $\omega(\gamma_{J'}^{\mathrm{out}} \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}) = 0$除非 $J' = J$。解出 $a_{I,\,J}$得

$$a_{I,J} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow \mathrm{std}})}\,(-1)^{c(n_1-l)}\,\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}).$$

由于 $\mathcal{A}_{Y,\,\Gamma}^{\mathbb{Z}}$ 定义良好（参见引理 5.3、命题 5.4），这些系数 $a_{I,\,J}$ 在整体符号意义下必定唯一确定。

**存在性**：存在唯一一个（在整体符号意义下） $\mathbb{Z}$-线性映射 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)$，由以下求和定义

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)(\gamma_I^{\mathrm{in}}) = \sum_{J'} a_{I,J'}\cdot\gamma_{J'}^{\mathrm{out}}$$

其中每个 $a_{I,\,J'}$ 均由显式公式 (11) 定义。换言之，我们将 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)$ 定义为满足以下条件的唯一线性映射：当 $x = \gamma_I^{\mathrm{in}}$ 和 $y = \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}$ 时，方程 (11) 成立。

**验证任意元素**：设 $x = \sum_I a_I\gamma_I^{\mathrm{in}} \in \wedge^* H_1\left(F_0, S_0^+\right)$ 和 $y = \sum_J b_{J^c}\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}} \in \wedge^* H_1\left(F_1, S_1^+\right)$。注意，$i_*$、$\omega$ 和 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes\mathrm{id}$ 是 $\mathbb{Z}$-线性的，而 $\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}$ 是多重线性的。应用方程 (11) 后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}(i_*x \wedge i_*y) &= \mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}\left(i_*\left(\sum_I a_I\,\gamma_I^{\mathrm{in}}\right) \wedge i_*\left(\sum_J b_{J^c}\,\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\right)\right) \\
&= \mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}\left(\sum_I a_I\,i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge \sum_J b_{J^c}\,i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\right) \\
&= \sum_{I,J} a_I b_{J^c}\,\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Z}}\left(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\right) \\
&= \sum_{I,J} a_I b_{J^c}\,\omega\left(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes\mathrm{id})(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})\right) \\
&= \omega\left(\wedge\left(\sum_{I,J} a_I b_{J^c}\,(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes\mathrm{id})(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})\right)\right) \\
&= \omega\left(\wedge\left((\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes\mathrm{id})\left(\sum_{I,J} a_I b_{J^c}\,\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \omega\left(\wedge\left((\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes \mathrm{id})\left(\sum_I a_I\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes \sum_J b_{J^c}\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\right)\right)\right)$$
$$= \omega\left(\wedge\left((\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes \mathrm{id})(x\otimes y)\right)\right).$$

因此，定义关系 (11) 对任意 $x$ 和 $y$均成立。

次数：令 $k=|x|$，并令 $l=n_1-|y|$，于是 $|y|=n_1-l$。方程 (11) 的右端仅当 $i_*x\wedge i_*y$属于 $\wedge^d H_1(Y,R^+)$ 时才非零，其中 $d=-\chi(Y,R^+)$，也就是说，仅当

$$|i_*x|+|i_*y| = |x|+|y| = k+n_1-l = d$$

其中第一个等号成立是因为 $i_*$ 是齐次的。在方程 (11) 的左端，我们将次数为 $-n_1$ 的映射 $\omega$ 作用于 $\wedge^{k'+n_1-l}H_1(F_1,S_1^+)$ 中的元素 $\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)\otimes\mathrm{id})(x\otimes y)$，其中 $k'$ 是 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)(x)$ 的次数；结果仅当 $k'-l=0$ 时才非零，也就是说 $k'=l$。在 $k+n_1-l=d$ 中用 $k'$ 代替 $l$，得到

$$k'-k = n_1-d = c.$$

因此，$k'=k+c$，所以 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 是次数为 $c$ 的齐次函数。

符号歧义：回想一下，任何其他体积形式的选取都与 $\omega$ 相差基环 $\mathbb{Z}$ 中的一个单位。换言之，在 $H_1(F_1,S_1^+)$ 上，体积形式只有两种选取：$\omega$ 和 $-\omega$。如果我们改选另一种，$-\omega$，所有系数$a_{I,J}$都会多出一个全局因子 $-1$。因此，改变体积形式不会影响 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$，至多相差一个整体符号。□

**注 5.6.** 请注意，我们的缝合亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}$ 在一个特例下可还原 FM15 的亚历山大函数（定义 2.2] ）：若 $G=1, Y=M$ 连通且边界连通，并且 $R^+$ 是一个圆盘，将 $R^+$ 压缩为一点并将其视为基点 $\star\in\partial M$，则我们的 $H_1(Y,R^+)$ 与 Florens–Massuyeau 的 $H_1^{\varphi}(M,\star)$ 相对应，而我们的 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}$ 则与他们的 $\mathcal{A}^M_{\varphi}$ 相对应。

类似地，我们的亚历山大函子 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 在特例下可还原 FM15 第 2 节中的亚历山大函子 $\mathsf{A}(M,\varphi)$：若 $G=1$，且 $(Y=M,\Gamma)$ 是一个连通配边，其中每个 $S_i^+\subset F_i$ 都由单个区间组成，那么将这些区间收缩为基点$\star\in\partial F_{\pm g}=S^1$，即可将我们的 $H_1(F_i,S_i^+)$ 与 Florens–Massuyeau 的 $H_1^{\varphi}(F_{\pm g},\star)$ 等同，从而将我们的 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 与他们的 $\mathsf{A}(M,\varphi)$ 等同。

## 5.3. 将 [BSDA] 与 $\mathbb{Z}$ 上的亚历山大函子等同。

**定理 5.7。** 设 $\Xi$ 是定义 *4.3* 中任意一个选择集。我们有

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = \mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$$

作为从 $\wedge^*H_1(F_0,S_0^+)$ 到 $\wedge^*H_1(F_1,S_1^+)$ 的映射，差一个符号。

证明。 根据推论 4.15，我们可以假设 $\Xi$ 具有 $\Xi_{\mathrm{norm}}$的形式。设 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$和 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$分别是 $\wedge^*H_1(F_0,S_0^+)$ 与 $\wedge^*H_1(F_1,S_1^+)$ 的基元素。设 $k=|I|$ 和 $l=|J|$，并假设 $l=k+c$，其中 $c=n_1+\chi(Y,R^+)$，如常。

与命题 5.5 的证明中一样，固定体积形式 $\omega$ 使得

$$\omega(\gamma_1^{\mathrm{out}} \wedge \cdots \wedge \gamma_{n_1}^{\mathrm{out}}) = +1.$$

我们将计算

$$\omega(\wedge([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} \otimes \mathrm{id})(\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})) \tag{12}$$

并证明结果与 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})$ 相同，至多相差一个与 $I$ 和 $J$ 无关的整体符号。

根据命题 5.4，我们可以使用 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的表示矩阵来计算 $H_1(Y,\ R^+)$ $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})$；根据第 3.3 节中的讨论，我们可以用以下方式理解 $i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 和 $i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}$

$$i_*\colon H_1(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{S}_i^+) \to H_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}_i^+).$$

根据我们的超符号约定，(12) 等于

$$(-1)^{c(n_1-k-c)}\omega([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}) \wedge \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}),$$

并且至多相差一个与 $k$ 无关的整体符号，我们可以用 $(-1)^{ck}$ 替换 $(-1)^{c(n_1-k-c_)}$。因此，采用我们对体积形式 $\omega$ 的特定选择，我们看到 (12) 等于 $(-1)^{ck+\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c}\leftrightarrow\mathrm{std})}$ 乘以 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 中第 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 列、第 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$ 行的矩阵元 $E$。

根据行列式的排列展开，我们可以将 $E$ 写为

$$(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c}\leftrightarrow\mathrm{std})+ak+n_1k}\det \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^c \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_{J^c}^{\mathrm{out}} & \alpha^c & \alpha_I^{\mathrm{in}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -*_{J^c} & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & *_I \end{bmatrix} \end{array} \tag{13}$$

其中，矩阵元定义为相关 $\alpha$ 和 $\beta$ 曲线的代数交数 $\beta\cdot\alpha$；块 $-*_{J^c}$ 的每一列仅在对应于 $J^C$ 中某个元素的单行上取值 $-1$，其余位置均为零；块 $*_I$ 的每一列仅在对应于 $I$ 中某个元素的单行上取值 1，其余位置均为零。

证明现在分为两种情况。设 $H_2(Y,\ R^+) \neq 0$。由于在这种情况下，我们在定义 5.2 中定义了 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\,\Gamma} = 0$，因此 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)$ =0。另一方面，引理 5.1 表明 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 不是单射；等价地，$M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的列是 $\mathbb{Z}$-线性相关的。由于方程 (13) 的矩阵中间的 $\alpha^c$ 列（共三个块）是$M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$，方程 (13) 中矩阵的列线性相关。因此，方程 (13) 中的矩阵元 $E$ 为零。于是，

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = 0.$$

因此，假设 $H_2(Y,\ R^+) = 0$。那么 $M_{\mathcal{H}}$ 是单射，并且相差一个与 $k = |I|$无关的符号，我们有

$$\begin{aligned}&\omega(\wedge([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} \otimes \mathrm{id})(\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes \gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})) \\ &= (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c}\leftrightarrow\mathrm{std})+ck}E\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{ak+n_1k+ck} \det \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^{c} \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_{Jc}^{\mathrm{out}} & \alpha^{c} & \alpha_{I}^{\mathrm{in}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -*_{Jc} & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & *_I \end{bmatrix} \end{array} \\
&= \det \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^{c} \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha^{c} & \alpha_{I}^{\mathrm{in}} & \alpha_{Jc}^{\mathrm{out}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & 0 & *_{Jc} \\ * & 0 & 0 \\ * & *_I & 0 \end{bmatrix} \end{array} \\
&= \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{Jc}^{\mathrm{out}});
\end{aligned}
$$

在倒数第二步中，我们利用了 $(-1)^{(n_1-k-c)(a+k)+(n_1-k-c)} = (-1)^{n_1k+ak+ck}$，相差一个与$k$无关的符号。对于最后一步，注意到直接利用命题 3.4 展开 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{Jc}^{\mathrm{out}})$（根据我们关于 $\Xi_{\mathrm{norm}}$的假设，其前提成立），会得到倒数第二步中的行列式，只是将 $*_I$ 和 $*_{Jc}$ 分别替换为 $-*_I$ 和 $-*_{Jc}$。总的来说，符号差异为 $k+(n_1-k-c) = n_1-c$，它与 $k$无关。因此，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$，从而对于任意选择集 $\Xi$，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 满足刻画 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 的方程（相差一个符号）。□

**5.4. BSDA 在 $[\mathrm{BSDA}]$ 上的独立性 $\mathbb{Z}$。** 定理 5.7 将去范畴化不变量$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 与一个独立于 $\Xi$ 的量联系起来。事实上，根据命题 5.5，$\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 是一个差一个符号的映射。这一观察使我们能够定义一个不依赖于辅助数据 $\Xi$ 的$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$版本。

**定义 5.8。** 设 $(Y,\Gamma)$ 是一个缝合余边，且 $\Xi$ 是定义 4.3 中所述的任意选择集。我们定义

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$$

为差一个符号的映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^* H_1(F_0,S_0^+) \to \wedge^* H_1(F_1,S_1^+),$$

对于任意选择的 $\Xi$。

**推论 5.9。** 将对象上的定义为如下形式的赋值 $\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1} \to \mathrm{Ab}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}_{\pm 1}$

$$(F,\Lambda) \mapsto \wedge^* H_1(F,S^+)$$

并将态射上的定义为

$$(Y,\Gamma) \mapsto [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$$

具有函子性。

证明。 由命题 4.13 可知

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\mathrm{id}_{(F,\Lambda)},\Gamma_{\mathrm{id}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = \mathrm{id}_{\wedge^* H_1(F,S^+)}$$

作为差一个符号的映射，其中我们使用命题 4.13 的选择集 $\Xi_{\mathrm{id}}$ 来计算$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\mathrm{id}_{(F,\Lambda)},\ \Gamma_{\mathrm{id}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$。类似地，若 $(Y,\ \Gamma)$ 和 $(\tilde{Y},\ \tilde{\Gamma})$ 是可复合的缝合余边，

命题 4.12 给出

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\tilde{Y}\cup_{F_1} Y,\tilde{\Gamma}\cup_{\Lambda_1}\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = [\widehat{\mathrm{BSDA}}(\tilde{Y},\tilde{\Gamma})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} \circ [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$$

~作为差一个符号的映射，其中我们使用定义 4.11 中的可复合选择集 Ξ 和 Ξ 以及粘合选择$\tilde{\Xi}\cup\Xi$，分别计算映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$、$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(\tilde{Y},\tilde{\Gamma})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 和 $\widehat{\sim[\mathrm{BSDA}(Y\cup_{F_1} Y,\ \Gamma\cup_{\Lambda_1}\Gamma)]}$。□

## 6. Sutured Frohman–Nicas TQFT

设 $(Y,\Gamma)$ 是从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合配边。在本节中，我们将把 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 与定理 1.7 陈述中定义的缝合亚历山大函子联系起来。与引言中一样，设

$$K = \operatorname{rank} H_1(F_0,S_0^+) + \operatorname{rank} H_1(F_1,S_1^+) + \chi(Y,R^+).$$

**命题 6.1**。假设 $H_2(Y,R^-)=0$。我们有 秩$\ker(i_*)\le K$，当且仅当 $H_2(Y,R^+)=0$ 时等号成立。

证明。我们有正合列

$$0\to\ker i_*\to H_1(F_0\sqcup F_1,S_0^+\sqcup S_1^+)\xrightarrow{i_*} H_1(Y,R^+)\to H_1(Y,R^+)/\operatorname{im}(i_*)\to 0$$

and

$$\begin{aligned}\cdots\to H_1(F_1\cup R^+\cup F_0,R^+)&\xrightarrow{i_*} H_1(Y,R^+)\to H_1(Y,F_1\cup R^+\cup F_0)\\ &\to H_0(F_1\cup R^+\cup F_0,R^+)=0.\end{aligned}$$

通过切除，我们得到典范同一 $H_1(F_0\sqcup F_1,S_0^+\sqcup S_1^+)\cong H_1(F_1\cup R^+\cup F_0,R^+)$，在此同一关系下，$i_*$ 到 $H_1(Y,R^+)$ 的映射一致。因此，$H_1(Y,F_1\cup R^+\cup F_0)\cong H_1(Y,R^+)/\operatorname{im}(i_*)$。另一方面，$H_1(Y,F_1\cup R^+\cup F_0)$ 的自由部分为 $H^1(Y,F_1\cup R^+\cup F_0)\cong H_2(Y,R^-)$，而根据我们的假设，该部分为零。因此，$H_1(Y,F_1\cup R^+\cup F_0)$，从而 $H_1(Y,R^+)/\operatorname{im}(i_*)$，是有限的且秩为零。于是第一个正合列给出

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\ker(i_*) &= \operatorname{rank} H_1(F_0,S_0^+)+\operatorname{rank} H_1(F_1,S_1^+)-\operatorname{rank} H_1(Y,R^+)\\ &= \operatorname{rank} H_1(F_0,S_0^+)+\operatorname{rank} H_1(F_1,S_1^+)+\chi(Y,R^+)-\operatorname{rank} H_2(Y,R^+)\\ &= K-\operatorname{rank} H_2(Y,R^+).\end{aligned}$$

由此可知，$\operatorname{rank}\ker(i_*)\le K$，当且仅当 $\operatorname{rank} H_2(Y,R^+)=0$ 时取等号。但$H_2(Y,R^+)\cong H^1(Y,F_1\cup R^-\cup F_0)$ 是自由阿贝尔的，因此当且仅当 $H_2(Y,R^+)=0$。□

现在我们证明引言中的定理 1.7，首先从引理 1.9 的证明开始。由定理 5.7 可知，该引理可以看作 Florens–Massuyeau 的结果“对于 $G=\{1\}$，亚历山大函子恢复 Frohman–Nicas 拓扑量子场论”（见 [FM15，第 8.3]节）在单侧缝合协边情形下的缝合推广。

引理 *1.9* 的证明。 根据定理 5.7，只需证明 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)=|K_{Y,\ \Gamma}|$ 在符号意义下成立，其中我们将 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)$ 视为 $\wedge^{*}H_1(F,\ S^{+})$ 的一个元素，并忽略符号。记

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)=\sum_{J}a_{Y,\Gamma,J}\gamma_J$$

其中 $a_{Y,\ \Gamma,\ J}\in\mathbb{Z}$，有

$$a_{Y,\Gamma,J}=(-1)^{|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)||\gamma_{Jc}|+\mathrm{inv}(\sigma_{JJc\leftrightarrow\mathrm{std}})}\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_{*}\gamma_{Jc})$$

根据 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)$ 的定义。由于 $|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)|=c$ 且 $|\gamma_{Jc}|=|J^{c}|=n-c$，符号 $(-1)^{|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)||\gamma_{Jc}|}$与 $J$ 无关，因而可以忽略。

为 $(Y,\ \Gamma)$ 选取满足推论 4.15 要求的 $\Xi_{\mathrm{norm}}$。令 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 为作为 $\Xi_{\mathrm{norm}}$ 一部分所选取的 Heegaard 图，并令 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 为 $H_1(Y,\ R^{+})$ 的相应表示矩阵；根据命题 5.4，我们可以自由选择 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 来计算 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\ \Gamma}(i_{*}\gamma_{Jc})$。

由引理 5.1 可知，表示矩阵 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 是单射，当且仅当 $H_2(Y,\ R^{+})=0$。这将证明分为两种情况。根据定义，如果 $H_2(Y,\ R^{+})\neq 0$，则 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\ \Gamma}$ 是零函数，这意味着 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\ \Gamma)=0$。另一方面，根据命题 6.1，如果 $H_2(Y,\ R^{+})\neq 0$，那么我们将有 $H_2(Y,\ R^{-})\neq 0$，或者 $\mathrm{rank}\ \ker(i_{*})<K$。在这两种情况下$|K_{Y,\ \Gamma}|=0$ 根据定理 1.7 中 $|K_{Y,\ \Gamma}|$ 的定义。因此，在这种情况下，引理成立。

因此，假设 $H_2(Y,\ R^{+})=0$，从而$M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 是单射。我们可以将 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 写作$\begin{matrix}\alpha^{c}\\ \beta^{\mathrm{out}}\\ \beta^{c}\end{matrix}\begin{bmatrix}*\\ *\end{bmatrix}$。如果 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的底部块 $\begin{matrix}\\ \beta^{c}\end{matrix}\begin{bmatrix}*\end{bmatrix}$ 的行数多于列数，那么 $\mathcal{H}'$ 不可能存在生成元 $\mathbf{x}'$，$\mathcal{H}$ 也不可能存在生成元 $\mathbf{x}$，因此 $\big[\widehat{\mathrm{BSD}}(Y,\ \Gamma,\ \Xi_{\mathrm{norm}})\big]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}=0$。另一方面，根据命题 3.2，这个底部块是 $H_1(Y,\ F\cup R^{+})$ 的表示矩阵，而表示矩阵中“行数多于列数”意味着 $H_1(Y,\ F\cup R^{+})$ 是无限的。因此$H_2(Y,\ R^{-})\neq 0$，所以根据定义，$|K_{Y,\ \Gamma}|=0$，引理得证。由此我们可以假设 $\begin{matrix}\\ \beta^{c}\end{matrix}\begin{bmatrix}*\end{bmatrix}$ 的列数不少于行数。

不失一般性地，底部块 $\begin{matrix}\alpha^{c}\end{matrix}$

注意，若对 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 或其底部块施加（在 $\mathbb{Z}$ 上的）行列运算，我们分别得到 $H_1(Y,\ R^{+})$ 或 $H_1(Y,\ F\cup R^{+})$ 的其他有效表示矩阵。通过对 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的底部块 $\begin{matrix}\\ \beta^{c}\end{matrix}\begin{bmatrix}*\end{bmatrix}$ 施加在 $\mathbb{Z}$ 上的行列运算，我们可以

$\begin{matrix}\tilde{\alpha}^{c}_{1}&\tilde{\alpha}^{c}_{2}\\ \tilde{\beta}^{c}&\end{matrix}\begin{bmatrix}0&*_3\end{bmatrix}$将其写成 其中 $*_3$ 是一个史密斯标准形的方阵。由此可知，$*_3$ 是 $H_1(Y,F\cup R^{+})$的表示矩阵，因此我们有 $\det(*_3)=|H_1(Y,F\cup R^{+})|$（若 $H_1(Y,F\cup R^{+})$为无限集，则将其视为零）。

对较大的矩阵 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$应用相同的行列运算，可得到 $H_1(Y,R^+)$的一个形如以下形式的 $\widetilde{\ }$表示矩阵 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$

$$\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}} = \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \widetilde{\beta}^c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \widetilde{\alpha}_1^c & \widetilde{\alpha}_2^c \end{array} \\ \begin{bmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & *_3 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$注意到 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 是单射，因为 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 是单射。为方便起见，对 $i \in \{1,2\}$ 定义（$M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$）$_i$

$$\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}} = \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \widetilde{\beta}^c \end{array} \begin{array}{c} \widetilde{\alpha}^c \\ \begin{bmatrix} (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_1 \\ (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

我们有

$$a_{Y,\Gamma,J} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}})} \det \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \widetilde{\beta}^c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \widetilde{\alpha}^c & \alpha_{J^c}^{\mathrm{out}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_1 & *_{J^c} \\ (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$*_{J^c}$ 的每一列在某一行中为 1，在其他位置均为 0（取值为 1 的行对应于 $J^c$）。我们可以交换列，得到

$$a_{Y,\Gamma,J} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}})} \det \begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \widetilde{\beta}^c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_{J^c}^{\mathrm{out}} & \widetilde{\alpha}^c \end{array} \\ \begin{bmatrix} *_{J^c} & (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_1 \\ 0 & (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

相差一个整体符号。交换行，使左上角块为单位矩阵，得到

$$a_{Y,\Gamma,J} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{J^cJ \leftrightarrow \mathrm{std}})} \det \begin{array}{c} \\ \beta_{J^c}^{\mathrm{out}} \\ \beta_J^{\mathrm{out}} \\ \widetilde{\beta}^c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_{J^c}^{\mathrm{out}} & \widetilde{\alpha}^c \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_{1,J^c} \\ 0 & (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_{1,J} \\ 0 & (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

我们有 $|J| = c(:= n + \chi(Y,\ R^+))$和 $|J^c| = n - c$，因此（$-1$）$^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{J^cJ \leftrightarrow \mathrm{std}})}$等于（$-1$）$^{c(n-c)}$，这是一个与 $J$无关的符号，可以忽略。因此，相差一个与 $J$无关的符号，我们有

$$a_{Y,\Gamma,J} = \det \begin{array}{c} \\ \beta_J^{\mathrm{out}} \\ \widetilde{\beta}^c \end{array} \begin{array}{c} \widetilde{\alpha}^c \\ \begin{bmatrix} (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_{1,J} \\ (\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}})_2 \end{bmatrix} \end{array},$$

所选表示矩阵 $\widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}} = \widetilde{M}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}$ 的行列式 $\widetilde{\alpha}^c$ 删除后的其中，与 $J^c$ 对应的行已被删除。

$\tilde{\alpha}_1^c$ $\tilde{\alpha}_2^c$换言之，$a_{Y,\,\Gamma,\,J}$ 是删除 $\begin{matrix}\beta^{\mathrm{out}}\\ \tilde{\beta}^c\end{matrix}\begin{bmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & *_3 \end{bmatrix}$ 后所得的行列式，其中与 $J^c$ 对应的行（均属于顶部行集合 $\beta^{\mathrm{out}}$）已被删除。等价地，$a_{Y,\,\Gamma,\,J}$ 等于 $\det(*_3)$ 乘以删除 $*_1$ 后所得的行列式，其中与 $J^c$对应的行已被删除。如果 $\det(*_3) = 0$，我们看到$a_{Y,\,\Gamma,\,J} = 0$对所有 $J$均成立；根据定义，$|K_{Y,\,\Gamma}| = 0$也成立，因为 $H_1(Y,\ F \cup R^+)$ 是无限的，因此引理在这种情况下得证。

假设 $\det(*_3) \neq 0$。我们断言，除一个符号外，$a_{Y,\Gamma,J}$ 等于 $\det(*_3)$ 乘以 $\wedge^K \ker i_*$ 在 $\wedge^* H_1(F, S^+)$ 的基元素 $\gamma_J$ 上的系数；此断言即可证明该引理。

为证明此断言，注意根据第 3.3 节的讨论，$H_1(F, S^+)$ 的每个基元素 $\gamma_i$ 都对应于 $C_1^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$ 的某个基一胞腔的负元（此一胞腔 $\widetilde{\ }$ 是标记 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 和 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的行的“$\beta^{\mathrm{out}}$”基向量之一）。根据推论 3.3 中方形图的交换性，当且仅当相应的负基一胞腔（$\beta^{\mathrm{out}}$ 基向量）线性组合在 $H_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$ 中为零，也就是说属于 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的列张成的空间时，$\gamma_i$ 的线性组合才属于 $\ker i_*$。

现在，如果某个 $\beta^{\mathrm{out}}$ 基向量的线性组合属于由$\sim M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$（由 $\tilde{\alpha}_1^c$ 和 $\tilde{\alpha}_2^c$索引）的列所张成的空间，那么实际上，该线性组合必属于仅由索引为 $\tilde{\alpha}_1^c$ 的列所张成的空间。事实上，设 $\tilde{\alpha}_2^c$ 列上的系数为 $c_i$。将所有 $\beta$ 基向量的张成空间对 $\beta^c$ 基向量取商，我们得到带有系数 $c_i$ 的 $*_3$ 列的线性组合为零。由于 $*_3$ 可逆，我们得出所有 $c_i$ 均为零，正如所需。

由此可知，$*_1$的列的（负值）作为基向量 $\gamma_i$ 在 $H_1(F,\ S^+)$ 中的线性$\widetilde{\ }$组合作用的系数，张成 $\ker i_*$。由于 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 是单射，这些列也线性无关，因此它们构成 $\ker i_*$的基。我们可以通过将这些列楔积在一起来计算$\wedge^K \ker i_*$；所得结果在 $\gamma_J$ 上的系数，是 $*_1$ 的子矩阵的行列式，其中对应于 $J^c$ 的行已被删除。该断言（因而该引理）得证。□

**引理 6.2**。设 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$的缝合余边，并使用任意选择集 $\Xi$，按照定义 *5.8* 定义 $[\widehat{\ \ \ \ }\mathrm{BSDA}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$。将 $(Y, \Gamma)$ 改视为一个从 $(\emptyset, \emptyset)$ 到 $(-F_0 \sqcup F_1, \Lambda_0 \sqcup \Lambda_1)$的单侧余边，同样的构造给出一个映射$[\widehat{\ \ \ \ }\mathrm{BSDD}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$（定义到整体符号），我们可以将其视为一个定义到整体符号的元素

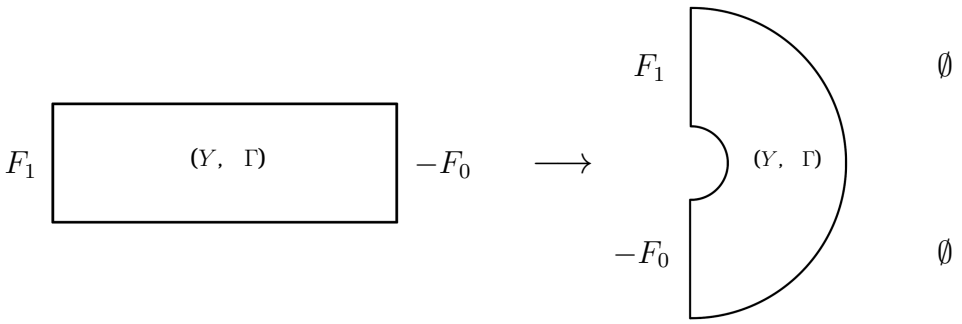
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \wedge^* H_1(-F_0 \sqcup F_1, S_0^+ \sqcup S_1^+)) \cong \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \otimes \wedge^* H_1(F_1, S_1^+).$$

我们声称，映射 $[\widehat{\ \ \ \ }\mathrm{BSDA}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$与定理 *1.7* 中出现的复合在整体符号意义下相同，其中我们用元素 $[\widehat{\ \ \ \ }\mathrm{BSDD}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 替代$|K_{Y,\Gamma}|$。

证明。我们直接计算复合 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes [\widehat{BSDD}(Y,\ \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}})$，并将其与 $[\widehat{\ \ \ \ }\mathrm{BSDA}(Y, \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 进行比较。

为此，我们需要选择 $\Xi_{\mathrm{DD}}$，使其适用于将 $(Y,\ \Gamma)$ 视为单侧余边。我们将选择 $\Xi_{\mathrm{DD}}$，使 Heegaard 图中所有曲线的定向（因而

所有局部交数符号）最终都与将 $(Y,\Gamma)$ 视为双侧并采用选择 $\Xi$ 时相同。为此，我们在选择 $\Xi_{\mathrm{DD}}$ 中将表示 $-F_0\sqcup F_1$ 的弧图取为 $-\mathcal{Z}_0\sqcup\mathcal{Z}_1$，其中 $-\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧定向与 $\Xi$ 中 $\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧定向相反，而 $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧定向则与 $\Xi$ 中相同。我们将表示单侧余边 $(Y,\Gamma)$ 的 Heegaard 图$\mathcal{H}_{\mathrm{DD}}$ 取为原 Heegaard 图 $\mathcal{H}$，它作为 $\Xi$ 的一部分选定，现重新诠释为单侧 Heegaard 图。由于 $\mathcal{H}_{\mathrm{DD}}$ 的所有 $\alpha$ 弧都是出射的，因此它们的定向应与选择 $\Xi_{\mathrm{DD}}$ 中 $-\mathcal{Z}_0\sqcup\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧定向相同；也就是说，$\mathcal{Z}_0$ 中的 $\alpha$ 弧定向应与 $\Xi$ 中 $\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧定向相反，而 $\mathcal{Z}_1$ 的 $\alpha$ 弧定向应与 $\Xi$ 中 $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧定向相同。因此，$\mathcal{H}_{\mathrm{DD}}$ 中来自 $\Xi_{\mathrm{DD}}$ 的曲线定向与 $\mathcal{H}$ 中来自 $\Xi$ 的曲线定向相同。我们还对 $\Xi_{\mathrm{DD}}$ 中 $-\mathcal{Z}_0\sqcup\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧排序，使 $-\mathcal{Z}_0$ 的弧排在 $\mathcal{Z}_1$ 的弧之前。下方示意图展示了我们将 $(Y,\Gamma)$ 重新诠释为单侧余边的方式。



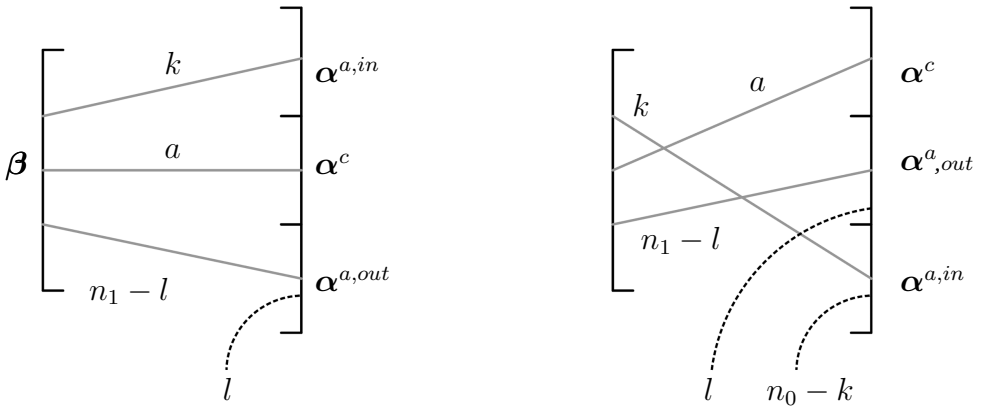

现在，为了将 $[\widehat{\mathrm{BSDD}}(Y,\ \Gamma,\ \Xi_{\mathrm{DD}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 视为 $\wedge^*H_1(F_0,\ S_0^+)\otimes\wedge^*H_1(F_1,\ S_1^+)$ 的一个元素，我们先描述它作为一个 $\mathbb{Z}$-线性映射的作用。它将基元素 $1\in\mathbb{Z}$ 映射为

$$\sum_{\mathbf{x}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})}((-1)^{|\bar{o}_R(\mathbf{x})|}\gamma^{\mathrm{in}}_{\bar{o}_R(\mathbf{x})})\otimes\gamma^{\mathrm{out}}_{\bar{o}_L(\mathbf{x})}.$$

额外符号 $|o_R(\mathbf{x})|=n_0-k$ 的出现，是因为由选择 $\Xi_{\mathrm{DD}}$ 中 $-\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧上的定向所确定的 $H_1(F_0,\ S_0^+)$ 的基元素，是由选择 $\Xi$ 中 $\mathcal{Z}_0$ 的匹配弧上的定向所确定的 $H_1(F_0,\ S_0^+)$ 的基元素的 $-1$ 倍。我们将这个额外符号 $n_0-k$ 简记为 $k$，因为可以忽略任何与 $k$ 无关的常数。也就是说，

$$[\widehat{\mathrm{BSDD}}(Y,\Gamma,\Xi_{\mathrm{DD}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}(1)=\sum_{\mathbf{x}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})+k}\gamma^{\mathrm{in}}_{\bar{o}_R(\mathbf{x})}\otimes\gamma^{\mathrm{out}}_{\bar{o}_L(\mathbf{x})}.$$

现在我们想要计算 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})$。下图左侧展示了用于计算 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$ 中逆序项的熟悉交叉弦图；右侧则是计算 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})$ 的图。




在最右侧图中，由于所有弧 $\boldsymbol{\alpha}^{a,\ out}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{a,\ in}$ 都被重新解释为出射，根据 $\Xi_{\mathrm{DD}}$，它们都必须在块序中排在 $\boldsymbol{\alpha}^{c}$ 之前。这使得 $\mathbf{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$ 的逆序项总差为

$$ak + (n_1 - l)k + lk + \mathrm{inv}(\sigma_{I^c I \leftrightarrow \mathrm{std}}) = ak + n_1 k + \mathrm{inv}(\sigma_{I^c I \leftrightarrow \mathrm{std}}).$$

注意，$\mathbf{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})$ 的局部交数贡献与 $\mathbf{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$ 中相应的项一致。此外，$\mathbf{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})$ 中没有出现修正项，因此与方程 (3) 比较可得

$$\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x}) = \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + \mathrm{inv}(\sigma_{I^c I \leftrightarrow \mathrm{std}}).$$

现在，我们计算定理 1.7 中的复合，其中 $|K_{Y,\Gamma}|$ 替换为 $[\widehat{\quad\quad}\mathbf{BSDD}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$；我们按通常方式将 $\wedge^* H_1(-F_0 \sqcup F_1, S_0^+ \sqcup S_1^+)$ 与 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \otimes \wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$ 识别。在这些识别下，第一个映射

$$\wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes [\widehat{BSDD}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}} \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \otimes \wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$$

将 $\wedge^* H_1(F_0,S_0^+)$ 的一个基元素 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 映射为

$$\sum_{\mathbf{x}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})+k} \gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes (\gamma^{\mathrm{in}}_{\overline{o}_R(\mathbf{x})} \otimes \gamma^{\mathrm{out}}_{\overline{o}_L(\mathbf{x})})$$

接下来，利用定义 1.13 中态射的符号规则以及 $\varepsilon$的定义，在 $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$ 作用下，它被映射为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{x}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})+k+|\varepsilon| l} \varepsilon(\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes \gamma^{\mathrm{in}}_{\overline{o}_R(\mathbf{x})}) \otimes \gamma^{\mathrm{out}}_{\overline{o}_L(\mathbf{x})} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{x}: \\ \overline{o}_R(\mathbf{x}) = I^c}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})+k+n_0 l} \varepsilon(\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes \gamma^{\mathrm{in}}_{I^c}) \otimes \gamma^{\mathrm{out}}_{\overline{o}_L(\mathbf{x})} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{x}: \\ \overline{o}_R(\mathbf{x}) = I^c}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DD}}(\mathbf{x})+k+n_0 l} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{I I^c \leftrightarrow \mathrm{std}})} \gamma^{\mathrm{out}}_{\overline{o}_L(\mathbf{x})}. \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{x}: \\ \overline{o}_R(\mathbf{x}) = I^c}} (-1)^{(\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})+\mathrm{inv}(\sigma_{I^c I \leftrightarrow \mathrm{std}}))+k+n_0 l+\mathrm{inv}(\sigma_{I I^c \leftrightarrow \mathrm{std}})} \gamma^{\mathrm{out}}_{\overline{o}_L(\mathbf{x})}.
\end{aligned}$$

然而，由于 $\mathrm{inv}(\sigma_{II^c\leftrightarrow\mathrm{std}}) + \mathrm{inv}(\sigma_{I^cI\leftrightarrow\mathrm{std}}) = k(n_0-k)$，上面的符号可简化为

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + k(n_0-k) + k + n_0 l &= \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + n_0k - k^2 + k + n_0(k+c)\\ &= \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + n_0k + k + k + n_0k + n_0c \mod 2\\ &= \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + (k\text{-independent terms}).\end{aligned}$$

因此，复合与 $[\widehat{\quad}\mathrm{BSDA}(Y,\ \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 一致，但相差一个整体符号。 □

有了这一结果，定理 1.7 的证明便可立即得出。

定理 *1.7* 的证明。 由引理 6.2 可知，只需证明 $[\widehat{\quad}\mathrm{BSDD}(Y,\ \Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 与 $|K_{Y,\ \Gamma}|$ 一致，视为 $\wedge^* H_1(-F_0 \sqcup F_1,\ S_0^+ \sqcup S_1^+)$ 中相差一个符号的元素；这由引理 1.9 得出。□

现在我们证明，对于闭定向曲面的配边，缝合 Frohman–Nicas 拓扑量子场论特化为经典弗罗曼–尼卡斯拓扑量子场论。回顾引言，对于这样的配边 $W\colon \Sigma_0 \to \Sigma_1$，存在一个相应的缝合配边 $(Y,\ \Gamma) = \mathrm{Sut}(W,\ \gamma)$，它由选取一个辅助无环带状图 $\gamma$构造而成，并且这一构造允许典范识别 $H_1(F_i,\ S_i^+) \cong H_1(\Sigma_i)$。我们现在证明的引言中的命题 1.10 指出，经过这些识别后，$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 恢复经典弗罗曼–尼卡斯拓扑量子场论 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}$。

命题 *1.10* 的证明。 首先注意，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(F_0\sqcup F_1, S_0^+\sqcup S_1^+;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(Y, R^+;\mathbb{Q}) \\ \uparrow{\scriptstyle i_*} & & \uparrow{\scriptstyle i_*} \\ H_1(F_0\sqcup F_1;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(Y;\mathbb{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ H_1(\Sigma_0\sqcup\Sigma_1;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(W;\mathbb{Q}) \end{array}$$

其中竖直映射都是同构。事实上，右上方的竖直映射是同构，因为 $H_1(R^+;\ \mathbb{Q}) = 0$ 且 $H_0(R^+;\ \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_0(Y;\mathbb{Q})$ 是同构（从拓扑角度看，$R^+$ 在 $Y$的每个连通分支中都包含一个 2-圆盘）。为证明右下方的竖直映射是同构，我们可以分别考察 $W$ 的每个连通分支，并且不失一般性地假设 $W$ 是连通的。首先注意，在$\gamma$ 是单点的退化情形下，该映射是同构。若 $\gamma$ 不是单点，则考虑将 $W$ 分解为 $W = Y \cup_C \mathrm{nb}(\gamma)$ 所对应的 Mayer–Vietoris 序列，其中$C$ 是 $\partial(\mathrm{nb}(\gamma))$ 去掉 $\gamma$每个端点的一个邻域后所得的集合。我们有

$$\cdots \to H_1(C) \to H_1(\overline{\mathrm{nb}(\gamma)}) \oplus H_1(Y) \to H_1(W) \to 0,$$

因为从 $H_0(C)$ 到 $H_0(\mathrm{nb}(\gamma)) \oplus H_0(\overline{Y})$ 的映射是单射。我们有 $H_1(\mathrm{nb}(\gamma)) = 0$，而从 $H_1(C)$ 到 $H_1(Y)$ 的映射是零映射。事实上，虽然 $C$ 在拓扑上是一个球面 $S^2$，其上每个 $\gamma$ 的端点都有一个穿孔，因此 $H_1$ 有一组基，由

绕除一个穿孔之外所有穿孔的环路构成，但这些环路各自围成 $Y$ 中的一个曲面（即 $F_0$ 或 $F_1$ 的相应连通分支），因此在 $H_1(Y)$ 中映射为零。由此可知，图中右下方的映射是同构。

根据定义， $W$ 有理同调平凡，当且仅当底部映射是满射；我们看到，这当且仅当顶部映射是满射时成立。此外，根据切除，我们可以将顶部映射识别为

$$H_1(F_1 \cup R^+ \cup F_0, R^+; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}).$$

我们有一个正合列

$$\cdots \to H_1(F_1 \cup R^+ \cup F_0, R^+; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}) \to H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0; \mathbb{Q}) \to 0$$

因为 $H_0(F_1 \cup R^+ \cup F_0,\ R^+) = 0$ （根据假设， $F_i$ 的所有连通分支都与 $S^+$ 相交，因此也与 $R^+$ 非平凡相交）。因此， $W$ 有理同调平凡，当且仅当

$$H_1(Y, F_1 \cup R^+ \cup F_0; \mathbb{Q}) = 0,$$

或者等价地，当且仅当 $H_1(Y,\ F_1 \cup R^+ \cup F_0)$ 是有限的。

现在，庞加莱–勒夫谢茨对偶性给出 $H_1(Y,\ F_1 \cup R^+ \cup F_0) \cong H^2(Y,\ R^-)$。由于 $R^-$ 在拓扑上是 $Y$边界中的一个 2-圆盘，我们有 $H^2(Y,\ R^-) \cong H^2(Y)$。根据普遍系数定理， $H^2(Y)$的自由部分是 $H_2(Y)$的自由部分，而 $H^2(Y)$的挠部分是 $H_1(Y)$的挠部分；我们在上文已知，后者就是 $H_1(W)$的挠部分。因此，当 $W$有理同调平凡时， $H_1(Y,\ F_1 \cup R^+ \cup F_0) \cong \mathrm{tors}(H_1(W))$，所以 $|K_W|$ 和$|K_{Y,\ \Gamma}|$ 定义中的前因子相同。

对于 int整数 $K$ ，在定理 1.7 中，注意秩$(H_1(F_i, S_i^+)) = 2g_i$。我们还有

$$\begin{aligned}
\chi(Y, R^+) &= -\operatorname{rank}(H_1(Y, R^+)) + \operatorname{rank}(H_2(Y, R^+)) \\
&= -\operatorname{rank}(H_1(Y)) + \operatorname{rank}(H_2(Y)) \\
&= -\operatorname{rank}(H_1(Y)) + \operatorname{rank}(H^1(Y, \partial Y)) \\
&= -\operatorname{rank}(H_1(Y)) + \operatorname{rank}(H_1(Y, \partial Y)).
\end{aligned}$$

存在一个正合列

$$0 \to \operatorname{im}(i_*\colon H_1(\partial Y) \to H_1(Y)) \to H_1(Y) \to H_1(Y, \partial Y) \to 0$$

（最后一个零是因为 $Y$ 的每个连通分支都具有连通的非空边界）。“半活半死”定理表明，$\mathrm{im}(i_*\colon H_1(\partial Y) \to H_1(Y))$ 的秩为 $g_0 + g_1$ （秩$(H_1(\partial Y)) = 2g_0 + 2g_1$ 的一半）。由此可得

$$\operatorname{rank}(H_1(Y, \partial Y)) = \operatorname{rank}(H_1(Y)) - g_0 - g_1;$$

结合上文，我们得到

$$\chi(Y, R^+) = -g_0 - g_1.$$

因此，定理 1.7 中的整数 $K$ 为 $2g_0 + 2g_1 - g_0 - g_1 = g_0 + g_1$，与 Frohman–Nicas 拓扑量子场论中的情况相同。注意，半生半死定理给出 $\operatorname{rank}(\ker i_*) = K$ 在此

情形下；$\operatorname{rank}(\ker i_*) < K$ 这一现象只会出现在 Frohman–Nicas 拓扑量子场论的缝合推广中。

考虑到这些数值，证明开头的交换图表明，在我们的识别 $H_1(\Sigma_i) \cong H_1(F_i, S_i^+)$ 下，Frohman–Nicas 拓扑量子场论中的 $\wedge^{g_0+g_1}\ker i_*$ 与定理 1.7 中的 $\wedge^K \ker i_*$ 相一致。代入前因子后，我们看到，在这些识别下，$|K_W|$ 与 $|K_{Y,\Gamma}|$ 相一致。定理 1.7 中的整数 $n_0$ 等于 $2g_0$，因而是偶数；命题得证。□

## 7. 对称幺半结构

本节的目标是证明定理 1.14，即 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 是一个对称幺半函子。第 4 节的结果结合与缝合亚历山大函子的关系，说明 $[\widehat{\ \ \ \ \ }\mathrm{BSDA}(Y,\ \Gamma)]_{\mathrm{comb}}^{\mathbb{Z}}$ 具有函子性（参见推论 5.9）。在上一节证明了定理 1.7 后，我们得到如下推论。

推论 *7.1.* 假设 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 为 $\mathit{Cob}_{2+1}^{\mathrm{sut}}$ 中的每个对象 $(F,\Lambda)[d]$ 赋予分次阿贝尔群 $\wedge^* H_1(F,S^+)$，其在次数 $d$ 中的直和项为 $\wedge^{d+k}H_1(F,S^+)$；并为每个态射 $(Y,\Gamma)\colon (F_0,S_0^+)[d_0]\to(F_1,S_1^+)[d_1]$ 赋予差一个符号的映射 $\wedge^* H_1(F_0,S_0^+)\to\wedge^* H_1(F_1,S_1^+)$，该映射由定理 *1.7* 中涉及 $|K_{Y,\Gamma}|$ 的复合定义。则此赋值是从 $\mathit{Cob}_{2+1}^{\mathrm{sut}}$ 到 $\mathit{Ab}_{\pm1}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}$ 的函子 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$。

**7.1. 范畴 $\mathrm{Cob}_{2+1}^{\mathrm{sut}}$ 和 $\mathrm{Ab}_{\pm1}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}$。** 然而，为了证明 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 不仅是一个函子，还是一个对称幺半函子，我们首先需要验证源范畴和目标范畴都是对称幺半的（参见 [EGNO15，定义 8.1.12]）。我们从源范畴 $\mathrm{Cob}_{2+1}^{\mathrm{sut}}$ 开始，其对称幺半结构相当直观。尽管如此，我们仍将完整而详细地验证所有公理，希望明确说明，所有必要的检验都可以直接完成，而不依赖任何外部结果。

**定理 7.2。** 与定义 *1.12* 一样，定义 $\mathrm{Cob}_{2+1}^{\mathrm{sut}}$ 为如下范畴：

- 对象：$(F,\Lambda)[d]$，其中 $(F,\Lambda)$ 是一个缝合曲面，$d\in\mathbb{Z}$ 是形式次数平移。[3]
- 从 $(F_0,\Lambda_0)[d_0]$ 到 $(F_1,\Lambda_1)[d_1]$ 的态射：从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合协边 $(Y,\Gamma)$，按缝合协边同构取等价类。
- 复合：给定态射 $(Y,\Gamma)$，其从 $(F_0,\Lambda_0)[d_0]$ 到 $(F_1,\Lambda_1)[d_1]$，以及态射 $(Y',\Gamma')$，其从 $(F_1,\Lambda_1)[d_1]$ 到 $(F_2,\Lambda_2)[d_2]$，我们将复合态射定义为一个缝合余边，它从 $(F_0,\Lambda_0)[d_0]$ 到 $(F_2,\Lambda_2)[d_2]$，由沿公共边界 $F_1$ 粘合 $(Y,\Gamma)$ 和 $(Y',\Gamma')$ 得到，如定义 *2.18* 所述。

$$(Y',\Gamma')\circ(Y,\Gamma)\coloneqq(Y'\cup_{F_1}Y,\Gamma'\cup_{\Lambda_1}\Gamma),$$

[3] 在此阶段，平移 $[d]$ 纯属符号，它在应用函子 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 之前不起任何作用；该函子会将 $(F,\ \Lambda)[d]$ 解释为把直和项 $\wedge^k H_1(F,\ S^+)$ 放在次数 $k-d$ 上。

- 在$(F,\Lambda)[d]$上的恒等态射：将恒等缝合余边记为$(\mathrm{id}_{(F,\Lambda)[d]},\Gamma_{\mathrm{id}})$

$$(F\times[0,1],\Lambda\times[0,1])$$

定向使得 $F\times\{0\}=-F$和 $F\times\{1\}=F$。

配备：

- 幺半群结构：一个双函子 $\amalg:\mathit{Cobsut}_{2+1}\times\mathit{Cobsut}_{2+1}\to\mathit{Cobsut}_{2+1}$，通常用中缀记法表示，写作 $(F,\Lambda)\amalg(F',\Lambda')$ 表示 $\amalg((F,\Lambda),(F',\Lambda'))$，而 $(Y,\Gamma)\amalg(Y',\Gamma')$ 表示 $\amalg((Y,\Gamma),(Y',\Gamma'))$。其定义如下。– 对象上：我们有

$$(F,\Lambda)[d]\amalg(F',\Lambda')[d']=(F\sqcup F',\Lambda\sqcup\Lambda')[d+d'].$$

– 在态射上：$(Y,\Gamma)\amalg(Y',\Gamma')=(Y\sqcup Y',\Gamma\sqcup\Gamma')$。
- 幺半单位：无次数平移的空余边，$(\emptyset,\emptyset)[0]$。
- 结合子与单位子：显然的恒等配边。
- 编织：一个自然同构，其$((F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d'])$-分量

$$\gamma_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']}:(F,\Lambda)[d]\amalg(F',\Lambda')[d']\to(F',\Lambda')[d']\amalg(F,\Lambda)[d]$$

是该不交并上的恒等配边，$((F\sqcup F')\times[0,1],(\Lambda\sqcup\Lambda')\times[0,1])$，但边界识别经过扭转，使得：
– 入边界与 $-(F\sqcup F')=-F\sqcup-F'$ 识别，且– 出边界与 $F'\sqcup F$ 识别。

那么 $(\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1},\amalg,\gamma_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']})$ 构成一个对称幺半范畴。

证明。 $\mathsf{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 是一个范畴，这一点可由余边范畴的一般框架得出。这里唯一额外的特点是存在缝合线和指定子集 $R^{\pm}$，但定义 2.18 表明，粘合保持了这一结构。通常的论证表明，复合在缝合余边同构意义下满足结合律。因此，$\mathsf{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 构成一个范畴。

我们将借助一种简单的图形演算来完成 $\mathsf{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 中的计算。该演算需遵循以下规则：

- 缝合曲面用一条竖直区间表示。表示不交并$F\sqcup F'$时，将 $F'$画在 $F$上方。

- 要表示一个从 $F$到 $F'$的配边（$Y,\Gamma$），将 $-F$画在右侧，将 $F'$画在左侧（与我们的入射与出射约定相符），并画一条连接 $F$与 $F'$的带，标记为（$Y,\Gamma$）。未标记的配边默认视为恒等配边。
- 复合通过沿平行区间进行水平粘合来定义。

我们首先验证 $\amalg$ 是一个双函子。固定态射

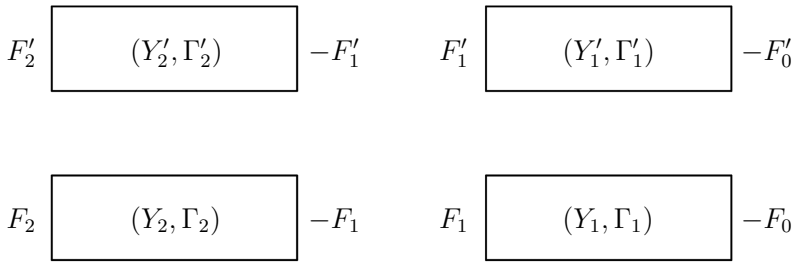
$$(Y_1,\Gamma_1):(F_0,\Lambda_0)[d_0]\to(F_1,\Lambda_1)[d_1]$$
$$(Y_2,\Gamma_2):(F_1,\Lambda_1)[d_1]\to(F_2,\Lambda_2)[d_2]$$

$$(Y_1', \Gamma_1') : (F_0', \Lambda_0')[d_0'] \to (F_1', \Lambda_1')[d_1']$$
$$(Y_2', \Gamma_2') : (F_1', \Lambda_1')[d_1'] \to (F_2', \Lambda_2')[d_2'].$$

交换律成立，因为不交并与粘合可交换：

$$\begin{aligned}
&\big((Y_2, \Gamma_2) \amalg (Y_2', \Gamma_2')\big) \circ \big((Y_1, \Gamma_1) \amalg (Y_1', \Gamma_1')\big) \\
&= (Y_2 \sqcup Y_2', \Gamma_2 \sqcup \Gamma_2') \cup_{F_1 \sqcup F_1'} (Y_1 \sqcup Y_1', \Gamma_1 \sqcup \Gamma_1') \\
&= \big((Y_2 \cup_{F_1} Y_1) \sqcup (Y_2' \cup_{F_1'} Y_1'), (\Gamma_2 \cup_{\Lambda_1} \Gamma_1) \sqcup (\Gamma_2' \cup_{\Lambda_1'} \Gamma_1')\big) \\
&= \big((Y_2, \Gamma_2) \circ (Y_1, \Gamma_1)\big) \amalg \big((Y_2', \Gamma_2') \circ (Y_1', \Gamma_1')\big).
\end{aligned}$$

从图示上看，在粘合之前，交换律两边的形式都是




交换律左边的图由此图沿顶部和底部的区间同时水平粘合而成，而表示右边的图则由此图沿顶部和底部的区间分别水平粘合而成；这两个图表示同构的缝合余边。

我们还看到， $\amalg$ 保恒等态射，因为

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{(F,\Lambda)[d]} \amalg \mathrm{id}_{(F',\Lambda')[d']} &= ((F \times [0,1]) \sqcup (F' \times [0,1]),\, (\Lambda \times [0,1]) \sqcup (\Lambda' \times [0,1])) \\
&\cong ((F \sqcup F') \times [0,1],\, (\Lambda \sqcup \Lambda') \times [0,1]) \\
&= \mathrm{id}_{(F \sqcup F',\, \Lambda \sqcup \Lambda')[\,d+d']} \\
&= \mathrm{id}_{(F,\Lambda)[d] \,\amalg\, (F',\Lambda')[d']}\,.
\end{aligned}$$

其中 $\cong$ 表示同构的缝合余边。我们省略平凡的图示。

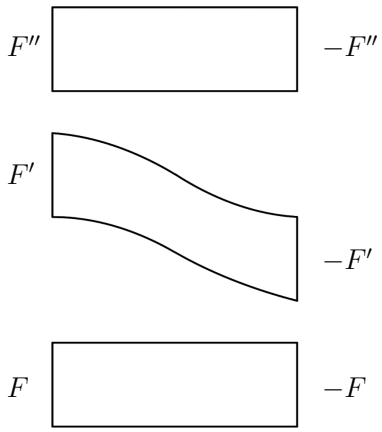
Cob 中的结合子 $\overset{\text{sut}}{2{+}1}$ 有连通分支

$$\begin{aligned}
\alpha_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d'],\,(F'',\Lambda'')[d'']} \colon\, &((F,\Lambda)[d] \amalg (F',\Lambda')[d']) \amalg (F'',\Lambda'')[d''] \\
&\to (F,\Lambda)[d] \amalg ((F',\Lambda')[d'] \amalg (F'',\Lambda'')[d''])
\end{aligned}$$

de定义为该三元组（对称）不交并上的恒等协边

$$(F \sqcup F' \sqcup F'', \Lambda \sqcup \Lambda' \sqcup \Lambda'')$$

其定义域和陪域（以不同方式加括号的嵌套不交并）自然地与对称不交并相识别。我们用图表示结合子的方式如下：

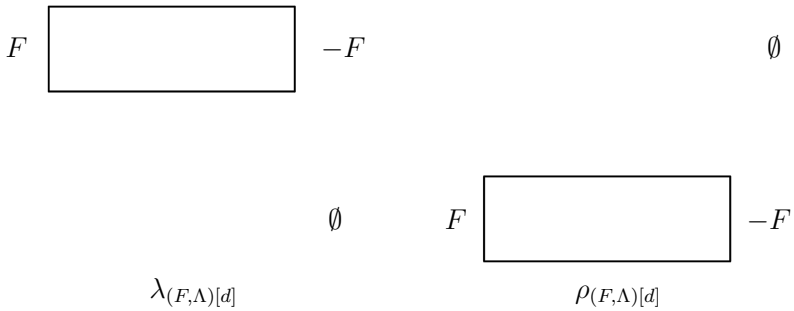



由此可见，相干五边形 [EGNO15，方程 2.2]是可交换的：粘合之后，两条路径都给出四重恒等配边，区别仅在于定义域和陪域的加括号方式不同。

$\mathrm{Cob}^{\mathrm{sut}}_{2+1}$ 中的左、右单位子是自然同构，其连通分支为

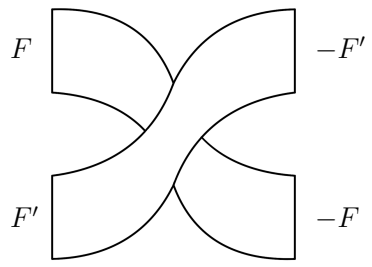
$$\lambda_{(F,\Lambda)[d]} : (\emptyset,\emptyset)[0] \amalg (F,\Lambda)[d] \cong (F,\Lambda)[d],$$
$$\rho_{(F,\Lambda)[d]} : (F,\Lambda)[d] \amalg (\emptyset,\emptyset)[0] \cong (F,\Lambda)[d]$$

定义如下 通常的恒等配边。我们的单位子图示为 e




由此可见，单位子的幺半相干三角形 [EGNO15，方程 2.10] 是可交换的：粘合后，两个方向都得到二重恒等配边，唯一的区别在于不交并中空分量的位置。

我们的图示中，((F， Λ)[d]，(F′， Λ′)[d]′)上编织的连通分支为

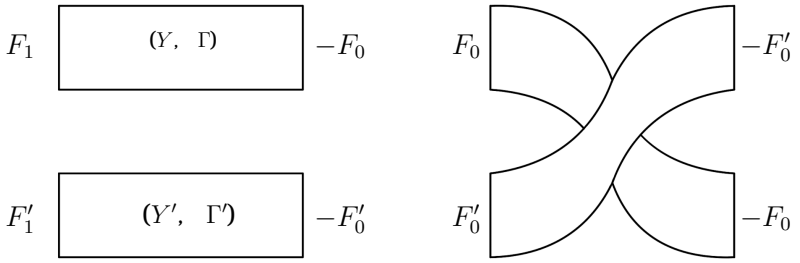



我们现在检验编织的所有标准性质，首先从其在 $(F,\Lambda)[d],$ 与 $(F',\Lambda')[d']$ 中的自然性开始。我们在此展开 $\amalg$ 在曲面和配边上的取值，以便

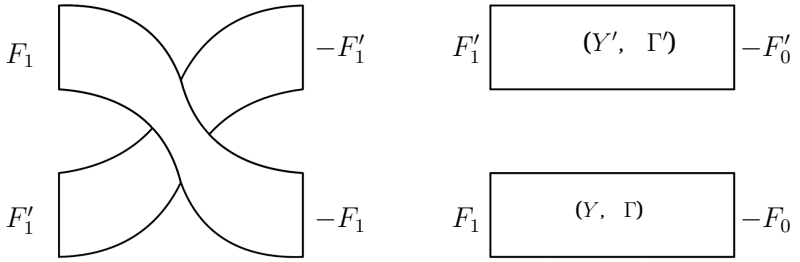
具体起见。

$$\begin{array}{ccc}
(F_0 \sqcup F_0', \Lambda_0 \sqcup \Lambda_0')[d_0 + d_0'] & \xrightarrow{\gamma_{(F_0,\Lambda_0),(F_0',\Lambda_0')}} & (F_0' \sqcup F_0, \Lambda_0' \sqcup \Lambda_0)[d_0 + d_0'] \\
\downarrow{\scriptstyle (Y,\Gamma)\sqcup(Y',\Gamma')} & & \downarrow{\scriptstyle (Y',\Gamma')\sqcup(Y,\Gamma)} \\
(F_1 \sqcup F_1', \Lambda_1 \sqcup \Lambda_1')[d_1 + d_1'] & \xrightarrow{\gamma_{(F_1,\Lambda_1),(F_1',\Lambda_1')}} & (F_1' \sqcup F_1, \Lambda_1' \sqcup \Lambda_1)[d_1 + d_1']
\end{array}$$

如下图所示的图建立了自然性。上图对应顺时针复合；下图显示逆时针复合。




$$((Y',\Gamma') \sqcup (Y,\Gamma)) \circ \gamma_{(F_0,\Lambda_0),(F_0',\Lambda_0')}$$



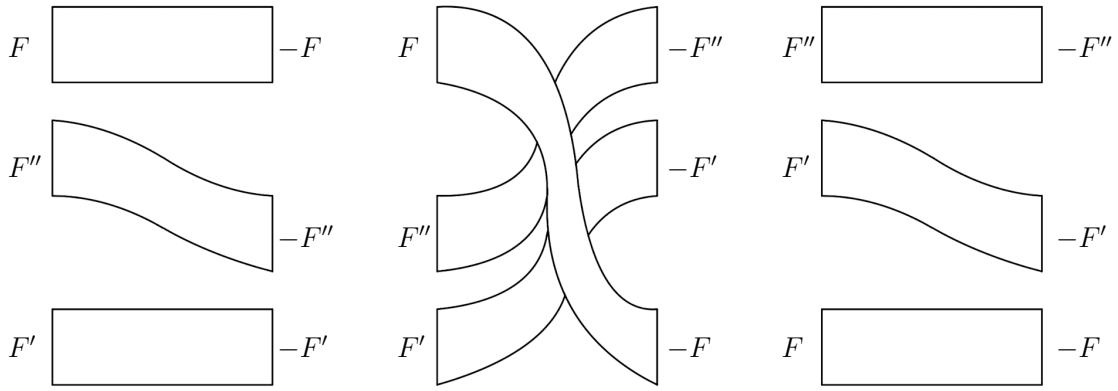

$$\gamma_{(F_1,\Lambda_1),(F_1',\Lambda_1')} \circ ((Y,\Gamma) \sqcup (Y',\Gamma'))$$

粘合后，这两个图表示同构的缝合余边，它们在 $\mathsf{Cob}_{2+1}^{\mathrm{sut}}$ 中相等。因此，编织是自然的。

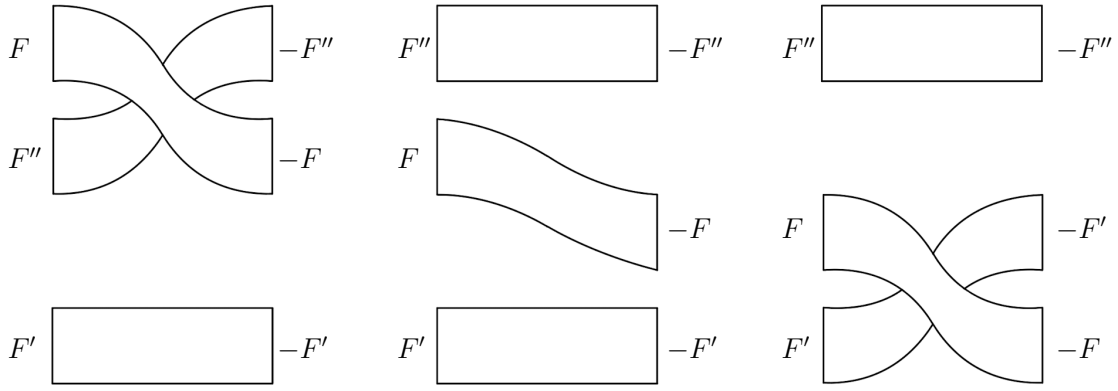
编织的六边形相干图（[EGNO15，图（8.1）]）如下所示

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d']} \amalg\, \mathrm{id}_{(F'',\Lambda'')[d'']}} & \\
((F,\Lambda)[d] \amalg (F',\Lambda')[d']) \amalg (F'',\Lambda'')[d''] & & ((F',\Lambda')[d'] \amalg (F,\Lambda)[d]) \amalg (F'',\Lambda'')[d''] \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d'],\,(F'',\Lambda'')[d'']}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(F',\Lambda')[d'],\,(F,\Lambda)[d],\,(F'',\Lambda'')[d'']}} \\
(F,\Lambda)[d] \amalg ((F',\Lambda')[d'] \amalg (F'',\Lambda'')[d']) & & (F',\Lambda')[d'] \amalg ((F,\Lambda)[d] \amalg (F'',\Lambda'')[d']) \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d'] \amalg (F'',\Lambda'')[d'']}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{(F',\Lambda')[d']} \amalg\, \gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F'',\Lambda'')[d'']}} \\
((F',\Lambda')[d'] \amalg (F'',\Lambda'')[d']) \amalg (F,\Lambda)[d] & & (F',\Lambda')[d'] \amalg ((F'',\Lambda'')[d'] \amalg (F,\Lambda)[d]) \\
 & \xrightarrow{\alpha_{(F',\Lambda')[d'],\,(F'',\Lambda'')[d'],\,(F,\Lambda)[d]}} &
\end{array}$$

下面用图示证明该图可交换：上方为逆时针路径，下方为顺时针路径。




$$\alpha_{(F',\Lambda')[d'],\,(F'',\Lambda'')[d''],\,(F,\Lambda)[d]} \circ \gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d']\amalg(F'',\Lambda'')[d'']} \circ \alpha_{(F,\Lambda')[d],\,(F',\Lambda')[d'],\,(F'',\Lambda'')[d'']}$$



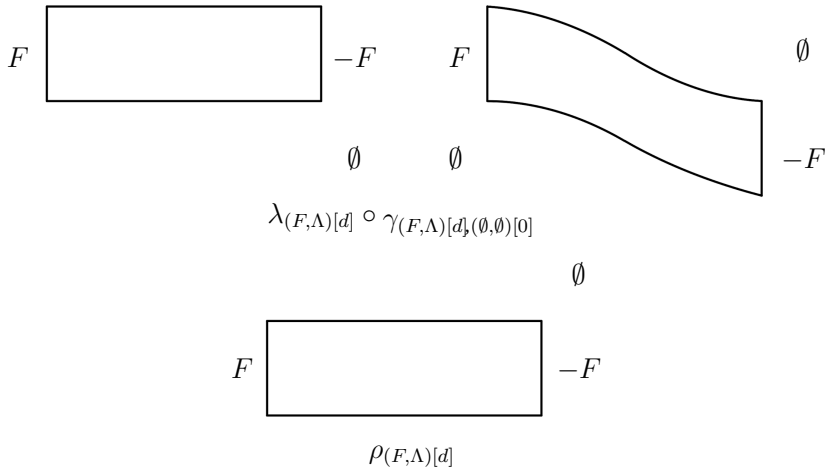

$$(\mathrm{id}_{(F',\Lambda')[d']} \amalg \gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F'',\Lambda'')[d'']}) \circ \alpha_{(F',\Lambda')[d'],\,(F,\Lambda)[d],\,(F'',\Lambda'')[d'']} \circ (\gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d']} \amalg \mathrm{id}_{(F'',\Lambda'')[d'']})$$

再次，粘合后，顶部和底部给出同构的缝合余边。由于我们的编织是对称的（见下文验证），编织的另一个六边形相干图的交换性（[EGNO15，图（8.2）]）便自动成立。

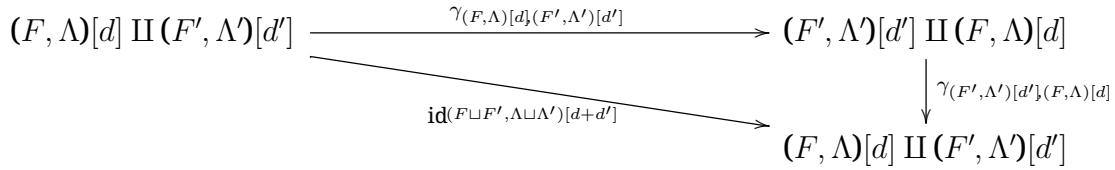
对于如下给出的编织–单位子相干三角形

$$\begin{array}{ccc} (F,\Lambda)[d] \amalg (\emptyset,\emptyset)[0] & \xrightarrow{\gamma_{(F,\Lambda)[d],\ (\emptyset,\emptyset)[0]}} & (\emptyset,\emptyset)[0] \amalg (F,\Lambda)[d] \\ & \searrow^{\rho_{(F,\Lambda)[d]}} & \downarrow \lambda_{(F,\Lambda)[d]} \\ & & (F,\ \Lambda)[d] \end{array}$$

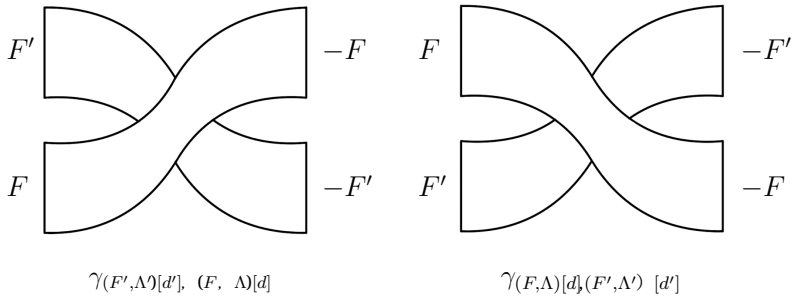
我们通过图示论证交换性：粘合后，下面的上下两种表示对应于同构的缝合协边。




最后，为了证明编织是对称的，我们可以看到三角形




通过观察下面的图与 $(F,\ \Lambda)[d] \amalg (F',\ \Lambda')[d']$ 上恒等配边的图等价，可知该图交换。




□

在确立了拓扑框架之后，我们现在转向该理论的代数方面。我们将继续完整、详细地进行所有必要的验证。

**定理 7.3**。 如定义 *1.13* 中所定义，定义$\mathrm{Ab}_{\pm 1}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}$ 为具有以下内容的范畴：

- 对象： $\mathbb{Z}$分次阿贝尔群 $V_* = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k$
- 态射：从 $f$： $V_* \to W_*$ 出发的任意次数齐次 $\mathbb{Z}$-线性映射，模掉由 $\pm 1$ 生成的理想，复合与恒等态射显然。

配备：

- 幺半群结构：一个双函子 $\otimes$ ：阿贝尔群$^{\mathbb{Z}-\text{分次}}{}_{\pm 1}$ $\times$阿贝尔群$^{\mathbb{Z}-\text{分次}}{}_{\pm 1}$ $\to$ 阿贝尔群$^{\mathbb{Z}-\text{分次}\pm 1}$，我们通常将其记作 $V_* \otimes W_*$ 对 $\otimes(V_*, W_*)$ 以及 $f \otimes g$ 对 $\otimes(f, g)$，定义如下。

– 在对象上： $\otimes$ 与基环$\mathbb{Z}$ 上的普通张量积一致，作用于 $\mathbb{Z}$-分次阿贝尔群，其分次由下式确定

$$\deg(v \otimes w) = \deg(v) + \deg(w)$$

也就是说，若 $V_* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ 和 $W_* = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$，张量积定义为

$$V_* \otimes W_* = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (V_* \otimes W_*)_k,$$

其中

$$(V_* \otimes W_*)_k \coloneqq \bigoplus_{i+j=k} V_i \otimes W_j.$$

– 关于态射： $\otimes$ 是 $\mathbb{Z}$-线性映射的带符号张量积，定义为

$$(f \otimes g)(v \otimes w) \coloneqq (-1)^{|f||w|} f(v) \otimes g(w).$$

- 幺半单位：$(\mathbb{Z})_0$，即满足$(\mathbb{Z})_0 = \mathbb{Z}$ 且$(\mathbb{Z})_k = 0$ 的分次阿贝尔群，其中 $k \neq 0$。
- 结合子和单位子：通常的映射。
- 编织：由下式给出的自然同构

$$\begin{aligned} \gamma_{V_*,W_*} : V_* \otimes W_* &\to W_* \otimes V_* \\ v \otimes w &\mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v \end{aligned}$$

于是 $(\mathrm{Ab}_{\pm 1}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}, \otimes, \gamma_{V_*,\ W_*})$ 构成一个对称幺半范畴。

证明。为验证 $\otimes$ 是一个双函子，考虑从 $V_*$ 到 $W_*$ 的态射 $f$ 和从 $V'_*$到 $W'_*$的态射 $g$。在本证明的所有符号检查中，我们假设定义域元素是齐次的；通过线性，同样的结果可推广到非齐次生成元。我们首先检查带符号的交换律：在右侧，我们有

$$\begin{aligned} ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(v \otimes w) &= (-1)^{|f'\circ f||w|} (f' \circ f)(v) \otimes (g' \circ g)(w) \\ &= (-1)^{(|f'|+|f|)|w|} f'(f(v)) \otimes g'(g(w)) \\ &= (-1)^{|f'||w|+|f||w|} f'(f(v)) \otimes g'(g(w)), \end{aligned}$$

而在左侧，我们有

$$\begin{aligned} ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(v \otimes w) &= (f' \otimes g')\big((-1)^{|f||w|} f(v) \otimes g(w)\big) \\ &= (-1)^{|f||w|} (f' \otimes g')\big(f(v) \otimes g(w)\big) \\ &= (-1)^{|f||w|} (-1)^{|f'||g(w)|} f'(f(v)) \otimes g'(g(w)) \\ &= (-1)^{|f||w|} (-1)^{|f'|(|g|+|w|)} f'(f(v)) \otimes g'(g(w)) \\ &= (-1)^{|f||w|+|f'||g|+|f'||w|} f'(f(v)) \otimes g'(g(w)). \end{aligned}$$

这些映射相差一个整体符号 $(-1)^{|f'||g|}$，在 $\mathsf{Ab}_{\pm 1}^{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}$ 中可以忽略。[4] 此外，恒等态射得到了精确保留（无需修正符号），因为它是一个偶映射：

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W)(v \otimes w) &= (-1)^{|\,\mathrm{id}_V\,||w|}\,\mathrm{id}_V(v) \otimes \mathrm{id}_W(w) \\ &= v \otimes w \\ &= \mathrm{id}_{V \otimes W}(v \otimes w).\end{aligned}$$

因此可得，$\otimes$ 是一个双函子。

现在，我们通过证明下图交换，来验证结合子的自然性。

$$\begin{array}{ccc}(V_* \otimes W_*) \otimes X_* & \xrightarrow{\alpha_{V_*,W_*,X_*}} & V_* \otimes (W_* \otimes X_*) \\ {\scriptstyle (f\otimes g)\otimes h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes(g\otimes h)} \\ (V'_* \otimes W'_*) \otimes X'_* & \xrightarrow[\alpha_{V'_*,W'_*,X'_*}]{} & V'_* \otimes (W'_* \otimes X'_*)\end{array}$$

事实上，顺时针复合给出

$$\begin{aligned}(v \otimes w) \otimes x &\overset{\alpha}{\mapsto} v \otimes (w \otimes x) \\ &\xmapsto{f\otimes(g\otimes h)} (-1)^{|f||w\otimes x|} f(v) \otimes ((g \otimes h)(w \otimes x)) \\ &= (-1)^{|f|(|w|+|x|)} f(v) \otimes \big((-1)^{|g||x|} g(w) \otimes h(x)\big) \\ &= (-1)^{|f||w|+|f||x|+|g||x|} f(v) \otimes (g(w) \otimes h(x))\end{aligned}$$

而逆时针路径给出

$$\begin{aligned}(v \otimes w) \otimes x &\xmapsto{(f\otimes g)\otimes h} (-1)^{|f\otimes g||x|}((f \otimes g)(v \otimes w)) \otimes h(x) \\ &= (-1)^{(|f|+|g|)|x|}((-1)^{|f||w|} f(v) \otimes g(w)) \otimes h(x) \\ &\overset{\alpha}{\mapsto} (-1)^{|f||w|+|f||x|+|g||x|} f(v) \otimes (g(w) \otimes h(x)).\end{aligned}$$

左、右单位子分别为

$$\begin{aligned}\lambda_{V_*} : \mathbb{Z} \otimes V_* \to V_* \qquad & \rho_{V_*} : V_* \otimes \mathbb{Z} \to V_* \\ n \otimes v \mapsto nv \qquad & v \otimes n \mapsto nv.\end{aligned}$$

这些映射关于 $V_*$ 是自然的，因为我们将证明下面的交换图表成立。

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z} \otimes V_* & \xrightarrow{\lambda_{V_*}} & V_* \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_\mathbb{Z}\otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{Z} \otimes V'_* & \xrightarrow[\lambda_{V'_*}]{} & V'_*\end{array} \qquad \begin{array}{ccc}V_* \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{\rho_{V_*}} & V_* \\ {\scriptstyle f\otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V'_* \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow[\rho_{V'_*}]{} & V'_*\end{array}$$

[4] 正如注 1.26 所示，在我们的目标范畴中必须将态射视为仅在符号意义下确定，这一点在此处显露无遗。当 $f'$ 和 $g$ 均为奇数时，这个超交换律并非严格成立。

对于左单位子，按顺时针方向得到

$$n \otimes v \overset{\lambda_{V_*}}{\longmapsto} nv \overset{f}{\mapsto} nf(v)$$

而逆时针方向给出

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \otimes f)(n \otimes v) &= (-1)^{|\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\,||v|}\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(n) \otimes f(v) \\ &= (-1)^{0\cdot|v|} n \otimes f(v) \\ &= n \otimes f(v),\end{aligned}$$

然后将 $\lambda_{V'_*}$作用于此，得到 $nf(v)$。右单位子类似：顺时针复合将 $v \otimes n$ 映射为 $nf(v)$，而

$$\begin{aligned}(f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})(v \otimes n) &= (-1)^{|f||n|} f(v) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(n) \\ &= (-1)^{|f|\cdot 0} f(v) \otimes n \\ &= f(v) \otimes n,\end{aligned}$$

因为对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$|n| = 0$ 都成立。将 $\rho_{V'_*}$ 作用于此可知，逆时针复合映射也为 $nf(v)$。

涉及 $\alpha_{V_*}$、$w_*$、$x_*$、$\lambda_{V_*}$ 和 $\rho_{V_*}$ 的幺半群五边形与三角相干图均可交换，且没有符号歧义。由于这些是由自由模构成的对称幺半群范畴中、以张量积为幺半群结构的标准相干映射，此处不再重复验证。

最后，我们证明 $\gamma$ 关于 $V_*$ 和 $W_*$ 具有自然性（至多相差一个符号），并且严格满足其余必要的相干性。自然性方块写作

$$\begin{array}{ccc} V_* \otimes W_* & \xrightarrow{\gamma_{V_*,W_*}} & W_* \otimes V_* \\ {\scriptstyle f\otimes g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes f} \\ V'_* \otimes W'_* & \xrightarrow[\gamma_{V'_*,W'_*}]{} & W'_* \otimes V'_* \end{array}$$

顺时针方向给出

$$\begin{aligned}((g \otimes f) \circ \gamma_{V_*,W_*})(v \otimes w) &= (g \otimes f)\big((-1)^{|v||w|} w \otimes v\big) \\ &= (-1)^{|v||w|}(-1)^{|g||v|} g(w) \otimes f(v) \\ &= (-1)^{|v||w|+|g||v|} g(w) \otimes f(v).\end{aligned}$$

而逆时针则得到

$$\begin{aligned}\gamma_{V'_*,W'_*}(f \otimes g)(v \otimes w) &= \gamma_{V'_*,W'_*}\big((-1)^{|f||w|} f(v) \otimes g(w)\big) \\ &= (-1)^{|f||w|}(-1)^{|f(v)||g(w)|} g(w) \otimes f(v) \\ &= (-1)^{|f||w|+(|f|+|v|)(|g|+|w|)} g(w) \otimes f(v) \\ &= (-1)^{|f||g|+2|f||w|+|v||g|+|v||w|} g(w) \otimes f(v)\end{aligned}$$

$$= (-1)^{|v||w|+|v||g|+|f||g|} g(w) \otimes f(v).$$

两者相差一个整体符号 $(-1)^{|f||g|}$。

相干六边形 [EGNO15，图 (8.1)] 为

$$\begin{array}{ccc}
((U_* \otimes V_*) \otimes W_*) & \xrightarrow{\gamma_{U_*,V_*} \otimes \mathrm{id}_{W_*}} & ((V_* \otimes U_*) \otimes W_*) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{U_*,V_*,W_*}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{V_*,U_*,W_*}} \\
U_* \otimes (V_* \otimes W_*) & & V_* \otimes (U_* \otimes W_*) \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_{U_*,V_* \otimes W_*}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{V_*} \otimes \gamma_{U_*,W_*}} \\
(V_* \otimes W_*) \otimes U_* & \xrightarrow[\alpha_{V_*,W_*,U_*}]{} & V_* \otimes (W_* \otimes U_*)
\end{array}$$

顺时针方向给出

$$\begin{aligned}
&((v \otimes w) \otimes x) \overset{\gamma_{V_*,W_*} \otimes \mathrm{id}}{\longmapsto} (-1)^{|v||w|} (w \otimes v) \otimes x \\
&\overset{\alpha}{\mapsto} (-1)^{|v||w|} w \otimes (v \otimes x) \\
&\overset{\mathrm{id} \otimes \gamma}{\longmapsto} (-1)^{|v||w|} (-1)^{|v||x|} w \otimes (x \otimes v) \\
&= (-1)^{|v||w|+|v||x|} w \otimes (x \otimes v).
\end{aligned}$$

而逆时针方向给出

$$\begin{aligned}
&((v \otimes w) \otimes x) \overset{\alpha}{\mapsto} v \otimes (w \otimes x) \\
&\overset{\gamma \otimes \mathrm{id}}{\longmapsto} (-1)^{|v||w \otimes x|} (w \otimes x) \otimes v \\
&\overset{\alpha}{\mapsto} (-1)^{|v||w|+|v||x|} w \otimes (x \otimes v).
\end{aligned}$$

另一个相干六边形 [EGNO15，图 (8.2)] 可由编织对称性自动推出（将在下文验证）。编织–单位子相干三角形为

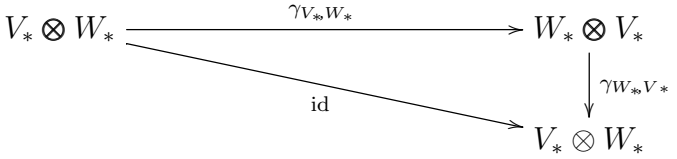
$$\begin{array}{ccc}
(V_* \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma_{V_*,\ \mathbb{Z}}} & (\mathbb{Z} \otimes V_*) \\
& {\scriptstyle \rho_{V_*}} \searrow & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{V_*}} \\
& & V_*
\end{array}$$

逆时针方向得到 $v \otimes n \overset{\rho}{\mapsto} nv$，而顺时针方向移动则得到

$$\begin{aligned}
v \otimes n &\overset{\gamma}{\mapsto} (-1)^{|v||n|} n \otimes v \\
&= n \otimes v \\
&\overset{\lambda}{\mapsto} nv
\end{aligned}$$

第二行成立，因为 $|n| = 0$。

最后，我们证明 $V_*$ 与 $W_*$之间的编织是对称的：图




可交换，因为

$$\begin{aligned}\gamma_{W_*,V_*} \circ \gamma_{V_*,W_*}(v \otimes w) &= \gamma_{W_*,V_*}\left((-1)^{|v||w|} w \otimes v\right) \\ &= (-1)^{|v||w|}(-1)^{|w||v|} v \otimes w \\ &= (-1)^{2|v||w|} v \otimes w \\ &= v \otimes w.\end{aligned}$$

□

7.2. **函子** $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$。现在我们验证 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 确实是一个对称幺半函子，从而证明定理 1.14。对称幺半函子的定义是对称幺半范畴之间的编织幺半函子。我们首先证明 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 是一个幺半函子；为此，无须为 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$指定单位相容映射。这与 Etingof–Gelaki–Nikshych–Ostrik 的框架一致：他们对幺半函子的定义 [EGNO15，定义 2.4.1] 并未将单位相容性纳入其中，但它等价于一个包含单位相容性的定义 [EGNO15，定义 2.4.5]。接下来，为了证明 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$ 是一个编织幺半函子，我们遵循 [EGNO15，定义 8.1.7], ，其中将编织幺半函子定义为满足一个编织相干方块 [EGNO15，方程 8.5]的幺半函子；我们将直接验证该方块。

**定理 7.4**（参见定理 1.14）。 以下数据定义了一个对称幺半函子$\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}$。

- $\mathcal{V}_{\mathrm{FNsut}}$ 在对象上的作用为

$$(F, \Lambda)[d] \mapsto (\wedge^* H_1(F, S^+))[d]$$

其中 $[d]$ 表示向下平移 $d$ 次，因此

$$(\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}((F, \Lambda)[d]))_k = \wedge^{k+d} H_1(F, S^+).$$

- $\mathcal{V}_{\mathrm{FNsut}}$ 在态射 $(Y, \Gamma)$ 上的作用为从 $(F_0, \Lambda_0)[d_0]$ 到 $(F_1, \Lambda_1)][d_1]$ 相差符号的复合

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes |K_{Y,\Gamma}|) : \wedge^* H_1(F_0, S_0^+) \to \wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$$

在定理 *1.7* 中定义；等价地，作为差一个符号的映射

$$\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y, \Gamma) = [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma)]_{\mathrm{comb}}^{\mathbb{Z}}$$

由定理 *1.7* 得出。作为从 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)[d_0]$ 到 $\wedge^* H_1(F_1, S_1^+)[d_1]$的态射，映射$\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y, \Gamma)$ 的次数为 $c + d_0 - d_1$。

- $\mathcal{V}_{\mathrm{FNsut}}$ 具有由下式确定的幺半群结构映射

$$\Phi_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']} : \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}((F,\Lambda)[d]) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}((F',\Lambda')[d']) \to \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}((F,\Lambda)[d] \amalg (F',\Lambda')[d'])$$
$$\gamma_I \otimes \gamma_{I'} \mapsto (-1)^{k'd} \gamma_I \wedge \gamma_{I'}$$

其中 $\gamma_I$和 $\gamma_{I'}$分别是 $\wedge^k H_1(F, S^+)$与 $\wedge^k H_1(F', (S^+)')$ 的基元素，如定义 *4.3* 中所定义。

证明。 在整个证明中，为清晰起见，我们将 $\otimes$ 和 $\amalg$ 在对象上展开。首先需要检验的性质是 $\Phi_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']}$关于 $(F, \Lambda)[d]$, 以及 $(F', \Lambda')[d']$的自然性；若下方方块交换，则该性质成立。

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^* H_1(F, S^+)[d] \otimes \wedge^* H_1(F', (S^+)')[d'] & \xrightarrow{\Phi_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']}} & \wedge^* H_1(F \sqcup F', S^+ \sqcup (S^+)')[d+d'] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)\otimes\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y',\Gamma')} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y\sqcup Y',\Gamma\sqcup\Gamma')} \\
\wedge^* H_1(\widetilde{F}, \widetilde{S^+})[\tilde{d}] \otimes \wedge^* H_1(\widetilde{F'}, \widetilde{(S^+)'})[\tilde{d'}] & \xrightarrow[\Phi_{(\widetilde{F},\widetilde{\Lambda})[\tilde{d}],(\widetilde{F'},\widetilde{\Lambda'})[\tilde{d'}]}]{} & \wedge^* H_1(\widetilde{F} \sqcup \widetilde{F'}, \widetilde{S^+} \sqcup \widetilde{(S^+)'})[\tilde{d}+\tilde{d'}]
\end{array}$$

设 $\gamma_I$和 $\gamma_{I'}$分别为 $\wedge^* H_1(F, S^+)[d]$与 $\wedge^* H_1(F', (S^+)')[d']$的基元素。我们首先计算逆时针复合在该基元素上的像

$$\gamma_I \otimes \gamma_{I'} \in \wedge^* H_1(F, S^+)[d] \otimes \wedge^* H_1(F', (S^+)')[d'].$$

我们有

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y',\Gamma'))(\gamma_I \otimes \gamma_{I'}) &= (-1)^{|\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)||\gamma_{I'}|} \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)(\gamma_I) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y',\Gamma')(\gamma_{I'}) \\
&= (-1)^{(c+d-\tilde{d})(k'-d')} \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)(\gamma_I) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y',\Gamma')(\gamma_{I'}).
\end{aligned}$$

映射 $\Phi_{(\widetilde{F},\widetilde{\Lambda})[\tilde{d}],(\widetilde{F'},\widetilde{\Lambda'})[\tilde{d'}]}$随后将此映到

$$(-1)^{(c+d-\tilde{d})(k'-d')}(-1)^{\tilde{d}(k'+c')} \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)(\gamma_I) \wedge \mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y',\Gamma')(\gamma_{I'}). \tag{14}$$

化简后，此映射的总符号为

$$\begin{aligned}
(c+d-\tilde{d})(k'-d') + \tilde{d}(k'+c') &= ck' - cd' + k'd - dd' - k'\tilde{d} + \tilde{d}d' + k'\tilde{d} + \tilde{d}c' \\
&= ck' + k'd + (k \text{ independent terms}).
\end{aligned}$$

另一方面，沿顺时针路径，结构映射首先按定义作用：

$$\Phi_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']}(\gamma_I \otimes \gamma_{I'}) = (-1)^{k'd} \gamma_I \wedge \gamma_{I'}.$$

要找出该元素在下一个映射下的像，首先将 $\mathcal{V}_{\mathrm{sut}}^{\mathrm{FN}}(Y \sqcup Y',\ \Gamma \sqcup \Gamma')$ 解读为 $[\widehat{\ \ \ \

如定义 4.16 中所述，为配边 $(Y \sqcup Y',\ \Gamma \sqcup \Gamma')$ 取选择集 $\Xi \sqcup \Xi'$。由此得到的映射 $\widehat{[\mathrm{BSDA}(Y \sqcup Y',\ \Gamma \sqcup \Gamma';\ \Xi \sqcup \Xi')]}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 将元素 $(-1)^{k'd}\gamma_I \wedge \gamma_{I'}$ 映射为

$$\sum_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{x}':\\ o_R(\mathbf{x})=I,\\ \bar{o}_R(\mathbf{x}')=I'}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}')+k'd}\gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}')}$$

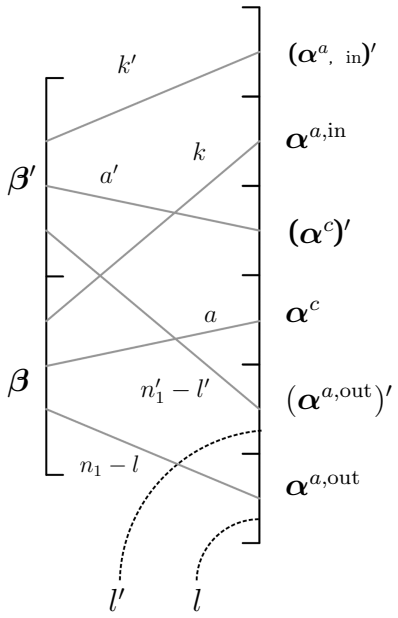
为了将这个表达式与 (14) 进行比较，我们希望将 $\widehat{[\mathrm{BSDA}]}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 按不交并展开。由于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 不交，且在选择 $\Xi \sqcup \Xi'$ 中，$\mathcal{Z}_1$ 的弧在 $\mathcal{Z}_1 \sqcup \mathcal{Z}_1'$ 上匹配弧的排序中先于 $\mathcal{Z}_1'$ 的弧，因此我们知道

$$\gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}')} = \gamma_{\bar{o}_L(x)} \wedge \gamma_{\bar{o}_L(x')}.$$

然而，我们将看到

$$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}') \neq \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}').$$

所选 $\mathcal{H} \sqcup \mathcal{H}'$ 中生成元 $\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}'$ 的交叉弦图如下图所示。为清楚起见，我们将 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 中的 $\alpha$-弧与 $\beta$-曲线分别放在子块中。




$\tilde{\Xi} \sqcup \Xi$ 施加的排序约定交错排列了 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 的指标，从而产生新的交叉。这导致 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}')$ 与 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}')$ 之间的逆序符号计数相差

$$(n_1 - l)l' + a(n_1' - l') + k(n_1' - l') + ka'.$$

$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}')$ 和 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}')$ 的交点贡献显然相同。$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}')$ 的“$ak$”修正项为 $(a + a')(k + k')$，因此它与 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$ 和 $\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}')$ 的“$ak$”修正项之和的差为 $ka' + k'a$。$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}')$ 的“$n_1k$”修正项为 $(n_1 + n_1')(k + k')$，因此它与以下对象的“$n_1k$”修正项之和的差为

$\mathbf{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}')$ 为 $n_1'k + n_1k'$。化简后，我们发现总符号差为

$$\begin{aligned}&(n_1 - l)l' + a(n_1' - l') + k(n_1' - l') + ka' + ka' + k'a + n_1'k + n_1k' \\ &\quad = k'c + (k \text{ independent terms}) \mod 2.\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}') = \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}) + \mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}') + k'c + (k \text{ independent terms})$$

因此我们可以展开

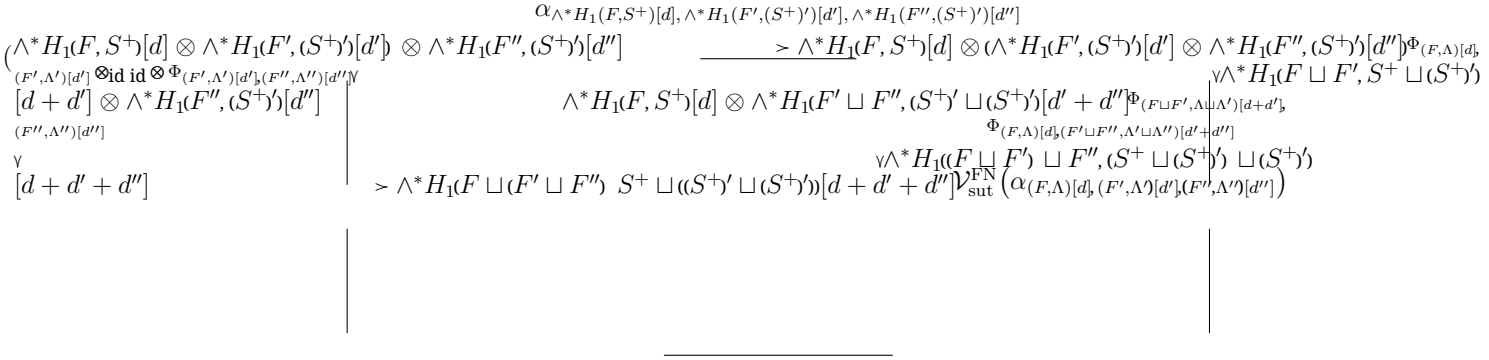
$$\sum_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{x}':\\ o_R(\mathbf{x})=I,\\ \bar{o}_R(\mathbf{x}')=I'}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}')+k'd}\gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}')} = \sum_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{x}':\\ o_R(\mathbf{x})=I,\, o_R(\mathbf{x}')=I'}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})+\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}')+k'c+k'd}\gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x})} \wedge \gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x}')}$$

忽略整体符号。由多重线性可知，这等于

$$\begin{aligned}&(-1)^{k'c+k'd}\left(\sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}):\\ o_R(\mathbf{x})=I}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})}\gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x})}\right) \wedge \left(\sum_{\substack{\mathbf{x}'\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}'):\\ o_R(\mathbf{x}')=I'}} (-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}')}\gamma_{\bar{o}_L(\mathbf{x}')}\right) \\ &= (-1)^{k'c+k'd}[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}(\gamma_I) \wedge [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y',\Gamma')]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}(\gamma_{I'}) \\ &= (-1)^{k'c+k'd}\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(Y,\Gamma)(\gamma_I) \wedge \mathcal{V}^{\mathrm{FN}}(Y',\Gamma')(\gamma_{I'}).\end{aligned}$$

由于符号 $(-1)^{k'c+k'd}$ 与方程 (14) 中的符号一致，$\Phi_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']}$ 是一个自然变换。

接下来，我们将证明幺半群结构映射的相干六边形是交换的。




逆时针路径对源的基元素 $(\gamma_I \otimes \gamma_{I'}) \otimes \gamma_{I''}$ 的作用为

$$\begin{aligned}(\gamma_I \otimes \gamma_{I'}) \otimes \gamma_{I''} &\xmapsto{\Phi\otimes\mathrm{id}} (-1)^{k'd}(\gamma_I \wedge \gamma_{I'}) \otimes \gamma_{I''} \\ &\xmapsto{\Phi} (-1)^{k'd+k''(d+d')}\left((\gamma_I \wedge \gamma_{I'}) \wedge \gamma_{I''}\right) \\ &\xmapsto{\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(\alpha)} (-1)^{k'd+k''d+k''d'}(\gamma_I \wedge (\gamma_{I'} \wedge \gamma_{I''}))\end{aligned}$$

顺时针路径对同一基元素的作用为

$$\begin{aligned}(\gamma_I \otimes \gamma_{I'}) \otimes \gamma_{I''} &\overset{\alpha}{\mapsto} \gamma_I \otimes (\gamma_{I'} \otimes \gamma_{I''}) \\ &\overset{\mathrm{id}\otimes\Phi}{\longmapsto} \gamma_I \otimes ((-1)^{k''d'}\gamma_{I'} \wedge \gamma_{I''}) \\ &\overset{\Phi}{\mapsto} (-1)^{k''d'+(k'+k'')d}(\gamma_I \wedge (\gamma_{I'} \wedge \gamma_{I''})).\end{aligned}$$

两个像完全一致，因此该六边形图可交换。

截至此处的证明表明，$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 是一个幺半函子。为证明它是一个对称幺半函子，我们需要以下图可交换：

$$\begin{array}{ccc}\wedge^* H_1(F,S^+)[d] \otimes \wedge^* H_1(F',(S^+)')[d'] & \xrightarrow{\gamma_{\wedge^* H_1(F,S^+)[d],\wedge^* H_1(F',(S^+)')[d']}} & \wedge^* H_1(F',(S^+)')[d'] \otimes \wedge^* H_1(F,S^+)[d] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d']}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{(F',\Lambda')[d'],\,(F,\Lambda)[d]}} \\ \wedge^* H_1(F\sqcup F', S^+\sqcup (S^+)')[d+d'] & \xrightarrow[\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(\gamma_{(F,\Lambda)[d],\,(F',\Lambda')[d']})]{} & \wedge^* H_1(F'\sqcup F, (S^+)'\sqcup S^+)[d'+d]\end{array}$$

注意，$\gamma_I$ 是 $\wedge^* H_1(F,\ S^+)$中次数为 $k$ 的齐次元素，因此在 $\wedge^* H_1(F,\ S^+)[d]$中，我们有 $|\gamma_I| = k-d$。于是，沿顺时针路径：

$$\begin{aligned}\gamma_I \otimes \gamma_{I'} &\overset{\gamma}{\mapsto} (-1)^{(k-d)(k'-d')}\gamma_{I'} \otimes \gamma_I \\ &\overset{\Phi}{\mapsto} (-1)^{(k-d)(k'-d')}(-1)^{kd'}\gamma_{I'} \wedge \gamma_I.\end{aligned}$$

这个符号的总和为

$$\begin{aligned}(k-d)(k'-d') + kd' &= kk' - kd' - k'd - dd' + kd' \\ &= kk' + k'd + (k \text{ independent terms}) \mod 2.\end{aligned}$$

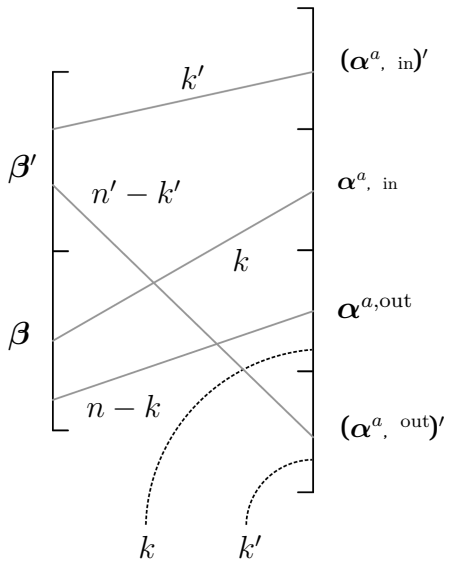
对于逆时针路径，我们计算编织配边$\gamma_{(F,\Lambda)[d],\ (F',\ \Lambda')[d']}$的 $[\widehat{\quad\quad}\mathbf{BSDA}]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$，然后将其作用于 $(-1)^{k'd}\gamma_I \wedge \gamma_{I'}$。流形$\gamma_{(F,\Lambda)[d],\ (F',\ \Lambda')[d']}$同胚于

$$(\mathrm{id}_{(F\sqcup F',\Lambda\sqcup\Lambda')[d+d']}, \Gamma_{\mathrm{id}} \sqcup \Gamma'_{\mathrm{id}}) = (\mathrm{id}_{(F,\Lambda)[d]}, \Gamma_{\mathrm{id}}) \amalg (\mathrm{id}_{(F',\Lambda')[d]}, \Gamma'_{\mathrm{id}}).$$

要计算 $[\widehat{\quad\quad}\mathbf{BSDA}(\mathbf{id}_{(F\sqcup F',\Lambda\sqcup\Lambda')[d+d']},\ \Gamma_{\mathrm{id}} \sqcup \Gamma'_{\mathrm{id}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$，采用的选择与定义 4.16 中的选择 $\Xi_\gamma$相同$\Xi_{\mathrm{id}} \sqcup \Xi'_{\mathrm{id}}$（其中 $\Xi_{\mathrm{id}}$ 和 $\Xi'_{\mathrm{id}}$ 的定义与命题 4.13 中相同），但我们使用弧图 $\mathcal{Z}' \sqcup \mathcal{Z}$（而非 $\mathcal{Z} \sqcup \mathcal{Z}'$）来表示出射曲面$F' \sqcup F$，并相应地，在 $\mathcal{Z}' \sqcup \mathcal{Z}$的弧的排序中，将 $\mathcal{Z}'$的弧排在 $\mathcal{Z}$的弧之前。在 $\Xi_\gamma$ 中选取的 Heegaard 图仍为 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}} \sqcup \mathcal{H}'_{\mathrm{id}}$；对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{id}} \sqcup \mathcal{H}'_{\mathrm{id}}$的生成元$\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}'$，$\Xi_\gamma$ 所假设的交点模式意味着

$$\sum_{x\sqcup x' \in \mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}'} i(x \sqcup x') = n - k + n' - k' = k + k'$$

相差一个与 $k$ 和 $k'$ 无关的符号。对于逆序数，我们借助 $\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}'$ 的交叉弦图。




该图计数

$\mathsf{inv}(\sigma_{II^c\leftrightarrow\mathrm{std}}) + \mathsf{inv}(\sigma_{I'(I')^c\leftrightarrow\mathrm{std}}) + \mathsf{inv}(\sigma_{I^cI\leftrightarrow\mathrm{std}}) + \mathsf{inv}(\sigma_{(I')^cI'\leftrightarrow\mathrm{std}}) = k(n-k) + k'(n'-k')$；再加上一个

$$k(n'-k') + (n-k)(n'-k') + k(n'-k') = (n-k)(n'-k') \mod 2.$$

最后，“$ak$”项为零，因为 $a=0$，而“$n_1k$”项为$(n+n')(k+k')$。因此，总计为

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x}\sqcup\mathbf{x}') &= k+k'+k(n-k)+k'(n'-k')+(n-k)(n'-k')+(n+n')(k+k')\\ &= kk' + (k\text{-independent terms}) \mod 2.\end{aligned}$$

因此，

$$\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}(\gamma_{(F,\Lambda)[d],(F',\Lambda')[d']})((-1)^{k'd}\gamma_I\wedge\gamma_{I'}) = (-1)^{k'd+kk'}\gamma_{I'}\wedge\gamma_I,$$

它与另一条路径完全一致。这证明 $\mathcal{V}^{\mathrm{FN}}_{\mathrm{sut}}$ 是一个对称幺半函子。□

## 8. Relationship with SFH

在 [Zar10], Zarev 阐述了一种一般性理念：带边缝合 Floer 不变量应当能够用普通（无边）缝合 Floer 不变量来理解；带边理论中的幂等元（对我们而言：基元素 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$和 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$）对应于扩展缝合余边上的缝合线（$Y$，$\Gamma$）：$(F_0,\ \Lambda_0)\to(F_1,\ \Lambda_1)$ 的不同方式，$F_i$ 从而得到一个普通缝合三维流形。这个理念表明，给定基元素$\gamma_I^{\mathrm{in}}$和 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$，$\widehat{[\mathsf{BSDA}(Y,\Gamma;\Xi)]}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 在这些基元素上的矩阵系数应当是某个普通缝合 Floer 群的欧拉示性数。我们在此验证这一预言；下文的分析将帮助我们定义 Spin$^c$ 版本 $\widehat{[\mathsf{BSDA}(Y\ \textit{comb of}}$ $\widehat{[\mathsf{BSDA}(Y,\ \Gamma;\Xi)]}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$。

8.1. **Zarev 帽**。现在我们定义一类特殊的带边缝合流形——以及它们的 Heegaard 图——借此可以用一种标准方式从带边缝合流形构造普通缝合流形。

定义 8.1. 设 $(Y,\Gamma)$ 是一个从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的缝合余边。选取表示 $(F_i,\Lambda_i)$ 的 $\alpha$-弧图 $\mathcal{Z}_i$。令 $S_0\subset \mathbf{a}_0$ 为 $\mathcal{Z}_0$ 的弧集的一个子集，并令$S_1\subset \mathbf{a}_1$ 为 $\mathcal{Z}_1$ 的弧集的一个子集。相对于 $S_0$，$(F_0,\Lambda_0)$ 的右扎列夫帽（分别地，相对于 $S_1$，$(F_1,\Lambda_1)$ 的左扎列夫帽，记作 $(Y^L_{S_1},\Gamma^L_{S_1})$），记作 $(Y^R_{S_0},\Gamma^R_{S_0})$，是一个从 $(\emptyset,\emptyset)$ 到 $(F_0,\Lambda_0)$（分别地，从 $(F_1,\Lambda_1)$ 到 $(\emptyset,\emptyset)$）的单侧缝合协边，其定义如下。

- 令 $(Y^R_{S_0})'$（分别地，$(Y^L_{S_1})'$）为从自身到 $(F_0,\ \Lambda_0)$（分别地，$(F_1,\ \Lambda_1)$）的恒等协边，即乘积流形 $(F_0\times[0,1],\ \Lambda_0\times[0,1])$，其中 $F_0\times\{0\}$（分别地，$F_1\times\{0\}$）位于右侧，而 $F_0\times\{1\}$（分别地，$F_0\times\{0\}$）位于左侧。
- 首先，将恒等协边的缝合线延伸为 $F_0\times\{0\}$ 上的缝合线（分别为$F_1\times\{1\}$上的缝合线）：令 $F_0\times\{0\}$ 中的缝合线（分别为 $F_1\times\{1\}$中的缝合线）是$S_0^+\times\{0\}$向 $F_0\times\{0\}$（分别向 $S_1^+\times\{1\}$进入 $F_1\times\{1\}$）作一个小的平行推离。这些缝合线定义了一个缝合余边$((Y^R_{S_0})',(\Gamma^R_{S_0})')$，从$(\emptyset,\emptyset)$到$(F_0,\Lambda_0)$（分别为$((Y^L_{S_1})',(\Gamma^L_{S_1})')$，从$(F_1,\Lambda_1)$到$(\emptyset,\emptyset)$）；其 $R^+$ 区域（记作$(R_0^+)'$，分别为$(R_1^+)'$）满足：$(R_0^+)'\cap(F_0\times\{0\})$是$S_0^+$向 $F_0\times\{0\}$ 内的一个加厚（分别是$(R_1^+)'\cap(F_1\times\{1\})$是$S_1^+$向 $F_1\times\{1\}$内的一个加厚）。 $R^-$ 区域覆盖了 $F_0\times\{0\}$（分别为 $F_1\times\{0\}$）的全部部分，但不包括$S_0^+$（分别为$S_1^+$）的这个加厚邻域。

- 对于每条弧 $a_i\in S_0$（分别地，$a_i\in S_1$），修改缝合线（$\Gamma^R_{S_0}$）′（分别地，（$\Gamma^L_{S_1}$）′），使其沿着与 $a_i$ 平行的方向延伸；此前位于 $R^-$ 区域中、与 $a_i$ 平行的一条带，现在位于 $R^+$ 区域中。图 15 最右侧展示了在右扎列夫帽情形下对 $R^+$ 进行这些修改的示意图；左扎列夫帽情形类似。

- 将（$Y^R_{S_0},\Gamma^R_{S_0}$）（分别地，（$Y^L_{S_1},\Gamma^L_{S_1}$））定义为对缝合线（$\Gamma^R_{S_0}$）′（分别地，（$\Gamma^L_{S_1}$）′）作出这些修改后得到的缝合三维流形（（$Y^R_{S_0}$）′,（$\Gamma^R_{S_0}$）′）（分别地，（（$Y^L_{S_1}$）′,（$\Gamma^L_{S_1}$）′）。

令（$Y,\Gamma_{S_1,S_0}$）为定义如下的普通缝合三维流形

$$(Y^L_{S_1},\Gamma^L_{S_1})\circ(Y,\Gamma)\circ(Y^R_{S_0},\Gamma^R_{S_0})=(Y^L_{S_1}\cup_{F_1}Y\cup_{F_1}Y^R_{S_0},\Gamma^L_{S_1}\cup_{\Lambda_1}\Gamma\cup_{\Lambda_0}\Gamma^R_{S_0}).$$

令 $R^+_{S_1,S_0}$ 表示 $(Y,\Gamma_{S_1,S_0})$ 边界的 $R^+$ 子集。

有一些标准的 Heegaard 图可用于表示 Zarev帽。在我们的设定中，使用 $\beta$-带边图来表示 Zarev帽最为方便； $\alpha$-带边版本也可以类似地定义。

**定义8.2.** 设 $S_1$（分别为 $S_0$）是 $\mathcal{Z}_1$（分别为 $\mathcal{Z}_0$）中弧集 $\mathbf{a}_1$（分别为 $\mathbf{a}_0$）的子集。我们如下定义左 Zarev 帽（$Y^L_{S_1},\Gamma^L_{S_1}$）（分别为右 Zarev 帽（$Y^R_{S_0},\Gamma^R_{S_0}$））对应的单侧边界缝合Heegaard图 $\mathcal{H}^L_{S_1}$： $\beta$在右侧由 $\mathcal{Z}_1^*$（分别在左侧由 $\mathcal{Z}_0^*$）作边界，具体如下：

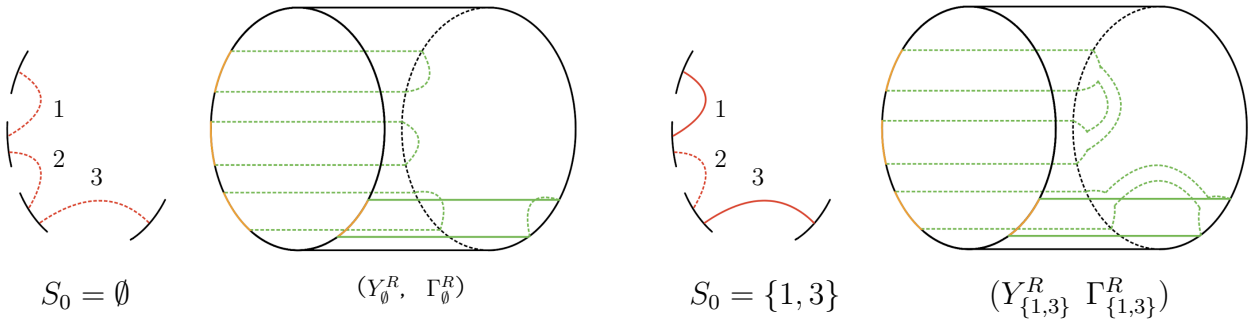



FIGURE 15. 如定义 8.1 所示，第一列和第三列展示了由固定弧图 $\mathcal{Z}_0$ 参数化的缝合曲面（$F_0$，$\Lambda_0$）的两个右 Zarev 帽。这两个帽对应于弧子集 $S_0$的不同选取。左侧的帽也可视为底流形；根据定义 8.1 的一般构造，与曲面（$F_0$，$\Lambda_0$）的这一参数化相关的全部九个右 Zarev 帽均由此产生。如图 5 所示，为避免画面杂乱，$R^+$ 未加阴影。

- 从半恒等图 $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}$（对应 $\mathcal{Z}_1$）（分别为 $\mathcal{Z}_0$对应的半恒等图 $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$）开始，如例 2.20 所示，但删除所有 $\alpha$ 弧。我们将 $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}$ 和 $\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 视为具有图 7 第二幅和第四幅图中所示的手柄分解，其中手柄的核是图中的 $\beta$ 弧。换言之，从 Heegaard 曲面 $\Sigma := F(\mathcal{Z}_1^*)$（分别为 $\Sigma := F(\mathcal{Z}_0^*)$）开始，它对 $\mathcal{Z}_1^*$（分别为 $\mathcal{Z}_0^*$）中的每条类型为（$t = \beta$）的匹配弧都有一个二维 1-把手，然后将 $\boldsymbol{\beta}^a \subset \mathcal{H}^L_{S_1}$（分别为 $\boldsymbol{\beta}^a \subset \mathcal{H}^R_{S_0}$）这组 $\beta$弧指定为这些 1-把手的核。图 16 中间一行最左侧的部分以示意图形式描绘了这个初始图。

- 每条类型为（$t = \alpha$）的匹配弧 $a_i \in S_1$（分别为 $a_i \in S_0$）在 $\Sigma$中都有一个对应的二维 1-柄 $h_i$：其核是 $a_i^*$，即$\mathbf{a}_1^*$（分别为$\mathbf{a}_0^*$）中与 $a_i$对应的类型为（$t = \beta$）的匹配弧。现在，对每个 $i$，在 $h_i \subset \Sigma$ 中再附加一个二维 1-柄，使新柄的附着球面与 $h_i$ 余核的端点重合，如图 16 中间一行最右侧部分所示。

- 对每个 $i$，添加一个 $\alpha$圆，使其沿着 $h_i$绕行一周，并与对应的$\beta$弧恰好相交一次。

由构造可知，图 $\mathcal{H}^L_{S_1}$ 和 $\mathcal{H}^R_{S_0}$ 分别表示 $(Y^L_{S_1}, \Gamma^L_{S_1})$ 和 $(Y^R_{S_0}, \Gamma^R_{S_0})$。图 16 展示了表示右扎列夫帽的图 $\mathcal{H}^R_{S_0}$。

**定义 8.3.** 设 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边。由推论 2.22，存在一个 $\alpha$-$\alpha$ 带边缝合海加德图，表示 $(Y, \Gamma)$，其形式为 $\mathcal{H}_{\text{norm}} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$，其中 $\mathcal{H}'$ 是一个 $\beta$-$\beta$ 带边缝合海加德图，表示 $(Y, \Gamma)$。令 $S_0$（分别为 $S_1$）为 $\mathcal{Z}_0$（分别为

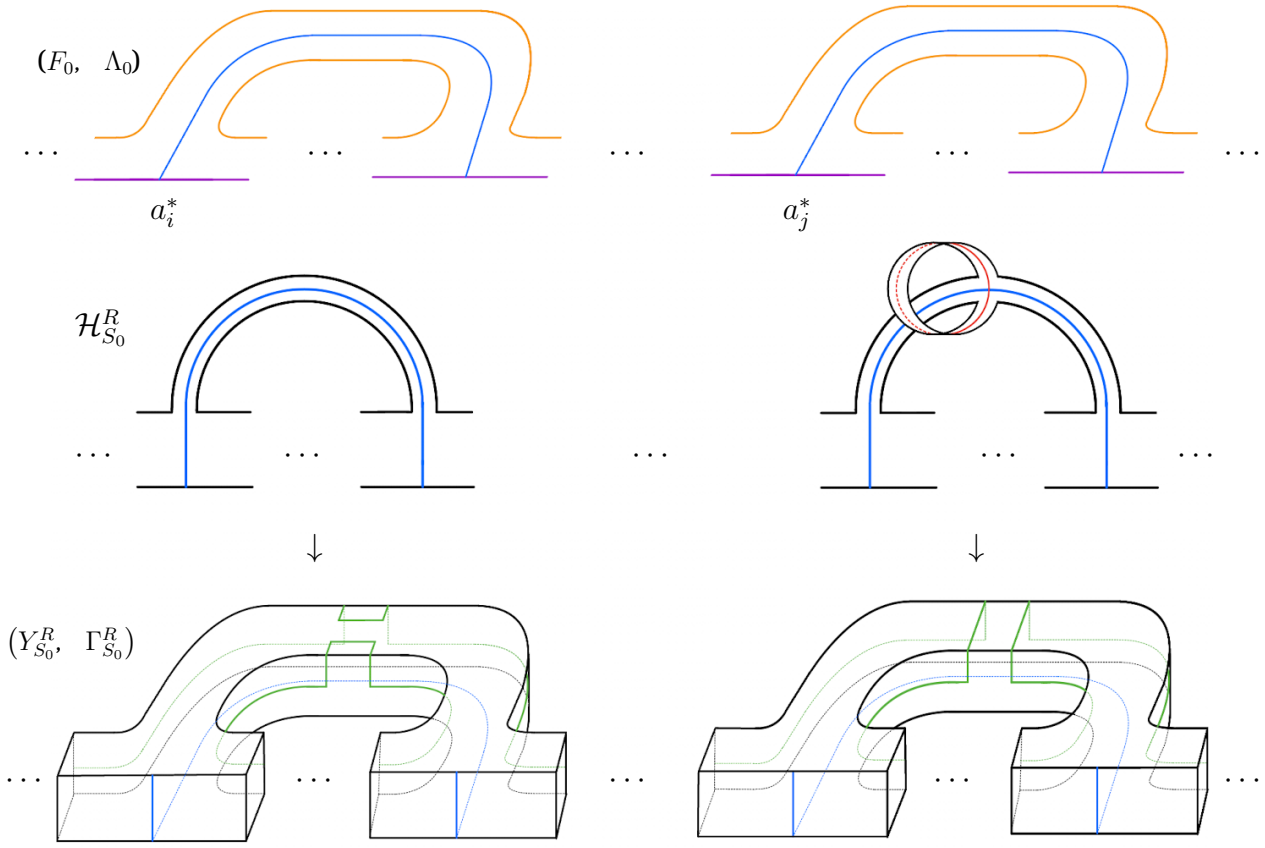



FIGURE 16. 上行：由类型为（$t=\beta$）的弧图 $\mathcal{Z}_0^*$ 构造的缝合曲面（$F_0,\ \Lambda_0$）。下行：相对于 $S_0$，曲面（$F_0,\ \Lambda_0$）的左扎列夫帽（$Y^R_{S_0},\ \Gamma^R_{S_0}$）。中行：表示下行中扎列夫帽的 Heegaard 图 $\mathcal{H}^R_{S_0}$。最右侧画出了定义 8.3 中所述的额外 1-柄及其关联的 $\alpha$-圆，这表明匹配弧 $a_j$ 属于子集 $S_0$；最左侧没有此类 1-柄和 $\alpha$-圆，这意味着 $a_i \notin S_0$。与图3类似，为节省空间，（$F_0,\ \Lambda_0$）和 $\mathcal{H}^R_{S_0}$ 均已旋转。同样，为避免画面杂乱，我们没有给 $R^+$ 添加阴影。

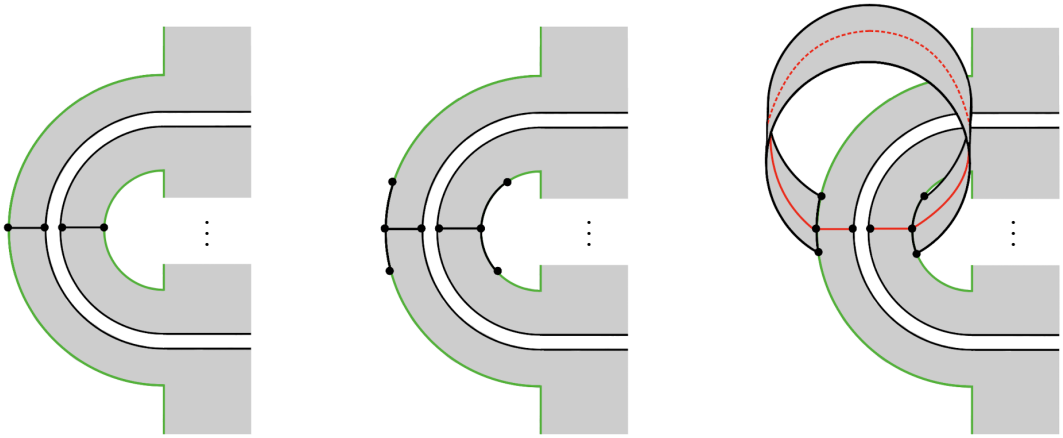
$\mathcal{Z}_1$）。定义（$S_1, S_0$）—带帽*Heegaard*图

$$\mathcal{H}_{S_1,S_0} := \mathcal{H}^L_{S_1} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^R_{S_0}.$$

根据构造，我们得到以下推论。

**推论 8.4.** 定义 *8.3* 中的图 $\mathcal{H}_{S_1,S_0}$ 是定义 *2.11(c)* 中的缝合 *Heegaard* 图，并表示缝合流形 $(Y,\Gamma_{S_1,S_0})$，对任意 $S_0$ 和 $S_1$均成立。

**8.2. 依赖于幂等元的CW复形。**给定定义 8.3 的设置，其中 $S_i$ 是弧集 $\mathbf{a}_i$ 的子集，将第 3 节的构造应用于图$\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$对于 $(Y,\ \Gamma_{S_1,\ S_0})$，可得到一个 CW 对 $(\mathfrak{Y}_{S_1,\ S_0},\ \mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0})$，其中 $\mathfrak{Y}_{S_1,\ S_0}$同伦等价于



∪ 圆盘　　∪ 圆盘　　∪ 圆盘

FIGURE 17. 左：$\mathfrak{R}^+$ 的 CW分解。中：向该 CW分解添加额外胞腔。右：添加 $\mathfrak{R}^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$，以得到$\mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0}$。

$Y$，具体取决于对 $R^+_{S_1,\ S_0}$ 的 CW分解 $\mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0}$ 的选择（以及对 $\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$ 中 $\alpha$ 和 $\beta$ 圆的定向选择；我们将在下文讨论这些选择）。类似地，对于 $(Y,\ \Gamma)$ 的图 $\mathcal{H}_{\text{norm}}$（以及其他选择）可得到一个 CW 对 $(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{R}^+)$，其中 $\mathfrak{Y}$ 同伦等价于 $Y$。我们将对这些选择作出如下假设；这些假设将使我们能够联系 $(\mathfrak{Y}_{S_1,\ S_0},\ \mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0})$ 与 $(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{R}^+)$。

首先注意，$R^+_{S_1,\ S_0}$ 可以看作 $R^+$，并为 $S_1 \sqcup S_0$的每个元素粘上一条带（矩形），如图 15 最右侧部分和图 16 右下角所示。令 $R^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$ 表示这些带的并，因此，$S_0 = R^+ \cup R^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$，。交集$R^+ \cap R^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$ 由 $S_1 \sqcup S_0$的每个元素对应的两个区间组成。

**定义 8.5**。选择 $R^+$ 的 CW分解 $\mathfrak{R}^+$ 时（见图 17 左侧），按照图 17 中图所示添加额外的 0-胞腔和 1-胞腔，使我们得到 $R^+ \cap R^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$ 的 *CW*分解。将，${}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$ 扩展为，${}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$ 的 *CW*分解：对每条带按照图 *17* 右图所示添加三个新的 *1*-胞腔和两个新的 *2*-胞腔；于是我们得到，$S_0$的 CW分解$\mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0} = \mathfrak{R}^+ \cup \mathfrak{R}^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$。在定义 *CW* 对（，$S_0$，$\mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0}$）时使用这一特定的 CW分解。

我们有子复形的包含映射

$$\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y} \cup \mathfrak{R}^{+,\text{strips}}_{S_1,S_0} \subset \mathfrak{Y}_{S_1,S_0};$$

注意到 $\mathfrak{Y}_{S_1,\ S_0}$ 是通过为$S_1 \sqcup S_0$的每个元素添加一个 2-胞腔而从 $\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{R}^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0}$，得到的。具体而言，如果 $\mathcal{H}_{\text{norm}}$具有 $a$ $\alpha$-圆和 $b$ $\beta$个圆，那么 $\mathfrak{Y}_{S_1,\ S_0} \setminus \mathfrak{R}^+_{S_1,\ S_0}$具有与 $\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$的 $\beta$-圆对应的 $b$ 1-胞腔、与 $\mathcal{H}'$的 $\alpha$-圆对应的 $a$ 2-胞腔，以及与 $\mathcal{H}^L_{S_1} \sqcup \mathcal{H}^R_{S_0}$的 $\alpha$-圆对应的$|S_0| + |S_1|$ 2-胞腔。后面的这些 $|S_0| + |S_1|$ 2-胞腔就是 $\mathfrak{Y}_{S_1,\ S_0} \setminus (\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{R}^+,\ {}^{\text{strips}}_{S_1\ S_0},)$ 的胞腔。我们按如下方式固定定向选择。

**定义 8.6**。 选择 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的 $\alpha$ 和 $\beta$ 个圆的定向，使其满足命题 3.4 的假设；注意，该命题的陈述还为 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的 $\alpha$ 弧给出了定向。$\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$ 所需的额外定向选择，是为与 $S_1 \sqcup S_0$ 的元素对应的 $\alpha$ 个圆选择定向，其中每个圆在 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$中都有一个对应的 $\alpha$ 弧。假设 $\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$ 的这些 $\alpha$ 个圆的定向，与 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 中对应 $\alpha$ 弧的定向相容。等价地，为这些 $\alpha$ 个圆定向，使得在 $\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$的左侧（出射侧），Zarev 封帽图 $\mathcal{H}^L_{S_1}$ 中的局部交点具有 $\beta \cdot \alpha = -1$；而在 $\mathcal{H}_{S_1,\ S_0}$的右侧（入射侧），Zarev 封帽图 $\mathcal{H}^R_{S_0}$ 中的局部交点具有 $\beta \cdot \alpha = +1$。

虽然上述定向选择在后文会有用，但以下推论对任意定向选择都成立。

**推论 8.7.** 胞腔链复形

$$C_*^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{R}^{+,\mathrm{strips}}_{S_1,S_0}, \mathfrak{R}^{+}_{S_1,S_0})$$

计算 $H_*(Y, R^+)$。胞腔链复形

$$C_*^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y}_{S_1,S_0}, \mathfrak{R}^{+}_{S_1,S_0})$$

计算 $H_*(Y,R^+_{S_1,S_0})$。

证明。 第二个断言由第 3 节的一般设置得出。对于第一个断言，由于 $\mathfrak{R}^+_{S_1,S_0} = \mathfrak{R}^+ \cup \mathfrak{R}^+_{,\ S_1\ S_0}{}^{\mathrm{strips}}{}_{,}$和 $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{R}^{+,}{}_{S_1}{}^{\mathrm{strips}}{}_{,S_0} = \mathfrak{R}^+$，该断言由 CW 对的切除性质，以及第 3 节中的事实得出：$C_*^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$ 计算 $H_*(Y, R^+)$。□

8.2.1. 典范环境 *CW* 复形。 后文将需要一个包含所有不同 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 作为子复形的 CW 复形。考虑 $I = \text{一个}_0 \subset \text{一个}_0$ 和 $J = \emptyset \subset \text{一个}_1$。这些子集使 $|J^c| + |I|$ 最大化，而它等于封顶过程中添加到 $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \sqcup \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 的新 $\alpha$-圆的数量。因此，关联的 CW 复形 $\mathfrak{Y}_{J^c,I} = \mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\text{一个}_0}$ 包含了尽可能多的额外 2-胞腔，因此对于任何其他 $I, J$，我们看到

$$\mathfrak{Y}_{J^c,I} \subset \mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}.$$

可以将此视为 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 的另一种定义：从环境 CW 复形 $\mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$ 出发，其中有 $(n_1 + n_0)$ 个额外的 2-胞腔；删去对应于不属于 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ 的 $\alpha$-圆的 2-胞腔，即可得到 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$。同样，我们有以下包含映射

$$\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y}_{J^c,I} \subset \mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

CW 复形之间的包含映射。

**8.3. 矩阵元**。 设 $(Y, \Gamma)$ 是一个从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边。固定一个选择集 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，如推论 4.15 所述，使得 $(Y, \Gamma)$ 的 Heegaard 图为 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$，其中 $\mathcal{H}'$ 是 $(Y, \Gamma)$ 的一个 $\beta$-$\beta$ 带边图。对于 $(F_0,S_0^+)$ 的基元素 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 和 $(F_1, S_1^+)$ 的基元素 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$，将 $I$ 和 $J$ 分别视为 $\mathcal{Z}_0$ 的弧集合以及

$\mathcal{Z}_1$；令 $J^c$ 为 $J$ 的补集。普通缝合海加德图$\mathcal{H}_{J^c,I} := \mathcal{H}^L_{J^c} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}^R_I$ 表示 $(Y, \Gamma_{J^c,I})$。

我们注意到，以下引理成立；证明显然。

**引理 8.8**。 $\alpha$和 $\beta$圆与$\mathcal{H}_{J^c,\ I}$ 的 $\alpha$和 $\beta$曲线的一个子集自然双射，即在任意生成元 $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\mathrm{norm}})$ 中被占据的那些曲线，其中$o_L(\mathbf{x}) = J$ 以及 $o_R(\mathbf{x}) = I$。

**定义 8.9**。 给定一个选择集 $\Xi_{\mathrm{norm}}$ for $(Y,\ \Gamma)$，我们可以如下获得纯缝合流形 $(Y,\ \Gamma_{J^c,\ I})$ 的一个选择集 $\Xi_{J^c,\ I}$。

- 使用 Heegaard 图 $\mathcal{H}_{J^c,\ I}$来表示 $(Y,\ \Gamma_{J^c,\ I})$，如定义 8.3 所述。
- 令$\mathcal{H}_{J^c,\ I}$ 的 $\alpha$和 $\beta$圆的定向选择采用定义 8.6 中根据 $\Xi_{\mathrm{norm}}$所给出的选择。
- 令$\mathcal{H}_{J^c,\ I}$ 的 $\beta$圆采用与 $\Xi_{\mathrm{norm}}$中相同的排序。将$\mathcal{H}_{J^c,\ I}$ 的$\alpha$圆排序如下：首先放置出射侧的新 $\alpha$ 圆（按照 $J^c$排序），然后是 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$的 $\alpha$ 圆，最后是入射侧的新 $\alpha$ 圆（按照 $I$排序）。

**推论 8.10**。 令 $E \in \mathbb{Z}$ 表示 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma;\ \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 中第 $\gamma^{\mathrm{in}}_I$ 列第 $\gamma^{\mathrm{out}}_J$ 行的矩阵元。我们有

$$E = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}})+ak+n_1k}[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma_{J^c,I}; \Xi_{J^c,I})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$$

其中，$k = |I|$，$a$ 是 $\alpha$-圆的数量，$\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$，$n_1$ 是 $\mathcal{Z}_1$ 中弧的数量，并且 $\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}}$ 是 $\{1,\dots,n_1\}$ 的置换，按顺序将 $J$ 的元素映射到 $\{1,\dots,|J|\}$，并按顺序将 $J^c$ 的元素映射到 $\{|J|+1,\dots,n_1\}$。

证明。 根据引理 8.8 以及例 4.9 的讨论，我们可以写成

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma_{J^c,I}; \Xi_{J^c,I})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = \sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}):\\ \bar{o}_L(\mathbf{x})=J,\\ o_R(\mathbf{x})=I}} (-1)^{\left(\sum_{x\in\mathbf{x}}\beta_x\cdot\alpha_x\right)+\mathrm{sgn}(\sigma_{\mathbf{x}})};$$

方程（3）中的项 $ak$ 和 $n_1k$ 不出现在上式的指数中，因为相应的“$k$”值将为零。将此公式代入推论的陈述中，我们得到 $E$ 的定义。□

**8.4. 平衡缝合流形**。现在我们将上述讨论与缝合 Floer 同调联系起来。缝合 Floer 同调仅对平衡缝合流形定义。我们先回顾这一条件。

**定义 8.11**。 设 $(Y,\ \Gamma,\ R^+,\ R^-)$ 是一个普通的（非边界）缝合三维流形。若在 $Y$ 的每个连通分支中，$\chi(R^+) = \chi(R^-)$，则称 $(Y,\ \Gamma)$ 是弱平衡的。若 $(Y,\ \Gamma)$是平衡的，则 $(Y,\ \Gamma)$ 是弱平衡的、没有闭分支，并且 $\partial Y$ 的每个连通分支都与 $R^+$ 和 $R^-$ 非平凡相交（等价地，与 $\Gamma$ 非平凡相交）。

**命题 8.12**。 对于如定义 *2.11(c)* 中的普通（非边界）缝合 *Heegaard* 图 $\mathcal{H}$，相应的缝合三维流形 $(Y,\Gamma)$ 是弱平衡的，当且仅当在 *Heegaard* 曲面的每个连通分支中，$\alpha$-圆的数量等于$\beta$-圆的数量。若 $(Y,\Gamma)$ 是弱平衡的，则它是平衡的，当且仅当 *Heegaard* 曲面$\Sigma$ 没有闭分支，且 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 和 $\beta$-圆分别构成 $H_1(\Sigma)$的线性无关子集。

证明。 对于第一个陈述，我们可以不失一般性地假设 $\Sigma$ 是连通的，此时该结果由 [Juh06命题2.9]证明的第一部分得出。更详细地说，若令$(Y_0=\Sigma\times[0,1],\Gamma,R_0^+,R_0^-)$为乘积缝合流形，而$(Y,\Gamma,R^+,R^-)$是沿 $\alpha$与 $\beta$-圆进行柄添加由此构造而成的，则 $R_0^+$与 $R_0^-$各自同胚于 $\Sigma$，因此 $\chi(R_0^+)=\chi(R_0^-)$。每一次 $\alpha$ 柄添加给出$R_0^+$ 上的一次手术，使其欧拉示性数增加2，而每一次 $\beta$ 柄添加给出 $R_0^-$ 上的一次手术，使其欧拉示性数增加2；第一个陈述由此得出。

对于第二个陈述，我们同样可以假设 $\Sigma$是连通的。此时该结果由 [Juh06命题2.9]的陈述得出；注意，$\mathcal{H}$的 $\alpha$-圆与 $\beta$-圆构成 $H_1(\Sigma)$的线性无关子集，当且仅当它们构成 $H_1(\Sigma;\mathbb{Q})$的线性无关子集。□

我们可以将一个普通缝合三维流形（$Y$，$\Gamma$）视为从（$\emptyset$，$\emptyset$）到（$\emptyset$，$\emptyset$）的缝合余边。因此，如例 4.9 中一样，给定选择 $\Xi$，我们有一个 $\mathbb{Z}$-线性映射 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$，它从 $\wedge^0 H_1(\emptyset,\ \emptyset)\cong\mathbb{Z}$ 映射到其自身，即一个整数

$$[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}\in\mathbb{Z}.$$

**命题 8.13**。 对于一个普通缝合三维流形 $(Y,\ \Gamma)$，我们有

$$[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}=0$$

除非$(Y,\ \Gamma)$ 是弱平衡的。

证明。 设 $\mathcal{H}$是（$Y$，$\Gamma$）的一个 Heegaard 图。如果（$Y$，$\Gamma$）不是弱平衡的，则命题 8.12 蕴含生成元集合 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 为空，因此 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}=0$。□

**注 8.14.** 假设 $(Y,\Gamma)$ 是弱平衡但不平衡的，并令 $\mathcal{H}$ 为表示 $(Y,\Gamma)$ 的缝合 Heegaard 图（其 Heegaard 曲面为 $\Sigma$）。根据命题 8.12，要么 $\Sigma$ 有某些闭分支，要么 $\alpha$ 圆或 $\beta$ 圆的集合在 $H_1(\Sigma)$ 中线性相关。在第二种情况下，可以推出 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}=0$。

然而，在第一种情况下，$\Sigma$ 有闭分支，$[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 可能非零。例如，令 $\Sigma=\Sigma_g$ 为亏格为 $g$的闭可定向曲面，并令 $\mathcal{H}$ 不含 $\alpha$ 或 $\beta$ 圆。此时 $Y=\Sigma\times[0,1]$ 没有缝合线，$R^+=\Sigma\times\{0\}$，且$R^-=\Sigma\times\{1\}$。选择 $\Xi$时除 $\Sigma$ 外无需其他数据，而 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$只有一个元素（空生成元$\mathbf{x}$）。由此可得 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}=1\in\mathbb{Z}$。

现在设$(Y,\Gamma)$是一个从$(F_0,\Lambda_0)$到$(F_1,\Lambda_1)$的缝合余边。对于表示$(F_i,\Lambda_i)$的弧图 $\mathcal{Z}_i$，以及 $\wedge^* H_1(F_0,S_0^+)$的基元素$\gamma_I^{\text{in}}$和 $\wedge^* H_1(F_1,S_1^+)$的基元素$\gamma_J^{\text{out}}$，我们考虑普通缝合流形$(Y,\Gamma_{J^c,I})$。

**推论 8.15**。 如果 $Y$ 连通，则 $\chi\left(Y,R^+_{J^c,\ I}\right)\ =0$ 当且仅当 $\left(Y,\Gamma_{J^c,\ I}\right)$ 弱平衡。如果 $Y$ 不连通，那么 $\left(Y,\Gamma_{J^c,\ I}\right)$ 弱平衡，当且仅当该方程对 $Y$ 的每个连通分支都成立。

证明。 不失一般性，假设 $Y$ 连通，并取第 8.3 节中的 Heegaard 图 $\mathcal{H}_{J^c,\ I}$ 来表示（$Y$，$\Gamma_{J^c,\ I}$）。在命题 4.7 中，我们论证了 $\chi$($Y$，$R^+_{J^c,\ I}$) 等于 $\mathcal{H}_{J^c,\ I}$ 中 $\alpha$ 圆与 $\beta$ 圆的数量之差；但根据命题 8.12，（$Y$，$\Gamma_{J^c,\ I}$）弱平衡，当且仅当这两个数量相等，因此当且仅当 $\chi$($Y$，$R^+_{J^c,\ I}$) 为零时，它才弱平衡。□

另一种 表述 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 的弱平衡条件的方式如下。

**推论 8.16.** 如果 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是连通的，则 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是弱平衡的当且仅当$|J|=|I|+c$，其中 $c:=n_1+\chi(Y,R^+)$。如果 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是不连通的，则 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是弱平衡的当且仅当上述方程对 $Y$ 的每个连通分支成立。

证明. 不失一般性，我们假设 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是连通的。设 $a'$ 与 $b'$ 分别为 $\mathcal{H}'$ 的 $\alpha$ 圆与 $\beta$-圆的个数。 $\mathcal{H}^L_{J^c}$ 中有 $|J^c|=n_1-|J|$ $\alpha$-圆， $\mathcal{H}^R_I$ 中有 $|I|$ $\alpha$-圆。此外，还有由 $\beta$-弧粘合而成的 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ 的 $n_0+n_1$ $\beta$- 圆。

因此，根据命题 8.12，($Y$，$\Gamma_{J^c,\ I}$) 弱平衡当且仅当

$$a'+n_1-|J|+|I|=b'+n_0+n_1,$$

i.e.

$$\begin{aligned}|J|&=|I|+a'-b'-n_0\\&=|I|+n_1+(a'-b'-n_0-n_1).\end{aligned}$$

我们断言 $\chi$($Y$，$R^+$) $=a'-b'-n_0-n_1$。事实上，$\chi$($Y$，$R^+$) 可计算为 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的 2-胞腔数减去 1-胞腔数。1-胞腔数为 $b'+n_0+n_1$，2-胞腔数为 $a'$，由此证明了该断言。□

## 8.5. 将 [BSDA]与 $\chi$(SFH)联系起来。

**8.5.1. 普通缝合三维流形。** 假设 $(Y,\Gamma)$ 是一个弱平衡的普通（非带边）缝合三维流形；那么根据 Juhasz [Juh06]，，当 $(Y,\Gamma)$ 平衡时，存在一个缝合 Floer 同调群 SFH$(Y,\Gamma)$。讨论缝合 Floer 同调时，我们将采用 Friedl–Juhasz– Rasmussen [FJR09] 的约定。出于备注 2.14 中讨论的原因，在做出选择时（ $\Xi$ 包括 Heegaard 图 $\mathcal{H}$），我们最关注整数 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\text{comb}}$ 与缝合三维流形的 SFH（在平衡情形下）之间的关系。该流形由图$\mathcal{H}_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 表示，且按照 [FJR09] 的约定，其中 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 曲线和 $\beta$ 曲线的作用已互换。比较定义 2.13 与 [FJR09], 的定义 2.4 下方第二段可知，这个缝合三维流形

是 $(Y_{R^+\leftrightarrow R^-}, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-})$，其中 $Y_{R^+\leftrightarrow R^-}$ 的定向与 $Y$ 相同（即 $Y_{R^+\leftrightarrow R^-} = Y$），而且 $\Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}$ 使得在 $(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-})$ 中，$R^+$ 和 $R^-$ 的作用与在 $(Y, \Gamma)$ 中相反。

我们将 $\mathcal{H}_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 的 $\beta$ 曲线和 $\alpha$ 曲线分别按照 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$ 曲线和 $\beta$ 曲线的顺序排列并定向。根据 [FJR09，第 2.4] 节，我们得到实向量空间 $H_*(Y, R^-_{R^+\leftrightarrow R^-}; \mathbb{R})$ 的一个定向 $\omega_\Xi$，换言之，也就是 $H_*(Y, R^+; \mathbb{R})$ 的一个定向。在 $\mathcal{H}$ 没有 $\alpha$ 曲线或 $\beta$ 曲线这一特殊情况下，$H_*(Y, R^+; \mathbb{R})$ 是零向量空间，我们将 $\omega_\Xi$ 取为零向量空间的正定向。

根据 [FJR09，定义 2.9],，若 $(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-})$ 是平衡的（当且仅当 $(Y, \Gamma)$ 是平衡的），则存在一个有限生成阿贝尔群 $\mathrm{SFH}(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_\Xi)$，通过图 $\mathcal{H}_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 计算得到，并带有一个严格定义的 $\mathbb{Z}_2$ 分次（而不仅仅是确定到整体平移）。

注 8.17。下文中，即使 $(Y, \Gamma)$ 是弱平衡的而非平衡的，我们仍将使用 $\chi(\mathrm{SFH}(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_\Xi))$。在这种情况下，并不存在缝合弗洛尔群 $\mathrm{SFH}(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_\Xi)$；相反，我们将 $\chi(\mathrm{SFH}(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_\Xi))$ 解释为对生成元 $\mathbf{x}$ 求和，求 $\mathcal{H}_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 上的量 $(-1)^{b_1(Y, R^-_{R^+\leftrightarrow R^-})} m(\mathbf{x})$，其中 $m(\mathbf{x})$ 是 [FJR09, 引理 2.8] 中公式所指定的符号。等价地，我们将 $\chi(\mathrm{SFH}(Y, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_\Xi))$ 解释为对生成元 $\mathbf{x}$ 求和，求 $\mathcal{H}$ 上的量 $(-1)^{b_1(Y,R^+)+\sum_{x\in\mathbf{x}} i(x)+\mathrm{inv}(\sigma_{\mathbf{x}})}$；注意，在 $\mathcal{H}_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 中，我们的交点符号 $\beta_x \cdot \alpha_x$ 会变为 “$\alpha \cdot \beta$” 交点符号。

**命题 8.18.** 在上述设定下，若 $(Y, \Gamma)$ 为弱平衡，则我们有整数相等

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi)]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}} = (-1)^{b_1(Y,R^+)} \chi(\mathrm{SFH}(Y_{R^+\leftrightarrow R^-}, \Gamma_{R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_\Xi).$$

证明. 这可通过比较 [FJR09 的引理 2.8] 与我们的定义 4.3（在平衡情形下）或注记 8.17（在弱平衡但不平衡的情形下）得出。□

8.5.2. 缝合协边. 现设 $(Y, \Gamma)$ 是从 $(F_0, \Lambda_0)$ 到 $(F_1, \Lambda_1)$ 的缝合余边，并按推论 4.15 固定一个选择集 $\Xi_{\mathrm{norm}}$。设 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 与 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$ 分别为 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$ 与 $\wedge^* H_1(F_1, S_1^+)$ 的基元素。

如推论 8.10 所述，设 $E$ 为映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$ 在列 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$、行 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$ 处的矩阵元。

**推论 8.19**。 如果 $(Y, \Gamma_{J^c,I})$ 不是弱平衡的，那么 $E = 0$。否则，我们有

$$E = (-1)^{b_1(Y, R^+_{J^c,I}) + \mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow \mathrm{std}}) + ak + n_1 k} \chi(\mathrm{SFH}(Y, \Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-}, \omega_{\Xi_{J^c,I}}))$$

其中 $(Y, \Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-})$ 是通过交换 $R^+$ 和 $R^-$ 的角色，同时保持 $Y$ 的定向不变，从 $(Y, \Gamma_{J^c,I})$ 得到的。

证明。 这由推论 8.10、命题 8.13 和命题 8.18 得出。 □

我们还可以直接将 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})$ 理解为缝合 Floer 同调群的欧拉示性数乘以一个符号。假设 $|J| = |I| + n_1 + \chi(Y, R^+)$，因此 $|I| + |J^c| = -\chi(Y, R^+)$ 和 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}} \wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})$ 有意义。

**推论 8.20**。若$(Y,\Gamma_{J^c,I})$不是弱平衡的，则$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})=0$。否则，我们有

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})=(-1)^{b_1(Y,R^+_{J^c,I})+ak+n_1k+ck}\chi(\mathrm{SFH}(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\omega_{\Xi_{J^c,I}}))$$

除去$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}$定义中整体的（独立于 $I$、 $J$和 $k$的）符号歧义。

证明。若 $E$ 如上定义，则由定理 5.7 的证明可得

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})=(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}})+ck}E$$

因此，由推论 8.19，若$(Y,\Gamma_{J^c,I})$不是弱平衡的，则$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})=0$。若$(Y,\Gamma_{J^c,I})$是弱平衡的，则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})&=(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}})+ck}E\\&=(-1)^{b_1(Y,R^+_{J^c,I})+ak+n_1k+ck}\chi(\mathrm{SFH}(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\omega_{\Xi_{J^c,I}}));\end{aligned}$$

第二个等式由推论 8.19 得出。

我们还注意到，也可以直接证明这个推论；与定理 5.7 的证明一样，$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})$的定义给出

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}_{Y,\Gamma}(i_*\gamma_I^{\mathrm{in}}\wedge i_*\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}})=\det\begin{array}{c}\\ \beta^{\mathrm{out}}\\ \beta^c\\ \beta^{\mathrm{in}}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha^c & \alpha_I^{\mathrm{in}} & \alpha_{J^c}^{\mathrm{out}}\end{array}\\ \begin{bmatrix}*&0&-*_{J^c}\\ *&0&0\\ *&-*_I&0\end{bmatrix}\end{array}$$

而直接根据定义计算 $\chi(\mathrm{SFH}(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\omega_{\Xi_{J^c,I}}))$（在弱平衡但非平衡的情形下参见注 8.17）则得到

$$\chi(\mathrm{SFH}(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\omega_{\Xi_{J^c,I}}))=(-1)^{b_1(Y,R^+_{J^c,I})}\det\begin{array}{c}\\ \beta^{\mathrm{out}}\\ \beta^c\\ \beta^{\mathrm{in}}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_{J^c}^{\mathrm{out}} & \alpha^c & \alpha_I^{\mathrm{in}}\end{array}\\ \begin{bmatrix}-*_{J^c}&*&0\\ 0&*&0\\ 0&*&*_I\end{bmatrix}\end{array}$$

第一个行列式是第二个行列式的$(-1)^{k+(n_1-k-c_)(a+k)}$倍；除去与 $k$无关的整体项，符号等于$(-1)^{ak+n_1k+ck}$。□

## 9. Spin$^c$ structures

9.1. 生成元的相对 Spin$^c$ 结构。设$(Y,\Gamma)$是从$(F_0,\Lambda_0)$到$(F_1,\Lambda_1)$的缝合余边，并固定推论 4.15 中的选择集 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，使得表示$(Y,\Gamma)$的 Heegaard 图为 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}=\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}\cup_{\mathcal{Z}_1^*}\mathcal{H}'\cup_{\mathcal{Z}_0^*}\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$，其中 $\mathcal{H}'$ 是$(Y,\Gamma)$的 $\beta$-$\beta$ 带边图。在纯缝合流形$(Y,\Gamma_{J^c,I})$的边界上，有一个典范向量场 $v_{J^c,I}$ （即限制在边界上的 $TY$ 的一个截面）；如 Juh06 的记号 4.1] 所述，该向量场在一个可缩的选择空间范围内确定。该向量场沿 $R^+$ 指出 $Y$，并沿 $R^-$ 指入 $Y$。沿缝合线 $\Gamma$，它与 $Y$ 相切，方向从 $R^-$ 区域指向 $R^+$ 区域。

根据 Juh06，定义 4.2]，，存在一个集合 Spin$^c$($Y$，$\partial Y$，$v_{J^c,\,I}$)，其元素是 $Y$ 上相对于边界上的向量场 $v_{J^c,\,I}$ 的 Spin$^c$ 结构。根据 FJR09，引理 2.3]，，当且仅当 ($Y$，$\Gamma_{J^c,\,I}$) 弱平衡时，此集合非空；在这种情况下，它是 $H^2(Y,\,\partial Y)\cong H_1(Y)$ 的一个仿射空间。

根据 [Juh06，定义 4.5]（另见 [FJR09，定义 2.2]），图$\mathcal{H}_{J^c,I}=\mathcal{H}^L_{J^c}\cup_{\mathcal{Z}^*_1}\mathcal{H}'\cup_{\mathcal{Z}^*_0}\mathcal{H}^R_I$ 中对应于 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 的每个生成元都给出 Spin$^c(Y,\partial Y,v_{J^c,I})$ 的一个元素。根据引理 8.8 中概述的双射，我们得到如下将 Spin$^c$ 结构与 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的生成元相对应的关系。

定义 9.1. 对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}=\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}\cup_{\mathcal{Z}^*_1}\mathcal{H}'\cup_{\mathcal{Z}^*_0}\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 的一个生成元 $\mathbf{x}$，若 $o_L(\mathbf{x})=J^c$ 且 $o_R(\mathbf{x})=I$，并且相应的生成元 $\mathbf{x}_L\cup\mathbf{x}'\cup\mathbf{x}_R$ 属于 $\mathcal{H}_{J^c,I}=\mathcal{H}^L_{J^c}\cup_{\mathcal{Z}^*_1}\mathcal{H}'\cup_{\mathcal{Z}^*_0}\mathcal{H}^R_I$，则 $\mathbf{x}$ 的相对 Spin$^c$ 结构 $\mathfrak{s}^{\mathrm{rel}}(\mathbf{x})$ 定义为 Spin$^c(Y,\partial Y,v_{J^c,I})$ 中与 $\mathbf{x}_L\cup\mathbf{x}'\cup\mathbf{x}_R$ 根据 [Juh06，定义 4.5] 相关联的元素。

**注记 9.2**。在 [Juh06 的定义 4.5], 中，与 Heegaard 图 $\mathcal{H}_{J^c,\,I}$ 对应的缝合三维流形（$Y$，$\Gamma_{J^c,\,I}$）的生成元相关联的 Spin$^c$ 结构，是通过在 $Y$ 上选取一个与 $Y$ 的手柄分解相容的莫尔斯函数 $f$ 得到的；该分解来自 $\mathcal{H}_{J^c,\,I}$，并且要求 $\alpha$ 手柄对应 $f$ 的指标为 1 的临界点，而 $\beta$ 手柄对应 $f$ 的指标为 2 的临界点。接着，对于 $\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{J^c,\,I})$，通过在由 $\mathbf{x}$ 确定的、连接指标为 1 和 2 的临界点的梯度流线附近，对 $f$ 的向上梯度流进行修改，从而得到该向量场。

相较之下，如注 2.14 中那样，我们将选取定义在 $Y$ 上的莫尔斯函数 $f$，使得 $\beta$ 手柄对应指标为 1 的临界点，而 $\alpha$ 手柄对应指标为 2 的临界点。对于 $\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{J^c,\,I})$，我们的向量场是通过修改 $f$ 的向下梯度流得到的，而不是修改向上梯度流。因此，尽管我们关于 $\alpha$ 或 $\beta$ 手柄对应指标为 1 还是 2 的临界点这一约定有所不同，但我们所考虑的相对 Spin$^c$ 结构与 [Juh06] 中的相同。

注 9.3. $(Y,\Gamma_{J^c,I};R^+\leftrightarrow R^-)$ 边界上的典范向量场为 $-v_{J^c,I}$，其中我们将 $v_{J^c,I}$ 中的向量乘以 $-1$。若将 $\mathbf{x}_L\cup\mathbf{x}'\cup\mathbf{x}_R$ 视为 $(\mathcal{H}_{J^c,I})_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 的图中、对应于 $(Y,\Gamma_{J^c,I};R^+\leftrightarrow R^-)$ 的一个生成元，则其在 Spin$^c(Y,\partial Y,-v_{J^c,I})$ 中对应的元素为$-\mathfrak{s}^{\mathrm{rel}}(\mathbf{x})$，其中负号表示“将处处非零向量场乘以 $-1$。”

**注 9.4**。上述构造为带边缝合 Heegaard 图 $\mathcal{H}$的每个生成元$\mathbf{x}$指定了 $Y$ 上处处非零向量场的一个同调类，该向量场在 $\partial Y$ 上具有由缝合线决定的特定行为，包括在 $\partial Y$的“带边”部分 $F_i$ 上。值得将其与 [LOT08, 第 4 节3] 和 [Zar09, 第 4 节5], 以及 [HR15], 进行比较；在这些文献中，也为 $\mathcal{H}$ 的生成元$\mathbf{x}$ 指定了 $Y$ 上处处非零向量场的一个同调类（或在 [HR15]中为同伦类），该向量场在 $\partial Y$ 上具有特定行为。在这些参考文献中，边界上的向量场与我们在此使用的略有不同。将梯度向量场修改为处处非零时，$F_i\subset\partial Y$ 中的修改只在 $Y$ 上莫尔斯函数 $f$ 的每个边界临界点附近进行。在这些邻域之外，向量场处处仍与 $Y$ 的边界相切

于 $F_i$。相比之下，我们考虑的向量场仅沿一维缝合线$\Gamma_{J^c,\ I}$与 $Y$ 的边界相切。

9.2. 依赖参考 Spin$^c$ 结构的 [BSDA] 的 Spin$^c$ 版本。对于每一种满足 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 弱平衡的选择 $I,J$（即 $Y$ 的每个连通分支中都有 $|J|=|I|+c$），固定一个参考元素 $\mathfrak{s}_{J^c,I}\in\mathrm{Spin}^c(Y,\partial Y,\upsilon_{J^c,I})$，称之为参考 Spin$^c$ 结构。我们可以将 $-\mathfrak{s}_{J^c,I}$ 用作 $\mathrm{Spin}^c(Y,\partial Y,-\upsilon_{J^c,I})$ 的参考元素；记该元素为 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}}$，于是 $\mathfrak{s}_{J^c,I}=-\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}}\in\mathrm{Spin}^c(Y,\partial Y,\upsilon_{J^c,I})$。给定这些选择，我们可以作出如下定义。令 $H=H_1(Y)$。

**定义 9.5**。在 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的生成元 $\mathbf{x}$ 上定义一个由 $H$ 给出的分次，其中 $o_L(\mathbf{x})=J^c$ 且 $o_R(\mathbf{x})=I$，方法是比较 $\mathfrak{s}^{\mathrm{rel}}(\mathbf{x})$ 与参考元素 $\mathfrak{s}_{J^c,I}\in\mathrm{Spin}^c(Y,\partial Y,\upsilon_{J^c,I})$，换言之，

$$\mathrm{gr}_H\mathbf{x}:=\mathfrak{s}^{\mathrm{rel}}(\mathbf{x})-\mathfrak{s}_{J^c,I}\in H.$$

**注记 9.6.** 在定义 9.5 中，我们加法地书写 $H$；相比之下，在 $\mathbb{Z}[H]$的语境中，我们乘法地书写 $H$。

**定义 9.7.** 令 $\Xi_{\mathfrak{s}}$ 表示如下数据集：首先，任取满足推论 4.15 之准则的选择集 $\Xi_{\mathrm{norm}}$。接下来，对每一个使得$(Y,\Gamma_{J^c,I})$为弱平衡的 $I,J$的选取，选取$\mathrm{Spin}^c(Y,\partial Y,\upsilon_{J^c,I})$的一个参考元素$\mathfrak{s}_{J^c,I}$。给定这些选择，令

$$\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}\colon\ \wedge^*H_1(F_0,S_0^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[H]\to\wedge^*H_1(F_1,S_1^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[H]$$

表示由其对 $\wedge^*H_1(F_0,S_0^+)$的一个基元素 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$的作用所确定的 $\mathbb{Z}[H]$-线性映射，由下式给出

$$\gamma_I^{\mathrm{in}}\mapsto\sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}):\\ \overline{o}_L(\mathbf{x})=J,\\ o_R(\mathbf{x})=I}}(-1)^{\mathrm{gr}_{\mathrm{DA}}(\mathbf{x})}\cdot(\mathrm{gr}_H(\mathbf{x})\in H)\cdot\gamma_J^{\mathrm{out}}.$$

注意，对任意 $I,J$，若存在某个$\mathbf{x}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\mathrm{norm}})$使得 $o_L(\mathbf{x})=J$ 且 $o_R(\mathbf{x})=I$，则由命题 8.12 可知$(Y,\Gamma_{J^c,I})$是弱平衡的，因此$\mathrm{gr}_H(\mathbf{x})$在上述公式中是有意义的。

对于 Spin$^c$($Y$，$\partial Y$，$\upsilon_{J^c,\ I}$) 的任意参考元素 $\mathfrak{s}_{J^c,\ I}$，我们现在注意到，映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\ \Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合，具体的 特化为 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$。记为

$$\varepsilon\colon\mathbb{Z}[H]\to\mathbb{Z}$$

将 $h\mapsto 1$ 映至所有 $h\in H$ 的增广映射。

**推论 9.8**。存在一个 $\mathbb{Z}$-线性映射等式（不存在任何符号歧义），其形式为

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb,concrete}}\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\varepsilon=[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$$

证明。当我们在 $\mathbb{Z}[H]$ 上与 $\varepsilon$作张量积时，对所有$\mathbf{x}$，都有 $\mathrm{gr}_H(\mathbf{x})=1$。将此处的定义 9.7 与 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{comb}}$的定义 4.3 进行比较，即得结论。□

9.3. **BSDA(,** Γ; $\Xi_{\mathfrak{s}}$)$]^{\mathbb{Z}[H]}$ 的挠率解释$_{\text{comb;concrete}}$。 现在，我们将定义 9.7 中的映射与 Friedl–Juh´asz–Rasmussen 的构造联系起来。特别地，我们将其与 SFH 的 $\mathbb{Z}[H]$值欧拉示性数联系起来 [FJR09，见定义 2.13], 。Friedl–Juh´asz–Rasmussen 的 $\mathbb{Z}$值挠率函数$T_{M,\ \gamma,\ \omega}$: Spin$^c$ $\to$ $\mathbb{Z}$ [FJR09，见注 3.19], ；以及他们的挠率不变量 $\tau(M,\ \gamma,\ \mathfrak{s},\ \omega) \in \mathbb{Z}[H]$ [FJR09，定义 3.18]。

这种观点引出了我们在 $\mathbb{Z}[G]$ 和 $\mathbb{Z}[H]$ 上、当 $H$ 有挠元时证明主要结果的方法：推论 9.18 的证明依赖于将 $[\widehat{\ \ \ \ }$BSDA$(Y,\ \Gamma;\ \Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\text{组合;\ 具体}}$通过 Friedl–Juh´asz–Rasmussen 的挠函数 $\tau(M,\ \gamma,\ \mathfrak{s},\ \omega)$ 来解释，而这一推论是我们在第 10 节证明主要结果的关键依据。

注 9.9。下文将用 $\chi$(SFH$(Y,\Gamma_{J^c,I};R^+\leftrightarrow R^-,\mathfrak{s},\omega_{\Xi_{J^c,I}})$)；与注 8.17 一样，只有当 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 平衡时，这个表达式才有意义。如果 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 弱平衡但不平衡，我们将把 $\chi$(SFH$(Y,\Gamma_{J^c,I};$ $_{R^+\leftrightarrow R^-,\mathfrak{s},\omega_{\Xi_{J^c,I}}})$) 解释为对满足 $-\mathfrak{s}^{\text{rel}}$(x) $=\mathfrak{s}$ 的生成元 x 求和，其中每一项为 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ $(-1)^{b_1}$ $(_{Y,R^+_{J^c},I})$+$\sum_{x\in}$x$_i$($_x$)+inv($\sigma_{\mathbf{x}}$)，如注 8.17 所述。

**引理 9.10**。 若$(Y,\Gamma_{J^c,\ I})$ 是弱平衡的，则映射的矩阵元 $E$

$$[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\text{comb;\ 具体}}$$

第 $\gamma_I^{\text{in}}\otimes 1$ 列、第 $\gamma_J^{\text{out}}\otimes 1$ 行的矩阵元为

$$E=(-1)^{b_1(Y,R^+_{J^c,I})+\text{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\text{std}})+n_1k+ak}\sum_{h\in H}\left(\chi(\text{SFH}(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},h^{-1}\cdot\mathfrak{s}_{\text{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}}))\right)\cdot h,$$

其中，当$(Y,\Gamma_{J^c,\ I})$ 弱平衡但不平衡时，方程右端按注 *9.9* 中的方式解释。

证明。此结论类似于推论 8.19，后者可以直接证明。对于 $\mathcal{H}$ 的一个生成元 x，当且仅当 $\mathfrak{s}^{\text{rel}}$(x) $-\ \mathfrak{s}_{J^c,I}=h$ 时，gr$_H$(x) $=h$ ；而这当且仅当$-\mathfrak{s}^{\text{rel}}$(x) $-(-\mathfrak{s}_{J^c,I})=-h$。我们可以将此方程写为 $-\mathfrak{s}^{\text{rel}}$(x) $=-h+\mathfrak{s}_{\text{ref}}$，或者（用乘法记号）写为 $-\mathfrak{s}^{\text{rel}}$(x) $=h^{-1}\cdot\mathfrak{s}_{\text{ref}}$。注意， $-\mathfrak{s}^{\text{rel}}$(x) 是与 x 作为 $\mathcal{H}_{J^c,I;\alpha\leftrightarrow\beta}$ 的生成元相关联的 Spin$^c$ 结构。因此，当且仅当 x 对 $\chi$(SFH$(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},h^{-1}\cdot\mathfrak{s}_{\text{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}})$) 有贡献时，gr$_H$(x) $=h$ 。包括前面的符号在内，该引理的证明与推论 8.19 相同。□

为简单起见，我们现在假设 $Y$ 是连通的。

**推论 9.11.** 若 $Y$是连通的，且$(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是弱平衡的，则映射的矩阵元$E$

$$[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\text{comb;\ concrete}}$$

位于第 $\gamma_I^{\text{in}}\otimes 1$ 列、第 $\gamma_J^{\text{out}}\otimes 1$ 行

$$E=(-1)^{b_1(Y,R^+_{J^c,I})+\text{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\text{std}})+n_1k+ak}\sum_{h\in H}\left(T_{(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\omega_{\Xi_{J^c,I}})}(h^{-1}\cdot\mathfrak{s}_{\text{ref}})\right)\cdot h$$

其中

$$T_{(Y,\Gamma_{J^c,I};R^+\leftrightarrow R^-,\omega_{\Xi_{J^c,I}})}\colon \mathrm{Spin}^c(Y,\partial Y,-v_{J^c,I})\to\mathbb{Z}$$

其定义与 [FJR09，前述注 319] 中相同（注意，$T_{(Y,\Gamma_{J^c,I};R^+\leftrightarrow R^-,\omega_{\Xi_{J^c,I}})}$ 的定义要求$(Y、\Gamma_{J^c,\ I;\ R^+\leftrightarrow R^-})$ 在每个连通分支上都有非空的 $R^+$ 和 $R^-$ 边界；这是由我们在定义 ***1.4*** 中对 $Y$ 施加的拓扑假设推出的）。

证明。当 $(Y,\ \Gamma_{J^c,\ I})$ 为平衡时，由引理 9.10 和 [FJR09，定理 1] 可得。当 $(Y,\ \Gamma_{J^c,\ I})$ 弱平衡但不平衡时，我们注意到，[FJR09，定理 1] 的证明可推广到弱平衡的缝合三维流形，其中 $\chi$(SFH) 的定义与注 9.9 中相同。事实上，[FJR09，定理 1] 的证明只在证明 [FJR09，命题 4.2]，中用到了平衡性；此处用平衡性来说明注 9.9 中的组合和可解释为 $\chi$(SFH)。□

**推论 9.12.** 若 $Y$是连通的，且$(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 是弱平衡的，那么映射的矩阵元$E$

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}$$

在第 $\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1$ 列、第 $\gamma_J^{\mathrm{out}}\otimes 1$ 行中的值为

$$E=(-1)^{b_1(Y,R^+_{J^c,I})+\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}})+n_1k+ak}\tau(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}})$$

其中，$\tau(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}})\in\mathbb{Z}[H]$ 的定义与 [***FJR09*** 中的定义 ***3.***18] 相同（注意，先验地，$\tau(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}})$ 是较大环 $Q(H)$ 的一个元素，该环包含 $\mathbb{Z}[H]$；但根据 [***FJR09*** 中定义 ***3.***18]，下方的讨论，由于 $(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-})$ 在 $Y$的唯一连通分支上具有非空的 $R^+$和$R^-$边界，因此我们有 $\tau(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}})\in\mathbb{Z}[H]$）。

证明。FJR 中注记 3.19 上方对 $T_{(M,\gamma,\omega)}(\mathfrak{s})$的定义是：$T_{(M,\gamma,\omega)}(\mathfrak{s})$定义为 $\tau(M,\gamma,\mathfrak{s},\omega)_1$,在 $1\in H$上的 $\tau(M,\gamma,\mathfrak{s},\omega)\in\mathbb{Z}[H]$ 的系数。Friedl–Juhasz–Rasmussen 随后指出，可以利用 [FJR09，公式 (2)] 从函数 $T_{(M,\gamma,\omega)}$中恢复所有 $\tau(M,\gamma,\mathfrak{s},\omega)\in\mathbb{Z}[H]$。该公式指出，对于 FJR09 第 3 节中的相关 CW 对挠函数 $\tau(X,Y,\mathfrak{l},\omega)$ [，$\tau(X,Y,h\cdot\mathfrak{l},\pm\omega)=\pm h\cdot\tau(X,Y,\mathfrak{l},\omega)$ 对每个 $h\in H$都成立。只要 $\mathrm{Spin}^c(M,\gamma)\cong\mathrm{Lift}(X,Y)$（即 $X\neq Y$），结合该公式、FJR09 定义 3.17]，[、FJR09 注记 3.11]，以及 FJR09 引理 3.4]，上方的内容，即可得到$\tau(M,\gamma,h\cdot\mathfrak{s},\pm\omega)=\pm h\cdot\tau(M,\gamma,\mathfrak{s},\omega)$对每个 $h\in H$都成立。

当 $X=Y$ 时，FJR09 中上述引理 3.4] 之前的 $[(X,Y,\mathfrak{e},\omega)$ 的定义为 $+h\in\mathbb{Z}[H]$（假设 $\omega$ 是零向量空间的正定向；根据第 8.5.1 节的讨论，这对于我们的定向选择成立），其中 $\mathfrak{e}\in\mathrm{Eul}(X,Y)$ 在典范同一 $\mathrm{Eul}(X,Y)\cong H$ 下对应于 $h\in H$。因此，我们有 $\tau(M,\gamma,h\cdot\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}},\omega)=h$，所以方程 $\tau(M,\gamma,h\cdot\mathfrak{s},\pm\omega)=\pm h\cdot\tau(M,\gamma,\mathfrak{s},\omega)$ 对每个 $h\in H$ 仍然成立。

由此可知，$\tau(M,\ \gamma,\ \mathfrak{s},\ \omega)$ 在 $h\in H$ 上的系数，换句话说，$(h^{-1}\tau(M,\ \gamma,\ \mathfrak{s},\ \omega))$ 在 $1\in\mathbb{Z}[H]$上的系数，与 $\tau(M,\ \gamma,\ h^{-1}\cdot\mathfrak{s},\ \omega))$ 在 $1\in H$ 上的系数相同。根据 $T_{(M,\gamma,\omega)}$ 的定义，该系数为 $T_{(M,\gamma,\omega)}(h^{-1}\cdot\mathfrak{s})$。于是得到

$$\tau(M,\gamma,\mathfrak{s},\omega)=\sum_{h\in H}(T_{(M,\gamma,\omega)}(h^{-1}\cdot\mathfrak{s}))\cdot h$$

因此，该推论由推论 9.11 得出。 □

9.4. **覆盖与提升**。

**9.4.1. 一般选择。** 设 $(Y,\Gamma)$ 是从 $(F_0,\Lambda_0)$ 到 $(F_1,\Lambda_1)$ 的连通缝合余边，并设 $\Xi$ 是一组如定义 4.3 中所述的一般（未标准化）选择。第 3 节为我们给出了空间 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{R}^+$ 的 CW 分解，它们与 $Y$ 和 $R^+$ 同伦等价（在 $\mathfrak{R}^+$ 的情形下则完全相同）。回想一下，$\Xi$ 包含了 $\mathcal{H}$ 的闭合 $\alpha$ 和 $\beta$ 圆的排序和定向数据；按照第 3.2 节开头的讨论，这些数据确定了 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 胞腔的定向。

**定义 9.13**。设 $H=H_1(Y)$。令 $\pi\colon \widehat{Y}\to Y$ 表示 $Y$ 的**最大阿贝尔覆盖**，则 $\pi$ 的 Deck 群为 $H$。对于任意子空间 $X\subset Y$，定义

$$\widehat{X}:=\pi^{-1}(X).$$

特别地，取 $X=\mathfrak{Y}$ 和 $X=\mathfrak{R}^+$，我们得到空间 $X=\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{R}^+$，它们都是 CW复形。注意，$\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔的定向自然地为 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔赋予定向，使得投影映射 $\pi$ 是保向的。

令 $G=H/\mathrm{tors}(H)$。给定 $Y$，对于 $\mathrm{tors}(H)$ 的自由作用所对应的商，我们记作

$$\overline{Y}:=\widehat{Y}/\operatorname{tors}(H).$$

于是 $p:\overline{Y}\to Y$ 是 $Y$**的最大自由阿贝尔覆盖**，其 Deck 群为 $G$。对于任意子空间$X\subset Y$，定义

$$\overline{X}:=p^{-1}(X).$$

特别地，取 $X=\mathfrak{Y}$ 和 $X=\mathfrak{R}^+$，我们得到空间 $X=\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{R}^+$，它们都是 CW复形。$\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔的定向为 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$的胞腔赋予定向，使得投影映射 $p$ 是保向的。

设 $a$ 和 $b$ 分别为 $\mathcal{H}$ 中 $\alpha$ 个和 $\beta$ 个圆的数量。将 $\mathfrak{Y}$ 中未包含于 $\mathfrak{R}^+$ 的每个胞腔提升到 $\mathfrak{Y}$ 的一个胞腔。我们将这些 1-胞腔 $e_1,\ \ldots\ldots,\ e_b$ 的提升记为 $\widehat{e}_1,\ \ldots\ldots,\ \widehat{e}_b$，将这些 2-胞腔 $e_{b+1},\ \ldots\ldots,\ e_{b+a}$ 的提升记为 $\widehat{e}_{b+1},\ \ldots\ldots,\ \widehat{e}_{b+a}$。于是，我们得到 $C_1^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\widehat{\mathfrak{R}}^+)$ 的有序 $\mathbb{Z}[H]$-基 $\widehat{e}_1,\ \ldots\ldots,\ \widehat{e}_b$，以及 $C_2^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\widehat{\mathfrak{R}}^+)$ 的有序 $\mathbb{Z}[H]$-基 $\widehat{e}_{b+1},\ \ldots\ldots,\ \widehat{e}_{b+a}$。当 $i\neq 1$ 为 2 时，胞腔群 $C_i^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\widehat{\mathfrak{R}}^+)$ 为零。

**定义 9.14**。令 $M_{\mathcal{H}}$ 为胞腔微分的矩阵

$$\widehat{\partial}_2\colon C_2^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\widehat{\mathfrak{R}}^+)\to C_1^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\widehat{\mathfrak{R}}^+)$$

在上述有序基下。

矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 的余核为 $H_1(Y,\ R^+)$，因此它是 $H_1(Y,\ R^+)$ 的表示矩阵，其亏格为 $d=a-b=-\chi(Y,\ R^+)$。注意，$M_{\mathcal{H}}$ 的核为 $H_2(Y,\ R^+)$。

现在转到商 $Y=Y/\mathrm{tors}(H)$。我们可以通过由以下内容确定的识别，将所选的基传递到这个商中

$$C_1^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\widehat{\mathfrak{R}}^+)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\cong}C_1^{\mathrm{cell}}(\overline{\mathfrak{Y}},\overline{\mathfrak{R}}^+)$$

确定

$$\widehat{e}_i \otimes 1 \mapsto \overline{e}_i$$

对于 $C_2^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{Y}},\ \widehat{\mathfrak{R}}^+)$ 也类似，其中我们通过商映射 $H \to G$ 所诱导的环同态 $\mathbb{Z}[H] \to \mathbb{Z}[G]$，将 $\mathbb{Z}[G]$ 视为一个 $\mathbb{Z}[H]$-模。

**定义 9.15**。设 $M_{\mathcal{H}}$ 是胞腔微分的矩阵

$$\overline{\partial}_2 \colon C_2^{\mathrm{cell}}(\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{R}}^+) \to C_1^{\mathrm{cell}}(\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{R}}^+)$$

在上述有序基下。

矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ 的余核为 $H_1(Y,\ R^+)$，因此它是 $H_1(Y,\ R^+)$ 的表示矩阵，其亏格为 $d = a - b = -\chi(Y,\ R^+)$。注意，$M_{\mathcal{H}}$ 的核为 $H_2(Y,\ R^+)$。

9.4.2. 规范化选择。现在假设 $\Xi$ 的形式为推论 2.22 中的 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，因此 Heegaard 图具有 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}} = \mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta} \cup_{\mathcal{Z}_1^*} \mathcal{H}' \cup_{\mathcal{Z}_0^*} \mathcal{H}_{1/2}^{\beta\alpha}$ 的形式。第 3 节给出 $\mathfrak{Y}$ 的 CW 子复形 $\mathfrak{F}_i$ 和 $\mathfrak{S}_i^+$，且满足 $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{R}^+ = \mathfrak{S}_i^+$。令 $\pi\colon \widehat{Y} \to Y$ 为 $Y$ 的最大阿贝尔覆盖，我们通过取如上所述的原像得到 $R^+ = \mathfrak{R}^+ \subset \mathfrak{Y} \subset Y$。设 $\widehat{F}_i = \pi^{-1}(F_i)$ 和 $\widehat{S}_i^+ = \pi^{-1}(S_i^+) = \widehat{F}_i \cap \widehat{R}_i^+$。我们还设 $\widehat{\mathfrak{F}}_i = \pi^{-1}(\mathfrak{F}_i)$ 和 $\widehat{\mathfrak{S}}_i^+ = \pi^{-1}(\mathfrak{S}_i^+) = \widehat{\mathfrak{F}}_i \cap \widehat{\mathfrak{R}}^+$。如推论 3.3 中所示，图

$$\begin{array}{ccc} H_1(\widehat{F}_i, \widehat{S}_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\widehat{Y}, \widehat{R}^+) \\ \cong\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_*} \\ H_1(\widehat{\mathfrak{F}}_i, \widehat{\mathfrak{S}}_i^+) & \xrightarrow[i_*]{} & H_1(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+) \end{array}$$

交换，其中左侧的映射是图表（2）左侧同构复合的帽版本。

现在，第 8.2 节为每个$I, J$给出了更大的依赖幂等元的 CW 对 $(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$，其中每个 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 都与 $Y$ 同伦等价；这些 CW 复形的胞腔排序和定向按定义 8.9 中的 $\Xi_{J^c,I}$ 选取。与第 8.2.1 节一样，我们将$\mathfrak{Y}$ 以及所有复形 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 视为一个最大 CW 复形 $\mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$的子复形；注意，$\Xi_{\mathrm{norm}}$ 和 $\Xi_{J^c,I}$ 中编码的排序和定向，与从 $\Xi_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$继承的相同。

令 $Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$ 为缝合 Heegaard 图 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$所关联的拓扑空间。如图 18 所示，在 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$所关联的拓扑空间 $Y$与 $Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$ 之间存在典范同胚 $\varphi$。这个同胚 $\varphi$ 是 $\mathfrak{Y} \subset Y$上的显然恒等映射，它被映到 $Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$ 中对应的子集 $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$（暂时将后一个子集称为 $\mathfrak{Y}'$，而非 $\mathfrak{Y}$）。给定我们为 $Y$的最大阿贝尔覆盖选定的模型 $\pi\colon Y \to Y$，我们使用

$$\pi_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0} := \widehat{Y} \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\varphi} Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

作为最大阿贝尔覆盖$Y_{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_0}$ 的模型，其中$Y_{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_0}$（因此我们将$Y_{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_0} = Y$ 视为拓扑空间）。若令 $\widehat{\mathfrak{Y}}' = \pi^{-1,\ \mathbf{a}_0}_{\mathbf{a}_1}(\mathfrak{Y}')$，根据 $\varphi|_{\mathfrak{Y}}$ 显然是这一事实可知

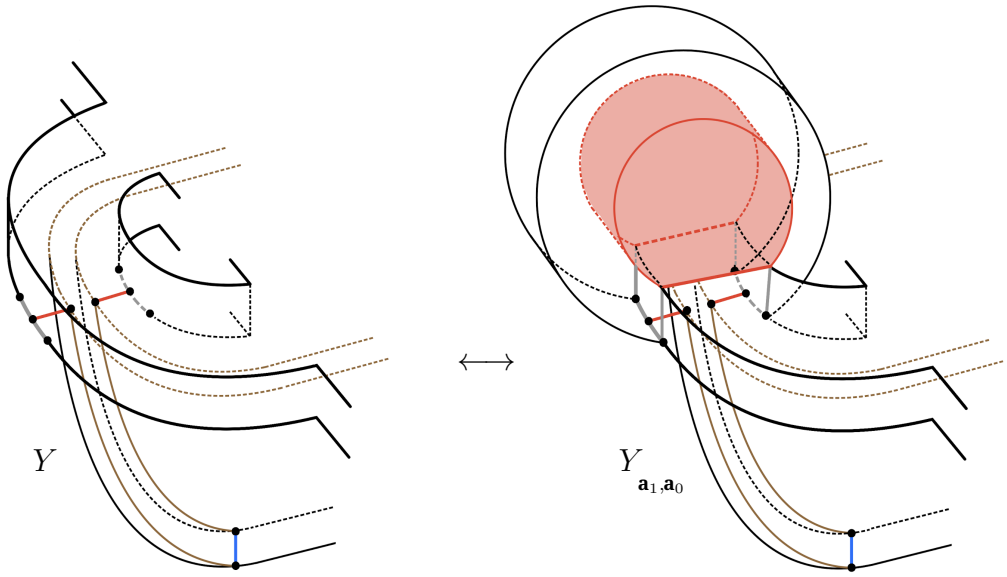



FIGURE 18. 同胚的三维流形 $Y$（左）和$Y_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}$（右）。一般而言，$Y_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}$ 与 $Y$ 的区别在于前者多出了一些如图所示的“团块”，而从$Y_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}$ 到 $Y$ 的同胚会将团块收缩到$Y$的主体内部。逆同胚则会重新展开团块。为清晰起见，右侧省略了位于前景后方的部分图形；否则这些部分会显示为额外的虚线曲线，使图形显得杂乱。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是 $\mathfrak{Y}$ 与 $\mathfrak{Y}'$ 之间的识别，因此我们有一个典范同一 $\mathfrak{Y} \cong \mathfrak{Y}'$。换言之，我们可以将 $\widehat{\mathfrak{Y}}$ 及其子复形 $\widehat{\mathfrak{R}}^+$、 $\widehat{\mathfrak{F}}_i$和 $\widehat{\mathfrak{S}}_i^+$ 都视为 $\widehat{\mathfrak{Y}}_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}$,的子复形，使得映射

$$\widehat{i}_*\colon H_1(\widehat{\mathfrak{F}}_i, \widehat{\mathfrak{S}}_i^+) \to H_1(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+)$$

$\widehat{\ }$来自$\mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}$中子复形的通常包含映射。

我们还有子复形

$$\widehat{\mathfrak{Y}} \subset \widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,I} \subset \widehat{\mathfrak{Y}}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

and

$$\widehat{\mathfrak{R}}^+ \subset \widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c,I} \subset \widehat{\mathfrak{R}}^+_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

对所有 $I$和 $J$均成立，其中 $\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,\,I}:= \pi^{-1}_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}(\mathfrak{Y}_{J^c,\,I})$，且 $\widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c,\,I}:= \pi^{-1}_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}(\mathfrak{R}^+_{J^c,\,I})$。注意，

$$\pi_{J^c,I} := \pi_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}\colon \widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,I} \to \mathfrak{Y}_{J^c,I}$$

是$\mathfrak{Y}_{J^c,\,I}$的最大阿贝尔覆盖（的一个模型），因为$\mathfrak{Y}_{J^c,\,I}$ 是$Y_{\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_0}$的强变形收缩。此外，$\widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c\,,\,I}$ 是$\mathfrak{R}^+_{J^c\,,\,I} \subset \mathfrak{Y}_{J^c,\,I}$ 在覆盖映射$\pi_{J^c,\,I}$下的原像。

$\widehat{\ }$上述所有内容在最大自由阿贝尔覆盖中也有类似对应。令 $\overline{Y}:= Y/\overline{\mathrm{tors}}(H)$，则有 $p\colon Y \to Y$ 是$\overline{\ }Y$ 的最大自由阿贝尔覆盖，并令 $F_i = p^{-1}(F_i)$,

$\overline{S}_i^+ = p^{-1}(S_i^+) = \overline{F}_i \cap \overline{R}_i^+$、$\overline{\mathfrak{F}}_i = p^{-1}(\mathfrak{F}_i)$ 和 $\overline{\mathfrak{S}}_i^+ = p^{-1}(\mathfrak{S}_i^+) = \overline{\mathfrak{F}}_i \cap \overline{\mathfrak{R}}^+$。图

$$\begin{array}{ccc} H_1(\overline{F}_i, \overline{S}_i^+) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\overline{Y}, \overline{R}^+) \\ \cong \uparrow & & \uparrow i_* \\ H_1(\overline{\mathfrak{F}}_i, \overline{\mathfrak{S}}_i^+) & \xrightarrow[i_*]{} & H_1(\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{R}}^+) \end{array}$$

$\widehat{}$交换。我们使用 $Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0} := Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}/\mathrm{tors}(H)$ 作为最大自由阿贝尔覆盖的模型

$$p_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0} : \overline{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0} \to Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

$Y_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$ 的。设 $\overline{\mathfrak{Y}}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0} = p_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}^{-1}(\mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0})$；我们可以将 $\overline{\mathfrak{Y}}$ 及其子复形 $\overline{\mathfrak{R}}^+$、$\overline{\mathfrak{F}}_i$ 和 $\overline{\mathfrak{S}}_i^{\pm}$ 都视为 $\mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$，的子复形，使得该映射

$$\bar{i}_* : H_1(\overline{\mathfrak{F}}_i, \overline{\mathfrak{S}}_i^+) \to H_1(\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{R}}^+)$$

来自 f rom $\mathfrak{Y}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$ 的子复形的通常包含映射。我们有子复形

$$\overline{\mathfrak{Y}} \subset \overline{\mathfrak{Y}}_{J^c,I} \subset \overline{\mathfrak{Y}}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

and

$$\overline{\mathfrak{R}}^+ \subset \overline{\mathfrak{R}}^+_{J^c,I} \subset \overline{\mathfrak{R}}^+_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}$$

对所有 $I$ 和 $J$，其中 $\overline{\mathfrak{Y}}_{J^c,I} := p_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}^{-1}(\mathfrak{Y}_{J^c,I})$ 以及 $\overline{\mathfrak{R}}^+_{J^c,I} := p_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0}^{-1}(\mathfrak{R}^+_{J^c,I})$。我们注意到

$$p_{J^c,I} := p_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_0} : \overline{\mathfrak{Y}}_{J^c,I} \to \mathfrak{Y}_{J^c,I}$$

是 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 的最大自由阿贝尔覆盖的（一个模型），并且 $\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$ 是 $\mathfrak{R}^+_{J^c,I} \subset \mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 在覆盖映射 $p_{J^c,I}$ 下的原像。

9.4.3. 提升曲面的同调。继续假设 $\Xi$ 具有推论 2.22 中 $\Xi_{\mathrm{norm}}$ 的形式。这里记录 $H_1(\widehat{F}_i, \widehat{S}_i^+)$的结构，以供后续使用；我们研究出射情形 $i = 1$（入射 $i = 0$ 情形可类似推出）。回忆一下，$H_1(F_1, S_1^+)$在 $\mathbb{Z}$上由 $\mathcal{Z}_1$ 的匹配弧 $\gamma_i^{\mathrm{out}}$自由生成，这些弧带有由 $\Xi_{\mathrm{norm}}$给定的定向。与第 3.3 节中一样，识别 $H_1(F_1, S_1^+) \cong H_1(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{S}_1^+)$将$\gamma_i^{\mathrm{out}}$映为$-1$ 乘以 $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{S}_1^+$中与出射 $\alpha$ 弧相交次数非零的唯一 $\beta$ 圆所对应的 1-胞腔，而该弧对应于 $\gamma_i^{\mathrm{out}}$。因此，$H_1(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{S}_1^+) \cong C_1^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{S}_1^+)$ 由 $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{S}_1^+)$ 的 $n_1$ 相对 1- 胞腔自由生成，这些胞腔对应于与 $\mathcal{H}_{1/2}^{\alpha\beta}$ 相交次数非零的 $\beta$-圆；将它们记为 $e_i^{\mathrm{out}} \in \{e_1, \dots, e_b\}$。于是，$H_1(\widehat{F}_1, \widehat{S}_1^+)$的一个 $\mathbb{Z}[H]$ 基可通过为每个此类 $e_i^{\mathrm{out}}$选取 $n_1$ 个提升 $\widehat{e}_i^{\mathrm{out}}$来构成，这些提升对应于 $\mathfrak{F}_1$的一个胞腔；如上所述，$\mathfrak{F}_1$ 中胞腔的定向$\widehat{}$自然给出 $\mathfrak{F}_1$ 中胞腔的定向，使得投影映射 $\pi$ 保向（回忆一下，$\Xi_{\mathrm{norm}}$ 采用命题 3.4 的定向约定）。

在节 9.5，我们将用到以下识别（$\Phi_0$ 的定义类似 ）：

$$\Phi_1 : \wedge^* H_1(F_1, S_1^+) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\cong} \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_1, \widehat{S}_1^+).$$

此映射取决于如上所定义的 $\mathbb{Z}[H]$-基。具体来说，对于生成元$\gamma_i^{\mathrm{out}} \in H_1(F_1,\ S_1^+)$，命题 3.4 建立了一个对应关系，它首先将

$$H_1(F_1, S_1^+) \xrightarrow{\cong} H_1(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{S}_1^+)$$
$$\gamma_i^{\mathrm{out}} \mapsto -e_i^{\mathrm{out}}$$

然后通过 $\mathbb{Z}$-线性延拓（注意，我们在那里还证明了，在入射情形下，$e_i^{\mathrm{in}}$具有相同的符号）。现在，由于 $H_1(\widehat{F}_1,\ \widehat{S}_1^+)$ 在 $\mathbb{Z}[H]$ 上由自由生成，对于每个 $0 \le l \le n_1$，这些元素

$$\widehat{e}_J^{\mathrm{out}} = \widehat{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_l}^{\mathrm{out}}$$

对于 $J = (j_1, \ldots\ldots, j_l),\ 1 \le j_1 < \cdots < j_l \le n_1$ 构成了 $\wedge^l H_1(\widehat{F}_1,\ \widehat{S}_1^+)$ 在 $\mathbb{Z}[H]$ 上的一组基。于是，给定一个生成元 $\gamma_J^{\mathrm{out}} \in \wedge^* H_1(F_1,\ S_1^+)$，识别 $\Phi_1$ 的特征是将其映射为

$$\Phi_1(\gamma_J^{\mathrm{out}} \otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = -\widehat{e}_J^{\mathrm{out}}$$

然后通过 $\mathbb{Z}[H]$-线性延拓，并对楔积进行延拓；这里出现该符号，是因为我们假设对于每个 $1 \le i \le b,\ \widehat{e}_i^{\mathrm{out}} \overset{\pi}{\mapsto} e_i^{\mathrm{out}}$ 都是保向的。

现在取商 $Y = \widehat{Y}/\mathrm{tors}(H)$。将注意力集中于出射缝合曲面（入射情形可类似地处理），我们可以通过以下识别，将所选的基映到这个商上

$$C_1^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{F}}_1, \widehat{\mathfrak{S}}_1^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\cong} C_1^{\mathrm{cell}}(\overline{\mathfrak{F}}_1, \overline{\mathfrak{S}}_1^+)$$

由……确定

$$\widehat{e}_i^{\mathrm{out}} \otimes 1 \mapsto \overline{e}_i^{\mathrm{out}}.$$

因此，存在一个模 $H_1(F_1, S_1^+)$，它作为 $\mathbb{Z}[G]$-模由经过商映射的 1-胞腔的提升 $\widehat{e}_i^{\mathrm{out}}$自由生成；这意味着有如下识别

$$H_1(\widehat{F}_1, \widehat{S}_1^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \cong H_1(\overline{F}_1, \overline{S}_1^+),$$

这些识别是典范的（并非仅在相差一个覆盖变换的意义下成立）。我们用 $e_J^{\mathrm{out}}$表示 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(F_1, S_1^+)$ 的一个基元素，入射情形也同理。

9.4.4. 将提升与相对 Spin$^c$ 结构对应。 现在我们将 [FJR09] 的框架应用于 CW 对 $(X, Y) = (\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$。尽管提升和欧拉结构的概念源自 Turaev 的工作，但为使论述更简洁，我们采用 Friedl–Juh´asz–Rasmussen 的定义。特别地，我们直接援引 [FJR09] 中建立的复合双射，并省略中间构造。我们继续假设$Y$ 是连通的。

**命题 9.16**。 对于每个 $I, J$，使得$(Y, \Gamma_{J^c,\ I})$是弱平衡的，且 $\mathfrak{Y}_{J^c,\ I} \neq \mathfrak{R}^+_{J^c,\ I}$，存在一个 $H$-等变双射

$$\mathrm{Spin}^c(Y, \partial Y, -v_{J^c,I}) \cong \mathrm{Lift}(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$$

其中，对于 *CW* 对 $(X, Y)$，$\mathrm{Lift}(X, Y)$ 的定义见 [FJR09，定义 3。1]。请注意，根据第 *9.4.2* 节中的讨论，我们可以用 $\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,\, I}$ 作为 $\mathfrak{Y}_{J^c,\, I}$的最大阿贝尔覆盖模型，来理解 $\mathrm{Lift}(\mathfrak{Y}_{J^c,\, I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,\, I})$。

证明。回顾一下，我们对 $\mathrm{Spin}^c(Y, \partial Y, -v_{J^c,I})$ 的定义与 [FJR09 定义 2.2]，中 $\mathrm{Spin}^c(Y, \Gamma_{J^c,I}; R^+ \leftrightarrow R^-)$ 的定义一致，因此该结论可由复合 [FJR09] 中建立的若干双射得出。对 $(Y, \Gamma_{J^c,I}; R^+ \leftrightarrow R^-)$，按照第 3 节中的定义，与之关联的缝合手柄复形为 $I$，而 $d$ 是 $Y$ 上的恒等微分同胚。于是，数对 $Z_{J^c,I} = (\mathcal{A}_{J^c,I}, d)$ 满足 [FJR09 定义 3.12] 中关于 $(Y, \Gamma_{J^c,I}; R^+ \leftrightarrow R^-)$ 的手柄分解的定义。接着，[FJR09 定义 3.13] 给出一个仿射 $H$-同构

$$s_{Z_{J^c,I}} \colon \mathrm{Spin}^c(Y, \partial Y, -v_{J^c,I}) \to \mathrm{Eul}(\mathcal{A}_{J^c,I}),$$

其中，$\mathrm{Eul}(\mathcal{A}_{J^c,I})$ 的定义见 [FJR09 定义 3.10]。接下来，根据 [FJR09 注 3.11]，存在一个典范双射 $\mathrm{Eul}(\mathcal{A}_{J^c,I}) \cong \mathrm{Eul}(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$，其中 $\mathrm{Eul}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$ 的定义见 [FJR09 定义 3.2]。最后，只要 $\chi(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I}) = 0$，则由 $\mathfrak{Y}_{J^c,I} \neq \mathfrak{R}^+_{J^c,I}$,[FJR09 定义 3.3] 可得

$$\mathrm{Lift}(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I}) \to \mathrm{Eul}(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$$

是一个 $H$-等变双射。由于我们假设 $(Y,\ \Gamma_{J^c,\, I})$ 是弱平衡的，推论 8.15 结合 $\mathfrak{Y}_{J^c,\, I}$ 相对于 $\mathfrak{R}^+_{J^c,\, I}$ 与 $Y$ 相对于 $R^+_{J^c,\, I}$ 的同伦等价，给出 $\chi(Y,\ R^+_{J^c,\, I}) = \chi(\mathfrak{Y}_{J^c,\, I},\ \mathfrak{R}^+_{J^c,\, I}) = 0$。我们还假设了 $\mathfrak{Y}_{J^c,\, I} \neq \mathfrak{R}^+_{J^c,\, I}$，因此该双射成立。□

注 9.17。命题 9.16 中的条件 $\mathfrak{Y}_{J^c,I} \neq \mathfrak{R}^+_{J^c,I}$ 对所有 $I, J$ 总是成立，退化情形除外：此时 Heegaard 曲面 $\Sigma$ 是一个亏格为 $g$ 、不含任何 $\alpha$ 或 $\beta$ 圆的闭曲面 $\Sigma_g$。在这种情况下，必有 $I = J = \emptyset$，并且 $J^c = \emptyset$ 也成立；我们有 $\mathrm{Spin}^c(\Sigma_g \times [0,1], \partial(\Sigma_g \times [0,1]) - v_{\emptyset,\emptyset}) \cong H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$，而相应的提升集合只有平凡（空）提升。存在一个典范元素 $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathrm{Spin}^c(\Sigma_g \times [0,1], \partial(\Sigma_g \times [0,1]) - v_{\emptyset,\emptyset})$，我们将用 $\frac{\partial}{\partial t}$ 来选取参考 $\overline{\mathrm{Spin}}^c$ 结构 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}} = -\mathfrak{s}_{\emptyset,\emptyset}$（即我们将用 $-\frac{\partial}{\partial t}$ 来选取 $\mathfrak{s}_{\emptyset,\emptyset}$）。如 FJR09 的定义 3.3]，下文所述，仍然存在一个从单点提升集到 $\mathrm{Spin}^c(\Sigma_g \times [0,1], \partial(\Sigma_g \times [0,1]) - v_{\emptyset,\emptyset})$ 的映射，其像为 $\{\frac{\partial}{\partial t}\}$。因此，即使在这一退化情形下，对于所有满足 $(Y, \Gamma_{J^c,I})$ 弱平衡的 $I, J$，我们也有一个 $\mathrm{Lift}(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$ 中的元素与 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}} = -\mathfrak{s}_{J^c,I} \in \mathrm{Spin}^c(Y, \partial Y, -v_{J^c,I})$ 相对应。这个事实将在下面的推论陈述中出现。

**推论 9.18**。若 $(Y, \Gamma_{J^c,I})$ 是弱平衡的，则映射的矩阵元 $E$

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}$$

第 $\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes 1$ 列和第 $\gamma_J^{\mathrm{out}} \otimes 1$ 行中为

$$E = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c \leftrightarrow \mathrm{std}}) + n_1 k + ak} \det \widehat{A}$$

其中，$\widehat{A}$是（$\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,I}$、$\widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c,I}$）的胞腔链复形在链群 $C_2$ 和 $C_1$ 的基下的边界映射 $\partial_2$ 的矩阵；这些基由将 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}\setminus\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$ 的 *2*-胞腔和 *1*-胞腔分别提升为 $\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,I}\setminus\widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c,I}$ 的 *2*-胞腔和 *1*-胞腔的任意选择所确定，并且该选择与 ***Lift***$(\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I})$ 中对应于 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}}=-\mathfrak{s}_{J^c,I}\in$ ***Spin***$^c$（$Y$、$\partial Y$、$-v_{J^c,I}$）的元素 $\mathfrak{l}$ 相容。注意，若 $\mathcal{H}_{J^c,I}$；$_{\alpha\leftrightarrow\beta}$ 的 ***Heegaard*** 曲面 $\Sigma_{J^c,I}$ 是闭且连通的，且没有 $\alpha$ 圆或 $\beta$ 圆，那么 ***Lift***$(\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I})$ 有唯一元素 $\mathfrak{l}$；此时 $\mathfrak{l}$ 对应于 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}}$ 的含义应按注 *9.17* 理解。我们还将空的（大小为 $0\times 0$）矩阵的行列式定义为 *1*。

证明。如果 Heegaard 曲面 $\Sigma_{J^c,I}$ 是闭的，且没有 $\alpha$ 或 $\beta$ 圆，那么推论中的方程为 $1=1$，因此不妨假设我们不处于这种退化情形。根据 [FJR09，引理 3.6]和推论 9.12，只需证明

$$\tau(Y,\Gamma_{J^c,I;R^+\leftrightarrow R^-},\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}},\omega_{\Xi_{J^c,I}})=\tau(\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I},\mathfrak{l},\omega_{\Xi_{J^c,I}}),$$

其中 $\tau(\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I},\mathfrak{l},\omega_{\Xi_{J^c,I}})$ 是 [FJR09 第 3.4]节中定义的 CW 对挠率。这由 [FJR09，定义 3.17]，[、FJR09，注 3.11]，以及 [FJR09，引理 3.4]之前的内容可得。□

9.5. Spin$^c$ **版本的** [BSDA] **不依赖参考**Spin$^c$ **结构**。继续假设 $Y$ 是连通的。本节中我们始终要求 $(Y,\Gamma)$ 配备一组规范化选择 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，如推论 4.15 所述，因此我们选择一个形式为 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}=\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}\cup_{\mathcal{Z}^*_1}\mathcal{H}'\cup_{\mathcal{Z}^*_0}\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 的 Heegaard 图，其中 $\beta$-$\beta$ 是一个带边缝合海加德图$\mathcal{H}'$。我们要使用映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb,concrete}}$$

定义 9.7 的，依赖于参考 Spin$^c$ 结构，以定义一个独立于参考 Spin$^c$ 结构的映射。

**定义 9.19.** 定义

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_0,\widehat{S}^+_0)\to\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}^+_1)$$

如下：首先，对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}=\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{1/2}\cup_{\mathcal{Z}^*_1}\mathcal{H}'\cup_{\mathcal{Z}^*_0}\mathcal{H}^{\beta\alpha}_{1/2}$ 中的每个 $\beta$圆和 $\alpha$圆，它们分别对应于相对于 $\mathfrak{R}^+$ 的 $\mathfrak{Y}$ 的 1-胞腔和 2-胞腔，选择 $\mathfrak{Y}$ 的一个提升后的 1-胞腔或 2-胞腔。现在，对于每个 $I$ 和 $J$，考虑 CW 对 $(\mathfrak{Y}_{J^cI},\mathfrak{R}^+_{J^cI})$ 中相对的 1-胞腔和 2-胞腔，它们对应于图 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ 中的 $\beta$ 和 $\alpha$ 圆。我们有一个 CW 对的包含映射 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{R}^+)\subset(\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I})$；在此包含映射下，相对于 $\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$ 的 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 的所有 1-胞腔都来自相对于 $\mathfrak{R}^+$ 的 $\mathfrak{Y}$ 的 1-胞腔。相对于 $\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$ 的 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 的 2-胞腔中，那些并非来自相对于 $\mathfrak{R}^+$ 的 $\mathfrak{Y}$ 的 2-胞腔的，与 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ 中的 $\alpha$ 圆一一对应，而这些圆对应于 $\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}$ 的 $\alpha$弧；也就是说，它们与 $J^c\sqcup I$ 的元素一一对应。$\mathcal{H}_{J^c,I}$ 中的每个此类 $\alpha$ 圆，都有一个与之配对的 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ 中的 $\beta$ 圆，它对应于 $J^c\sqcup I$ 中的同一个元素；配对的 $\beta$ 圆对应于相对于 $\mathfrak{R}^+$ 的 $\mathfrak{Y}$ 的一个 1-胞腔，因此我们已经选取了这个1-胞腔到 $\mathfrak{Y}\subset\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 的一个提升。$\mathfrak{Y}_{J^c,I}$ 中对应的 2-胞腔有唯一一个提升到一个 2-胞腔

$\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,\,I}$使得对于 CW 对 ( $\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,\,I}$， $\widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c,\,I}$) 的胞腔微分 $d_2$，从 2-胞腔到 1-胞腔的矩阵元为 $-1$ （若这些胞腔位于出射侧/左侧）或 $+1$ （若这些胞腔位于入射侧/右侧）。

这些所选提升视为等价类后，给出 Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I}$）中的一个元素，因此，根据命题 9.16，得到一个 Spin$^c$($Y, \partial Y, -v_{J^c,I}$) 中的元素 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}}$。令 $\mathfrak{s}_{J^c,I} := -\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}} \in$Spin$^c$($Y, \partial Y, v_{J^c,I}$)。根据定义 9.7，这些参考元素 $\mathfrak{s}_{J^c,I}$给出一个映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}\colon\ \wedge^* H_1(F_0,S_0^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[H]\to\wedge^* H_1(F_1,S_1^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[H]$$

未视为等价类的所选提升也给出以下识别

$$\Phi_i\colon\ \wedge^* H_1(F_i,S_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[H]\xrightarrow{\cong}\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+).$$

如第 9.4.3 节所示。我们令

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_0,\widehat{S}_0^+)\to\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)$$

为通过这些识别对 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合; 具体 进行前后复合后得到的映射。

**命题 9.20.** 前一定义中的映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合 与相对于 $\mathfrak{R}^+$的 $\mathfrak{Y}$胞腔提升的选择无关，至多相差一个 $\pm H$ 的元素。

证明。 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb 的数据中依赖于我们所选提升的是参考 Spin$^c$ 结构 $\mathfrak{s}_{J^c,I}$，它们使我们能够定义映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb,concrete，以及 $\mathbb{Z}[H]$ 基 $H_1$ ($\widehat{F}_i, \widehat{S}_i^+$ )，从而能够按照第 9.4.3 节进行识别 $\Phi_i$。根据 [FJR09，定义 3.1]，，如果 $\widehat{e}$ 是胞腔 $e$ 的一个特定提升选择（不视为模等价关系），则任何其他提升都与之相差 $H$中的唯一元素。只需分析仅改变一个胞腔的提升所产生的影响；该胞腔可以是：(1) 对应于 $\mathcal{H}$的一个 $\alpha$-圆的 2-胞腔；(2) 对应于 $\mathcal{H}'$的一个 $\beta$-圆的 1-胞腔；(3) 对应于 $\mathcal{H}$的一个 $\beta$-圆的 1-胞腔，该圆由 $\mathcal{H}'$的一个出射 $\beta$-弧粘合而成；或 (4) 对应于 $\mathcal{H}$ 的一个 $\beta$-圆的 1-胞腔，该圆由 $\mathcal{H}'$的一个入射 $\beta$-弧粘合而成。记 $\Phi'_i$ 和 $\mathfrak{s}'_{J^c,I}$ 为在每种情况下改变某个特定所选提升所确定的新数据，并令 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb; new 为所得的映射。

情况（1）：2-胞腔。：首先考虑由 $\alpha$ $\mathcal{H}$ 的圆所对应的 2-胞腔的提升 $\widehat{e}$ $e$。根据第 9.4.3 节，这些提升与 $H_1$($\widehat{F}_i, \widehat{S}_i^+$ ) 的 $\mathbb{Z}[H]$- 基互不影响，因此 $\Phi'_i = \Phi_i$ 是自动成立的。此外，若我们将 $\widehat{e}$ 替换为某个固定 $h \in H$ 的 $h\widehat{e}$，那么对于所有 $I, J$，Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I}$) 中所得的元素都会乘以 $h$。因此，Spin$^c$($Y, \partial Y, -v_{J^c,I}$) 的参考元素 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}}$ 会乘以 $h$，所以 Spin$^c$($Y, \partial Y, v_{J^c,I}$) 的参考元素 $\mathfrak{s}_{J^c,I}$ 会乘以 $h^{-1}$。使用加法记号，我们有 $\mathfrak{s}'_{J^c,I} = \mathfrak{s}_{J^c,I} - h$，因此对于 $\mathcal{H}$ 的每个生成元 x，我们有 gr$'_H$(x) $= \mathfrak{s}^{\mathrm{rel}}$(x) $- \mathfrak{s}'_{J^c,I} = \mathfrak{s}^{\mathrm{rel}(\mathbf{x})} - (\mathfrak{s}_{J^c,I} - h)$ $=$ gr$_H$ (x) $+ h$。切换回乘法记号，得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}} = h\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}},$$

并且由于 $\Phi'_i = \Phi_i$，我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,new}} = h\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}.$$

情况（2）：对应于 $\beta$的圆的 1-胞腔 $\mathcal{H}'$。这种情况与情况（1）类似，只不过如果我们将 $\widehat{e}$替换为 $h\widehat{e}$（其中 $h\in H$），那么对于所有的 $I$，$J$，所得的 Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,\,I}$，$\mathfrak{R}^+_{J^c,\,I}$) 元素会乘以 $h^{-1}$。我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,new}} = h^{-1}\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}.$$

情况（3）：对应于 $\mathcal{H}'$ 的出射 $\beta$-弧的 1-胞腔。在这种情况下，对于 $J$，我们考虑两种情况：$J$ 包含出射的 $\beta$-弧，或者不包含。先假设不包含，因此出射的 $\beta$-弧位于 $J^c$ 中。在这种情况下，我们有 $\Phi'_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = \Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$，并且仍有 $\Phi'_0=\Phi_0$。对于任意 $I$，还有一个 $\mathfrak{Y}_{J^c,I}\setminus\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$ 的 2-胞腔 $e'$，它对应于 $\mathcal{H}_{J^c,I}$ 的一条 $\alpha$-弧，该弧在图的 Zarev 帽部分与 $\beta$- 圆相交一次。我们用于 $e'$ 的提升 $\succ e'$ 由用于 $e$ 的提升 $\widehat{e}$ 以及以下条件确定：在 $C_*(\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I})$ 的胞腔边界映射 $\partial_2$ 中，从 $\widehat{e'}$ 到 $\widehat{e}$ 的矩阵元为 $-1$。因此，由于我们将 $\widehat{e}$ 改为 $h\widehat{e}$，也将 $\widehat{e'}$ 改为 $h\widehat{e'}$。Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$) 的参考元素不变（将一个 2-胞腔的提升乘以 $h$，会使 Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$) 的元素乘以 $h$；而将一个 1-胞腔的提升乘以 $h$，会使 Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$) 的元素乘以 $h^{-1}$）。由此可知，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb; new($\Phi_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$) 在$\Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$ 上的系数，与 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb($\Phi_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$) 在$\Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$ 上的系数一致。

现在考虑 $J$，使得出射 $\beta$ 弧位于 $J$中。在这种情况下，我们有 $\Phi'_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = h\cdot\Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$，并且我们仍然有 $\Phi'_0=\Phi_0$。对于任意 $I$，提升($\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$)的参考元素被乘以 $h^{-1}$，因为我们将一个1-胞腔的提升乘以了 $h$，而对2-胞腔的提升没有作出补偿性改变。我们得到，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}{}_{\mathrm{comb;concrete}}(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$在 $\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$ 上的系数 $C'_{\mathrm{concrete}}$ 等于 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}{}_{\mathrm{comb;concrete}}(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$在 $\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$上的系数$C_{\mathrm{concrete}}$的 $h^{-1}$ 倍。

根据定义，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb;new($\Phi_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$) 在 $\Phi'_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$ 上的系数，就是 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\,\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb;concrete($\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$) 在 $\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$ 上的系数，即 $C'_{\mathrm{concrete}} = h^{-1}\cdot C_{\mathrm{concrete}}$。由于 $\Phi'_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = h\cdot\Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb; new($\Phi_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$) 在 $\Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$ 上的系数为 $h\cdot h^{-1}\cdot C_{\mathrm{concrete}} = C_{\mathrm{concrete}}$，与 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ comb($\Phi_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$) 在 $\Phi_1(\gamma^{\mathrm{out}}_J\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$ 上的系数相同。

将这两种情况 $J$ 合并起来，我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,new}} = [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}.$$

情形（4）：对应于入射 $\beta$弧的 1-胞腔 $\mathcal{H}'$。这里我们考虑$I$的两种情况：$I$ 要么包含入射 $\beta$ 弧，要么不包含。首先假设入射 $\beta$ 弧位于 $I$中。在这种情况下，我们有 $\Phi'_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = h\cdot\Phi_0(\gamma^{\mathrm{in}}_I\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$，并且还有 $\Phi'_1=\Phi_1$。对于任意 $J$，Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$)中也有一个 2-胞腔，其提升也会像情况（3）的第一部分那样乘以 $h$，因此对于每一个，Lift($\mathfrak{Y}_{J^c,I},\mathfrak{R}^+_{J^c,I}$)的参考元素都保持不变

$J$。我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}).$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,new}}(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))\\
&= \Phi_1'([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}((\Phi_0')^{-1}(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))))\\
&= \Phi_1'([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(h^{-1}\cdot(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))))\\
&= h^{-1}\cdot\Phi_1'([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})))\\
&= h^{-1}\cdot\Phi_1([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})))\\
&= h^{-1}\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})).
\end{aligned}$$

现在假设输入的 $\beta$ 弧不在 $I$中；我们有 $\Phi_0'(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = \Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$，并且还有 $\Phi_1' = \Phi_1$。对于任意 $J$，我们的提升 $\mathrm{Lift}(\mathfrak{Y}_{J^c,\,I},\ \mathfrak{R}^+_{J^c,\,I})$ 的参考元素会乘以 $h^{-1}$。与情况（2）一样，我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}) = h^{-1}\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}).$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,new}}(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))\\
&= \Phi_1'([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}((\Phi_0')^{-1}(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))))\\
&= \Phi_1'([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}'})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})))\\
&= \Phi_1'(h^{-1}\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})))\\
&= h^{-1}\cdot\Phi_1([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})))\\
&= h^{-1}\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})).
\end{aligned}$$

将这两种 $I$ 情况合并起来，我们得到

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,new}} = h^{-1}\cdot[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}.$$

□

## 10. Sutured Alexander functors with twisted coefficients

设 $H = H_1(Y)$且 $G = H/\mathrm{tors}(H)$。本节研究第5节中缝合亚历山大函子的若干版本，其系数取自环 $\mathbb{Z}[G]$ 和 $\mathbb{Q}[H]$。这两种情况各有$\widehat{\phantom{x}}$优缺点，而且与 $[\mathrm{BSDA}]$ 的相互作用方式略有不同。尽管这两种情形下的论证都遵循相同的一般模式，但它们需要采用不同的代数方法，因此我们将分别讨论。

$\mathbb{Z}[G]$ 情形是对 $\mathbb{Z}$ 上的情形的直接推广，并与经典亚历山大多项式联系最为紧密。$\mathbb{Q}[H]$ 版本在代数上是我们

最灵活的版本，允许 $H$中存在挠元。不过，当 $H$ 含有挠元时，该理论便不再属于 [FM15] 的研究范围，而应严格视为对他们构造的推广。

**注释 10.1**。 在本节中，我们继续将与 $\mathsf{A}_{\mathbb{Z}}(Y,\Gamma)$ 类似的映射称为“亚历山大函子”，尽管我们并未声称它们严格满足函子性（见注释 1.30）。我们不在配边范畴上定义函子，而是构造不变量 $\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)$、$\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[H]}(Y,\Gamma)$、$\mathsf{A}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}(Y,\Gamma)$ 和 $\mathsf{A}^{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma)$；每个不变量都针对单个配边 $Y$ 定义（只差适当意义下的不确定性），且不研究它们的复合性质。

**10.1. 系数取 $\mathbb{Z}[G]$ 的亚历山大函子**。 由于 $G$是有限生成的自由阿贝尔群，$\mathbb{Z}[G]$ 是一个整环，因此这一构造与系数取$\mathbb{Z}$的情形非常相似。此情形也与亚历山大多项式的关系最为直接：当 $Y$是 $S^3$ 中一个纽结的补集，且带有经向缝合线 $\Gamma$时，因而 $G\cong\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}[G]\cong\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$，映射 $\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[G]}$ 将给出该纽结的亚历山大多项式——见 [FM15，命题 3.3]。

设 $(Y,\ \Gamma)$ 是一个从 $(F_0,\ \Lambda_0)$ 到 $(F_1,\ \Lambda_1)$ 的连通缝合余边。固定一个一般的（未归一化）选择集 $\Xi$，如定义 4.3 所述，其中包括一个用于 $(Y,\ \Gamma)$ 的 $\alpha$-$\alpha$ 带边界的 Heegaard 图 $\mathcal{H}$；令 $a$ 为 $\mathcal{H}$ 的 $\alpha$-圆的数量，并令 $b$ 为 $\mathcal{H}$ 的 $\beta$-圆的数量。我们设 $d=-\chi(Y,\ R^+)$。回忆

$$d=\operatorname{rank}H_1(Y,R^+)-\operatorname{rank}H_2(Y,R^+)=b-a.$$

根据第 9.4.1 节，我们有空间 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{R}^+$ 的 CW 分解，它们分别与 $Y$ 和 $R^+$ 同伦等价。按照第 9.4.1 节的方式选取提升后，我们得到 $C_1^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{R}^+)$ 和 $C_2^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{R}^+)$ 的优选基元素 $e_i$；在这些基下，我们有一个亏格-$d$表示矩阵 $M_{\mathcal{H}}$，用于表示 $H_1(Y,\ R^+)$，其核为 $H_2(Y,\ R^+)$。这意味着以下事实；证明从略。

**引理 10.2**。 若 $H_2(Y,R^+)=0$，则 $H_1(Y,R^+)$的亏格-$d$表示矩阵 $M_{\mathcal{H}}$是单射；特别地，$d\geq 0$。若 $H_2(Y,R^+)\neq 0$，则矩阵 $M_{\mathcal{H}}$永远不是单射。

**定义 10.3**。 令 $d=-\chi(Y,R^+)$。定义取值于 $\mathbb{Z}[G]$ 的亚历山大函数

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}\colon\ \wedge^d_{\mathbb{Z}[G]}H_1(\overline{Y},\overline{R}^+)\to\mathbb{Z}[G],$$

其在相差一个（整体）乘以 $\pm G\subset\mathbb{Z}[G]$ 的意义下良定义，如下所述。若 $H_2(\overline{Y},\overline{R}^+)$ 非零，则定义 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y\Gamma}$为零函数。否则，$H_1(Y,R^+)$ 存在一个亏格-$\overline{d}$表示矩阵 $M$；在这种情况下，定义 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y\Gamma}(\overline{u_1}\wedge\cdots\wedge u_d)$ 如下。任选一种将 $u_i$ 表示为生成元的 $\mathbb{Z}[G]$-线性组合的表达式 $u_i$，由 $M$ 添上新的列 $u_1,\ldots,u_d$ 至右侧，构造一个方阵，并取其行列式，该行列式是 $\mathbb{Z}[G]$ 的一个元素。

**引理 10.4**。 亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y\Gamma}$，与用于计算行列式的代表元$u_1$、…、$u_d$的选择无关。

证明。引理 5.3 的证明在此情形下同样适用；只需在$\mathbb{Z}[G]$上而非 $\mathbb{Z}$上进行运算。□

**命题 10.5.** 除整体乘以 $\pm G \subset \mathbb{Z}[G]$外，定义 *10.3* 中的亚历山大函数$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}$，仅取决于有限表示的 $\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(Y, R^+)$ 及亏格 $d$，而不取决于单射表示矩阵$M$的具体选择。

证明。对于 $\mathbb{Z}[G]$ 系数，命题 5.4 的证明基本上可以沿用，只需做少量修改。对于步骤 ($\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma,M} \sim \mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma,M_1}$) 和 ($\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma,M_2} \sim \mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma,\widetilde{M}}$)：在任意交换环上，交换两列所得矩阵的行列式只相差一个符号。由于 $\pm 1 \in \pm G$，同样的论证在 $\mathbb{Z}[G]$ 上仍然成立。

对于 ($\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma,M_1} \sim \mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma,M_2}$)：当我们进行到最后一步时，

$$\det[M_1|\overline{u}_1 \cdots \overline{u}_d] = u \cdot \det[M_2|\overline{u}_1 \cdots \overline{u}_d],$$

对于 $u \in (\mathbb{Z}[G])^\times$，由于 $\mathbb{Z}[G]$中的单位群是 $\pm G$，因此亚历山大函数相差一个 $\pm G$ 中的元素的乘积，且该元素与 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$无关。□

在本节余下部分，假设我们为 $(Y, \Gamma)$ 配备一组规范化选择 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，如推论 2.22 所述。在这种情况下，我们处于第 9.4.2 节的设定中，因此有模 $H_1(F_0, S_0^+)$ 和 $H_1(F_1, S_1^+)$，分别带有优选的胞腔基 $e^{\mathrm{in}}$ 和 $e^{\mathrm{out}}$（一旦像上文那样选定胞腔提升）。将 $i_*$ 记作这两个映射之一

$$H_1(\overline{F}_i, \overline{S}_i^+) \to H_1(\overline{Y}, \overline{R}^+)$$

由对的包含映射 $i : (F_i, S_i^+) \to (Y, R^+)$ 对于 $i = 0, 1$ 诱导。

**命题 10.6**。存在一个 $\mathbb{Z}[G]$-线性映射

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y, \Gamma) \colon \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_0, \overline{S}_0^+) \to \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1, \overline{S}_1^+),$$

在乘以某个元素的意义下唯一 乘以 $\pm G$，且次数为 $c = n_1 + \chi(Y, R^+)$ 的齐次映射，使得 $t$

$$\omega(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y, \Gamma) \otimes \mathrm{id})(x \otimes y)) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}\left(\bar{i}_* x \wedge \bar{i}_* y\right),$$

其中 $x \in \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_0, \overline{S}_0^+)$、$y \in \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1, \overline{S}_1^+)$，映射

$$\wedge \colon \wedge^p_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1, \overline{S}_1^+) \otimes \wedge^q_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1, \overline{S}_1^+) \to \wedge^{n_1}_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1, \overline{S}_1^+)$$

在 $p + q = n_1$ 时将 $z \otimes w$ 映射到 $z \wedge w$，否则为零；$\omega$ 表示自由 $\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(F_1, S_1^+)$ 上任意的体积形式，张量积按超符号规则计算

$$(\mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y, \Gamma) \otimes \mathrm{id})(x \otimes y) = (-1)^{|\mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)||y|} \mathsf{A}_{\mathbb{Z}[G]}(Y, \Gamma)(x) \otimes y$$

其中 $|\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[G]}(Y, \Gamma)| = c$，亚历山大函子 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}$ 在 $\wedge^{d'} H_1(Y, R^+)$ 上的输入对 $d' \neq d$ 定义为零。

证明。经过以下调整后，命题 5.5 的证明仍然成立：分别将每个 $F_i$、$S_i^+$、$Y$ 和 $R^+$ 替换为 $F_i$、$S_i^+$、$Y$ 和 $R^+$，使用 $\mathbb{Z}[G]$-系数，将 $i_*$ 替换为 $i_*$，并将 $\mathbb{Z}$-基元素 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$ 替换为 $\wedge^* H_1(F_0, S_0^+)$ 和 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$

对于 $\wedge^* H_1(F_1,\ S_1^+)$，则使用我们首选的 $\mathbb{Z}[G]$-基元素 $-e_I^{\mathrm{in}}$（对应 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(F_0,\ S_0^+)$）和 $e_J^{\mathrm{out}}$（对应 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(F_1,\ S_1^+)$）。为方便起见，我们可以选择体积形式 $\omega$，使得

$$\omega(\overline{e}_1^{\mathrm{out}} \wedge \cdots \wedge \overline{e}_{n_1}^{\mathrm{out}}) = 1 \in \mathbb{Z}[G];$$

体积形式的任何其他选择都与 $\omega$ 相差 $\mathbb{Z}[G]$ 中的一个单位元，即 $\pm G$ 的一个元素，因此结论成立。□

**注释 10.7**。注意，我们的亚历山大函数 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y\Gamma}$，以及亚历山大函子 $\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[G]}(Y,\ \Gamma)$ 分别特化为 $\mathcal{A}^M_\varphi$ FM15 的亚历山大函数（定义 2.2]）以及 [FM15 第 2 节中的亚历山大函子 $\mathsf{A}(M,\ \varphi)$。事实上，只需假设注 5.6 的拓扑限制，并将 Florens-Massuyeau 的群“$G$”设为我们的自由阿贝尔群 $G = H/\mathrm{tors}(H)$，即可将它们作为特例恢复出来。

记

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}_{\mathrm{comb}}$$

表示沿 $\mathbb{Z}[H] \to \mathbb{Z}[G]$ 对 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}{}_{\mathrm{comb}}$ 进行的标量扩张。也就是说，

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}_{\mathrm{comb}} \coloneqq [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} 1_{\mathbb{Z}[G]},$$

这是一个映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}_{\mathrm{comb}} \colon \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_0,\widehat{S}_0^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \to \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G].$$

第 9.4.3 节确立了 $H_1(\widehat{F}_i,\ \widehat{S}_i^+)$ 在 $\mathbb{Z}[H]$ 上是自由生成的，因此我们有

$$\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \cong \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} \left( H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \right).$$

此外，和本节开头一样，我们有一个识别

$$H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \cong H_1(\overline{F}_i,\overline{S}_i^+). \tag{15}$$

将这些 合在一起，我们可以等价地将 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}{}_{\mathrm{comb}}$ 视为一个映

$$\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_0,\overline{S}_0^+) \to \wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(\overline{F}_1,\overline{S}_1^+),$$

与亚历山大函子 $\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)$类似。

**定理 10.8.** 上文定义的映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}{}_{\mathrm{comb}}(Y,\Gamma)$ 与 $\mathsf{A}^{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)$相差一个 $\pm G$ 的乘数。

证明。证明与定理 5.7 的证明非常相似。按照映射的定义$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}{}_{\mathrm{comb}}(Y,\Gamma)$，固定将 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔提升到 $\widehat{\mathfrak{Y}}\setminus\widehat{\mathfrak{R}}^+$ 的胞腔的提升，从而确定参考 Spin$^c$ 结构$\mathfrak{s}_{J^c,I}$ 以及识别

$$\Phi_i \colon \wedge^* H_1(F_i,S_i^+) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\cong} \wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+).$$

令 $\gamma_I^{\mathrm{in}}$和 $\gamma_J^{\mathrm{out}}$分别为 $\wedge^* H_1(F_0,S_0^+)$ 和 $\wedge^* H_1(F_1,S_1^+)$ 的基元素。令$k = |I|$ 和 $l = |J|$，并假设 $l = k + c$，其中 $c = n_1 + \chi(Y,R^+)$ 与通常相同。我们有相应的基元素 $-\widehat{e}_I^{\mathrm{in}} \coloneqq \Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}} \otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$，它们属于 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_0,\widehat{S}_0^+)$，以及 $-\widehat{e}_J^{\mathrm{out}} \coloneqq$

$\Phi_1(\gamma_J^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})$ 属于 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)$。令 $e_I^{\mathrm{in}}$ 和 $e_J^{\mathrm{out}}$ 为 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]}H_1(F_0,S_0^+)$ 和 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]}H_1(F_1,S_1^\pm)$ 的基元素，分别对应于方程 (15) 中识别下的 $\widehat{e}_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]}$ 和 $\widehat{e}_J^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]}$。

令 $\omega_{\mathbb{Z}}$ 表示 $H_1(F_1,S_1^+)$ 上由 $\omega_{\mathbb{Z}}(\gamma_1^{\mathrm{out}}\wedge\cdots\wedge\gamma_{n_1}^{\mathrm{out}})=+1$ 定义的体积形式。通过与 $\mathbb{Z}[H]$ 作张量积，我们在自由的 $\mathbb{Z}[H]$-模 $H_1(F_1,S_1^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[H]$ 上得到体积形式 $\omega_{\mathbb{Z}[H];\,\mathrm{concrete}}$。通过 $\Phi_1$，我们在自由的 $\mathbb{Z}[H]$- 模 $H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)$ 上得到体积形式 $\omega_{\mathbb{Z}[H]}$。与 $\mathbb{Z}[G]$ 在 $\mathbb{Z}[H]$ 上作张量积，得到自由的 $\mathbb{Z}[G]$-模 $H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Z}[G]$ 上的体积形式；利用方程 (15)，我们将其与 $H_1(F_1,S_1^+)$ 视为相同。我们将 $H_1(F_1,S_1^+)$ 上由此得到的体积形式选作 $\omega$。

我们将计算

$$\omega(\wedge([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}_{\mathrm{comb}}\otimes\mathrm{id}))(-\overline{e}_I^{\mathrm{in}}\otimes-\overline{e}_{J^c}^{\mathrm{out}}) \tag{16}$$

并证明结果与 $\mathcal{A}_Y^{\mathbb{Z}[G]}{}_{,\Gamma}\left(\imath_*(-e_I^{\mathrm{in}})\wedge i_*(-e_{J^c}^{\mathrm{out}})\right)$ 相同，相差一个与 $I$ 和 $J$ 无关的整体符号（定理陈述中更一般的 $\pm G$歧义仍然是必要的，因为我们已固定了到达此处所需的提升选择）。注意，量 (16) 与

$$\begin{aligned}
&\omega\left(\wedge\left(([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\otimes\mathrm{id}\right)((-\widehat{e}_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\otimes(-\widehat{e}_{J^c}^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]}))\right)\\
&=\omega\Big(\wedge\left(((\Phi_1\circ[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;concrete}}\circ\Phi_0^{-1})\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\otimes\mathrm{id}\right)\\
&\quad(\Phi_0(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\otimes(\Phi_1(\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\Big)\\
&=(-1)^{ck}\omega\Big((\Phi_1([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\wedge(\Phi_1(\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]})\Big)\\
&=(-1)^{ck}\omega\Big(\Phi_1\Big(([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))\wedge(\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})\Big)\otimes 1_{\mathbb{Z}[G]}\Big)\\
&=(-1)^{ck}\left[\omega_{\mathbb{Z}[H]}\Big(\Phi_1\Big(([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))\wedge(\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})\Big)\Big)\right]_{\mathbb{Z}[G]}\\
&=(-1)^{ck}\left[\omega_{\mathbb{Z}[H];\,\mathrm{concrete}}\Big(([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;\,concrete}}(\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}))\wedge(\gamma_{J^c}^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]})\Big)\right]_{\mathbb{Z}[G]}
\end{aligned}$$

相同，相差一个与 $I,J$无关的整体符号，其中第三步采用了我们的超符号约定。因此，相差一个与 $I,J$无关的符号，(16) 等于 $(-1)^{ck+\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}})}$ 乘以映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;concrete}}$ 的矩阵元 $E\in\mathbb{Z}[H]$，该矩阵元位于第 $\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$ 列和第 $\gamma_J^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$ 行，并经由从 $\mathbb{Z}[H]$到 $\mathbb{Z}[G]$的商映射传递。

根据推论 9.18，对于满足 $(Y,\Gamma_{J^c,I})$ 弱平衡 $(|J|=|I|+c)$ 的 $I,J$，$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb;concrete}}$ 在第 $\gamma_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$ 列、第 $\gamma_J^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Z}[H]}$ 行的矩阵元 $E$ 为

$$E=(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_{JJ^c\leftrightarrow\mathrm{std}})+n_1k+ak}\det\widehat{A}$$

$\widehat{\ }$相差 $I,J$无关的符号，其中 $A$是链复形的边界映射 $\partial_2$的矩阵，该链复形对应于 $(\widehat{\mathfrak{Y}}_{J^c,I},\widehat{\mathfrak{R}}^+_{J^c,I})$，其基由表示该

固定类 $\mathfrak{l} \in$ 提升$(\mathfrak{Y}_{J^c,I}, \mathfrak{R}^+_{J^c,I})$，它对应于参考 Spin$^c$ 结构 $\mathfrak{s}_{\mathrm{ref}} = -\mathfrak{s}_{J^c,I} \in$Spin$^c(Y, \partial Y, -v_{J^c,I})$；其中使用 $\mathfrak{s}_{J^c,I}$来计算 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\ \Xi_{\mathfrak{s}})]^{\mathbb{Z}[H]}$组合；具体。如同

$$\begin{array}{c} \\ \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^c \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha^{\mathrm{out}}_{J^c} & \alpha^c & \alpha^{\mathrm{in}}_I \end{array} \\ \begin{bmatrix} -*_{J^c} & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & *_I \end{bmatrix} \end{array},$$

其中$\widehat{\ }$中间的三个块是矩阵 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$，而 $*_{J^c}$ 和 $*_I$ 的元素都与定理 5.7 中一样，取值为 0 或 1。因此 (16) 等于

$$(-1)^{ck+n_1k+ak} \det \begin{bmatrix} & \begin{array}{ccc} \alpha^{\mathrm{out}}_{J^c} & \alpha^c & \alpha^{\mathrm{in}}_I \end{array} \\ \begin{array}{c} \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^c \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array} & \begin{bmatrix} -*_{J^c} & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & *_I \end{bmatrix} \\ & \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}[G]} =: (-1)^{ck+n_1k+ak} \det \widehat{A}_{\mathbb{Z}[G]}$$

差一个 $I, J$无关的符号。

证明现在分为两种情况。假设 $H_2(Y, R^+) \neq 0$。根据定义，$\mathrm{A}^{\mathbb{Z}[G]}(Y,\Gamma)$ 是零映射。另一方面，引理 10.2 表明 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 不是单射；等价地，$M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的列线性相关。因此，$A_{\mathbb{Z}[G]}$ 的列$\widehat{\ }$线性相关。由于 $\mathbb{Z}[G]$ 是定义域，我们有 $\det A_{\mathbb{Z}[G]} = 0$。由此可知，对于所有 $I$和 $J$，(16) 都为零，因此 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\ \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$组合$= 0$。

因此，假设相反，$H_2(Y,\ \overline{R^+}) = 0$。那么 $M_{\overline{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}}$是单射。根据命题 10.5，我们可以自由选择表示矩阵 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$来计算 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}\left(\bar{i}_*(-\bar{e}^{\mathrm{in}}_I) \wedge \bar{i}_*(-\bar{e}^{\mathrm{out}}_{J^c})\right)$；根据第 9.4.3 节中的讨论，我们可以用.....来理解 $i_*(-e^{\mathrm{in}}_I)$ 和 $i_*(-e^{\mathrm{out}}_{J^c})$

$$i_* : H_1^{\mathrm{cell}}(\overline{\mathfrak{F}}_i, \overline{\mathfrak{S}}_i^+) \to H_1^{\mathrm{cell}}(\overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{R}}^+).$$

我们得到

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}[G]}_{Y,\Gamma}\left(\bar{i}_*(-\bar{e}^{\mathrm{in}}_I) \wedge \bar{i}_*(-\bar{e}^{\mathrm{out}}_{J^c})\right) = \det \begin{bmatrix} & \begin{array}{ccc} \alpha^c & \alpha^{\mathrm{in}}_I & \alpha^{\mathrm{out}}_{J^c} \end{array} \\ \begin{array}{c} \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^c \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array} & \begin{bmatrix} * & 0 & -*_{J^c} \\ * & 0 & 0 \\ * & -*_I & 0 \end{bmatrix} \\ & \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}[G]}$$

$$= (-1)^{ck+n_1k+ak} \det \begin{bmatrix} & \begin{array}{ccc} \alpha^{\mathrm{out}}_{J^c} & \alpha^c & \alpha^{\mathrm{in}}_I \end{array} \\ \begin{array}{c} \beta^{\mathrm{out}} \\ \beta^c \\ \beta^{\mathrm{in}} \end{array} & \begin{bmatrix} -*_{J^c} & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & *_I \end{bmatrix} \\ & \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}[G]}$$

与定理 5.7 的证明中一样，相差一个与 $I, J$ 无关的符号。因此，量 (16) 与 $\mathcal{A}_Y^{\mathbb{Z}[G]},\Gamma\left(i_*(-e_I^{\mathrm{in}}) \wedge i_*(-\bar{e}_{J^c}^{\mathrm{out}})\right)$ 相等，至多相差一个与 $I$ 和 $J$ 无关的整体符号，正如所需。□

由于我们已将 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[G]}$组合与一个除以 $\pm G$ 的乘法因子外独立于 $\Xi_{\mathrm{norm}}$选择集的量联系起来，因此可以定义如下不变量。

**定义 10.9**。 设 $(Y,\ \Gamma)$ 是一个缝合余边。我们定义

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]_{\mathrm{comb}}^{\mathbb{Z}[G]}$$

为映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]_{\mathrm{comb}}^{\mathbb{Z}[G]}\colon\ \wedge_{\mathbb{Z}[G]}^* H_1(\overline{F}_0,\overline{S^+}_0) \to \wedge_{\mathbb{Z}[G]}^* H_1(\overline{F}_1,\overline{S^+}_1)$$

对于任意如推论 4.15 中的 $\Xi_{\mathrm{norm}}$ 选择。根据定理 10.8，该映射在乘以 $\pm G$ 的意义下是良定义的。

**注 10.10**。 反之，假设在本节中我们始终在 $\mathbb{Z}[H]$ 上工作，而不是在 $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[H/\text{t}$ ors$(H)]$，上工作，从而允许 $H$ 中存在挠元。回顾一下，在这种情况下，环$\mathbb{Z}[H]$ 一般不是整环；这给第 10.1 节最直接的推广带来了如下问题。如注 1.25 所述，如果 $H_2(Y,\ R^+) \neq 0$，我们便不能再像定理 10.8 的证明中那样论证：$\mathbb{Z}[H]$- 线性相关性会迫使所有极大子式在 $\mathbb{Z}[H]$ 上消失（即行列式在 $\mathbb{Z}[H]$ 上消失），因此，即使能够在此情形下定义亚历山大函子，所期望的主要结果也只会在 $H_2(Y,\ R^+) = 0$ 时成立。

幸运的是，也恰恰在 $H_2(Y,\ R^+) = 0$ 时，第 9.4.1 节中的表示矩阵 $M_{\mathcal{H}}$ for $H_1(Y,\ R^+)$ 是单射；在这一限制下，受命题 10.2 启发、类似 Schanuel 引理的论证也得以成立。因此，实际上可以得到一个取值于 $\mathbb{Z}[H]$ 的亚历山大函数 $\mathcal{A}_{Y\,\Gamma}^{\mathbb{Z}[H]}$，它在相差 $\mathbb{Z}[H]$ 中的单位元倍数意义下定义良好；同时还可得到相应的亚历山大函子 $\text{A}^{\mathbb{Z}[H]}(Y,\ \Gamma)$，其在相差 $\mathbb{Z}[H]$ 中的单位元倍数意义下唯一，并且与 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]_{\mathrm{comb}}^{\mathbb{Z}[H]}$ 在相差 $\mathbb{Z}[H]$ 中的单位元倍数意义下相同。熟悉的推理路线也会得出一个类似于定义 10.9 的不变性陈述，但这一陈述以及此前所有陈述都附带一个条件：对于底层输入配边 $(Y,\ \Gamma)$，$H_2(Y,\ R^+)$ 必须为零。

这个限制性版本并非人们所能期望的最强理论。在 $\mathbb{Z}[H]$ 上进行研究的另一项困难是，其单位元通常表现不佳；注1.21指出了一种可能的处理方法，但本文不予探讨。转向下文的 $\mathbb{Q}[H]$ 后，我们便能够处理满足 $H_2(Y,\ R^+) \neq 0$ 的配边 $(Y,\ \Gamma)$，使亚历山大函子在此情形下的消失行为更加明确（见注释 10.17），并对单位元歧义作出更严格的控制。这些改进最终依赖于 $\mathbb{Q}[H]$ 的结构理论。

**10.2. 关于 $\mathbb{Q}[H]$ 上的亚历山大函子。**本节给出了定义 9.19 中构造的映射与 Florens–Massuyeau 风格的亚历山大函子之间最一般的比较。我们继续假设 $Y$ 是连通的。

沿袭 Reidemeister 和 Turaev 挠元理论，当 $H$ 有挠元时，$\mathbb{Z}[H]$ 不是定义域；一种标准的应对方法是改为在 $\mathbb{Q}[H] \supset \mathbb{Z}[H]$ 上工作，因为它可以典范地分解为定义域的直和。假设存在这样的分解，我们将逐分量地定义亚历山大函数，最终再将这些分量组合起来，定义一个在相差 $\mathbb{Q}[H]$ 中单位元的倍数意义下唯一的亚历山大函子。这样便能恢复足够的代数控制，使我们得以在 $H_2(\widehat{Y},\ \widehat{R}^+) \neq 0$ 的情形下，与 $[\widehat{\text{BSDA}}(Y,\ \Gamma;\ \Xi_{\text{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}$ 组合建立有意义的联系。

令 $T := \text{tors}(H)$，并固定 $H$ 的一个分裂，使其成为 $T \oplus G$（具体而言，即一个同态 $s\colon H \to T$，满足 $s|_T = \text{id}_T$）。与引言中一样，固定一组 $(\chi_1, \ldots\ldots, \chi_m)$，作为特征 $\chi_i\colon T \to \mathbb{C}^*$ 在等价关系模下的代表元。这些特征唯一地延拓为环同态 $\chi_i\colon \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{C}$，其像是分圆域 $\mathbb{F}_{\chi_i}$。根据群环的泛性质，每个 $\chi_i$ 都唯一确定一个环同态

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[T][G] &\to \mathbb{F}_{\chi_i}[G] \\ \sum_{g\in G} r_g g &\mapsto \sum_{g\in G} \chi_i(r_g)\, g. \end{aligned}$$

将其与同构 $\mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}[T][G]$ 复合，该同构将 $h$ 送至 $s(h)[h]$，其中 $[h]$ 是 $G = H/T$ 中 $h$ 的等价类，得到一个典范环同态

$$\varphi_i\colon \mathbb{Z}[H] \to \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$$

从而使 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 成为一个 $\mathbb{Z}[H]$-代数。注意，不同的分裂 $H \cong T \oplus G$ 选择会产生不同的代数作用。与引言中一样，存在一个 $\mathbb{Q}$-代数（以及 $\mathbb{Z}[H]$-模）的同构

$$\mathbb{Q}[H] \xrightarrow{(\varphi_i)_i} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{F}_{\chi_i}[G]. \tag{17}$$

**定义 10.11.** 令

$$H_*(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]) := H_*(C_*^{\text{sing}}(\widehat{Y}, \widehat{R}^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H]).$$

对于每个 $i$，令

$$H_*(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) := H_*(C_*^{\text{sing}}(\widehat{Y}, \widehat{R}^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{F}_{\chi_i}[G]),$$

其中，$\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 上的 $\mathbb{Z}[H]$-模结构由分裂 $H \cong T \oplus G$ 的一个选择确定（因此 $H_*(Y,\ R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 取决于这一分裂选择）。

注意，我们有一个关于 $\mathbb{Q}[H] \cong \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 的模的识别 $H_1(Y,\ R^+; \mathbb{Q}[H]) \cong \bigoplus_i H_1(Y,\ R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$；左侧的 $\mathbb{Q}[H]$ 作用通过同构 $(\varphi_i)_i$ 从 $\mathbb{Q}[H]$ 到 $\bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 与右侧的 $\bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 作用相互交织。因此我们

有一个同构

$$\wedge^d_{\mathbb{Q}[H]} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]) \cong \bigoplus_i \wedge^d_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]} H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \tag{18}$$

具有相同交织性质的 $\mathbb{Q}[H] \cong \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 上的模。

现在固定一组一般的（未归一化的）选择 $\Xi$，用于 $(Y, \Gamma)$，如定义 4.3 所述，其中包括一个 $\alpha$-$\alpha$ 带边界的 Heegaard 图 $\mathcal{H}$，用于 $(Y, \Gamma)$。根据第 3 节和第 9.4.1 节，我们有 CW 对 $(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+)$ 和 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$，以及一个相对胞腔链复形 $C_*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$，将其视为 $\mathbb{Z}[H]$–模上的链复形。通过以下方式引入扭曲系数

$$C^{\mathrm{cell}}_*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{Q}[H]) := C^{\mathrm{cell}}_*(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H]$$

and

$$C^{\mathrm{cell}}_*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) := C^{\mathrm{cell}}_*(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{F}_{\chi_i}[G],$$

我们得到典范识别

$$H_*(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]) \cong H_*(C^{\mathrm{cell}}_*(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+; \mathbb{Q}[H]))$$

and

$$H_*(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \cong H_*(C^{\mathrm{cell}}_*(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]))).$$

回顾第 9.4.1 节，链群 $C^{\mathrm{cell}}_*(\widehat{\mathfrak{Y}}, \widehat{\mathfrak{R}}^+)$（自由$\mathbb{Z}[H]$-模）在 $\mathbb{Z}[H]$ 上的一组基 $\{\widehat{e}_j\}$，可通过固定 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$ 中胞腔的优选提升而得到。由此，我们分别得到 $C^{\mathrm{cell}}_*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{Q}[H])$ 和 $C^{\mathrm{cell}}_*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 的链群的基 $\{\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}\}$ 和 $\{\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}\}$。

在 $\mathbb{Q}[H]$（分别地，对每个 $1 \le i \le n$，在 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$）上，相对于这些固定的基 $\{\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}\}$（分别地，$\{\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}\}$），胞腔微分对应一个矩阵 $\widehat{M}^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathcal{H}}$（分别地，$\widehat{M}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{\mathcal{H}}$）

$$\widehat{\partial}^{\mathbb{Q}[H]}_2 \colon C^{\mathrm{cell}}_2(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{Q}[H]) \to C^{\mathrm{cell}}_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{Q}[H])$$

and

$$\widehat{\partial}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_2 \colon C^{\mathrm{cell}}_2(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \to C^{\mathrm{cell}}_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]).$$

**注 10.12.** 我们有

$$H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]) \cong \mathrm{coker} \widehat{M}^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathcal{H}}$$

and

$$H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \cong \mathrm{coker} \widehat{M}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{\mathcal{H}};$$

利用这些识别，我们可以将公式（18）中的同构具体理解如下。$C^{\mathrm{cell}}_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{Q}[H])$ 的基元素 $\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}$ 的 $\mathbb{Q}[H]$-线性组合被映射到直和中的一个元素，其第 $i$ 个连通分支是 $C^{\mathrm{cell}}_1(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 的基元素 $\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 的线性组合，其系数由原始$\mathbb{Q}[H]$ 系数经环同态 $\varphi \colon \mathbb{Q}[H] \to \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$作用后得到。

现在，根据亚历山大函数的定义，$\widehat{M}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{\mathcal{H}}$ 是 $H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$的一个有效的亏格-$d$表示矩阵；当 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$时，它是单射，

因为它的核可识别为 $H_2(Y,\ R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])$。我们在下文记录这一事实，并省略熟知的推导过程。

**引理 10.13**。对于每个 $1\le i\le m$，若 $H_2(Y,R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G])=0$，则 $d\ge 0$，且亏格-$d$ 表示矩阵 $\widehat{M}_{\mathcal{H}}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 对于 $H_2(Y,R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 是单射。若 $H_2(Y,R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G])\neq 0$，则 $\widehat{M}_{\mathcal{H}}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 永远不是单射。

**定义 10.14**。设 $d=-\chi(Y,\ R^+)$。给定 $H$ 的一个固定分解 $T\oplus G$，对于 $1\le i\le n$，定义 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$-值亚历山大函数

$$\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}\colon\ \wedge^d_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}H_1(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])\to\mathbb{F}_{\chi_i}[G],$$

其在整体乘以 $(\mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G)\ \subset\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 中的元素后定义良好，如下所示。若$H_2(Y,\ R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])\neq 0$，则定义 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},$ 为零函数。否则，$H_1(Y,\ R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 存在一个亏格-$d$ 表示矩阵 $\widehat{M}$，因此 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},(u_1\wedge\cdots\wedge u_d)$ 可按如下方式定义。任取$u_i$ 将 $u_i$ 表示为生成元的 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$-线性组合的表达式，$\widehat{\ }$通过在 $M$右侧添加新列 $u_1,\dots,u_d$ 构造一个方阵，并取其行列式，即 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$的一个元素。我们将 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},(u_1\wedge\cdots\wedge u_d)$ 定义为$\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$中的这个元素。

与前面的情形一样，亚历山大函数 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},(u_1\wedge\cdots\wedge u_d)$ 不依赖于 $u_i$ 的代表元 $u_i$ 的选择；引理 5.3 的证明在使用 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 系数时同样适用。

**命题 10.15**。给定将 $H$ 固定分解为 $T\oplus G$，则除以 $\mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G\subset\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 作整体乘法外，定义 *10.14* 的亚历山大函数 $\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},$ 仅取决于有限表示的 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$-模 $H_1\left(Y,R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G]\right)$ 及亏格 $d$，而不取决于具体选择的单射表示矩阵 $M$。

证明。命题 10.5 的证明在此情形下基本上仍然成立，只需作少许修改。对于步骤 $(\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},,\widehat{M}\sim\mathcal{A}_{Y\Gamma\,\widehat{M}_1},,)$ 和 $(\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},,\widehat{M_2}\sim\mathcal{A}_{Y\Gamma\,\widehat{\widehat{M}}},,)$：注意到 $\pm1$ 属于 $\mathbb{F}^*_{\chi i}$，因为 $\mathbb{F}_{\chi_i}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的子域，因此交换列后的行列式比较在相差一个 $\pm1\cdot e_G\in\mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G$ 中元素的意义下成立。对于步骤 $(\mathcal{A}_{Y\Gamma}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},,\widehat{M_1}\sim\mathcal{A}_{Y\Gamma\,\widehat{M_2},}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]},)$，我们有

$$\det[M_1|\overline{u}_1\cdots\overline{u}_d]=u\cdot\det[M_2|\overline{u}_1\cdots\overline{u}_d]$$

其中 $u\in(\mathbb{F}_{\chi_i}[G])^\times$。由于 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 中的单位群是 $\mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G$，亚历山大函数相差一个乘数为 $\mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G$ 的元素，且该元素与 $u_1\wedge\cdots\wedge u_d$无关。□

回想一下，对于交换积环 $R=\prod_i^n R_i$，单位元构成一个子群 $(R)^\times=(\prod_i^n R_i)^\times=\prod_i^n(R_i)^\times$。也就是说，$R$的单位元是元组 $(u_1,\dots,u_n)$，使得每个 $u_i$ 都是 $R_i$中的单位。在方程 (17) 的识别下，这意味着$\mathbb{Q}[H]=\bigoplus_{i=1}^m\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 中的单位群是

$$(\mathbb{Q}[H])^\times=\left(\prod_{i=1}^m\mathbb{F}_{\chi_i}[G]\right)^\times=\prod_{i=1}^m(\mathbb{F}_{\chi_i}[G])^\times=\prod_{i=1}^m\mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G$$

也就是说，它们是元组 $(u_1,\dots,u_m)$，其中每个 $u_i \in \mathbb{F}^*_{\chi_i}\cdot G$。

**定义 10.16**。定义 $\mathbb{Q}[H]$值亚历山大函数

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y,\Gamma}\colon \wedge^d_{\mathbb{Q}[H]} H_1(Y,R^+;\mathbb{Q}[H]) \to \mathbb{Q}[H],$$

在 $\mathbb{Q}[H]$中相差一个单位元（整体）乘法的意义下良定义，即为复合

$$\begin{aligned}\wedge^d_{\mathbb{Q}[H]} H_1(Y,R^+;\mathbb{Q}[H]) &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_i \wedge^d_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]} H_1(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])\\ &\xrightarrow{\oplus_i \mathcal{A}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{Y,\Gamma}} \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G]\\ &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}[H]\end{aligned}$$

其中所有箭头均使用同一个分裂 $H \cong T\oplus G$来定义 .

**注释 10.17**。正如注 10.10 所预示的，这一定义表明，$\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y\Gamma}$ 的消失行为是逐分量确定的：当某个 $i$使得 $H_2(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G]) \neq 0$ 时，$\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y\Gamma}$,的 $i^{th}$ 分量函数为零；只有当某个 $j$ 使得 $H_2(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_j}[G]) = 0$ 时，才存在一个单射亏格-$d$表示矩阵对应于该 $j$，从而 $\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y\Gamma}$ ,的 $j^{th}$ 分量函数才能非平凡地作用。也就是说，当且仅当对所有 $1 \le i \le n$，$H_2(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 非零时，$\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y\Gamma}$ ,自动消失。下面定义的关于 $\mathbb{Q}[H]$ 的亚历山大函子也满足类似的消失判据；我们将在定理 10.21 的证明中使用这一判据。

**命题10.18**。选取另一个分裂 $H \cong T\oplus G$，并相应地固定 (17) 中新的识别。记$(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y\Gamma}$ ,$)'$ 为相对于这个新分裂定义的上述函数。那么，作为相差 $\mathbb{Q}[H]$ 中单位元倍数的映射，我们有

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y,\Gamma} = \left(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y,\Gamma}\right)'.$$

证明。这些分裂由满足 $s|_T = \mathrm{id}_T$ 和 $s'|_T = \mathrm{id}_T$ 的同态 $s,s'\colon H\to T$ 确定。由 $s$ 确定的环同态 $\varphi_i\colon \mathbb{Z}[H]\to \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 将 $\mathbb{Z}[H]$ 的一个基元素 $h$ 映为 $(\chi_i(s(h)))[h]\in \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$，其中 $[h]$ 表示 $h$ 在 $G=H/T$ 中的等价类。类似地，由 $s'$ 确定的环同态 $\varphi'_i\colon \mathbb{Z}[H]\to \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 将 $h$ 映为 $(\chi_i(s'(h)))[h]\in \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$。

将 $H$ 写成乘法地，映射 $s's^{-1}\colon H\to T$ 在 $T\subset H$上为零，因此可下降为映射 $u := s's^{-1}\colon G\to T$。换言之，对于 $h\in H$，我们有 $u([h]) = s'(h)s(h)^{-1}$。我们有

$$\begin{aligned}\varphi'_i(h) &= (\chi_i(s'(h))[h]\\ &= (\chi_i(u([h])s(h)))[h]\\ &= (\chi_i\circ u)([h])\chi_i(s(h))[h]\\ &= (\chi_i\circ u)([h])\varphi_i(h).\end{aligned}$$

定义 $\rho_i$: $\mathbb{F}_{\chi_i}[G] \to \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 如下：对于 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$的一个基元素 $g$，令 $\rho_i(g) = (\chi_i \circ u)(g)g$。我们有

$$\begin{aligned}\rho_i(g_1g_2) &= (\chi_i \circ u)(g_1g_2)g_1g_2\\ &= (\chi_i(u(g_1)))(\chi_i(u(g_2)))g_1g_2\\ &= \rho_i(g_1)\rho_i(g_2),\end{aligned}$$

因此 $\rho_i$是一个环同态；第二步用到 $u$: $G \to T$与 $\chi_i$: $T \to \mathbb{F}^*_{\chi_i}$都是群同态。事实上，$\rho_i$ 是从 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 到其自身的环同构；其逆为$\rho_i^{-1}(g) = ((\chi_i \circ u)(g))^{-1}g$。我们还有

$$\begin{aligned}(\rho_i \circ \varphi_i)(h) &= \rho_i((\chi_i(s(h)))[h])\\ &= (\chi_i(s(h)))\rho_i([h])\\ &= (\chi_i(s(h)))(\chi_i \circ u)([h])[h]\\ &= (\chi_i \circ u)([h])\varphi_i(h)\\ &= \varphi'_i(h),\end{aligned}$$

因此 $\varphi'_i = \rho_i \circ \varphi_i$与 $\varphi_i = \rho_i^{-1} \circ \varphi'_i$。

现在考虑与某个选择集 $\Xi$相关联的 CW 对 $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+)$。固定 $\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$ 的$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$胞腔到 $\mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{R}^+$的胞腔的提升，从而得到一个元素属于 $\mathbb{Z}[H]$的矩阵 $M_{\mathcal{H}}$。

我们首先证明，当 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 用 $s$ 定义时，$H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$ 当且仅当它在用 $s'$定义时为零。事实上，利用 $s$，我们有 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$ 当且仅当经由同态 $\varphi_i$ 定义的矩阵 $\widehat{M}_{\mathcal{H}}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 具有线性无关的列（在 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$上）。利用 $s$，我们有 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$ 当且仅当经由同态 $\varphi'_i$ 定义的矩阵$\widehat{M}_{\mathcal{H}}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 具有线性相关的列。由 $\varphi_i$ 确定元素的矩阵具有线性无关的列，当且仅当由 $\varphi'_i = \rho_i \circ \varphi_i$ 确定元素的矩阵具有线性相关的列，因为 $\rho_i$ 是从 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$到其自身的环同构。

现在令 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \in \wedge^d_{\mathbb{Q}[H]} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H])$。选取元素 $u_i$，使其属于 $C_1^{\text{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{Q}[H])$，并代表 $u_i \in H_1(Y, R+; \mathbb{Q}[H])$；每个 $u_i$ 都是基元素的 $\mathbb{Q}[H]$-线性组合 $\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}$。将环同态 $\varphi_i$ 或 $\varphi'_i$ 应用于系数后，我们得到基元素 $\widehat{e}_j \otimes 1_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 的 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$-线性组合，它们属于 $C_1^{\text{cell}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{R}^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$，并代表 $H_1(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G])$ 中的元素。根据注 10.12，这些元素就是定义 10.16 中由 $s$ 或 $s'$ 确定的第一个映射的各个连通分支。

我们接下来断言，对 $s'$ 到 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$应用定义 10.16 中的前两个映射，所得结果与先对 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$应用定义 10.16 中的前两个映射，再对结果的 $i^{th}$ 连通分支应用环同构 $\rho_i$: $\mathbb{F}_{\chi_i}[G] \to \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 所得结果相同。根据上述讨论，只需考虑满足 $H_2(Y, R^+; \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$ 的 $i$。在这种情况下，$\mathcal{A}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{Y\Gamma}$，（使用 $s$ 计算）是矩阵 $[(\widehat{M}_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H])|u_1 \cdots u_d]$ 的 $\mathbb{Q}[H]$ 行列式，其中各项已应用环同态 $\varphi_i$；而 $\mathcal{A}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{Y\Gamma}$，（使用 $s'$ 计算）则相同，¯只是¯对各项应用的是 $\varphi'_i$ 而非 $\varphi$。在后一种情况下，我们可以先应用

$\varphi_i$ 到各项，然后应用 $\rho_i$，最后取行列式。由于 $\rho_i$ 是环同态，这等同于对各项应用 $\varphi_i$，再取行列式，并将 $\rho_i$ 应用于所得结果，从而证明了这一断言。

现在我们分析定义 10.16 中最后一个映射。这个映射是从 $\mathbb{Q}[H]$ 到 $\bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 的同构 $(\varphi_i)_i$ or $(\varphi_i')_i$ 的逆。对于不取逆的同构，$s'$ 版本可由 $s$ 版本与下式作后复合得到

$$(\rho_i)_i \colon \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G] \to \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G].$$

因此，逆映射的 $s'$ 版本可由逆映射的 $s$ 版本与下式作前复合得到

$$(\rho_i^{-1})_i \colon \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G] \to \bigoplus_i \mathbb{F}_{\chi_i}[G].$$

由上述断言可知，定义 10.16 中三个映射在 $s$ 情形下的复合，与三个映射在 $s'$ 情形下的复合一致，正如所需。□

现在我们在 $\mathbb{Q}[H]$ 上定义一个亚历山大函子。本节余下部分中，设我们为 $(Y,\Gamma)$ 配备一组规范化选择 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，如推论 2.22 所述。在此情形下，我们处于第 9.4.2 节的设定中，因此有模 $H_1(\widehat{F}_0,\widehat{S}_0^+)$ 和 $H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)$，它们分别带有首选胞腔基 $\widehat{e}^{\mathrm{in}}$ 和 $\widehat{e}^{\mathrm{out}}$。

**定义 10.19.** 定义

$$H_*(F_i,S_i^+;\mathbb{Q}[H]) \coloneqq H_*(C_*^{\mathrm{sing}}(\widehat{F},\widehat{S}_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Q}[H]).$$

给定我们的选择 $\Xi_{\mathrm{norm}}$，若令

$$C_*^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{S}_i^+;\mathbb{Q}[H]) := C_*^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{F}}_i,\widehat{\mathfrak{S}}_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Q}[H],$$

则我们有一个典范同一

$$H_*(F_i,S_i^+;\mathbb{Q}[H]) \cong H_*(C_*^{\mathrm{cell}}(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{S}_i^+;\mathbb{Q}[H])),$$

注意到 $C_*^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{F}}_i,\ \widehat{\mathfrak{S}}_i^+)$ 中的微分为零，因此我们有典范识别

$$H_*(F_i,S_i^+;\mathbb{Q}[H]) \cong H_*(C_*^{\mathrm{cell}}(\widehat{\mathfrak{F}}_i,\widehat{\mathfrak{S}}_i^+))\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Q}[H] \cong H_*(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Q}[H].$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$如果我们选择将 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔提升到 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔上，就会（特别地）得到将 $\mathfrak{F}_i\setminus\mathfrak{S}_i^+$ 的胞腔提升到 $\widehat{\mathfrak{F}}_i\setminus\widehat{\mathfrak{S}}_i^+$ 的胞腔上的提升，从而得到识别

$$H_*(F_i,S_i^+;\mathbb{Q}[H]) \cong H_*(F_i,S_i^+)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}[H].$$

我们记

$$\widehat{i}_{\#}\colon C_1^{\mathrm{sing}}(\widehat{F},\widehat{S}^+) \to C_1^{\mathrm{sing}}(\widehat{Y},\widehat{R}^+)$$

由对的包含映射 $\widehat{i}\colon(\widehat{F},\ \widehat{S}^+) \to(\widehat{Y},\ \widehat{R}^+)$诱导的 $\mathbb{Z}[H]$-线性链映射。与 $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}[H]}$ 张量化得到一个映射

$$\widehat{i}_{\#}\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathrm{id}_{\mathbb{Q}[H]}\colon C_1^{\mathrm{sing}}(F,S^+;\mathbb{Q}[H]) \to C_1^{\mathrm{sing}}(Y,R^+;\mathbb{Q}[H]).$$

这在同调层面诱导出一个映射，给定为

$$\widehat{i}_* \coloneqq \left(\widehat{i}_{\#} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathrm{id}_{\mathbb{Q}[H]}\right)_* : H_1(F, S^+; \mathbb{Q}[H]) \to H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H]).$$

**命题 10.20.** 存在一个 $\mathbb{Q}[H]$-线性映射

$$\mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma)\colon \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_0, S_0^+; \mathbb{Q}[H]) \to \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$$

它在相差 $\mathbb{Q}[H]$ 中的单位元倍数的意义下唯一，且次数为 $c = n_1 + \chi(Y, R^+)$，定义如下：

$$\omega(\wedge(\mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma) \otimes \mathrm{id})(x \otimes y)) = \mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y,\Gamma}\left(\widehat{i}_* x \wedge \widehat{i}_* y\right),$$

其中 $x \in \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_0, S_0^+; \mathbb{Q}[H])$，$y \in \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$，映射

$$\wedge\colon \wedge^p_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H]) \otimes \wedge^q_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H]) \to \wedge^{n_1}_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$$

当 $p + q = n_1$ 时将 $z \otimes w$ 映射到 $z \wedge w$，否则映射为零；$\omega$ 表示自由 $\mathbb{Q}[H]$-模 $H_1(\widehat{F}_1, \widehat{S}_1^+) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H]$上的任意体积形式；映射的张量积按照超符号规则计算

$$(\mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma) \otimes \mathrm{id})(x \otimes y) = (-1)^{|\mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma)||y|} \mathsf{A}_{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma)(x) \otimes y$$

其中 $|\mathsf{A}^{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma)| = c$，亚历山大函子 $\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y\Gamma}$ ,在$\wedge^{dl} H_1(Y, R^+; \mathbb{Q}[H])$ 中对于 $d' \neq d$的输入定义为零。

证明。作出以下调整后，命题 10.6 的证明可直接推广到此情形：分别将 $F_i$、$S_i^+$、$Y$ 和 $R^+$ 替换为 $\widehat{F}_i$、$\widehat{S}_i^+$、$\widehat{Y}$ 和 $\overline{\widehat{R}^+}$，使用 $\mathbb{Q}[H]$-系数，将 $i_*$ 替换为 $\widehat{i}_*$，并将 $\mathbb{Z}[G]$-基元素 $e_I^{\mathrm{in}}$（对应 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(F_0, S_0^+)$）和 $\overline{e_J^{\mathrm{out}}}$（对应 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[G]} H_1(F_1, S_1^+)$）替换为我们所选的 $\mathbb{Q}[H]$-基元素 $\overline{\widehat{e}_I^{\mathrm{in}}} \otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}$（对应 $\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_0, S_0^+; \mathbb{Q}[H])$）和 $\widehat{e}_J^{\mathrm{out}} \otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}$（对应 $\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$）。不失一般性，我们选择体积形式 $\omega$ 使得

$$\omega((\widehat{e}_1^{\mathrm{out}} \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (\widehat{e}_{n_1}^{\mathrm{out}} \otimes 1)) = 1;$$

任何其他选择体积形式都将与 $\omega$ 相差 $\mathbb{Q}[H]$中的一个单位。结果得证。 □

我们即将陈述关于 $\mathbb{Q}[H]$ 的主定理。令 $[\widehat{\mathsf{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Q}[H]}_{\text{组合}}$ 表示定义 9.19 中定义的映射 $[\widehat{\mathsf{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\text{组合}}$ 沿典范包含映射 $\mathbb{Z}[H] \hookrightarrow \mathbb{Q}[H]$进行标量扩张。也就是说，

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Z}[H]}_{\mathrm{comb}} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} 1_{\mathbb{Q}[H]} \coloneqq [\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y, \Gamma; \Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathrm{comb}}.$$

这是一个映射

$$\left(\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_0, \widehat{S}_0^+)\right) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H] \to \left(\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]} H_1(\widehat{F}_1, \widehat{S}_1^+)\right) \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Q}[H],$$

我们可以将其视为一个映射

$$\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_0, S_0^+; \mathbb{Q}[H]) \to \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]} H_1(F_1, S_1^+; \mathbb{Q}[H])$$

其定义域和陪域与 $\mathsf{A}^{\mathbb{Q}[H]}(Y, \Gamma)$ 相同。

**定理 10.21.** 上文所述的映射 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Q}[H]}$ 组合与 $\mathsf{A}^{\mathbb{Q}[H]}(Y,\Gamma)$相同，至多相差 $\mathbb{Q}[H]$中的单位元乘子。

证明。 证明与定理 10.8 类似。按照定理 10.8 的证明，为 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔选取到 $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{R}^+$ 的胞腔的提升，使得我们有 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_0,\ \widehat{S}_0^+)$ 的基元素 $\widehat{e}_I^{\mathrm{in}}$ 和 $\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_1,\ \widehat{S}_1^+)$ 的基元素 $\widehat{e}_J^{\mathrm{out}}$。令 $\widehat{e}_I^{\mathrm{in};\mathbb{Q}[H]}$ 和 $\widehat{e}_J^{\mathrm{out};\mathbb{Q}[H]}$ 分别为 $\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]}H_1(F_0,\ S_0^+;\mathbb{Q}[H])$ 和 $\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]}H_1(F_1,\ S_1^+;\mathbb{Q}[H])$ 的基元素，它们在典范同构下分别对应于 $\widehat{e}_I^{\mathrm{in}}\otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}$ 和 $\widehat{e}_J^{\mathrm{out}}\otimes 1_{\mathbb{Q}[H]}$

$$\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]}H_1(F_i,S_i^+;\mathbb{Q}[H])\cong\left(\wedge^*_{\mathbb{Z}[H]}H_1(\widehat{F}_i,\widehat{S}_i^+)\right)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Q}[H].$$

令 $\omega_{\mathbb{Z}}$、$\omega_{\mathbb{Z}[H];\mathrm{concrete}}$ 和 $\omega_{\mathbb{Z}[H]}$ 如定理 10.8 的证明中所定义。将 $\omega_{\mathbb{Z}[H]}$ 在 $\mathbb{Z}[H]$ 上与 $\mathbb{Q}[H]$ 作张量积，得到自由 $\mathbb{Q}[H]$- 模上的一个体积形式

$$H_1(\widehat{F}_1,\widehat{S}_1^+)\otimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Q}[H]\cong H_1(F_1,S_1^+;\mathbb{Q}[H]).$$

我们将 $H_1(F_1,\ S_1^+;\mathbb{Q}[H])$ 上得到的体积形式作为 $\omega$ 的选取 .

我们将计算

$$\omega(\wedge([\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathrm{comb}}\otimes\mathrm{id}))(-\widehat{e}_I^{\mathrm{in};\mathbb{Q}[H]}\otimes-\widehat{e}_{J^c}^{\mathrm{out};\mathbb{Q}[H]}) \tag{19}$$

并证明该结果与 $\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Q}[H]}\left(\widehat{i}_*(-\widehat{e}_I^{\mathrm{in};\mathbb{Q}[H]})\wedge\widehat{i}_*(-\widehat{e}_{J^c}^{\mathrm{out};\mathbb{Q}[H]})\right)$ 相等，至多相差一个与 $I$ 和 $J$ 无关的整体符号。这是 $\mathbb{Q}[H]$ 中元素之间的等式；我们将对两边应用同构 $\mathbb{Q}[H]\xrightarrow{\varphi_i\ i}\bigoplus_i\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 来证明这一点，其中分裂 $H=T\oplus G$ 任取，然后检验对于每个 $i$，两边的 $\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$-分量相等。

与定理 10.8 的证明中一样，式 (19) 中的量与

$$(-1)^{ck+n_1k+ak}\det\begin{bmatrix} & \alpha_{J^c}^{\mathrm{out}} & \alpha^c & \alpha_I^{\mathrm{in}} \\ \beta^{\mathrm{out}} & -*_{J^c} & * & 0 \\ \beta^c & 0 & * & 0 \\ \beta^{\mathrm{in}} & 0 & * & *_I \end{bmatrix}_{\mathbb{Q}[H]} =: (-1)^{ck+n_1k+ak}\det\widehat{A}_{\mathbb{Q}[H]}$$

相差一个与 $I,J$ 无关的符号。令 $A$ 表示 $[\cdot]_{\mathbb{Q}[H]}$ 内的矩阵，则 $A_{\mathbb{Q}[H]}=[A]_{\mathbb{Q}[H]}$；$A$ 中间的块列（记为 $*$）构成矩阵 $M_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$。因此，若将 $\varphi_i$ 应用于式 (19) 中的量，可得 $(-1)^{ck+n_1k+ak}\det\widehat{A}_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$，其中 $\widehat{A}_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}:=[\widehat{A}]_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$（通过对 $A$ 中的各项应用 $\varphi_i$ 得到）。

首先考虑满足 $H_2(Y,R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])\neq 0$ 的 $i$；在这种情况下

$$\varphi_i\left(\mathcal{A}_{Y,\Gamma}^{\mathbb{Q}[H]}\left(\widehat{i}_*(-\widehat{e}_I^{\mathrm{in};\mathbb{Q}[H]})\wedge\widehat{i}_*(-\widehat{e}_{J^c}^{\mathrm{out};\mathbb{Q}[H]})\right)\right)=0$$

根据定义，因此我们要证明 $\det\widehat{A}_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}=0$。$\widehat{M}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$ 的核同构于 $H_2(Y,\ R^+;\mathbb{F}_{\chi_i}[G])$，我们假设它非零，因此 $A_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$ 的列在$\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$上线性相关。由于$\mathbb{F}_{\chi_i}[G]$ 是定义域，$\det A_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}=0$，得证。

现在考虑满足 $H_2(Y,\ R^+;\ \mathbb{F}_{\chi_i}[G]) = 0$的 $i$。在这种情况下，我们可以使用表示矩阵 $\widehat{M}^{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}_{\mathcal{H}_{\mathrm{norm}}}$来计算 $\varphi_i\left(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y,\Gamma}\left(\widehat{i}_*(-\widehat{e}^{\mathrm{in};\mathbb{Q}[H]}_I)\wedge\widehat{i}_*(-\widehat{e}^{\mathrm{out};\mathbb{Q}[H]}_{J^c})\right)\right)$。我们得到

$$\varphi_i\left(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}[H]}_{Y,\Gamma}\left(\widehat{i}_*(-\widehat{e}^{\mathrm{in};\mathbb{Q}[H]}_I)\wedge\widehat{i}_*(-\widehat{e}^{\mathrm{out};\mathbb{Q}[H]}_{J^c})\right)\right) = \det\begin{bmatrix} & \alpha^c & \alpha^{\mathrm{in}}_I & \alpha^{\mathrm{out}}_{J^c} \\ \beta^{\mathrm{out}} & * & 0 & -*_{J^c} \\ \beta^c & * & 0 & 0 \\ \beta^{\mathrm{in}} & * & -*_I & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{F}_{\chi_i}[G]}$$

$$= (-1)^{ck+n_1k+ak}\det\begin{bmatrix} & \alpha^{\mathrm{out}}_{J^c} & \alpha^c & \alpha^{\mathrm{in}}_I \\ \beta^{\mathrm{out}} & -*_{J^c} & * & 0 \\ \beta^c & 0 & * & 0 \\ \beta^{\mathrm{in}} & 0 & * & *_I \end{bmatrix}_{\mathbb{F}_{\chi_i[G]}},$$

与所期望的量 (19) 一致。 □

由于我们已经将 $[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Q}[H]}$ 梳与一个（在相差 $\mathbb{Q}[H]$ 中单位元的乘法意义下）不依赖于选择集 $\Xi_{\mathrm{norm}}$的量联系起来，因此我们可以定义如下不变量。

**定义 10.22.** 设 $(Y,\Gamma)$ 为一个缝合余边。我们定义

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma)]^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathrm{comb}}$$

为该映射

$$[\widehat{\mathrm{BSDA}}(Y,\Gamma;\Xi_{\mathrm{norm}})]^{\mathbb{Q}[H]}_{\mathrm{comb}}\colon\ \wedge^*_{\mathbb{Q}[H]}H_1(F_0,S_0^+;\mathbb{Q}[H])\to\wedge^*_{\mathbb{Q}[H]}H_1(F_1,S_1^+;\mathbb{Q}[H]).$$

对于如推论 4.15 中所述的 $\Xi_{\mathrm{norm}}$ 的任意选取。由定理 10.21，该映射在相差 $\mathbb{Q}[H]$ 中单位元的乘法意义下是良定义的。

## References

[Ati88] Michael Atiyah. 拓扑量子场论. 高等科学研究所´数学出版物, (68):175–186, 1988年.[BE17] Jonathan Brundan 与 Alexander P. Ellis. 幺半超范畴.《数学物理通讯》, 351(3):1045–1089, 2017年.[CGP23] Francesco Costantino、Sergei Gukov 与 Pavel Putrov. 非半单拓扑量子场论与 BPS $q$-级数. *SIGMA*《对称、可积性与几何：方法与应用》, 19:论文编号 010, 71, 2023年.[CHM08] Dorin Cheptea、Kazuo Habiro 与 Gw´ena¨el Massuyeau. 拉格朗日配边的函子性 LMO 不变量.《几何与拓扑》, 12(2):1091–1170, 2008年.[Don99] Simon K. Donaldson. 拓扑场论以及 Casson 与 Meng-Taubes 公式.《几何与拓扑专著》*2, 87-102*, 1999年.[DR22] Marco De Renzi. 非半单扩张拓扑量子场论.《美国数学会纪要》, 277(1364):v+161, 2022年.

[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 与 Victor Ostrik. 张量范畴，数学调查与专著第205卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2015年.[FJR09] Stefan Friedl、Andr´as Juh´asz 与 Jacob Rasmussen. 缝合 Floer 同调的去范畴化。《拓扑学杂志》4 (2011年), 第2期, 431–478, 2009年3月.[FM15] Vincent Florens 与 Gw´ena¨el Massuyeau. 三维流形的阿贝尔 Reidemeister 挠率的函子性扩张。《数学教学》, 61(1-2):161–209, 2015年.[FN91] Charles Frohman 与 Andrew Nicas. 经由拓扑量子场论的亚历山大多项式。载于微分几何、整体分析与拓扑学（新斯科舍省哈利法克斯，1990年），CMS 会议论文集第12卷，第27–40页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1991年.[GY25] Nathan Geer 与 Matthew B. Young. 由$U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$与 $U(1|1)$陈–西蒙斯理论得到的三维拓扑量子场论。《数学进展》, 460:论文编号 110044, 69, 2025年.[HLW17] Jennifer Hom、Tye Lidman 与 Liam Watson. 亚历山大模、塞弗特型与范畴化。《拓扑学杂志》, 10(1):22–100, 2017年1月.[HR15] Yang Huang 与 Vinicius G. B. Ramos. 带边 Heegaard Floer 同调上的拓扑分次。《量子拓扑》, 6(3):403–449, 2015年.[Juh06] Andras Juhasz. 全纯圆盘与缝合流形。《代数与几何拓扑》, 6:1429–1457, 2006年.[Ker03] Thomas Kerler. 同调拓扑量子场论以及经由霍普夫代数与编织理论得到的3维流形的亚历山大–Reidemeister 不变量。《加拿大数学杂志》, 55(4):766–821, 2003年.[KL01] Thomas Kerler 与 Volodymyr V. Lyubashenko. 带角三维流形的非半单拓扑量子场论，《数学讲义》第1765卷。施普林格出版社，柏林，2001年.[Les96] Christine Lescop. Casson–Walker 不变量的整体手术公式，《数学年刊研究》第140卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1996年.[Les98] Christine Lescop. Casson-Walker 不变量的求和公式。《数学发明》, 133(3):613–681, 1998年.[LOT08] Robert Lipshitz、Peter Ozsvath 与 Dylan Thurston. 带边 Heegaard Floer 同调：不变性与配对。《美国数学会纪要》254(2018年), 第1216号, 2008年10月.[LOT10] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsv´ath 与 Dylan P. Thurston. 作为态射空间的 Heegaard Floer同调。《量子拓扑》2(4):381–449, 2011年, 2010年5月.[LOT15] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsvath 与 Dylan P. Thurston. 带边 Heegaard Floer 同调中的双模。《几何与拓扑》, 19:525–724, 2015年.[Lur09] Jacob Lurie. 论拓扑场论的分类。载于《数学当前进展》，2008年，第129–280页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2009年.[Man24a] Andrew Manion. 去范畴化的希加德–弗洛尔理论以及 $E$ 与 $F$的作用。《量子拓扑》, 2024年. 数字对象标识符 10.4171/QT/204.[Man24b] Andrew Manion. 论 Heegaard Floer同调中某些高阶作用的去范畴化。《代数与几何拓扑》, 24(2):1157–1182, 2024年4月.[Man24c] Andrew Manion. 去范畴化的希加德–弗洛尔理论中带符号与分次的曲面粘合。《国际数学研究通知》, 2024(1):861–900, 2024年1月.[Mik15] Victor Mikhaylov. 解析挠率、三维镜像对称与超群陈–西蒙斯理论, 2015年. arXiv:1505.03130.[OS04a] Peter Ozsv´ath 与 Zolt´an Szab´o. 全纯圆盘与三维流形不变量：性质与应用。《数学年刊》, 159(3):1159–1245, 2004年5月.[OS04b] Peter Ozsv´ath 与 Zolt´an Szab´o. 闭三维流形的全纯圆盘与拓扑不变量。《数学年刊》, 159(3):1027–1158, 2004年5月.

[Pet18] Ina Petkova.带边 Heegaard Floer 同调的去范畴化。*JSG* 卷，16：期，2018年。[Zar09] Rumen Zarev. 缝合流形的带边 Floer 同调。2009年。预印本，arXiv:0908.1106。[Zar10] Rumen Zarev. 缝合 Floer 同调中的连接与粘合，2010年。预印本，arXiv:1010.3496。

North Carolina State University, Department of Mathematics, 2108 SAS Hall, Box 8205,Raleigh, NC 27695
电子邮箱地址: ajmanion@ncsu.edu

North Carolina State University, Department of Mathematics, 2108 SAS Hall, Box 8205,Raleigh, NC 27695电子邮箱地址: esrutter@ncsu.edu