arXiv:2602.13560v1 [math.AT] 14 Feb 2026

诺特环上持久模的投射常值分解

NADIYA UPEGUI KEAGY

Abstract. 持久模是拓扑数据分析的代数基础，通常作为域上偏序集的表示来研究。本文将持久模的结构理论与分解理论推广到诺特环上的幺左模这一更一般的情形。我们引入投射常值型模的概念，它是区间模的一种推广，有助于获得分解结果。我们刻画了以 A_n 型箭图、全序集及之字形偏序集为指标的逐点有限生成持久模存在投射常值分解的条件。我们的主要结果表明，此类分解存在当且仅当满足特定的代数判据：对于以箭图和之字形偏序集为指标的情形，须满足投射余极限条件（PCC）；对于以全序集为指标的情形，内部态射的余核须具有投射性。此外，我们推导出若干推论：对于有限生成投射模均为自由模的诺特环（例如主理想整环（PID）），经典区间分解存在。最后，我们在 Krull–Schmidt 框架下证明了不可分解投射常值分解的唯一性，并将区间分解的唯一性推广到整环上的持久模。

Introduction

持久模作为一种代数框架，起源于拓扑数据分析，用于编码空间的拓扑特征如何随滤过演变。持久模最初由应用拓扑学和数据分析中的问题所推动：它为每个参数值分配一个向量空间，并在线性映射之间建立联系，以反映由包含关系诱导的结构。最基本的例子之一是区间模，它们是分解结果的基本构件，也是持久性的条形码表示的基础。

持久模最初被定义为由线性映射连接的有限序列有限维向量空间，后来 Zomorodian 和 Carls- son 将其形式化为以自然数为索引的箭图表示，并将其与多项式环上的分次模联系起来 [18]。Cohen-Steiner、Edelsbrunner 和 Harer 将这一框架扩展到实数索引持久模，开启了对连续持久性的研究 [5]。随后，Carlsson 和 de Silva 引入了之字形模，并将其与 A_n 型箭图的有限维表示联系起来，从而将 Gabriel 定理和箭图表示论中的工具引入持久性领域 [4]。

近来，Botnan 和 Crawley-Boevey 为以全序集和之字形路径为索引的逐点有限维持久模建立了结构定理和区间分解定理 [3]。此外，Botnan 还证明了

以无限离散之字形偏序集 [2]为索引的持久模存在区间分解。我们还为以全序集和之字形偏序集为索引的持久模存在区间分解提供了其他构造性证明 [7]。

尽管持久模主要是在域上研究的，近期的工作已将这些研究扩展至更一般的系数环上的持久模。Luo 和 Henselman-Petrusek 建立了判定准则，用于确定主理想整环（PID）上逐点自由有限生成持久模是否存在区间分解；研究最初针对以有限线性箭图为指标的模 [11], ，随后扩展到以任意全序集为指标的模 [12]。

本文旨在将持久模的若干结构性结果推广至带幺元的诺特环 R 上的幺左模情形（注意，由于不会产生歧义，我们省略“幺左”这一限定语）。为此，我们引入区间模的一种广义概念，称为投射常值型模（见定义 1.6）。这种模的行为本质上相同：在区间内的指标处，它同构于某个固定的投射 R-模，而在其他地方为零，且非零分量之间存在同构。提出这一概念的一个动机是，区间模本身就是投射常值型模。

从根本上说，我们希望了解何时一个持久模可以分解为若干投射常值型模的内部直和，我们将其称为投射常值分解 （见定义 1.7）。本文证明，对于以 A_n-型箭图或之字形偏序集为指标的逐点有限生成持久模，当且仅当满足某些特定条件时，这种分解才存在；我们将这些条件称为投射余极限条件（*PCC*） （见定义 3.7）。我们还证明，以全序偏序集为指标的逐点有限生成持久模，当且仅当每个内部态射的余核都是投射模时，才存在投射常值分解。我们的主要贡献陈述于以下定理和推论中。

定理 A。 设 R 是一个带幺元的（不一定交换的）诺特环。设 $F\colon A_n \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成 A_n-持久模。假设 F 满足投射余极限条件（PCC）。则 F存在投射常值分解。

定理 B. 设 R 是一个含幺交换诺特环。设 $F:P \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成全序持久模。假设每个内部态射 $F_{x,y}$ 的余核都是投射的。那么 F 存在投射常值分解。

定理 C. 设 R 是一个含幺交换诺特环。设 $F\colon P \to R$-**模** 是一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的非零逐点有限生成之字形持久模。假设 F 满足投射余极限条件（PCC）。那么 F 存在投射常值分解。

关于具有有限极值点的之字形偏序集的定理 A 和定理 C 的证明，受到 Ringel 将 A_n-型箭图的表示分解为薄表示 [16] 的启发。定理 B 的证明推广了我们先前的论证

即证明了由全序集标记的域上持久模存在区间分解 [7, §6]。最后，对于具有无穷极值的之字形偏序集，定理 C 的证明调整了 Botnan 提出的方法，该方法用于分解由无限离散之字形偏序集 [2] 标记的域上持久模。

因此，对于以下关于区间分解存在性的推论，我们也有所贡献：除了是一个含幺（交换）诺特环之外，R 还具有如下性质：每个有限生成投射 R-模都是自由模。这类环的典型例子包括主理想整环、有限变量上的 PID 或域的多项式环、含幺局部诺特环，以及定义在含幺局部诺特环上的形式幂级数环。我们将在推论 1.11 中进一步讨论这些例子。

推论 D. 设 R 是一个（不一定交换的）含幺诺特环，并且每个有限生成投射 R-模都是自由模。设 $F : A_n \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成 A_n-持久模。假设 F 满足投射余极限条件（PCC）。那么 F 存在区间分解。

推论 E. 设 R 是一个含幺交换诺特环，并且每个有限生成投射 R-模都是自由模。设 $F : P \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成全序持久模。假设每个内部态射的余核$F_{x,\ y}$ 都是投射模。那么 F 存在区间分解。

推论 F. 设 R 是一个含幺交换诺特环，并且每个有限生成投射 R-模都是自由模。设 $F : P \to R$-**模** 是一个具有极值点 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$ 的非零逐点有限生成之字形持久模。假设 F 满足投射余极限条件（PCC）。那么 F存在区间分解。

在 R 为主理想整环的特定情形下，Luo 和 Henselman-Petrusek [12] 证明了推论 E。

我们提出以下定理，以确认在存在此类投射常数（分别为区间）分解时，所述条件确实是必要的。

定理 G。 设 R 是一个含幺诺特环（不一定交换）。设 $F : A_n \to R$-**模**是一个非零的逐点有限生成 A_n-持久模。假设 F 具有投射常值分解（分别地，区间分解）。那么 F 满足投射余极限条件（PCC）。

定理 H。 设 R 是一个含幺诺特环（不一定交换）。设 $F : P \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成全序持久模。假设 F 具有投射常值分解（分别地，区间分解）。那么每个内部态射 $F_{x,\ y}$的余核都是投射的。

定理 I。 设 R 是一个带单位元的（不一定交换的）诺特环。设 $F : P \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成之字形持久模，其极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$。假设 F 具有投射

常值（分别为区间）分解。那么 F 满足投射余极限条件（PCC）。

在 PID 上区间分解的特定情形下，Luo 和 Henselman-Petrusek 证明了定理 H [12]。

最后，我们为 Krull-Schmidt 范畴中的不可分解投射常值分解，以及整环上的区间分解，给出以下唯一性结果。

定理 J. 设 R 是一个（不一定交换的）含幺环。设 P是一个偏序集，并设 $F\colon P \to R$-**模**是一个非零持久模。假设R-**模** 是一个 Krull-Schmidt 范畴。如果 F 存在投射常值分解，那么 F 存在唯一的不可分解投射常值分解，且在同构和直和项的排列意义下唯一。

定理 K. 设 R 是一个整环。设 P 是一个小偏序范畴，并设 $F\colon P \to R$-**模** 是一个非零的逐点有限生成持久模。如果 F 存在区间分解，那么该分解在同构和直和项的排列意义下唯一。

定理 J 的证明运用了著名的 Krull-Remak-Schmidt-Azumaya 定理 [1], ，而定理 K 的证明则受到 Luo 和 Henselman-Petrusek 关于主理想整环上、以有限线性箭图为指标的逐点自由有限生成持久模之区间分解唯一性的证明的启发[11,§4，引理 1]。

本文结构安排如下：第 1 节和第 2 节介绍背景，并给出关于诺特环上持久模的技术性引理，这些内容将用于证明主要结果。第 3 节定义之字形偏序集和之字形持久模，并讨论它们的一些性质。定理 A 和推论 D 在第 4 节中针对 A_n-持久模予以证明；参见定理 4.3 和推论 4.4。定理 B 和推论 E 在第 5 节中针对全序持久模予以证明；参见定理 5.19 和推论 5.20。定理 C 和推论 F 分别在第 6 节中针对具有有限极值的之字形持久模（参见定理 6.1 和推论 6.2），以及在第 7 节中针对具有无穷极值的之字形持久模（参见定理 7.6、定理 7.7 和推论 7.8）予以证明。定理 G、H 和 I 说明了获得分解结果所需条件的必要性，均在第 8 节中证明；参见定理 8.3、8.4 和 8.5。关于唯一性的定理 J 和 K 在第 9 节中证明；参见定理 9.5 和 9.8。

本文基本上是自成一体的；我们只用到模论中的初等结果和佐恩引理。

1. Definitions and Notation

固定一个带幺元的诺特环 R ，并令 R-**Mod** 表示幺左 R-模的范畴。本文中，提及此类 R-模时，我们省略限定词“幺左”，因为上下文不会产生歧义。

定义 1.1. 一个 P-持久模 （或简称持久模）是一个函子$F\colon P \to R\text{-}\mathbf{Mod}$，其中固定偏序集范畴 P。按定义，以 P 为指标的持久模的态射 是函子之间的自然变换。持久模的直和、持久子模，以及将持久模限制到 P 的子偏序集，均按自然方式定义。

记号 1.2. 令 $\leq$ 表示偏序集 P 上的偏序关系。对于 $x \leq y$ 中的 P，将 R-模 $F(x)$ 记为 F_x，并将内部态射 $F(x \to y)$ 记为 $F_{x,y}$。由于 F 是一个函子，我们有 $F_{x,x} = \mathrm{id}_{F_x}$，并且对于任意 $x \leq y \leq z$，还有 $F_{y,z} \circ F_{x,y} = F_{x,z}$。对于这些内部态射，记 $\ker[x,y] = \ker(F_{x,y})$、$\mathrm{im}[x,y] = \mathrm{im}(F_{x,y})$ 和 $\mathrm{coker}[x,y] = \mathrm{coker}(F_{x,y})$。

定义 1.3. 设 P 是一个偏序集，且 $F\colon P \to R$-**模** 是一个持久模。如果对于每个 $x \in P$，F_x 都是有限生成的 R-模，则称 F 为逐点有限生成（有限生成投射）。

定义 1.4. 设 P 是一个偏序集，且 I 是 P 的一个子集。

(1) 我们称 I 是凸的，如果对于所有的 $x,\ y,\ z \in P$，只要 $x,\ z \in I$ 且 $x \leq y \leq z$，就有 $y \in I$。(2) 我们称 I 是连通的，如果对于所有的 $x,\ z \in I$，都存在 $y_0,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_n \in I$，使得

$$\begin{cases} y_0 = x, \\ y_n = z, \\ y_{i-1} \leq y_i \text{ or } y_{i-1} \geq y_i \text{ for each } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

(3) 如果 I 非空、凸且连通，我们称 I 为 P 中的一个区间。

定义 1.5。设 P 是一个偏序集，I 是 P 中的一个区间。给定一个 R-模 M，定义 $F(I,\ M)$ 如下：

(1) 对所有的 $x \in P$,

$$F(I,M)_x = \begin{cases} M & \text{if } x \in I, \\ 0 & \text{if } x \notin I; \end{cases}$$

(2) 对所有的 $x \leq y \in P$,

$$F(I,M)_{x,y} = \begin{cases} \mathrm{id}_M & \text{if } x, y \in I, \\ 0 & \text{if } x \notin I \text{ or } y \notin I. \end{cases}$$

定义 1.6。设 P 是一个偏序集。我们称一个以 P 为指标的持久模具有投射常值型，如果它与某个 I 中的区间 P 以及某个投射 R-模 M 所定义的 $F(I,\ M)$ 同构。

定义 1.7。设 P是一个偏序集，且设 $F\colon P \to R$-**模**是一个持久模。 F 的投射常值分解是一个内直和分解$F = \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} G$，其中 $\mathscr{A}$ 是 F 的持久子模集合，并且每个$G \in \mathscr{A}$ 都是投射常值型。

定义 1.8. 设 P 是一个偏序集。区间模是一个以 P为指标的持久模，且同构于某个区间 I在 P中的 $F(I,\ R)$。

定义 1.9. 设 P 是一个偏序集，并设 $F\colon P \to R$-**模**是一个持久模。 F 的区间分解是一个内直和分解$F = \bigoplus_{G\in\mathscr{A}} G$ ，其中 $\mathscr{A}$ 是 F 的持久子模集合，且其中每个$G \in \mathscr{A}$ 都是区间模。如果 F 存在区间分解，我们就称 F 是区间可分解的。

请注意，区间分解是投射常值分解的一个特例，因为 R 是自由的，因而是投射的。反过来，如果每个有限生成投射 R-模都是自由的，我们就得到以下有用的引理。

引理 1.10. 设 R 是一个含幺诺特环，且每个有限生成投射 R-模都是自由的。设 P 是一个偏序集，且 $F : P \to R$-模范畴 是一个有限生成投射持久模。假设 F 具有投射常值分解。那么 F 是区间可分解的。

证明。 设 $F = \bigoplus_{G\in\mathscr{A}} G$ 是 F 的一个投射常值分解。那么，每个 $G \in \mathscr{A}$ 都同构于 $F(I,\ M)$，其中 I 是 P 中的某个区间， M 是某个有限生成投射 R-模。根据假设， M 是自由的，因此 G 同构于若干个 $F(I,\ R)$ 的直和。于是，每个 G 都具有区间分解，这表明 F 是区间可分解的。□

下面的推论给出了一些满足引理 1.10 条件的显著环的例子。

推论 1.11. 设 R 是以下环之一：

(1) 主理想整环；(2) 有限个变量上的多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$，其中 k 是主理想整环或域；(3) 含幺局部（交换）诺特环；(4) 形式幂级数环 $S[[x]]$，其中 S 是含幺局部（交换）诺特环。

设 P 是一个偏序集，且 $F : P \to R$-模 是一个有限生成投射持久模。假设 F 存在投射常值分解。那么 F 可分解为区间直和。

证明。 由引理 1.10 及以下观察可立即得到：

（1）PID 上的每个投射 R-模都是自由的。（2）Quillen 和 Suslin 独立证明了：当 k 是 PID 或域时，多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 上的每个有限生成投射模都是自由的；这一结果现称为 Quillen–Suslin 定理 [15, 17]。此外，希尔伯特基定理保证了：当 k 是 PID 或域时， $k[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个含幺诺特环 [8]。（3）Kaplansky 证明了：在一个（不一定交换的）含幺局部环上，每个投射 R-模都是自由的 [9]。

（4）当 S 是一个含幺局部（交换）诺特环时， $S[[x]]$ 也是一个含幺局部（交换）诺特环。情形（3）表明，每个投射 $S[[x]]$-模都是自由的。

□

定义 1.12. 设 P 为一个偏序集且 $x \in P$。若不存在对于 $x \neq y$ 的态射 $x \to y$，则称指标 x 为汇 。对偶地，若不存在对于 $x \neq y$ 的态射 $y \to x$，则称指标 x 为源 。

2. Decomposition Criteria over Noetherian Rings

回顾可知，带有幺元的诺特环 R 上的有限生成投射模本身是诺特的，因此满足升链条件。这一性质反映了在诺特环上进行研究的主要动机，即施加获得分解结果所必需的有限性条件。在本节中，我们建立关于诺特 R-模的两个辅助结果。第一个结果表明，某些子模链必定是有限的；第二个结果则给出一般准则，用以将持久模分解为取自指定集合的子模的直和。

引理 2.1。 设 R 是含幺诺特环。设 M 是有限生成的投射 R-模，并设 S 是 M 的 R- 子模链。假设对于所有 $A \in S$， M/A 都是投射的。那么 S 是有限集。

证明。 由于 M 是诺特的，集合 S 有一个极大元，记为 A_1。现在，M/A_1 为投射的意味着，对于某个投射的 R- N_1 子模 M，有 $M = N_1 \oplus A_1$。

如果 $S = \{A_1\}$，则结论得证。否则，集合 $S \setminus \{A_1\}$ 有一个极大元，记为 A_2。我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow A_1/A_2 \hookrightarrow M/A_2 \twoheadrightarrow M/A_1 \longrightarrow 0.$$

由于 M/A_1 是投射的，该序列分裂，因此 A_1/A_2 是投射的，因为它是投射的 M/A_2 的一个直和项。特别地，存在 A_1 的一个非零 R- N_2 子模，使得 $A_1 = N_2 \oplus A_2$。

如果 $S = \{A_1, A_2\}$，我们就完成了。如果不是，就对 A_3 重复这一过程，依此类推。这个过程必定会在有限步后终止，否则

$$N_1 \subset N_1 \oplus N_2 \subset N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \subset \cdots$$

这将是 M 的 R-子模的无限升链，这与矛盾相悖，因为 M 满足升链条件。□

以下引理的证明基本上就是 [7, 引理 3.6]的证明，只是略微补充了断言 2.2.1。

引理 2.2. 设 R 是含幺诺特环。设 P 是偏序集，且 $F:\ P \to R$-模 是有限生成投射持久模。设 $\mathscr{E}$ 是 F的非零子模集合。假设对于 F的每个非零直和项 H ，都存在 H 的一个直和项 G ，使得 $G \in \mathscr{E}$。那么存在$\mathscr{E}$ 的一个子集 $\mathscr{A}$ ，给出 $F = \bigoplus_{G\in\mathscr{A}} G$的内直和分解。

证明。 令$\mathbf{S}$ 为所有满足以下条件的有序对 $(\mathscr{A}, H)$ 的集合:

$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{E}$的子集,

H 是 F的子模,

使得我们有一个内直和分解 $F = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{A}} G\right) \oplus H$。集合$\mathbf{S}$ 非空，因为 $(\emptyset, F) \in \mathbf{S}$。

在$\mathbf{S}$ 上定义偏序：若 $(\mathscr{A}, H) \leq (\mathscr{B}, J)$，则 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ 且

$$H = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{B}-\mathscr{A}} G\right) \oplus J.$$

断言 2.2.1。 对于 $\mathbf{S}$ 中的任意链 $\mathbf{T}$ 以及固定的 $x \in P$，存在一对 $(\mathscr{B}, J)$ 属于$\mathbf{T}$ ，使得对于所有属于 $\mathbf{T}$ 的 $(\mathscr{A}, H)$，都有 $J_x \subseteq H_x$。

断言 *2.2.1* 的证明。 反设不存在这样的数对 $(\mathscr{B}, J)$。任取 $(\mathscr{A}^1, H^1)$ 属于 $\mathbf{T}$。则存在 $(\mathscr{A}^2, H^2)$ 属于 $\mathbf{T}$，使得$H^2_x \subsetneq H^1_x$。由于 $\mathbf{T}$ 是一条链，因此 $(\mathscr{A}^1, H^1) \leq (\mathscr{A}^2, H^2)$ 或 $(\mathscr{A}^2, H^2) \leq (\mathscr{A}^1, H^1)$。后一种情况不可能，因为这将推出 $H^1 \subseteq H^2$。因此，$(\mathscr{A}^1, H^1) \leq (\mathscr{A}^2, H^2)$。

重复这一过程，我们得到一个无限序列

$$(\mathscr{A}^1, H^1), (\mathscr{A}^2, H^2), (\mathscr{A}^3, H^3), \ldots$$

在$\mathbf{T}$中。但于是

$$\bigoplus_{G\in\mathscr{A}^1} G_x \subset \bigoplus_{G\in\mathscr{A}^2} G_x \subset \bigoplus_{G\in\mathscr{A}^3} G_x \subset \cdots$$

这是由 F_x 的 R-子模构成的无限升链，与事实矛盾： F_x 是诺特的，满足升链条件。 □

命题 2.2.2. $\mathbf{S}$ 中的每条链都有一个上界。更确切地说:

对于$\mathbf{S}$中的任意链$\mathbf{T}$ ，令

$$\mathscr{C} = \bigcup_{(\mathscr{A},H)\in\mathbf{T}} \mathscr{A}, \qquad N = \bigcap_{(\mathscr{A},H)\in\mathbf{T}} H.$$

那么 $(\mathscr{C}, N)$ 属于$\mathbf{S}$，并且是$\mathbf{T}$的一个上界。

断言 *2.2.2* 的证明。 有两点需要检查:

(1) $F = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}} G\right) \oplus N$;

(2) $H = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}-\mathscr{A}} G\right) \oplus N$ for all $(\mathscr{A}, H) \in \mathbf{T}$.

因此，对于每个 $x \in P$，我们需要检查：

(1) $F_x = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}} G_x\right) \oplus N_x$;

(2) $H_x = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}-\mathscr{A}} G_x\right) \oplus N_x$ for all $(\mathscr{A}, H) \in \mathbf{T}$.

固定 $x \in P$。根据断言 2.2.1，我们可以选取一对 $(\mathscr{B}, J) \in \mathbf{T}$，使得对于所有 $(\mathscr{A}, H) \in \mathbf{T}$，都有 $J_x \subseteq H_x$。现在令 $(\mathscr{A}, H) \in \mathbf{T}$。我们作如下观察：

(a) If $(\mathscr{A}, H) \leq (\mathscr{B}, J)$, then

$$H_x = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{B}-\mathscr{A}} G_x\right) \oplus J_x;$$

因此 $J_x \subseteq H_x$。

(b) 若 $(\mathscr{B}, J) \leq (\mathscr{A}, H)$，则

$$J_x = \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{A}-\mathscr{B}} G_x\right) \oplus H_x.$$

上述等式表明 $H_x \subseteq J_x$。但同时 $J_x \subseteq H_x$，因此对于所有 $G \in \mathscr{A} - \mathscr{B}$，$J_x = H_x$ 且$G_x = 0$。

(c) 由 (a) 和 (b)，可得 $N_x = J_x$，且对于所有 $G \in \mathscr{C} - \mathscr{B}$，$G_x = 0$。

我们推得：

$$\begin{aligned} F_x &= \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{B}} G_x\right) \oplus J_x \\ &= \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}} G_x\right) \oplus N_x \qquad \text{by (c).} \end{aligned}$$

如果 $(\mathscr{A}, H) \leq (\mathscr{B}, J)$，那么

$$\begin{aligned} H_x &= \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{B}-\mathscr{A}} G_x\right) \oplus J_x \\ &= \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}-\mathscr{A}} G_x\right) \oplus N_x \qquad \text{by (c).} \end{aligned}$$

如果 $(\mathscr{B}, J) \leq (\mathscr{A}, H)$，那么

$$\begin{aligned} H_x &= J_x \qquad \text{by (b)} \\ &= \left(\bigoplus_{G\in\mathscr{C}-\mathscr{A}} G_x\right) \oplus N_x \qquad \text{by (c).} \end{aligned}$$

□

根据命题 2.2.2，我们可以应用佐恩引理，推得存在一对元素，记作 $(\mathscr{A}, H)$，它在 $\mathbf{S}$ 中是极大的。

假设 $H \neq 0$。那么根据假设，存在一个内直和分解 $H = G \oplus J$，其中 $G \in \mathscr{E}$。令 $\mathscr{B} = \mathscr{A} \cup \{G\}$。于是我们有 $(\mathscr{B},\ J) \in \mathbf{S}$ 且 $(\mathscr{A},\ H) < (\mathscr{B},\ J)$，这与 $(\mathscr{A},\ H)$ 的极大性矛盾。

因此 $H = 0$。所以 $F = \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} G$ 是所需的分解。 □

3. Zigzag Posets

本节首先给出之字形偏序集的精确定义，借此引入之字形持久模。随后，我们将介绍若干观察结果和定义；这些内容对于本文中处理之字形持久模至关重要，其中包括投射余极限条件（PCC），它们是我们部分主要结果的基础。

记号 3.1. 我们用 Γ表示以下集合之一：

(1) 一个有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$，适用于 $n \geq 2$;
(2) 非负整数集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$；或 (3) 整数集合 $\mathbb{Z}$。

以下之字形偏序集的定义摘自 [7, 定义 7.2]。

定义 3.2。设 P 是一个偏序集。设 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$ 是由 P 中的元素构成、以 Γ 为指标的序列（见记号 3.1）。如果存在集合 P 上满足以下条件的全序 $\sqsubseteq$，则称 P 为具有极值点的之字形偏序集 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$:

(1) 对所有 $i,\ j \in \Gamma$:

$$i < j \quad \Longrightarrow \quad z_i \sqsubset z_j;$$

(2) 对所有 $x,\ y \in P$:

$$x \leq y \quad \Longrightarrow \quad \text{there exists } i \in \Gamma \text{ such that } \begin{cases} i+1 \in \Gamma, \\ z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq z_{i+1}, \\ z_i \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}; \end{cases}$$

(3) 或者：

$$\begin{aligned} &\text{for all } i \in \Gamma \text{ such that } i+1 \in \Gamma, \\ &\text{for all } x, y \in P \text{ such that } z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}: \\ &\begin{cases} i \text{ is odd} \quad \Longrightarrow \quad x \leq y, \\ i \text{ is even} \quad \Longrightarrow \quad y \leq x, \end{cases} \end{aligned}$$

or:

$$\begin{aligned}&\text{for all } i \in \Gamma \text{ such that } i+1 \in \Gamma,\\ &\text{for all } x, y \in P \text{ such that } z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}\text{:}\\ &\begin{cases} i \text{ is odd} & \Longrightarrow \quad y \leq x, \\ i \text{ is even} & \Longrightarrow \quad x \leq y. \end{cases}\end{aligned}$$

在这种情况下，我们称之为 $\sqsubseteq$ 相关全序。

引理 3.3. 设 P 是一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的之字形偏序集。设 $\sqsubseteq$是相关全序。则有如下结论。

(1) 对所有 $x \in P$，存在 $i \in \Gamma$ 使得 $i+1 \in \Gamma$ 且 $z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq z_{i+1}$。

(2) 对所有满足 $x \leq y$的 x、$y \in P$，以及所有满足以下条件的 $i \in \Gamma$

$$x \sqsubseteq z_i \sqsubseteq y \quad or \quad y \sqsubseteq z_i \sqsubseteq x,$$

我们有 $x = z_i$ 或 $y = z_i$。

(3) 对于所有满足 $x \leq y \leq z$ 的 $x, y, z \in P$，我们有

$$x \sqsubseteq y \sqsubseteq z \quad or \quad z \sqsubseteq y \sqsubseteq x.$$

证明。 参见 [7,引理 7.3]。 □

引理 3.4。 设 P 是一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$ 的之字形偏序集。设 $\sqsubseteq$ 是与之关联的全序。设 I 是 P 的非空子集。则以下陈述等价:

(1) I 是偏序集 P 中的一个区间。(2) 对于所有满足 $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z$ 的 $x, y, z \in P$，当 $x, z \in I$ 时，我们有 $y \in I$。

证明。 参见 [7, 引理 7.4] □

上述引理实际上保证了我们对之字形偏序集的定义能够如预期般发挥作用。

记号 3.5. 设 P 为极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$ 的之字形偏序集。设 $\sqsubseteq$ 为相关全序。给定 P 中的 $x \sqsubseteq y$，我们用下列记号表示 P 中的以下区间（当这些子集非空时）：

(1) $[x, y] = \{z \in P \mid x \sqsubseteq z \sqsubseteq y\}$;
(2) $[x, y) = \{z \in P \mid x \sqsubseteq z \sqsubset y\}$;
(3) $(x, y] = \{z \in P \mid x \sqsubset z \sqsubseteq y\}$;
(4) $(x, y) = \{z \in P \mid x \sqsubset z \sqsubset y\}$。

特别地，当 $x = y$ 时，我们有 $[x, x] = \{x\}$。

定义 3.6。 设 P 为一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的之字形偏序集。函子$F : P \to R$-**Mod** 称为具有极值点 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的之字形持久模，或更一般地，称为之字形持久模。

定义 3.7。设 P 为一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的之字形偏序集。设 $\sqsubseteq$为相关全序。若之字形持久模 $F : P \to R\text{-}\mathbf{Mod}$满足以下条件，则称其满足投射余极限条件 *(PCC)*：对于所有指标 $x \sqsubseteq y$ in P,

(**C1**) colim($F|_{[x,y]}$) 是投射的；(**C2**) coker($F_x \to$ colim($F|_{[x,y]}$)) 是投射的；(**C3**) coker($F_y \to$ colim($F|_{[x,y]}$)) 是投射的；(**C4**) coker($F_x \oplus F_y \to$ colim($F|_{[x,y]}$)) 是投射的。

引理 3.8. 设 $F: P \to R$-模 是一个有限生成 *zigzag* 持久模，其极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$，并满足 *PCC*。设 $\leq$ 为偏序，$\sqsubseteq$ 为相关全序。那么：

(1) 对于每个 $x \in P$, F_x 都是有限生成投射 R-模；(2) 对于 P 中的每个 $x \leq y$，*coker*($F_{x,y}$) 都是投射的；(3) F 的任意直和项也满足 *PCC*。

证明。（1）当 $x = y$ 时，由 (**C1**) 立即可得。

(2) 如果 $x \leq y$ 且 $x \sqsubseteq y$，那么 colim($F|_{[x,y]}$) $= F_y$，因此 (**C2**) 推出 coker($F_{x,y}$) 是投射的。类似地，如果 $x \leq y$ 且 $y \sqsubseteq x$，那么 colim($F|_{[y,x]}$) $= F_y$，因此 (**C3**)推出 coker($F_{x,y}$) 是投射的。

(3) 这由如下事实得出：余极限与余积以及范畴 R-**Mod** [14, §2.7 中的余核可交换, 推论 2]。特别地，F是逐点有限生成的这一点至关重要，这样如果 $F = \oplus_{G \in \mathscr{A}} G$ 是 F 的一个分解，那么对于任意固定的 $x \in P$，只有有限多个 G_x 非平凡。□

本节最后，我们引入之字形持久模的峰这一概念，并介绍一些关于峰的有用观察，这些观察将在本文后续部分中用到。我们的定义改编自 Ringel 关于 Dynkin 箭图表示论的研究 [16]。

定义 3.9. 设 F: $P \to R$-**模** 是一个极值点为$\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的之字形持久模。设 $\sqsubseteq$ 为相关全序。若对所有态射 $y \to z$: 均满足以下条件，则称指标 $x \in P$ 为F 的峰：

(1) 当 $y \sqsubseteq z \sqsubseteq x$ 或 $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$时，映射 $F_{y,\ z}$ 为单射；(2) 当 $z \sqsubseteq y \sqsubseteq x$ 或 $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z$时，映射 $F_{y,\ z}$ 为满射。

引理 3.10. 设 P是一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$的之字形偏序集。

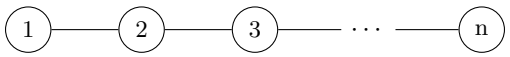
(1) 若 $F : P \to R$-模 是定义在区间 I *in* P上的投射常值型之字形持久模，则 F在每个 $x \in I$处都有一个峰。(2) 以 x 为峰的、由 P 索引的之字形持久模的直和，也以 x为峰。(3) 若 $F : P \to R$-模 是一个以 x 为峰的之字形持久模，则 F 的任一直和项也以 x 为峰。

证明。 由定义 3.9 以及单射和满射相对于直和与直和项的性质，很容易验证上述结论。□

4. A_n-Persistence Modules

An A_n-持久模（当 $n \geq 2$ 时）是具有有限极值的之字形持久模的特例（见定义 3.6）。本节中关于 A_n-持久模的投射常值分解的结果，对于建立第 5 节中关于全序持久模以及第 6 和第 7 节中关于之字形持久模的后续结果至关重要。因此，我们专门用一整节讨论这一特例。此外， A_n-持久模与 A_n 型箭图表示十分相似，不过前者还具有由持久性背景带来的额外结构。

定义 4.1. 给定一个类型为 A_n 的箭图，其对应于简单边 Dynkin 图　　m



我们可以将 A_n 视为一个偏序集，其元素为 $\{1, 2, \ldots, n\}$，偏序由 $\leq$表示。函子 $F : A_n \to R$-**模** 是一个 A_n-持久模。容易看出，具有 $n \geq 2$ 的 A_n-持久模实际上是一个具有有限极值的之字形持久模，其相关全序 $\sqsubseteq$是整数指标的自然全序（见定义 3.2 和 3.6）。

定义 4.2. 设 $F : A_n \to R$-**模** 是一个 A_n-持久模。若 F满足投射余极限条件（*PCC*），则称其满足：

(1) 当 $n = 1$: F_1 是一个投射 R-模时；(2) 当把 $n \geq 2$: F 视为之字形持久模时，它满足 PCC（见定义 3.7）。

上述定义需要谨慎理解，因为严格来说， A_1-持久模并不是之字形持久模。不过，这些条件与定义 3.7 中给出的条件显然相符。

我们现在证明本节的主要结果，即定理 A。证明仿照 Ringel 对 A_n 型箭图 [16] 表示的分解。

定理 4.3。 设 $F : A_n \to R$-模 是满足 *PCC* 的非零有限生成投射 A_n-持久模。那么 F 具有投射常值分解。

证明。 我们将对 n 进行归纳。 $n = 1$ 的情形是一个单独的投射R-模 F_1，因此显然属于投射常值型。

对于 $n = 2$，这对应于只有一个映射的情形：$F_{1,\,2} : F_1 \to F_2$ 或 $F_{2,\,1} : F_2 \to F_1$。不失一般性，考虑情形 $F_{1,\,2} : F_1 \to F_2$。根据引理 3.8，$\mathsf{coker}[1,2]$ 是投射的，因此 $F_2 = \mathsf{im}[1,2] \oplus G_2$，其中 R 是某个子模。此外，由于 $\mathsf{im}[1,2]$ 是 F_2 的直和项，$F_1/\mathsf{ker}[1,2] \cong \mathsf{im}[1,2]$ 是投射的。因此，$F_1 = \mathsf{ker}[1,2] \oplus G_1$，其中 R 是某个子模，且 $G_1 \cong \mathsf{im}[1,2]$。我们按以下方式分解 F。

$$\begin{array}{ccc} F_1 & & F_2 \\ \| & & \| \\ \ker[1,2] & & \\ \oplus & & \\ G_1 & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{im}[1,2] \\ & & \oplus \\ & & G_2 \end{array}$$

图中的每一行都表示 F 的一个投射常值型子模。因此， F 具有投射常值分解。

现在令 $n \geq 3$，并假设归纳假设对 $n-1$ 以内的情形成立。将 F 视为之字形持久模时，令 $\sqsubseteq$ 为相关全序。

命题 4.3.1。对于任意固定的 x，使得 $1 \sqsubset x \sqsubset n$，持久模 F 可写为 $F = G \oplus H \oplus J$，其中 H 以 x 为峰（见定义 3.9），G 的支撑在 $\{1, \ldots, x-1\}$ 中，而 J 的支撑在 $\{x+1, \ldots, n\}$ 中。

命题 *4.3.1* 的证明。固定 $1 \sqsubset x \sqsubset n$。根据归纳假设， $F|_{[1,x]} = G' \oplus H'$，其中 G' 和 H' 分解为投射常值型持久模的直和， $G'_x = 0$，且 H' 以 x 为峰（见引理 3.10 ）。

同样，根据归纳假设， $F|_{[x,n]} = H'' \oplus J''$ 其中 H'' 和 J'' 可分解为投射常值型持久模的直和， $J''_x = 0$，且 H'' 以 x 为峰。由于 $G'_x = 0 = J''_x$，我们必有 $F_x = H'_x = H''_x$。按如下方式定义持久子模 G、 H和 J：

$$G_y = \begin{cases} G'_y & \text{if } y \sqsubset x, \\ 0 & \text{if } y \sqsupseteq x; \end{cases} \qquad H_y = \begin{cases} H'_y & \text{if } y \sqsubset x, \\ H''_y & \text{if } y \sqsupseteq x; \end{cases} \qquad J_y = \begin{cases} 0 & \text{if } y \sqsubset x, \\ J''_y & \text{if } y \sqsupseteq x. \end{cases}$$

于是 $F = G \oplus H \oplus J$ 就是所需的分解。 □

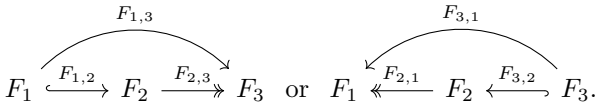
将命题 4.3.1 应用于 F（针对 $x = 2$），可写为 $F = G \oplus H \oplus J$，其中 H 在 2 处有一个峰， G 的支撑位于 $\{1\}$中，而 J 的支撑位于 $\{3, \ldots, n\}$中。

再次将命题 4.3.1 应用于 H（针对 $x = n-1$），可写为 $H = G \oplus H \oplus J$，其中 H 在 $n-1$处有一个峰， G 的支撑位于 $\{1, \ldots, n-2\}$中，而 J 的支撑位于 $\{n\}$中。特别要注意， H 在 2 处也有一个峰，因为它是 H 的一个直和项（见引理 3.10）。

由此得到一个分解 $F = G \oplus G \oplus H \oplus J \oplus J$。现在，根据引理 3.8， G， G， J和 J满足 PCC，因此根据归纳假设，它们都存在投射常值分解。接下来需要证明 H 存在投射常值分解，其中 H 的峰位于 2 和 $n-1$。

当 $n \geq 4$时， H 在 2 与 $n-1$ 之间的所有内部态射实际上都是同构。因此，我们只需证明任意具有峰位于 2 的 A_3-持久模 F 都存在投射常值分解。为此，我们根据 F中态射可能的配置，分别讨论三种情况。

情形 1. 考虑具有如下图的全序 A_3-持久模：



不失一般性，我们将针对左侧图证明这些结果。注意，$F_{1,2}$ 是单射，而 $F_{2,3}$ 是满射，因为 F 在 2 处有一个峰。

由引理 3.8 可知，$\mathsf{coker}[1,3] = F_3/\mathsf{im}[1,3] \cong F_2/(\mathsf{im}[1,2] + \mathsf{ker}[2,3])$ 是投射的，$F_2/\mathsf{ker}[2,3] \cong F_3$ 是投射的，并且 $\mathsf{coker}[1,2] = F_2/\mathsf{im}[1,2]$ 是投射的。我们有以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{im}[1,2]}{\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]} \hookrightarrow \frac{F_2}{\ker[2,3]} \twoheadrightarrow \frac{F_2}{\mathrm{im}[1,2] + \ker[2,3]} \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \frac{\ker[2,3]}{\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]} \hookrightarrow \frac{F_2}{\mathrm{im}[1,2]} \twoheadrightarrow \frac{F_2}{\mathrm{im}[1,2] + \ker[2,3]} \longrightarrow 0.$$

两个序列均分裂，这意味着 $\mathsf{im}[1,2]/(\mathsf{im}[1,2] \cap \mathsf{ker}[2,3])$ 和 $\mathsf{ker}[2,3]/(\mathsf{im}[1,2] \cap \mathsf{ker}[2,3])$ 是投射的。此外，我们有以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3] \hookrightarrow \mathrm{im}[1,2] \twoheadrightarrow \frac{\mathrm{im}[1,2]}{\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]} \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3] \hookrightarrow \ker[2,3] \twoheadrightarrow \frac{\ker[2,3]}{\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]} \longrightarrow 0.$$

两个序列均分裂，从而对于某些 R-子模 G，K 和 H，得到以下分解和同构：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{im}[1,2] = (\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]) \oplus G;\\
&\ker[2,3] = (\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]) \oplus K;\\
&\mathrm{im}[1,2] + \ker[2,3] = (\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]) \oplus G \oplus K;\\
&F_2 = (\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]) \oplus G \oplus K \oplus H;\\
&F_3 \cong H \oplus G;\\
&F_1 \cong \mathrm{im}[1,2].
\end{aligned}$$

因此，我们可以按如下方式分解 F。

$$\begin{array}{ccccc}
F_1 & \xhookrightarrow{F_{1,2}} & F_2 & \xrightarrow{F_{2,3}} & F_3\\
\| & & \| & & \|\\
 & & H & \xrightarrow{\cong} & F_{2,3}(H)\\
 & & \oplus & & \oplus\\
F_{1,2}^{-1}(G) & \xrightarrow{\cong} & G & \xrightarrow{\cong} & F_{2,3}(G)\\
\oplus & & \oplus & & \\
F_{1,2}^{-1}(\mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3]) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{im}[1,2] \cap \ker[2,3] & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & K & &
\end{array}$$

图中的每一行都表示 F 的一个投射常值类型子模。因此， F 存在一个投射常值分解。

情形 2。 考虑如下图所示的 A_3-持久模。

$$F_1 \xhookrightarrow{F_{1,2}} F_2 \xhookleftarrow{F_{3,2}} F_3$$

注意， $F_{1,\ 2}$ 和 $F_{3,\ 2}$ 都是单射，因为 F 在 2 处有一个峰。我们有 $\mathsf{colim}(F|_{[1,3]}) = F_2$，并且 $\mathsf{coker}[1,2]$ 和 $\mathsf{coker}[3,2]$ 根据引理 3.8 都是投射的。此外，

$$\operatorname{coker}(F_1 \oplus F_3 \to F_2) = \frac{F_2}{\operatorname{im}[1,2] + \operatorname{im}[3,2]}$$

根据**(C4)**，且是投射的。我们有以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \frac{\operatorname{im}[1,2]}{\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]} \hookrightarrow \frac{F_2}{\operatorname{im}[3,2]} \twoheadrightarrow \frac{F_2}{\operatorname{im}[1,2] + \operatorname{im}[3,2]} \longrightarrow 0;$$
$$0 \longrightarrow \frac{\operatorname{im}[3,2]}{\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]} \hookrightarrow \frac{F_2}{\operatorname{im}[1,2]} \twoheadrightarrow \frac{F_2}{\operatorname{im}[1,2] + \operatorname{im}[3,2]} \longrightarrow 0.$$

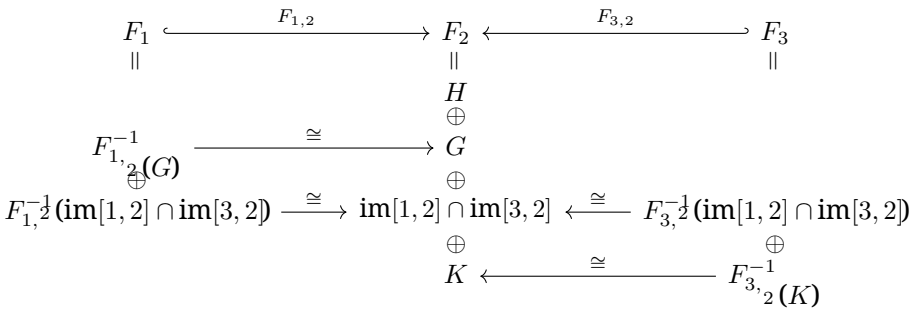
两个序列都分裂，因此 $\mathsf{im}[1,2]/(\mathsf{im}[1,2] \cap \mathsf{im}[3,2])$ 和 $\mathsf{im}[3,2]/(\mathsf{im}[1,2] \cap \mathsf{im}[3,2])$ 都是投射的。此外，我们有以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2] \hookrightarrow \operatorname{im}[1,2] \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{im}[1,2]}{\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]} \longrightarrow 0;$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2] \hookrightarrow \operatorname{im}[3,2] \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{im}[3,2]}{\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]} \longrightarrow 0.$$

两个序列都分裂，从而得到以下分解和同构，其中 R-子模为 G， K 和 H：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{im}[1,2] = (\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]) \oplus G;\\
&\operatorname{im}[3,2] = (\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]) \oplus K;\\
&\operatorname{im}[1,2] + \operatorname{im}[3,2] = (\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]) \oplus G \oplus K;\\
&F_2 = (\operatorname{im}[1,2] + \operatorname{im}[3,2]) \oplus H = (\operatorname{im}[1,2] \cap \operatorname{im}[3,2]) \oplus G \oplus K \oplus H;\\
&F_1 \cong \operatorname{im}[1,2];\\
&F_3 \cong \operatorname{im}[3,2].
\end{aligned}$$

因此，我们可以按以下方式分解 F。



图中的每一行都表示 F 的一个投射常值类型子模。因此， F 存在投射常值分解。

情形 3. 考虑如下图所示的 A_3-持久模。

$$F_1 \xleftarrow{F_{2,1}} F_2 \xrightarrow{F_{2,3}} F_3$$

注意，由于 F 在 2 处有一个峰，因此 $F_{2,1}$ 和 $F_{2,3}$ 都是满射。我们有余极限$(F|_{[1,3]}) = (F_1 \oplus F_3)/E$，其中 $E = \{(F_{2,1}(a) - F_{2,3}(a)) : a \in F_2\}$。由引理 3.8， $F_2/\mathsf{ker}[2,1] \cong \mathsf{im}[2,1] = F_1$ 是投射的，同理， $F_2/\mathsf{ker}[2,3] \cong \mathsf{im}[2,3] = F_3$ 也是投射的。此外，

$$\frac{F_1 \oplus F_3}{E} \cong \frac{F_2}{\ker[2,1] + \ker[2,3]}$$

并且根据**(C1)**是投射的。我们有以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \frac{\ker[2,1]}{\ker[2,1] \cap \ker[2,3]} \hookrightarrow \frac{F_2}{\ker[2,3]} \twoheadrightarrow \frac{F_2}{\ker[2,1] + \ker[2,3]} \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \frac{\ker[2,3]}{\ker[2,1] \cap \ker[2,3]} \hookrightarrow \frac{F_2}{\ker[2,1]} \twoheadrightarrow \frac{F_2}{\ker[2,1] + \ker[2,3]} \longrightarrow 0.$$

两个序列均分裂，因此 $\mathsf{ker}[2,1]/(\mathsf{ker}[2,1] \cap \mathsf{ker}[2,3])$ 和 $\mathsf{ker}[2,3]/(\mathsf{ker}[2,1] \cap \mathsf{ker}[2,3])$ 是投射的。此外，我们有以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \ker[2,1] \cap \ker[2,3] \hookrightarrow \ker[2,1] \twoheadrightarrow \frac{\ker[2,1]}{\ker[2,1] \cap \ker[2,3]} \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \ker[2,1] \cap \ker[2,3] \hookrightarrow \ker[2,3] \twoheadrightarrow \frac{\ker[2,3]}{\ker[2,1] \cap \ker[2,3]} \longrightarrow 0.$$

两个序列均分裂，对于某些 R-子模 G， K 和 H，可得以下分解和同构：

$$\begin{aligned}&\text{核}[2,1]=(\text{核}[2,1]\cap\text{核}[2,3])\oplus G;\ \text{核}[2,3]=(\text{核}[2,1]\cap\text{核}[2,3])\oplus K;\\&\text{核}[2,1]+\text{核}[2,3]=(\text{核}[2,1]\cap\text{核}[2,3])\oplus G\oplus K;F_2=(\text{核}[2,1]+\text{核}\\&[2,3])\oplus H=(\text{核}[2,1]\cap\text{核}[2,3])\oplus G\oplus K\oplus H;F_1\cong F_2/\text{核}\\&[2,1]\cong K\oplus H;F_3\cong F_2/\text{核}[2,3]\cong G\oplus H.\end{aligned}$$

因此，我们可以按以下方式分解 F。

$$\begin{array}{ccccc}
F_1 & \xleftarrow{F_{2,1}} & F_2 & \xrightarrow{F_{2,3}} & F_3 \\
\| & & \| & & \| \\
 & & G & \xrightarrow{\cong} & F_{2,3}(G) \\
 & & \oplus & & \oplus \\
F_{2,1}(H) & \xleftarrow{\cong} & H & \xrightarrow{\cong} & F_{2,3}(H) \\
\oplus & & \oplus & & \\
F_{2,1}(K) & \xleftarrow[\cong]{} & K & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & \ker[2,1]\cap\ker[2,3] & &
\end{array}$$

图中的每一行都表示 F 的一个投射常值类型子模。因此， F 具有投射常值分解。□

我们由以下结果推导出推论 D。

推论 4.4. 设 R 是一个含幺诺特环，且每个有限生成投射 R-模都是自由的。设 $F:A_n\to R$-模 是一个非零的有限生成投射A_n-持久模，并满足 *PCC*。则 F 是区间可分解的。

证明。 由定理 4.3 和引理 1.10 立即得到。 □

5. Totally Ordered Persistence Modules

除非另有说明，本节中我们均假设 R 是一个含幺交换诺特环。我们的目标是为全序持久模建立分解结果，这些结果将在第 6 节和第 7 节分解之字形持久模时发挥必要作用。特别是，引理 3.8(2) 表明，在满足投射余极限条件的假设下，之字形持久模的每个内部态射的余核都是投射模。受此结果启发，我们将内部态射的余核具有射影性视为确保投射常值分解存在的关键结构条件。

我们首先建立若干技术性引理，讨论像与核的相容链的存在性，并给出关于投射 R-模的对偶空间与湮灭子的结果。随后，我们运用这些工具证明命题 5.17，该命题表明，任意全序持久模都存在一种分解，其中包含一个投射常值型的直和项。最后，我们证明

定理 5.19，该定理保证全序持久模存在完整的投射常值分解。

定义 5.1。设 P 是一个全序偏序集。令 $\leq$ 表示 P上的全序。函子 $F\colon P \to R$-**模** 是一个全序持久模。

定义 5.2。设 M 是一个 R-模。若内直和分解 $M = \bigoplus_{B\in\mathcal{B}} B$ 与 M 的 R-子模链 S 相兼容，则称其兼容；如果对每个 $A \in S$，都存在某个子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$使得 $A = \bigoplus_{B\in\mathcal{A}} B$。

定义引理 5.3。设 $F\colon P \to R$-**模** 是一个全序持久模。对任意固定的 $z \in P$，像的集合 $\{\mathrm{im}[x, z]\colon x \leq z\}$ 构成 F_z的R-子模链，称为 F_z的像链。对偶地，对任意固定的 $z \in P$，核的集合 $\{\ker[z, y]\colon y \geq z\}$ 构成 F_z的 R-子模链，称为 F_z的核链。

证明。对于固定的 $z \in P$，注意到当 $x \leq y$时有$\mathrm{im}[x, z] \subseteq \mathrm{im}[y, z]$，或者当 $y \leq x$时有 $\mathrm{im}[y, z] \subseteq \mathrm{im}[x, z]$。因此 $\{\mathrm{im}[x, z]\colon x \leq z\}$ 构成 F_z的一条R-子模链。核集合的情形类似。□

引理 5.4。设 $F\colon P \to R$-$\boldsymbol{Mod}$ 为有限生成全序持久模。假设每个内部态射$F_{x,\ y}$ 的余核都是投射的。则对任意固定的 $z \in P$，F_z 的像链与 F_z 的核链都是有限集。

证明。由于对每个 $x \leq z$，$F_z/\mathrm{im}[x, z] =$余核$[x, z]$ 都是投射的，由引理 2.1可知 F_z 的像链是有限的。同样，由于对每个 $y \geq z$，$F_z/\ker[z, y] \cong \mathrm{im}[z, y]$ 都是投射的，由引理 2.1可知 F_z 的核链是有限的。□

引理 5.5. 设 $F\colon P \to R$-模 是一个非零的有限生成全序持久模。假设每个内部态射 $F_{x,y}$ 的余核都是投射的。那么对于任意 $F_z \neq 0$，存在一个内部直和分解 $F_z = \bigoplus_{G\in\mathcal{A}} G$，其分量是投射的 R-子模 G，且该分解与 F_z的像链和核链相容。

证明. 固定满足 $F_z \neq 0$的 $z \in P$。根据引理 5.4，F_z 的像构成有限链，F_z 的核也构成有限链。设 l 和 m 分别为这两条链中不同像和不同核的数量。选取指标 $x_i \leq z$，对应于 $1 \leq i \leq l$，使得每个 $\mathrm{im}[x_i, z]$ 都是 F_z的像链中的一个不同像。同样，选取指标 $y_j \geq z$，对应于指标 $1 \leq j \leq m$，使得每个 $\ker[z, y_j]$ 都是 F_z 的核链中的一个不同核。令 $S = \{x_i\}_{i=1}^{l} \cup \{y_j\}_{j=1}^{m} \cup \{z\}$。那么 $F|_S$ 是一个满足 PCC 的非零 A_n-持久模，因此根据定理 4.3，它存在一个投射常值分解。在指标 z 处的这个分解给出所需结果。□

定义-引理 5.6。设 M 是一个有限生成的投射 R-模。则存在一个自然同构 $\varepsilon\colon M \to M^{**}$，由 $a \mapsto \hat{a}$ 给出，其中$\hat{a}\colon M^* \to R$ 是<strong?evaluation map，使得对于任意 $f \in M^*$，$\hat{a}(f) = f(a)$。

证明。 参见 [10,推论 2.10，注记 2.11]。 □

定义-引理 5.7。 有限生成的 R-模 M 是投射的，当且仅当存在一族元素 $\{a_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq M$ 和一族线性泛函 $\{f_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq M^*$，使得对于任意 $a \in M$，

$$a = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)a_i.$$

我们将这两个族合称为 M 的一对偶基，并将其记为配对集合 $\{(a_i, f_i) : 1 \leq i \leq n\}$。此外，集合 $\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ 生成 M，集合 $\{f_i : 1 \leq i \leq n\}$ 生成 M^*。

证明。 参见 [10,引理 2.9，注释 2.11]。 □

提醒读者注意，术语对偶基并非传统意义上指自由R-模的基。相反，它指的是一个投射 R-模及其对偶的一对生成集，且满足定义-引理 5.7 中的条件。尽管这一术语并不常见，但它便于我们开展讨论，并且与 [10]中的用法一致。此外，左 R-模的对偶自然是右 R-模，但 R 的交换性使我们可以将对偶视为左 R-模。事实上，这一识别正是本节要求R 为交换的主要动机。

引理 5.8。 设 $\{(a_i, f_i) : 1 \leq i \leq n\}$ 是一对有限生成投射 R-模 M的对偶基。那么 $\{(f_i, \hat{} a_i) : 1 \leq i \leq n\}$是 M^*的一对对偶基。

证明。 参见 [10,习题 2.7]。 □

引理 5.9。 设 $M = A \oplus B$ 是一个有限生成投射 R-模，并设$\{(a_i, f_i) : 1 \leq i \leq m\}$ 和 $\{(b_j, g_j) : 1 \leq j \leq n\}$ 分别是 A和 B、$\bar{}$的对偶基。定义 $f_i : M \to R$ 为 $f_i : A \to R$ 在 $f_i|_A = f_i\bar{}$和 $f_i|_B = 0$下的延拓。同样地，定义 $\bar{g}_j : M \to R$ 为 $g_j : B \to R$ 在$\bar{g}_j|_B = g_j$ 和 $\bar{g}_j|_A = 0$下的延拓。则：

(1) 集合 $\{(a_i, f_i) : 1 \leq i \leq m\} \cup \{(b_j, \bar{g}_j) : 1 \leq j \leq n\}$ 是 M的一对对偶基；
(2) 我们可以写成 $M^* = A' \oplus B'$，其中 A' 由 $\{f_i : 1 \leq i \leq m\}$ 生成，而B' 由 $\{\bar{g}_j : 1 \leq j \leq n\}$生成。特别地， $A' \cong A^*$ 和 $B' \cong B^*$。

证明。 利用定义-引理 5.7 和引理 5.8，很容易验证这两个断言。□

引理 5.10。 设 $\phi : M_1 \to M_2$ 是有限生成投射R-模之间的一个同态，其中 $M_1 = A_1 \oplus B_1$ 且 $M_2 = A_2 \oplus B_2$。按引理 *5.9* 中的记法，记 $M_1^* = A_1' \oplus B_1'$ 和 $M_2^* = A_2' \oplus B_2'$。若 $\phi(A_1) \subseteq A_2$且 $\phi(B_1) \subseteq B_2$，则 $\phi^*(A_2') \subseteq A_1'$且 $\phi^*(B_2') \subseteq B_1'$。特别地，若 ϕ 将 A_1 双射到 A_2，则 ϕ^* 将 A_2'双射到 A_1'。

证明。 令 $f_2 \in A_2'$。则 $\phi^*(f_2) = f_2 \circ \phi$是 M_1^*中的线性泛函。存在$f_1 \in A_1'$, $g_1 \in B_1'$ 使得 $f_2 \circ \phi = f_1 + g_1$。令 $b \in B_1$。则 $f_1(b) = 0$。因此

$$g_1(b) = f_1(b) + g_1(b) = f_2(\phi(b)) = 0$$

因为 $\phi(b) \in B_2$ 且 $f_2|_{B_2} = 0$。此外，对于任意 $a \in A_1$，$g_1(a) = 0$。因此 $g_1 = 0$且 $\phi^*(f_2) = f_1$，这表明 $\phi^*(A_2') \subseteq A_1'$。类似的论证表明$\phi^*(B_2') \subseteq B_1'$。

现在假设 ϕ 将 A_1 双射到 A_2。我们将证明 ϕ^* 将 A_2' 双射到 A_1'。

设 $f_2 \in A_2'$，并假设 $\phi^*(f_2) = 0$。那么 $f_2 \circ \phi = 0$。设 $a_2 \in A_2$。由于 ϕ将 A_1 满射到 A_2，存在 $a_1 \in A_1$ 使得 $\phi(a_1) = a_2$。这意味着$f_2(a_2) = f_2(\phi(a_1)) = 0$。此外，对于任意 $b \in B_2$，都有 $f_2(b) = 0$。因此 $f_2 = 0$，这表明 ϕ^* 将 A_2' 单射到 A_1'。

现在设 $f_1 \in A_1'$。定义映射 $f_2 \in A_2'$，使得 $f_2|_{A_2} = f_1 \circ (\phi|_{A_1})^{-1}$ 且 $f_2|_{B_2} = 0$。对于任意 $a \in A_1$,

$$\phi^*(f_2)(a) = f_2(\phi(a)) = f_1 \circ (\phi|_{A_1})^{-1}(\phi(a)) = f_1(a).$$

此外，对于任意 $b \in B_1$，我们有 $\phi^*(f_2)(b) = f_2(\phi(b)) = 0 = f_1(b)$。这表明 $\phi^*(f_2) = f_1$，因此 ϕ^* 将 A_2' 满射地映到 A_1'。□

定义 5.11。给定一个 R-模 M 的子模 A，A 的湮灭子 是 M^* 的子模 $A^\perp$，其中 $A^\perp = \{f \in M^* \colon f(a) = 0 \ \forall a \in A\}$。

引理 5.12。设 $\phi \colon M \to N$ 是一个 R-模同态，且 $coker(\phi)$ 是投射的。那么 $im(\phi^*) = ker(\phi)^\perp$。

证明。首先，假设 $f \in \mathrm{im}(\phi^*)$。那么

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{im}(\phi^*) &\implies \phi^*(g) = g \circ \phi = f \text{ for some } g \in N^* \\ &\implies (g \circ \phi)(a) = f(a) = 0 \ \forall a \in \ker(\phi) \\ &\implies f \in \ker(\phi)^\perp. \end{aligned}$$

反过来，假设 $f \in \ker(\phi)^\perp$。由于 $\mathrm{coker}(\phi)$ 是投射的，存在一个子模 $B \subseteq N$，使得 $N = \mathrm{im}(\phi) \oplus B$。同样，由于 $M/\ker(\phi)$ 是投射的，存在一个分解 $M = \ker(\phi) \oplus A$，其中 $\phi|_A \colon A \to \mathrm{im}(\phi)$ 是一个双射。令 $(\phi|_A)^{-1} : \mathrm{im}(\phi) \to A$ 为此双射的逆，并令 $\pi \colon N \to \mathrm{im}(\phi)$ 为自然投影映射。

定义 $g \colon N \to R$ 为满足 $g = f \circ (\phi|_A)^{-1} \circ \pi$ 的映射。对于任意 $c \in \ker(\phi)$,

$$\phi^*(g)(c) = g(\phi(c)) = 0 = f(c)$$

因为 $f \in \ker(\phi)^\perp$。此外，对于任意 $a \in A$，我们有

$$\phi^*(g)(a) = (f \circ (\phi|_A)^{-1} \circ \pi)(\phi(a)) = (f \circ (\phi|_A)^{-1})(\phi(a)) = f(a).$$

因此 $\phi^*(g) = f$，这表明 $f \in \mathrm{im}(\phi^*)$。 □

引理 5.13. 设 $M = A \oplus B$ 是一个 R-模，则 $M^* = A^\perp \oplus B^\perp$。

证明。 利用定义 5.11 可直接验证。 □

引理 5.14. 设 $\phi\colon M \to N$ 是有限生成投射R-模之间的同态，且余核(ϕ) 是投射的。那么余核(ϕ^*) 也是投射的。

证明。 显然，余核(ϕ) 是投射的意味着 im(ϕ) $\cong M/$ker(ϕ) 是投射的。因此存在一个子模 $A \subseteq M$ 使得 $M = \text{ker}(\phi) \oplus A$。取对偶可得

$$M^* = \ker(\phi)^\perp \oplus A^\perp = \operatorname{im}(\phi^*) \oplus A^\perp$$

根据引理 5.12 和引理 5.13。注意， $A^\perp$ 是 M^*的直和项，而 M^*是投射的，因此 $A^\perp$ 是投射的。因此，余核(ϕ^*) $= M^*/$im(ϕ^*) $\cong A^\perp$ 是投射的。□

引理 5.15. 设 $\phi : M \to N$ 是 R-模的一个满射，且 N 是投射的。若 $N = N_1 \oplus N_2$，则可选取一个内直和分解$M = M_1 \oplus M_2$，使得:

(1) $M_1 \cong N_1$;
(2) $\phi(M_1) = N_1$;
(3) $\phi(M_2) = N_2$。

证明。 由于 ϕ 是满射，且 N 是投射的，因此存在同态 $\psi : N \to M$，使得 $\phi\psi = \text{id}_N$。由此可得 $M = \text{ker}(\phi) \oplus \psi(N) = \text{ker}(\phi) \oplus \psi(N_1) \oplus \psi(N_2)$。令 $M_1 = \psi(N_1)$，并令 $M_2 = \text{ker}(\phi) \oplus \psi(N_2)$，即可得到所需的分解。

□

定义5.16。 设 $F\colon P \to R$-**模** 是一个全序的 P-持久模。设 P^{op}是一个偏序集，其反向序记为 $\leq_{\text{op}}$。定义 $F^\vee\colon P_{\text{op}} \to R$-**模** 为满足下述条件的全序 P^{op}-持久模:

(1) 对所有 $x \in P_{\text{op}}$， $F^\vee_x = F^*_x$; (2) 对所有 $x \leq_{\text{op}} y$属于 P^{op}， $F^\vee_{x,\,y} = F^*_{y,\,x}$。

以下命题的证明推广了我们在 [7, §6] 中的论证，当时我们证明了域上逐点有限维持久模的区间分解存在。

命题 5.17. 设 $F\colon P \to R$-模 是一个非零的有限生成投射全序持久模。假设每个内部态射 $F_{x,y}$ 的余核都是投射的。那么存在一个内直和分解 $F = \mathbb{I} \oplus G$，其中 $\mathbb{I}$ 是一个投射常值型模。

证明。 固定 $z \in P$，使得 $F_z \neq 0$。由引理 5.5，存在 F_z 的一个内直和分解，该分解与 F_z 的像链和核链相容。特别地，由于 F_z 是有限生成投射 R-模，这个分解中只有有限个非零直和项。因此，对于某个 $k \geq 0$，我们可以写成 $F_z = \bigoplus_{i=0}^{k} N_i$，其中每个 N_i 都非零。固定 $M = N_0$，并令 $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$，使得 $F_z = M \oplus N$。

证明分为三个主要步骤。首先，我们构造一个关于指标 $x \le z$ 的 F 分解，使其与 F_z 处的分解相容；我们称之为 F 的左侧分解。其次，我们使用对偶化论证，关于指标 $x \ge z$ 构造一个类似的分解，称为右侧分解。最后，我们将这两个分解结合起来，得到所需结果。

左侧分解

令 Q 为满足以下条件的指标 $x \le z$ 的集合： M 是 $\mathsf{im}[x,z]$的一个直和项。注意，由于 $z \in Q$， Q 非空。我们的目标是找到一列 R-子模$\{A_x\}_{x\in Q}$，使得 $A_x \subseteq F_x$，并满足：

(1) 对所有 $x \in Q$， $A_x \cong M$；(2) 对所有 $x \in Q$，$F_{x,\,z}(A_x) = M$；(3) 对 Q中的所有 $x < y$，$F_{x,\,y}(A_x) = A_y$。

令 E_x 为 F_x 中 M 的原像，对所有 $x \in Q$均如此。定义 Σ 为满足以下条件的所有族 $(A_x)_{x\in Q}$ 的集合：

(S1) A_x 是一个非平凡子模，且对所有 $x \in Q$ 都有 $A_x \subseteq E_x$；
(S2) $F_{x,\,y}(A_x) \subseteq A_y$，对所有属于 Q 的 $x < y$ 均成立；
(S3) 对所有 $x \in Q$， F_x/A_x 都是投射的；**(S4)** $F_y/F_{x,\,y}(A_x)$ 对所有属于 Q 的 $x < y$ 都是投射的。

断言 5.17.1。 $(E_x)_{x\in Q}$ 是 Σ 中的一个族。

断言 *5.17.1* 的证明。 条件**(S1)** 和 **(S2)** 显然成立。

考虑满射 $F_{x,z}\colon F_x \twoheadrightarrow \mathsf{im}[x,z]$。由于 $F_{x,z}(E_x) = M$，存在诱导同态 $F_{x,z}\colon F_x/E_x \twoheadrightarrow \mathsf{im}[x,z]/M$。容易验证此映射是一个同构。因此，由于 $\mathsf{im}[x,z]/M$ 是投射的， F_x/E_x 也是投射的，从而证明了条件 **(S3)**。

考虑满射 $F_{y,z}|_{\mathsf{im}[x,y]}\colon \mathsf{im}[x,y] \to \mathsf{im}[x,z]$。由于 $F_{y,z}(F_{x,y}(E_x)) = M$，存在一个诱导同态 $F_{y,z}|_{\mathsf{im}[x,y]}\colon \mathsf{im}[x,y]/F_{x,y}(E_x) \to \mathsf{im}[x,z]/M$。容易验证此映射是一个同构。因此，$\mathsf{im}[x,y]/F_{x,y}(E_x)$ 是投射的，因为 $\mathsf{im}[x,z]/M$ 是投射的。我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{\mathrm{im}[x,y]}{F_{x,y}(E_x)} \hookrightarrow \frac{F_y}{F_{x,y}(E_x)} \twoheadrightarrow \frac{F_y}{\mathrm{im}[x,y]} \longrightarrow 0.$$

由于余核$[x,y]$ 是投射的，该序列分裂，因此 $F_y/F_{x,y}(E_x)$ 是投射的，因为它同构于投射 R-模的直和。□

在 Σ 上定义偏序：若对所有 $x \in Q$， $B_x \subseteq A_x$，则 $(A_x)_{x\in Q} \le (B_x)_{x\in Q}$。令 $\{(A_x[\alpha])\}_\alpha$ 为 Σ 中由 α 索引的一条族链。定义族 $(B_x)_{x\in Q}$ 为

$$B_x = \bigcap_\alpha A_x[\alpha].$$

断言 5.17.2. $(B_x)_{x\in Q}$ 属于 Σ。

断言 *5.17.2* 的证明。在每个固定指标处， x, $\{A_x[\alpha]\}_\alpha$ 是 F_x 的投射 R子模组成的链，其中对于每个 α， $F_x/A_x[\alpha]$ 都是投射的。引理 2.1 保证该链中只有有限个子模 $A_x[\alpha]$ 。因此， B_x 将等于链 $\{A_x[\alpha]\}_\alpha$中的极小子模。这保证条件**(S1)**、**(S3)** 和**(S4)**均得到满足。

最后，由于对所有 α都有 $B_x \subseteq A_x[\alpha]$， $F_{x,\ y}(B_x) \subseteq F_{x,\ y}(A_x[\alpha]) \subseteq A_y[\alpha]$对所有 α都成立。因此$F_{x,\ y}(B_x) \subseteq \bigcap A_y[\alpha] = B_y$，满足条件**(S2)**。$\square_\alpha$

现在，$(B_x)_{x\in Q}$ 属于 Σ ，并且对于每个 α ，$(A_x[\alpha])_{x\in Q} \leq (B_x)_{x\in Q}$ ，因为对于每个 $x \in Q$ 都有 $B_x \subseteq A_x[\alpha]$。这表明$(B_x)_{x\in Q}$ 是链 $\{(A_x[\alpha])\}_\alpha$的一个上界。根据佐恩引理， Σ中存在一个极大元，记作$(A_x)_{x\in Q}$。

对所有 $r < x \in Q$，定义 A'_x 为 A_r 在 A_x 中的极小像，此处的极小像是相对于子集包含而言的。

命题 5.17.3. 极小像 A'_x 在 A_x中存在。

命题 *5.17.3* 的证明。 像 $\{F_{r,x}(A_r) : r \leq x\}$ 构成 F_x的投射 R-子模的一条链，其中 $F_x/F_{r,\ x}(A_r)$ 对每个 $r \leq x$ 都是投射的，这是条件 **(S4)**所保证的。引理 2.1 保证这条链中只有有限多个子模。因此，极小像 A'_x 存在。$\square$

命题 5.17.4. A'_x 在 $x \leq y$时满射地映射到 A'_y 。

命题 *5.17.4* 的证明。 根据定义，对于某个 $r \leq x$ ，有 $A'_x = F_{r,\ x}(A_r)$，并且对于某个 $w \leq y$，有 $A'_y = F_{w,\ y}(A_w)$。我们需要检查两种情况。

假设 $r \leq w$。那么 $F_{r,\ w}(A_r) \subseteq A_w$ 推出 $F_{r,\ y}(A_r) \subseteq F_{w,\ y}(A_w) = A'_y$。 A'_y 的极小性要求 $F_{r,\ y}(A_r) = A'_y$。因此

$$A'_y = F_{r,y}(A_r) = F_{x,y}F_{r,x}(A_r) = F_{x,y}(A'_x).$$

现在假设 $w < r$。那么 $F_{w,\ r}(A_w) \subseteq A_r$ 推出 $F_{w,\ x}(A_w) \subseteq F_{r,\ x}(A_r) = A'_x$。 A'_x 的极小性要求 $F_{w,\ x}(A_w) = A'_x$。因此

$$F_{x,y}(A'_x) = F_{x,y}F_{w,x}(A_w) = F_{w,y}(A_w) = A'_y.$$

$\square$

命题 5.17.5. $(A'_x)_{x\in Q}$ 属于 Σ。

命题 *5.17.5* 的证明。 根据定义，$A'_x = F_{r,\ x}(A_r)$，其中 $r \leq x$。这意味着条件 **(S1)** 和**(S3)** 立即成立。根据命题 5.17.4.，我们有$F_{x,\ y}(A'_x) = A'_y$。因此条件 **(S2)** 成立，而且$F_y/F_{x,\ y}(A'_x) = F_y/A'_y$ 是投射的，满足 **(S4)**。□

现在，$(A'_x)_{x\in Q}$ 属于 Σ，且 $(A_x)_{x\in Q} \leq (A'_x)_{x\in Q}$。因此，$(A_x)_{x\in Q}$的极大性意味着 $(A_x)_{x\in Q} = (A'_x)_{x\in Q}$。由于命题 5.17.4 已证明，对于所有 $x \leq y$，A'_x 都满射地映射到A'_y，所以对于所有 $x \leq y$，A_x 都必须满射地映射到 A_y。

固定 $w \in Q$。映射 $F_{w,\ z}|_{A_w} : A_w \to M$ 是一个满射。我们可以应用引理 5.15 将 $A_w = M_w \oplus K_w$ 分解为满足以下条件的形式：$M_w \cong M$，$F_{w,\ z}(M_w) = M$，且 $F_{w,\ z}(K_w) = 0$。

定义族 $(C_x)_{x\in Q}$ 如下

$$C_x = \begin{cases} F^{-1}_{x,w}(M_w) \cap A_x & \text{if } x < w, \\ M_w & \text{if } x = w, \\ A_x & \text{if } x > w, \end{cases}$$

其中 $F^{-1}_{x\ ,\ w}(M_w)$ 表示 M_w 在 F_x 中的原像。

命题 5.17.6。 $(C_x)_{x\in Q}$ 是 Σ 中的一个族。

命题 *5.17.6* 的证明。 条件 **(S1)** 对 $x \geq w$ 显然成立。当 $x < w$ 时，A_x 到 A_w 的满射保证 $F^{-1}_{x\ ,\ w}(M_w)\cap A_x$ 将是一个包含于 E_x 中的非零 R-子模。对所有指标而言，条件**(S2)** 显然成立。剩下的工作是仔细证明条件 **(S3)** 和 **(S4)**。

当 $x > w$ 时，条件 **(S3)** 是直接的。对于 $x = w$，我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{A_w}{M_w} \hookrightarrow \frac{F_w}{M_w} \twoheadrightarrow \frac{F_w}{A_w} \longrightarrow 0.$$

该序列分裂，因此 F_w/M_w 是投射的，因为它同构于投射 R-模的直和。

现在假设 $x < w$。考虑满射 $F_{x,\ w}|_{A_x} : A_x \to A_w$。存在一个诱导同态 $F_{x,\ w}|_{A_x} : A_x/(F^{-1}_{x\ ,\ w}(M_w) \cap A_x) \to \overline{A_w/M_w}$ 容易验证该映射是一个同构。因此，$A_x/(F^{-1}_{x\ ,\ w}(M_w)\cap A_x)$ 是投射的，因为 A_w/M_w 是投射的。此外，我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{A_x}{F^{-1}_{x,w}(M_w) \cap A_x} \hookrightarrow \frac{F_x}{F^{-1}_{x,w}(M_w) \cap A_x} \twoheadrightarrow \frac{F_x}{A_x} \longrightarrow 0.$$

该序列分裂，因此 $F_x/(F^{-1}_{x\ ,\ w}(M_w) \cap A_x)$ 是投射的，因为它同构于投射 R-模的直和。这证明了条件 **(S3)**。

当 $w \leq x < y$ 或 $x < w \leq y$时，条件 **(S4)** 显然成立。设 $x < y < w$。我们声称 $F_{x,y}(F^{-1}_{x,w}(M_w) \cap A_x) = F^{-1}_{y,w}(M_w) \cap A_y$。

事实上，正向包含显然成立。为证明反向包含，假设 $a_y \in F_{y}^{-1}{}_{,w}(M_w) \cap A_y$。由满射性，存在 $a_x \in A_x$ 使得 $F_{x,y}(a_x) = a_y$。这意味着 $F_{x,w}(a_x) = F_{y,w}(a_y) \in M_w$。因此 $a_x \in F_x^{-1}{}_{,w}(M_w) \cap A_x$，从而推出 $a_y \in F_{x,y}(F_x^{-1}{}_{,w}(M_w) \cap A_x)$。

上面的等式意味着 $F_y/F_{x,y}(F_x^{-1}{}_{,w}(M_w) \cap A_x) = F_y/(F_y^{-1}{}_{,w}(M_w) \cap A_y)$，根据条件 **(S3)**，已证明它是投射的。□

现在 $(C_x)_{x\in Q}$ 属于 Σ，且 $(A_x)_{x\in Q} \leq (C_x)_{x\in Q}$。因此，$(A_x)_{x\in Q}$的极大性意味着 $(C_x)_{x\in Q} = (A_x)_{x\in Q}$，特别是 $A_w = M_w$。对于每个 $x \geq w$，A_w 到 A_x 的满射性结合 $A_w \cong M$ 这一事实，意味着 A_w 双射映射到 A_x，因此对于 Q中的所有 $w \leq x \leq z$，都有 $A_x \cong M$。由于 w 是任意的，极大元 $(A_x)_{x\in Q}$ 必定是满足以下条件的一个族:

(1) 对所有 $x \in Q$，$A_x \cong M$；(2) 对所有 $x \in Q$，$F_{x,z}(A_x) = M$；(3) 对 Q 中的所有 $x < y$，$F_{x,y}(A_x) = A_y$。

如下定义 $F|_{\{x\leq z\}}$ 的持久子模 $\mathbb{I}^-$ 和 G^-：

$$\mathbb{I}_x^- = \begin{cases} A_x & \text{if } x \in Q, \\ 0 & \text{if } x \notin Q; \end{cases} \qquad G_x^- = F_{x,z}^{-1}(N) \text{ for all } x \leq z.$$

于是 $F|_{\{x\leq z\}} = \mathbb{I}^- \oplus G^-$，其中 $\mathbb{I}^-$ 是投射常值型。

右侧分解

回忆一下，$F_z = \bigoplus_{i=0}^k N_i$，其中 $N_0 = M$。令 S 为满足以下条件的指标 $x \geq z$ 的集合：N_0 不是 $\ker[z, x]$的直和项。注意，由于 $z \in S$，S 非空。

现在我们将重点讨论持久模 $F|_S$。下文中，为简便起见，我们将滥用记号，直接写作 F 而非 $F|_S$，因为上下文已足以说明；并将 F 视为一个 S-持久模。

考虑 S^{op}-持久模 $F^\vee$，其中 $\leq_{\mathrm{op}}$ 表示 S^{op} 中的反向序（参见定义5.16）。根据引理 5.14，对于 S 中任意 $x \leq y$，$\operatorname{coker}(F_{x,y})$ 都是投射模，因此 $\operatorname{coker}(F_{y,x}^\vee) = \operatorname{coker}(F_{x,y}^*)$ 对于 S^{op} 中任意 $y \leq_{\mathrm{op}} x$ 也是投射模。

由定义-引理 5.7，存在一对对偶基 $\{(a_{i,j}, f_{i,j}) : 1 \leq j \leq \iota_i\}$，它们对应于每个子模 N_i，且由有限个元素 ι_i 构成。利用引理 5.9，我们可以写成 $F_z^\vee = \bigoplus_{i=0}^k N_i'$，其中每个 N_i' 都由线性泛函 $\{f_{i,j} : 1 \leq j \leq \iota_i\}$ 的集合生成。请注意，$f_{i,j} : F \to R$ 是通过令 $f_{i,j}|_{N_r} = 0$（对所有 $r \neq i$）而将线性泛函 $f_{i,j} : N_i \to R$ 延拓得到的。

断言 5.17.7. 分解 $F_z^\vee = \bigoplus_{i=0}^k N_i'$ 与 $F_z^\vee$ 的像链相容。

断言 *5.17.7* 的证明。为证明这一点，令 $x > z$。若 $\ker[z, x] = 0$，则结论显然成立。设 $\ker[z, x] \neq 0$。对子模 N_i（不包括 $i = 0$）进行可能的重新编号后，我们可将 $\ker[z, x] = N_1 \oplus \cdots \oplus N_d$写成某个 $d \leq k$。

由引理 5.12，$\mathrm{im}(F^{\vee}_{x,\ z}) = \mathrm{im}(F^{*}_{z,\ x}) = \ker[z,x]^{\perp}$，其中 $x \leq_{\mathrm{op}} z$。但容易看出 $\ker[z,x]^{\perp} = N'_0 \oplus N'_{d+1} \oplus \cdots \oplus N'_k$，这意味着该分解是相容的（见定义 5.2）。

事实上，右侧显然包含于左侧。若 $f \in \ker[z,x]^{\perp}$，则我们写作 $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_k$，其中每个 $f_i \in N'_i$。若 f_i是 N_i 上的非零线性泛函，对某个 $1 \leq i \leq d$成立，则存在 $a \in N_i$，使得 $f_i(a)$ 非零。但此时 $f(a) = f_i(a)$ 非零，矛盾。□

由于分解 $F^{\vee}_z = \bigoplus_{i=0}^{k} N'_i$与 $F^{\vee}_z$的像链相容，我们可以将左侧分解的结果应用于 $F^{\vee}$，从而$F^{\vee} = \mathscr{I} \oplus \mathscr{G}$ 具有以下性质：

(1) $\mathscr{I}_z = N'_0$和 $\mathscr{G}_z = N'_1 \oplus \cdots \oplus N'_k$；(2) $F^{\vee}_{x,\ y}(\mathscr{I}_x) = F^{*}_{y,\ x}(\mathscr{I}_x) = \mathscr{I}_y$对所有属于 S^{op}的 $x \leq_{\mathrm{op}} y$成立；(3) $F^{\vee}_{x,\ y}(\mathscr{G}_x) = F^{*}_{y,\ x}(\mathscr{G}_x) \subseteq \mathscr{G}_y$对所有属于 S^{op}的 $x \leq_{\mathrm{op}} y$成立；(4) 对所有 $x \in S^{\mathrm{op}}$，$\mathscr{I}_x \cong N'_0 \cong N^{*}_0$ 成立。

再次取对偶，考虑 S-持久模 $F^{\vee\vee}$，其中 $\leq$ 表示 S上的原始全序。由定义5.16可知

(1) $F^{\vee\vee}_x = F^{**}_x$对所有 $x \in S$；(2) $F^{\vee\vee}_{x,y} = F^{**}_{x,y}$对 S中的所有 $x \leq y$。

由于余核$(F^{\vee}_{y,x})$对 S^{op}中的每个 $y \leq_{\mathrm{op}} x$ 都是投射的，

$$\mathrm{coker}(F^{\vee\vee}_{x,y}) = \mathrm{coker}((F^{\vee}_{y,x})^{*}) = \mathrm{coker}(F^{**}_{x,y})$$

由引理 5.14，对 S 中的每个 $x \leq y$ 都是投射的。现在我们将利用分解 $F^{\vee} = \mathscr{I} \oplus \mathscr{G}$ 来构造 $F^{\vee\vee}$的右侧分解。

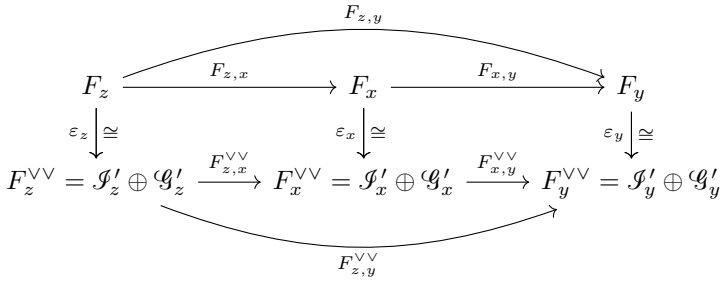
注意，由引理 5.9，$\bigcup_{i=0}^{k}\{(a_{i,j}, \bar{f}_{i,j}) : 1 \leq j \leq \iota_i\}$ 是 F_z 的一对对偶基。因此，由引理 5.8，$\bigcup_{i=0}^{k}\{(\bar{f}_{i,j}, \hat{}a_{i,j}) : 1 \leq j \leq \iota_i\}$是 $F^{\vee}_z$的一对对偶基。特别地，$\mathscr{I}_z$ 由集合 $\{f_{0,j} : 1 \leq j \leq \iota_0\}$ 生成，而 $\mathscr{G}_z$由集合 $\bigcup_{i=1}^{k}\{\bar{f}_{i,j} : 1 \leq j \leq \iota_i\}$生成。

应用引理 5.9，我们可以写成 $F^{\vee\vee}_z = \mathscr{I}'_z \oplus \mathscr{G}'_z$，其中 $\mathscr{I}'_z$ 由集合 $\{\hat{}a_{0,j}$ 生成：$1 \leq j \leq \iota_0\}$，而 $\mathscr{G}'_z$ 由集合 $\bigcup_{i=1}^{k}\{\hat{}a_{i,j}$ 生成：$1 \leq j \leq \iota_i\}$。

类似地，对于任意满足 $F^{\vee}_x = \mathscr{I}_x \oplus \mathscr{G}_x$的 $x > z \in S$，我们可以像引理 5.9 中那样写出 $F^{\vee\vee}_x = \mathscr{I}'_x \oplus \mathscr{G}'_x$。

由于对于 S^{op} 中任意的 $y \leq_{\mathrm{op}} x$，$F^{\vee}_{y,x}(\mathscr{I}_y) \subseteq \mathscr{I}_x$ 且 $F^{\vee}_{y,x}(\mathscr{G}_y) \subseteq \mathscr{G}_x$，引理 5.10 推出$F^{\vee\vee}_{x,y}(\mathscr{I}'_x) \subseteq \mathscr{I}'_y$ 且 $F^{\vee\vee}_{x,y}(\mathscr{G}'_x) \subseteq \mathscr{G}'_y$，对 S 中任意的 $x \leq y$ 均成立。特别地，引理 5.10 保证，对于所有 S 中的 $x \leq y$，$F^{\vee\vee}_{x,y}$ 将 $\mathscr{I}'_x$ 双射到 $\mathscr{I}'_y$，因为对于所有 S^{op} 中的 $y \leq_{\mathrm{op}} x$，$F^{\vee}_{y,x}$ 将$\mathscr{I}_y$ 双射到 $\mathscr{I}_x$。

对所有 $x \in S$，令 $\varepsilon_x : F_x \to F^{\vee\vee}_x$为对任意 $a \in F_x$ 将 $a \mapsto \hat{a}$ 映过去的自然同构（见定义-引理 5.6）。对 S 中的任意 $x \leq y$，我们有如下态射的交换图。



我们可以利用这个图，把 $F^{\vee\vee}$ 的分解拉回为指标 $x \in S$ 上 F 的分解。如下定义 $F|_{\{x\geq z\}}$ 的持久子模 $\mathbb{I}^+$ 与 G^+：

$$\mathbb{I}_x^+ = \begin{cases} \varepsilon_x^{-1}(\mathscr{I}'_x) & \text{if } x \in S, \\ 0 & \text{if } x \notin S; \end{cases} \qquad G_x^+ = \begin{cases} \varepsilon_x^{-1}(\mathscr{G}'_x) & \text{if } x \in S, \\ F_x & \text{if } x \notin S. \end{cases}$$

那么 $F|_{\{x\geq z\}} = \mathbb{I}^+ \oplus G^+$，其中 $\mathbb{I}^+$ 是投射常值型。特别地，我们有 $\mathbb{I}_z^+ = M$ 和 $G_z^+ = N$，因为 $\varepsilon_z\ (a_{i,\ j})\ = \hat{}a_{i,\ j}$ 对所有此类指标 $i,\ j$ 均成立。

整体分解

上面构造的左侧和右侧分解在指标 z 处与 $\mathbb{I}_z^- = \mathbb{I}_z^+ = M$ 和 $G_z^- = G_z^+ = N$ 相容。定义 P-持久子模 $\mathbb{I}$，使得当 $x \leq z$ 时 $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}_x^-$，当 $x > z$ 时 $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}_x^+$。同样，定义 P-持久子模 G，使得当 $x \leq z$ 时 $G_x = G_x^-$，当 $x > z$ 时 $G_x = G_x^+$。那么 $F = \mathbb{I} \oplus G$，其中 $\mathbb{I}$ 是投射常值型的持久子模。□

引理 5.18。设 $F\colon P \to R$-模 是一个全序持久模。假设每个内部态射 $F_{x,y}$ 的余核都是投射的。若 $F = G \oplus H$，则每个内部态射 $G_{x,y}$ 和 $H_{x,y}$ 的余核也都是投射的。

证明。对于任意 $x \leq y$，不难验证 $\mathrm{im}[x,y] = F_{x,\ y}(G_x) \oplus F_{x,\ y}(H_x)$。注意到

$$\mathrm{coker}[x,y] = \frac{F_y}{\mathrm{im}[x,y]} = \frac{G_y \oplus H_y}{F_{x,y}(G_x) \oplus F_{x,y}(H_x)} \cong \left(\frac{G_y}{F_{x,y}(G_x)}\right) \oplus \left(\frac{H_y}{F_{x,y}(H_x)}\right).$$

由于余核$[x,y]$ 是投射的，因此 $G_y/F_{x,\ y}(G_x)$ 和 $H_y/F_{x,\ y}(H_x)$ 都是投射的。但是 $G_{x,\ y}(G_x) = F_{x,\ y}(G_x)$，并且 $H_{x,\ y}(H_x) = F_{x,\ y}(H_x)$。这意味着，对于任意 $x \leq y$，余核$(G_{x,\ y})$ 和余核$(H_{x,\ y})$ 都是投射的。□

上述引理保证了所需的余核性质可以传递到直和项上。有了这一点，我们终于可以陈述本节的主要定理，即定理 B。

定理 5.19. 设 $F\colon P \to R$-模 是一个非零的有限生成全序持久模。假设每个内部态射 $F_{x,y}$ 的余核都是投射的。那么 F 存在投射常值分解。

证明. 令引理 2.2 中的 $\mathcal{E}$ 为 F 中投射常值型子模的集合，即可由引理 2.2、命题 5.17 和引理 5.18 立即得到。□

由以下结果可推出推论 E。

推论 5.20。 设 R 是含幺交换诺特环，且每个有限生成投射 R-模都是自由模。设 $F: P \to R$-模 是一个非零有限生成投射全序持久模。假设每个内部态射 $F_{x,y}$ 的余核都是投射的。那么 F 是区间可分解的。

证明。 由定理 5.19 和引理 1.10 立即可得。 □

当 R 是主理想整环时，推论 5.20 的结论也由 Luo 和 Henselman-Petrusek [11, 12]证明。

6. Zigzag Persistence Modules: Finite Extrema

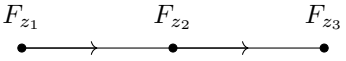
除非另有说明，本节中我们假设 R 是含幺交换诺特环。基于第 5 节中针对全序持久模建立的分解结果，我们现在转向有限极值之字形持久模的主要分解定理。下面的结果陈述了当 $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$ 取 $n \geq 2$时的定理 C。其证明采用了与定理 4.3 类似的论证。

定理 6.1。 设 $F: P \to R$-模 是一个非零有限生成投射之字形持久模，其极值点为 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$，对应 $n \geq 2$ 且满足 *PCC*。那么 F存在投射常值分解。

证明。 我们将对 n 进行归纳。对于 $n = 2$ 的基例， F 是一个非零的有限生成全序持久模，并且每个内部态射 $F_{x,\ y}$ 的余核都是投射的（见引理 3.8）。定理 5.19 保证 F 存在投射常值分解。

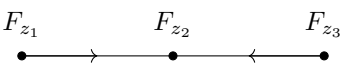
设 $n \geq 3$，并假设归纳假设对直到 $n-1$ 的情形均成立。令 $\sqsubseteq$ 为相关全序。与定理 4.3 的证明类似，我们可以归约到如下情形：证明当 $n = 3$ 且 F 在 z_2 处有一个峰时， F 存在投射常值分解。这里不再重写这一论断的全部细节，因为它们与定理 4.3 的证明完全类似。

情形 1。 考虑如下图所示的 $n = 3$ 情形。



这是一个非零的有限生成全序持久模，并且每个内部态射 $F_{x,\ y}$ 的余核都是投射的（见引理 3.8）。定理 5.19 保证 F 存在投射常值分解。当态射反向且带有 $z_3 \leq z_2 \leq z_1$时，同样的论证仍然成立。

情形 2. 考虑具有以下图的 $n = 3$ 情形。



注意，所有态射都是单射，因为 z_2 是一个峰，且 $F_{z_2} \neq 0$。

注意到 $F|_{[z_1,z_2]}$和 $F|_{[z_2,z_3]}$都是全序持久模，且每个内部态射的余核都是投射的。由引理 5.4可知，存在像链 $L = \{\mathsf{im}[x, z_2] : z_1 \sqsubseteq x \sqsubseteq z_2\}$，它是 F_{z_2} 的有限链；另有像链 $R = \{\mathsf{im}[x, z_2] : z_2 \sqsubseteq x \sqsubseteq z_3\}$，它是 F_{z_2}的有限链。

设 l 和 r 分别为 L 和 R的不同像的数量。选取 $x_i \sqsubseteq z_2$ 作为 $1 \leq i \leq l$ 的指标，使得每个 $\mathsf{im}[x_i, z_2]$ 都是链 L中的一个不同像。同样，选取 $y_j \sqsupseteq z_2$ 作为指标 $1 \leq j \leq r$，使得每个 $\mathsf{im}[y_j, z_2]$ 都是链 R中的一个不同像。

设 $S = \{x_i\}_{i=1}^{l} \cup \{y_j\}_{j=1}^{r} \cup \{z_2\}$。则 $F|_S$ 是一个非零的 A_n-持久模，满足 PCC，因此根据定理 4.3，它存在一个投射常值分解。该分解在指标 z_2 处呈现为有限个投射 R-模 $F_{z_2} = \bigoplus_{k=1}^{m} M_k$ 的内直和，并且与像的两条链 L 和 R 都相容。

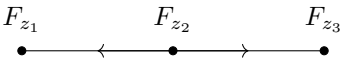
固定 $M = M_1$，并令 $N = M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$。则 $F_{z_2} = M \oplus N$。令 Q 为满足 M 是 $\mathsf{im}[x, z_2]$的直和项的指标 $x \in P$ 的集合。

对每个 $x \in Q$，定义 $\mathbb{I}_x$ 为 M 在 F_x 中的原像；对每个 $x \notin Q$，定义 $\mathbb{I}_x = 0$。对所有指标 $x \in P$，定义 G_x 为 N 在 F_x 中的原像。我们声称，对每个 $x \in P$，都有 $F_x = \mathbb{I}_x \oplus G_x$；并且对每个 $x \in Q$，都有 $\mathbb{I}_x \cong M$。

事实上，对于 $x \notin Q$，结论显然成立，因为$F_{x,\ z_2}$ 是单射。对于 $x \in Q$，考虑$[x, z_2]$ 在 F_{z_2}中的像。则对于某个指标子集$K \subseteq \{1, \ldots, m\}$，有$[x, z_2] = \bigoplus_{k\in K} M_k$。由于$F_{x,\ z_2}$是单射，很容易看出如何将此分解拉回，从而得到 $F_x = \mathbb{I}_x \oplus G_x$，此外还有 $\mathbb{I}_x \cong M$。

因此，$F = \mathbb{I} \oplus G$，其中 $\mathbb{I}$是投射常值型持久子模。若$G = 0$，则结论成立。若 $G \neq 0$，则根据引理 3.10，G 在 z_2 处有一个峰；并且根据引理 3.8，它满足 PCC。我们可以对 G 重复上述过程，以分解出另一个投射常值型直和项。经过 m 次迭代后，我们得到 F的完整投射常值分解。

情形 3。考虑具有如下图的 $n = 3$ 情形。



注意，所有态射都是满射，因为 z_2 是一个峰，且 $F_{z_2} \neq 0$。

注意，$F|_{[z_1,z_2]}$ 和 $F|_{[z_2,z_3]}$ 都是全序持久模，且每个内部态射的余核都是投射的。由引理 5.4 可知，存在一个有限核链 $L = \{\mathsf{ker}[z_2, x] : z_1 \sqsubseteq x \sqsubseteq z_2\}$ of F_{z_2}，以及另一个有限核链 $R = \{\mathsf{ker}[z_2, x] : z_2 \sqsubseteq x \sqsubseteq z_3\}$。

通过类似于情形 2 的论证， F_{z_2} 具有一个投射 R-模的内直和分解 $F_{z_2} = \bigoplus_{k=1}^{m} M_k$ ，且该分解与两条核链 L和 R相容。

固定 $M = M_1$和 $N = M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$。那么 $F_{z_2} = M \oplus N$。令 Q为满足以下条件的指标集合： $x \in P$，且 M不是 $\ker[z_2, x]$的直和项。

对每个 $x \in Q$，定义 $\mathbb{I}_x = F_{z_2,\ x}(M)$；对每个 $x \notin Q$，定义 $\mathbb{I}_x = 0$。对所有指标$x \in P$，定义 $G_x = F_{z_2,\ x}(N)$。我们断言，对每个 $x \in P$，都有 $F_x = \mathbb{I}_x \oplus G_x$；并且对每个 $x \in Q$，都有 $\mathbb{I}_x \cong M$。

事实上，当 $x \notin Q$ 时，该断言显然成立，因为 $F_{z_2,\ x}$ 是满射。对于 $x \in Q$，显然，由 $F_{z_2,\ x}$的满射性，$\mathbb{I}_x + G_x$ 生成了 F_x 的全部元素。为证明该和是直和，假设 $a \in \mathbb{I}_x \cap G_x$。那么存在 $b \in M$， $c \in N$，使得 $F_{z_2,\ x}(b) = F_{z_2,\ x}(c) = a$。这意味着 $b - c \in \ker[z_2, x]$，其中 $\ker[z_2, x] \subseteq N$，因为 M不是 $\ker[z_2, x]$的直和项。因此 $b \in M \cap N \implies b = 0 \implies a = 0$。此外，$F_{z_2,\ x}|_M$： $M \to \mathbb{I}_x$显然是一个双射。

因此， $F = \mathbb{I} \oplus G$其中 $\mathbb{I}$是投射常值型持久子模。若$G = 0$，则结论成立。若 $G \neq 0$，则根据引理 3.10， G 在 z_2 处有一个峰；并且根据引理 3.8，它满足 PCC。我们可以在 G 上重复上述过程，分解出另一个投射常值型直和项。经过 m 次迭代后，我们得到 F的一个完整投射常值分解。□

在以下结果中，当 $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$对 $n \geq 2$成立时，我们推出推论 F。

推论 6.2. 设 R 是一个含幺交换诺特环，并且每个有限生成投射 R-模都是自由的。设 F： $P \to R$-模 是一个非零的有限生成投射 *zigzag* 持久模，其极值点为 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$，其中 $n \geq 2$满足 *PCC*。那么 F 是区间可分解的。

证明。 这由定理 6.1 和引理 1.10 立即得出。 □

7. Zigzag Persistence Modules: Infinite Extrema

除非另有说明，本节中我们假设 R 是一个含幺交换诺特环。本节中的一些论证受到 Botnan 关于如何分解以无限离散之字形偏序集 [2] 为指标、取值于域上的之字形持久模的方法启发。与第 5 节讨论全序持久模时一样，我们首先在命题 7.5 中证明：满足 PCC 且具有无穷极值的逐点有限生成之字形持久模存在一种分解，其中包含一个投射常值型直和项。随后，我们利用这一结果证明定理 7.6 和 7.7。

记号 7.1。 设 P 是一个之字形偏序集。回顾记号 3.5 中列出的四种区间记号 $[x, y]$, $[x, y)$, $(x,\ y]$ 以及 $(x,\ y)$。我们使用括号记法表示如下内容：

(1) $\langle x, y]$ 是形如$(x, y]$ 或 $[x, y]$的区间；(2) $[x, y\rangle$ 是形如 $[x, y)$或 $[x, y]$的区间；(3) $\langle x, y)$是形如(x, y) 或 $[x, y)$的区间；

(4) $(x, y\rangle$ 是形如(x, y)或$(x, y]$的区间；(5) $\langle x, y\rangle$ 是四个区间 $[x, y]$, $[x, y)$, $(x, y]$ 或$(x, y$中的任意一个。

此外，我们将区间 $\langle x, y\rangle$ 上的投射常值型持久模记作 $\mathbb{I}^{\langle x,y\rangle}$，其他区间的记法依此类推。

引理 7.2. 设 $F\colon P \to R$-模是一个极值点为 $\{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 且满足 *PCC* 的有限生成 *zigzag* 持久模。设 $\sqsubseteq$ 为相关全序。若存在一个区间 $[z_s, z_t]$，使得 $F|_{[z_s,z_t]}$ 的投射常值分解包含一个支撑在 $\langle r$ 上的子模 $w\rangle$，其中 $z_s \sqsubset r \sqsubset w \sqsubset z_t$，则 F 存在一个分解 $F = \mathbb{I}^{\langle r,w\rangle} \oplus G$，其中 $\mathbb{I}^{\langle r,w\rangle}$ 是投射常值型的子模。

证明。注意，根据定理 6.1，$F|_{[z_s,z_t]}$ 存在投射常值分解。设 J 是 $F|_{[z_s,z_t]}$ 的投射常值分解中的一个直和项，其支撑在 $\langle r, w\rangle$ 上，且 $z_s \sqsubset r \sqsubset w \sqsubset z_t$。于是我们可以写作 $F|_{[z_s,z_t]} = J \oplus H$，其中 H 是该分解中其余直和项的直和。

定义持久子模 $\mathbb{I}^{\langle r,w\rangle}$ 和 G 如下：

$$\mathbb{I}_x^{\langle r,w\rangle} = \begin{cases} J_x & \text{if } z_s \sqsubseteq x \sqsubseteq z_t, \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases} \qquad G_x = \begin{cases} H_x & \text{if } z_s \sqsubseteq x \sqsubseteq z_t, \\ F_x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此得到所需的分解 $F = \mathbb{I}^{\langle r,w\rangle} \oplus G$，其中 $\mathbb{I}^{\langle r,w\rangle}$ 是一个支撑于 $\langle r, w\rangle$ 上的投射常值型持久子模。□

对于具有不同最小元和最大元的全序偏序集，以该偏序集为指标的全序持久模可以视为一个具有两个有限极值点（即最小元和最大元）的之字形持久模，其相关全序与 P 的全序一致。以下引理刻画了这样的持久模分解为一个投射常值型模与一个补子模的内直和所需满足的条件。

引理 7.3. 设 P 是一个具有不同最小元和最大元的全序偏序集；也就是说，存在 r, $w \in P$，使得 $r \neq w$，且对于所有 $x \in P$ 都有 $r \leq x$，对于所有 $x \in P$ 都有 $w \geq x$。假设 $F\colon P \to R$-模 是一个全序持久模，满足：

(a) 余核$(F_{r,w})$是投射的；(b) 每个态射$F_{x,y}$ 都是单射；(c) $F_r = M \oplus N$ 对某个非零投射 R-子模 M成立。

那么存在一个分解 $F = \mathbb{I}^{[r,w]} \oplus G$，其中：

(1) $\mathbb{I}^{[r,w]}$ 是一个支撑在 $[r, w]$ 上的投射常值型持久模；(2) $\mathbb{I}_x^{[r,w]} \cong M$ 对所有 $r \leq x \leq w$ 均成立；(3) $\mathbb{I}_r^{[r,w]} = M$ 和 $G_r = N$。

证明。定义 $\mathbb{I}_x^{[r,w]} = F_{r,x}(M)$，对所有 $r \le x \le w$ 均如此。注意到 $\mathbb{I}_r^{[r,w]} = M$。此外，定义 $N_w = F_{r,w}(N)$。

由单射性可知，$\mathsf{im}[r,w] = \mathbb{I}_w^{[r,w]} \oplus N_w$。由于根据假设，$\mathsf{coker}[r,w]$ 是投射的，因此存在一个子模 H，使得 $F_w = \mathsf{im}[r,w] \oplus H$。

定义 $G_w = N_w \oplus H$。那么 $F_w = \mathbb{I}_w^{[r,w]} \oplus G_w$。此外，对所有 $r \le x < w$，定义 $G_x = F_{x,w}^{-1}(G_w)$。注意到 $G_r = N$。我们断言，对所有 $x \in P$，$F_x = \mathbb{I}_x^{[r,w]} \oplus G_x$。事实上，令 $a \in F_x$。那么，对于某个 $b \in \mathbb{I}_w^{[r,w]}$，$c \in G_w$，有 $F_{x,w}(a) = b + c$。此外，存在 $d \in \mathbb{I}_r^{[r,w]}$，使得 $F_{r,w}(d) = b$。我们有以下蕴含关系：

$$\begin{aligned} & F_{x,w}(a) = b + c = F_{x,w}F_{r,x}(d) + c \\ \Longrightarrow\ & F_{x,w}(a - F_{r,x}(d)) = c \\ \Longrightarrow\ & a - F_{r,x}(d) \in G_x \\ \Longrightarrow\ & a \in \mathbb{I}_x^{[r,w]} + G_x. \end{aligned}$$

为证明该和是直和，设 $a \in \mathbb{I}_x^{[r,w]} \cap G_x$。于是 $F_{x,w}(a) \in \mathbb{I}_w^{[r,w]} \cap G_w$。因此 $F_{x,w}(a) = 0$，而单射性蕴含 $a = 0$。这就证明了该断言；此外，根据构造，我们有 $F_{x,y}(\mathbb{I}_x^{[r,w]}) = \mathbb{I}_y^{[r,w]}$，且对所有 $x \le y$，$F_{x,y}(G_x) \subseteq G_y$。因此 $F = \mathbb{I}^{[r,w]} \oplus G$ 就是所需的分解。□

引理 7.4. 设 P 是一个具有不同最小元和最大元的全序偏序集；也就是说，存在 r，$w \in P$，使得 $r \neq w$，并且对所有 $x \in P$ 都有 $r \le x$，对所有 $x \in P$ 都有 $w \ge x$。假设 $F\colon P \to R$-模 是一个全序持久模，满足：

（a）每个态射 $F_{x,y}$ 都是满射；（b）F_w 是一个投射 R-模；
（c）对于某个非零投射 R-子模 M，有 $F_w = M \oplus N$。

于是存在一个分解 $F = \mathbb{I}^{[r,w]} \oplus G$，其中：

（1）$\mathbb{I}^{[r,w]}$ 是支撑在 $[r,w]$ 上的投射常值型持久模；（2）$\mathbb{I}_x^{[r,w]} \cong M$ 对所有 $r \le x \le w$ 均成立；（3）$\mathbb{I}_w^{[r,w]} = M$ 且 $G_w = N$。

证明。由于 $F_{r,w}$ 是满射，且 $F_w = M \oplus N$ 是投射的，根据引理 5.15，我们可以选取一个分解 $F_r = \mathbb{I}_r^{[r,w]} \oplus G_r$，使得：

(i) $\mathbb{I}_r^{[r,w]} \cong M$;

(ii) $F_{r,w}(\mathbb{I}_r^{[r,w]}) = M$;

(iii) $F_{r,w}(G_r) = N$.

对所有 $r < x \le w$，定义 $\mathbb{I}_x^{[r,w]} = F_{r,x}(\mathbb{I}_r^{[r,w]})$ 和 $G_x = F_{r,x}(G_r)$。注意到 $\mathbb{I}_w^{[r,w]} = M$ 和 $G_w = N$。我们声称，对所有 $x \in P$，$F_x = \mathbb{I}_x^{[r,w]} \oplus G_x$。

事实上，显然，由于 $F_{r,x}$ 的满射性，$\mathbb{I}_x^{[r,w]} + G_x$ 生成 F_x。为证明该和是直和，假设 $a \in \mathbb{I}_x^{[r,w]} \cap G_x$。那么存在 $b \in \mathbb{I}_r^{[r,w]}$，使得 $F_{r,x}(b) = a$。特别地，我们有

$$F_{r,w}(b) = F_{x,w}F_{r,x}(b) = F_{x,w}(a) = 0$$

由于 $F_{x,w}(a) \in M \cap N$。但 $F_{r,w}$ 将 $\mathbb{I}_r^{[r,w]}$双射地映到 $\mathbb{I}_w^{[r,w]}$，因此 $F_{r,w}(b) = 0 \implies b = 0 \implies a = 0$。

这就证明了该断言，而且按构造，对所有 $x \leq y$，我们有 $F_{x,y}(\mathbb{I}_x^{[r,w]}) = \mathbb{I}_y^{[r,w]}$以及 $F_{x,y}(G_x) \subseteq G_y$。因此 $F = \mathbb{I}^{[r,w]} \oplus G$ 即为所求的分解。□

命题 7.5. 设 $F: P \to R\text{-}\boldsymbol{Mod}$ 是一个非零的有限生成 *zigzag* 持久模，其极值点 $\{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 满足 ***PCC***。则存在一个内直和分解 $F = \mathbb{I} \oplus G$，其中 $\mathbb{I}$ 是投射常值型模。

证明. 设 $\sqsubseteq$ 表示之字形偏序集 P的相关全序。不失一般性，假设对所有 $x, y \in P$ 使得 $z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}$:

$$\begin{cases} i \text{ is odd} & \implies \quad x \leq y; \\ i \text{ is even} & \implies \quad y \leq x. \end{cases}$$

关于上述陈述，请参见定义 3.2 以作回顾。

由定理 6.1 可知，$F|_{[z_{-n}, z_n]}$ 对任意正整数 n都容许一个投射常值分解。我们将此证明分裂为两种情形。

情形 1. 假设存在正整数 n，使得 $F|_{[z_{-n}, z_n]}$的投射常值分解包含一个支撑于 $\langle r, w\rangle$ 上且满足 $-n \sqsubset r \sqsubset w \sqsubset n$ 的子模。则由引理 7.2 即得结论。

情形 2. 假设不存在这样的 n。固定一个指标 z_i，使得 $F_{z_i} \neq 0$。注意这样的指标存在，因为若所有 $F_{z_i} = 0$，则我们会落入情形 1。

断言 7.5.1. 存在 $z_t \sqsupset z_i$，使得对所有 $z_t \sqsubseteq x \sqsubseteq y$，当这些映射有定义时，$F_{x,y}$ 是单射且 $F_{y,x}$ 是满射。对偶地，存在 $z_s \sqsubset z_i$，使得对所有 $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_s$，当这些映射有定义时，$F_{y,x}$ 是单射且 $F_{x,y}$ 是满射。

断言 *7.5.1* 的证明。为看出这一点，我们将证明：对于 $z_i \sqsubset x \sqsubseteq y$，非单射的态射$F_{x,y}$ 只有有限多个。用矛盾法假设：不存在 $z_t \sqsupset z_i$，使得映射 $F_{x,y}$ 对于 $z_t \sqsubseteq x \sqsubseteq y$ 全部为单射。则存在指标 $x_1, y_1 \sqsupset z_i$，满足 $x_1 \leq y_1$，使得 $\ker[x_1, y_1] \neq 0$。

回顾定义 3.2(2)，存在 $k_1 \in \mathbb{Z}$，使得 $z_{k_1-1} \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq y_1 \sqsubseteq z_{k_1}$。特别地，关于偏序，我们有 $x_1 \leq y_1 \leq z_{k_1}$。由于 $\ker[x_1, y_1] \neq 0$，因此 $\ker[x_1, z_{k_1}] \neq 0$。

考察由定理 6.1 保证存在的 $F|_{[z_i,z_{k_1}]}$ 的投射常值分解，其中存在一个投射常值型子模 $\mathbb{I}^{\langle r_1,\ w_1\rangle}$，且满足 $z_i \sqsubseteq r_1 \sqsubset w_1 \sqsubset z_{k_1}$。若此时 $z_i \sqsubset r_1 \sqsubset w_1 \sqsubset z_{k_1}$，则会得到情形 1。因此 $r_1 = z_i$，并且投射常值型子模$\mathbb{I}^{[z_i,w_1\rangle}$ 支撑在区间 $[z_i, w_1\rangle$ 上。

以此方式继续，存在一个 $x_2 \sqsupset z_{k_1}$ 和 $z_{k_2} \geq x_2$，使得 $\ker[x_2, z_{k_2}] \neq 0$。$F|_{[z_i,z_{k_2}]}$的投射常值分解将包含一个子模 $\mathbb{I}^{[z_i,w_2\rangle}$，它是投射常值型，支撑在区间 $[z_i, w_2\rangle$上，其中 $w_1 \sqsubset z_{k_1} \sqsubset w_2$。无限重复这一过程，会得到一条由 R-子模构成的无限升链

$$\mathbb{I}_{z_i}^{[z_i,w_1\rangle} \subseteq \mathbb{I}_{z_i}^{[z_i,w_1\rangle} \oplus \mathbb{I}_{z_i}^{[z_i,w_2\rangle} \subseteq \mathbb{I}_{z_i}^{[z_i,w_1\rangle} \oplus \mathbb{I}_{z_i}^{[z_i,w_2\rangle} \oplus \mathbb{I}_{z_i}^{[z_i,w_3\rangle} \subseteq \cdots$$

F_{z_i}的子模，这与 F_{z_i} 是诺特的相矛盾。因此，必定存在一个充分大的指标 z_t。关于满射以及 $z_s \sqsubset z_i$ 的情形类似。□

设 z_s 和 z_t 是断言 7.5.1中所述的指标。不失一般性，我们可以选择 s 和 t为奇整数。

根据定理 6.1，$F|_{[z_s,z_t]}$ 容许一个投射常值分解。选取该分解中支撑于 $\langle r, w\rangle$ 上的子模 $\mathbb{I}^{\langle r,w\rangle}$，从而我们可写成$F|_{[z_s,z_t]} = \mathbb{I}^{\langle r,w\rangle} \oplus H$，其中 H是该分解中其余子模的直和。我们的目标是将此分解延拓到整个 F，从而可以写成 $F = \mathbb{I} \oplus G$。

对所有 $z_s \sqsubseteq x \sqsubseteq z_t$定义 $G_x = H_x$ 与 $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}^{\langle r,\ x\ w\rangle}$。接下来还需仔细定义指标 $x \sqsupset z_t$ 与 $x \sqsubset z_s$处的情形。

首先我们关注指标 $x \sqsupset z_t$。若 $\mathbb{I}^{\langle r,\ z_t\ w\rangle} = 0$ 且 $H_{z_t} = F_{z_t}$，则该分解是容易的。对所有 $x \sqsupset z_t$定义 $G_x = F_x$ 与 $\mathbb{I}_x = 0$。

若 $\mathbb{I}^{\langle r,\ z_t\ w\rangle} \neq 0$，定义 $\mathbb{I}_{z_t} = \mathbb{I}^{\langle r,\ z_t\ w\rangle}$和 $G_{z_t} = H_{z_t}$。由于 t 是奇数，关于偏序有 $z_t < z_{t+1}$。特别地，$F|_{[z_t,z_{t+1}]}$ 是由偏序集 $[z_t, z_{t+1}]$ 指标化的全序持久模，其中最小元为 z_t，最大元为z_{t+1}，并满足:

(a) 余核($F_{z_t,z_{t+1}}$)是投射的；(b) 对于 $z_t \leq x \leq y \leq z_{t+1}$，每个态射 $F_{x,y}$ 都是单射；(c) $F_{z_t} = \mathbb{I}_{z_t} \oplus G_{z_t}$，其中 $\mathbb{I}_{z_t}$ 是一个非零投射 R-模。

根据引理 7.3，存在一个分解 $F|_{[z_t,z_{t+1}]} = \mathbb{I}^{[z_t,z_{t+1}]} \oplus H^{(t)}$，使得:

(1) $\mathbb{I}^{[z_t,z_{t+1}]}$ 是一个支撑于 $[z_t, z_{t+1}]$的投射常值型持久子模；(2) 对所有 $z_t \sqsubseteq x \sqsubseteq z_{t+1}$，$\mathbb{I}_x^{[z_t,z_{t+1}]} \cong \mathbb{I}_{z_t}$；(3) $\mathbb{I}_{z_t}^{[z_t,z_{t+1}]} = \mathbb{I}_{z_t}$和 $H_{z_t}^{(t)} = G_{z_t}$。

对所有 $z_t \sqsubset x \sqsubseteq z_{t+1}$，定义 $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}_x^{[z_t, z_{t+1}]}$和 $G_x = H_x^{(t)}$。实际上，这将 $[z_s, z_t]$ 上的分解扩展到了 $[z_s, z_{t+1}]$。
同理，由于 $t+1$ 是偶数，根据偏序可得 $z_{t+2} < z_{t+1}$。
特别地， $F|_{[z_{t+1}, z_{t+2}]}$ 是一个以该集合为指标的全序持久模
偏序集 $[z_{t+1}, z_{t+2}]$ 具有最小元 z_{t+2} 和最大元 z_{t+1}，满足：

(a) 对于 $z_{t+1} \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{t+2}$，每个态射 $F_{y,\ x}$ 都是满射；(b) $F_{z_{t+1}}$ 是一个投射 R-模；(c) $F_{z_{t+1}} = \mathbb{I}_{z_{t+1}} \oplus G_{z_{t+1}}$，其中 $\mathbb{I}_{z_{t+1}}$ 是一个非零投射 R- 模。

根据引理 7.4，存在一个分解 $F|_{[z_{t+1}, z_{t+2}]} = \mathbb{I}^{[z_{t+1}, z_{t+2}]} \oplus H^{(t+1)}$，满足：

(1) $\mathbb{I}^{[z_{t+1}, z_{t+2}]}$ 是一个支撑在 $[z_{t+1}, z_{t+2}]$ 上的投射常值型持久子模；(2) 对所有 $z_{t+1} \sqsubseteq x \sqsubseteq z_{t+2}$， $\mathbb{I}_x^{[z_{t+1}, z_{t+2}]} \cong \mathbb{I}_{z_{t+1}}$；(3) $\mathbb{I}_{z_{t+1}}^{[z_{t+1}, z_{t+2}]} = \mathbb{I}_{z_{t+1}}$ 以及 $H_{z_{t+1}}^{(t+1)} = G_{z_{t+1}}$。

对所有 $z_{t+1} \sqsubset x \sqsubseteq z_{t+2}$，定义 $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}_x^{[z_{t+1}, z_{t+2}]}$和 $G_x = H_x^{(t+1)}$。实际上，这将 $[z_s, z_{t+1}]$ 上的分解扩展到了 $[z_s, z_{t+2}]$。
我们可以在区间 $[z_{t+2}, z_{t+3}]$，$[z_{t+3}, z_{t+4}]$ 等上无限重复这一过程，从而对所有 $x \sqsupset z_t$ 得到一个分解 $F_x = \mathbb{I}_x \oplus G_x$。
对偶地，我们可以对指标 $x \sqsubset z_s$ 应用上述论证。由此得到所需的分解 $F = \mathbb{I} \oplus G$。
□

现在我们继续讨论本节的主要结果。具体而言，以下两个定理分别给出了 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 和 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时定理 C 的表述。

定理 7.6。设 $F\colon\ P \to R$-模 是一个非零的有限生成投射之字形持久模，其极值点 $\{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 满足 *PCC*。那么 F 具有投射常值分解。

证明。令引理 2.2 中的 $\mathcal{E}$ 为 F 的投射常值型子模所成的集合，即得结论；这直接由引理 2.2、命题 7.5 和引理 3.8 得出。□

定理 7.7。设 $F\colon\ P \to R$-模 是一个非零的有限生成投射之字形持久模，其极值点 $\{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 满足 *PCC*。那么 F 具有投射常值分解。

证明。有一种显而易见的方法，可以将带有极值点 $\{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 的之字形持久模 F（其极值点为 ex-）嵌入带有极值点 $\{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 的之字形持久模 F 中，从 而得到 $F|_{\{x \sqsupseteq z_0\}} = F$ 和 $F|_{\{x \sqsubset z_0\}} = 0$。定理 7.6 保证 F 存在投射常值分解，由此可得 F 的投射常值分解。□

当 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 和 $\Gamma = \mathbb{N}$ 时，我们从下述结果推导出推论 F。

推论 7.8。 设 R 是一个含幺交换诺特环，且每个有限生成投射 R-模都是自由的。设 $F\colon P \to R\text{-}\boldsymbol{Mod}$ 是一个非零的有限生成投射 *zigzag* 持久模，其极值点为 $\{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 或极值点为$\{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，且满足 *PCC*。那么 F 是区间可分解的。

证明。 这可直接由定理 7.6、定理 7.7 和引理 1.10 得出。 □

8. Necessity

除非另有说明，本节中我们始终假设 R 是含幺（不一定交换的）诺特环。在前几节中，我们证明了，投射余极限条件足以保证 A_n-持久模和之字形持久模存在投射常值分解。我们还证明，对于全序持久模，要求所有内部态射的余核均为投射模，足以保证其存在投射常值分解。当 R 还具有所有有限生成投射 R-模都是自由模这一性质时，这些条件也意味着存在区间分解。现在我们将证明，只要存在投射常值分解（分别地，区间分解），这些条件实际上就是必要的。

引理 8.1。 设 $F : P \to R$-模 是一个非零的、具有有限极值的之字形持久模 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ *for* $n \geq 2$，且为投射常值型。那么：

(N1) 余极限(F) 是投射的；**(N2)** 余核$(F_{z_1} \to$ 余极限$(F))$ 是投射的；**(N3)** 余核$(F_{z_n} \to$ 余极限$(F))$ 是投射的；**(N4)** 余核$(F_{z_1} \oplus F_{z_n} \to$ 余极限$(F))$ 是投射的。

证明。 设 $\sqsubseteq$ 表示相关全序。根据定义 1.6， F 同构于 $F(I, M)$，其中 I是 P 中的某个区间， R是某个投射 R-模 M。只需证明 $F = F(I, M)$ 满足这些条件。回顾一下，这意味着对所有 $x \in I$， $F_x = M$，否则 $F_x = 0$ 。此外，对 I 中所有 $x \leq y$， $F_{x,y} = \mathrm{id}_{x,y}$， 否则 $F_{x,y} = 0$ 。

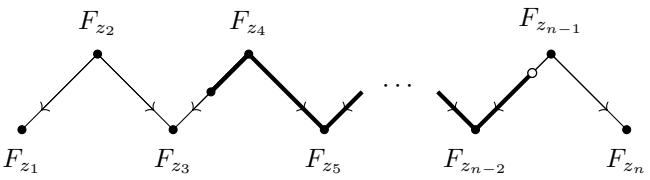
当 $n = 2$ 时，要么在 $z_1 < z_2$ 的情况下 colim(F) $= F_{z_2}$，要么在 $z_2 < z_1$ 的情况下 colim(F) $= F_{z_1}$ 。这一观察使得四个条件显而易见。

设 $n \geq 3$。我们根据 z_1 和 z_n 是汇点还是源点（见定义 1.12 和 3.2），将证明的其余部分分为三种情形。在每种情形下，我们证明这四个条件成立。

情形 1. 假设 z_1 和 z_n 都是汇点。这意味着 n 是奇数，并且对于所有满足 $z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}$的 x， $y \in P$：

$$\begin{cases} i \text{ is odd} & \implies \quad y \leq x; \\ i \text{ is even} & \implies \quad x \leq y. \end{cases}$$

下面是 F 的示例图；粗线表示区间 I，其中 F 取值为 M，箭头表示态射的方向。



设 $K = \{1, 3, \ldots, n-2, n\}$ 为 F 的汇 z_i 中的奇整数，设 $C = \{2, 4, \ldots, n-3, n-1\}$ 为 F 的源 z_i 中的偶整数。由此可得

$$\operatorname{colim}(F) = \frac{\bigoplus_{i\in K} F_{z_i}}{E} = \frac{F_{z_1} \oplus F_{z_3} \oplus \cdots \oplus F_{z_{n-2}} \oplus F_{z_n}}{E}.$$

上面的子模 E 由以下元素生成:

$$\{\iota_{z_{i-1}}(F_{z_i,z_{i-1}}(a)) - \iota_{z_{i+1}}(F_{z_i,z_{i+1}}(a)) \mid a \in F_{z_i}, i \in C\},$$

其中ι_{z_j} : $F_{z_j} \to \bigoplus_{i\in K} F_{z_i}$ 是所有满足 $j \in K$的汇点 z_j 对应的自然嵌入映射。这定义了 $\bigoplus_{i\in K} F_{z_i}$ 上的一个等价关系 $\sim$ ，将.....

$$\iota_{z_{i-1}}(F_{z_i,z_{i-1}}(a)) \sim \iota_{z_{i+1}}(F_{z_i,z_{i+1}}(a))$$

对于所有满足 $i \in C$ 的源点 z_i ，以及所有 $a \in F_{z_i}$，均成立。

考虑区间 I。如果没有极值点 z_i 位于 I中，那么 $\operatorname{colim}(F) = 0$ ，因为对于所有满足 $i \in K$的汇点 z_i ， $F_{z_i} = 0$。这四个条件显然成立。

现在假设至少有一个极值点 z_i 位于 I中。令 z_s 和 z_t 分别为 I中相对于相关全序的最小和最大极值点。注意，当恰有一个极值点位于 I中时， $z_s = z_t$ 是可能的。

断言 8.1.1。 如果 z_s 或 z_t 是源点，那么余极限$(F) = 0$。

断言 *8.1.1* 的证明。 不妨设 z_s 是源点。因此$F_{z_s} = M$。由于 z_s 是 I中的最小极值点，这意味着 $F_{z_{s-1}} = 0$。根据等价关系 $\sim$，我们将

$$0 = \iota_{z_{s-1}}(F_{z_s,z_{s-1}}(a)) \sim \iota_{z_{s+1}}(F_{z_s,z_{s+1}}(a)) \text{ for all } a \in F_{z_s}.$$

如果 z_s 是 P中的最大源点，那么 $z_{s+1} = z_n$。因此，在等价关系 $\sim$下，$\bigoplus_{i\in K} F_{z_i}$的所有元素都与 0 等同，从而余极限$(F) = 0$。

如果 z_s不是 P中的最大源点，那么 z_{s+2}是 P中的一个源点。根据等价关系 $\sim$，我们将

$$\iota_{z_{s+1}}(F_{z_{s+2},z_{s+1}}(a)) \sim \iota_{z_{s+3}}(F_{z_{s+2},z_{s+3}}(a)) \text{ for all } a \in F_{z_{s+2}}.$$

但这意味着

$$0 \sim \iota_{z_{s+1}}(F_{z_s,z_{s+1}}(a)) \sim \iota_{z_{s+1}}(F_{z_{s+2},z_{s+1}}(a)) \text{ for all } a \in F_{z_{s+2}} \subseteq F_{z_s}.$$

继续这一过程，很容易看出，在等价关系 $\sim$ 下， $\bigoplus_{i\in K} F_{z_i}$ 中的所有元素都与 0 等同，因此 colim$(F) = 0$。□

根据断言 8.1.1 中 z_s 或 z_t 为源点时的设定，这四个条件显然成立。最后，假设 z_s 和 z_t 都是汇点。那么，我们可以等价地将子模 E 描述为

$$E = \{(a_{z_1}, a_{z_3}, \ldots, a_{z_{n-2}}, a_{z_n}) : \textstyle\sum_{i\in K} a_{z_i} = 0\}.$$

我们省略这部分的详细计算，因为利用以下关键观察很容易验证：如果 z_i 是 I中的一个源点，那么 z_{i-1} 和 z_{i+1} 也在 I中。
令 θ：$\bigoplus_{i\in K} F_{z_i} \to M$ 为由下式给出的映射

$$(a_{z_1}, a_{z_3}, \ldots, a_{z_{n-2}}, a_{z_n}) \mapsto \textstyle\sum_{i\in K} a_{z_i}.$$

于是 ker$(\theta) = E$，并且 θ 是满射。因此

$$\operatorname{colim}(F) = \frac{\bigoplus_{i\in K} F_{z_i}}{E} = \frac{\bigoplus_{i\in K} F_{z_i}}{\ker(\theta)} \cong \operatorname{im}(\theta) = M$$

根据第一同构定理，可得条件**(N1)** 成立，即 colim(F)是投射的。

若 $F_{z_1} = 0$ ，则**(N2)** 显然成立。若 $F_{z_1} = M$，则 $z_1 = z_s$。容易看出，映射 $F_{z_1} \to$colim(F)是满射。因此，coker$(F_{z_1} \to$ colim$(F)) = 0$ 显然是投射的，这表明**(N2)**成立。类似的论证表明，条件**(N3)**和**(N4)** 也成立。

情形 2。假设 z_1 和 z_n 都是源点。这意味着 n 是奇数，并且对所有满足 $z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}$的 $x, y \in P$：

$$\begin{cases} i \text{ is odd} & \implies \quad x \le y; \\ i \text{ is even} & \implies \quad y \le x. \end{cases}$$

若 $n = 3$，则 colim$(F) = F_{z_2}$，其中 $F_{z_2} = 0$或 $F_{z_2} = M$。因此，colim(F)是满足**(N1)**的投射对象，其余三个条件也显然成立。

如果 $n > 3$，那么 colim(F) =colim$(F|_{[z_2,z_{n-1}]})$，其中 z_2和 z_{n-1}都是汇点。因此，我们应用情形 1 来证明 colim(F) 满足条件 **(N1)** 时是投射的。

如果 colim$(F|_{[z_2,z_{n-1}]}) = 0$，那么其他三个条件显然成立。假设 colim$(F|_{[z_2,z_{n-1}]}) \cong M$。那么断言 8.1.1 推出，在 $I \cap [z_2, z_{n-1}]$ 中，最小和最大极值点 z_s和 z_t分别都是汇点。

若 $F_{z_1} = 0$，则（**N2**）显然成立。若 $F_{z_1} = M$，则 $z_1 \in I$。由于 $z_1 \sqsubseteq z_2 \sqsubseteq z_s$满足 z_1，$z_s \in I$，引理 3.4 蕴含 $z_2 \in I$，因此由z_s的极小性可得 $z_2 = z_s$ 。根据这一观察，容易验证 $F_{z_1} \to$ colim(F) 是一个满射。因此，余核$(F_{z_1} \to$ colim$(F)) = 0$ 显然是投射的，这表明（**N2**）成立。条件（**N3**）和（**N4**）同理可得。

情形 3。假设 z_1 是一个汇，且 z_n 是一个源。这意味着 n 是偶数，并且对于所有满足 $z_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{i+1}$ 的 $x,\ y \in P$：

$$\begin{cases} i \text{ is odd} & \implies \quad y \leq x; \\ i \text{ is even} & \implies \quad x \leq y. \end{cases}$$

注意到 colim(F) $=$colim$(F|_{[z_1,z_{n-1}]})$，其中 z_1和 z_{n-1}都是汇点。因此，我们应用情形 1，证明 colim(F) 满足条件 **(N1)**时是投射的。

如果 colim$(F|_{[z_1,z_{n-1}]}) = 0$，那么其他三个条件显然成立。假设 colim$(F|_{[z_1,z_{n-1}]}) \cong M$。那么断言 8.1.1 表明，$I \cap [z_1, z_{n-1}]$ 中的最小和最大极值点 z_s 和 z_t分别都是汇点。

如果 $F_{z_1} = 0$，那么 **(N2)** 显然成立。如果 $F_{z_1} = M$，那么 $z_1 \in I$。因此，根据 z_s的极小性，$z_1 = z_s$。容易验证 $F_{z_1} \to$ colim(F) 是一个满射。因此，余核$(F_{z_1} \to$ colim$(F))$ $= 0$ 显然是投射的，这说明 **(N2)**成立。

若 $F_{z_n} = 0$，则**(N3)** 显然成立。若 $F_{z_n} = M$，则 $z_n \in I$。由于 $z_t \sqsubseteq z_{n-1} \sqsubseteq z_n$满足 $z_t,\ z_n \in I$，引理 3.4 推出 $z_{n-1} \in I$，因此由 z_t的极大性可得 $z_{n-1} = z_t$。根据这一观察，很容易验证 $F_{z_n} \to$ colim(F) 是满射。因此，余核$(F_{z_n} \to$ colim$(F))$ $= 0$ 显然是投射的，这说明**(N3)**成立。

条件**(N4)** 的证明与**(N2)** 和**(N3)**类似。当 z_1 是源且 z_n 是汇时，情形也类似。□

引理 8.2。设 $F : P \to R$-模 是一个非零的之字形持久模，其极值点 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$ 具有投射常值型。设 $\sqsubseteq$ 为相关全序。则 F 满足投射余极限条件；也就是说，对于 P的任意 $x \sqsubseteq y$：

(C1) $F|_{[x,y]}$ 的余极限$(F|_{[x,y]})$ 是投射的；**(C2)** $F_x \to$ 的余核$(F_x \to F|_{[x,y]}$ 的余极限$(F|_{[x,y]}))$ 是投射的；**(C3)** $F_y \to$ 的余核$(F_y \to F|_{[x,y]}$ 的余极限$(F|_{[x,y]}))$ 是投射的；**(C4)** $F_x \oplus F_y \to$ 的余核$(F_x \oplus F_y \to F|_{[x,y]}$ 的余极限$(F|_{[x,y]}))$ 是投射的。

证明。根据定义 1.6，F 同构于某个区间 $I \in$P 上的 $F(I, M)$，其中 R-模 M 是投射模。只需证明条件对于$F = F(I, M)$ 成立。

设 $x \sqsubseteq y$ 是 P 中的指标。当 $x = y$ 时，这四个条件显然成立。同样，当 $[x, y] \cap I = \emptyset$ 时，这四个条件显然成立。设 $x \sqsubset y$ 使得 $[x, y] \cap I \neq \emptyset$。

根据引理 3.3，存在 $s, t \in \Gamma$，使得 $z_s \sqsubseteq x \sqsubseteq z_{s+1}$ 且 $z_t \sqsubseteq y \sqsubseteq z_{t+1}$。注意，$F|_{[x,y]}$ 是一个非零的投射常值型之字形持久模，且满足以下任一条件：

(1) 有限极值 $\{x, y\}$ 若 $s = t$;

(2) finite extrema $\{x, z_{s+1}, z_{s+2}, \ldots, z_{t-1}, z_t, y\}$ if $s < t$.

无论哪种情况，引理 8.1 都保证满足这四个条件。 □

以下结果陈述了关于之字形持久模的定理 I。

定理 8.3。 设 $F\colon\ P \to R$-模 是一个非零的有限生成 *zigzag* 持久模，其极值点为 $\{z_i \mid i \in \Gamma\}$。若 F 存在投射常值（分别地，区间）分解，则 F 满足投射余极限条件。

证明。 设 $F = \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} G$ 是 F的投射常值分解。根据引理 8.2，每个G 都满足 PCC。显然，根据余极限与余积和余核在范畴R-**模** [14, §2 中可交换这一事实， F 也满足 PCC，推论 2]。特别地， F逐点有限生成这一点至关重要，这样对于任意固定的 $x \in P$，只有有限多个 G_x 非平凡。 F的区间分解是投射常值分解的一个特例，因此相应的断言显然成立。 □

因此，我们还证明了关于 A_n-持久模的定理 G。

定理 8.4。 设 $F\colon\ A_n \to R$-模 是一个非零的有限生成投射 A_n-持久模。如果 F 具有投射常值（分别为区间）分解，那么 F满足投射余极限条件。

证明。 假设 F 具有投射常值分解。当 $n = 1$时，结论显然成立。当 $n \geq 2$时， F 可视为一个具有有限极值并且根据定理 8.3 满足 PCC 的非零有限生成投射之字形持久模。 F的区间分解是投射常值分解的特例，因此相应的断言立即成立。□

最后，我们陈述关于全序持久模的定理 H。

定理 8.5。 设 $F\colon\ P \to R$-模 是一个非零的有限生成投射全序持久模。如果 F 具有投射常值（分别为区间）分解，那么每个内部态射 $F_{x,\ y}$ 的余核都是投射的。

证明。 *</style}*当 时，该结论显然成立。当 时， 可视为具有有限极值 的非零有限生成投射之字形持久模。由于 存在投射常值分解， 也存在投射常值分解，因此根据定理 *8.3*， 满足 *PCC*。特别地，根据引理 *3.8*，*coker(*，*y)* 是投射的。 F 的区间分解是投射常值分解的一种特殊情况，因此相应结论显然成立。□

请注意，在定理 8.3、8.4 和 8.5 中，无论 R 是交换还是非交换，条件的必要性都成立。这与充分性结果形成对比：在某些情况下，充分性要求 R 是交换的。

9. 唯一性

本文最后探讨投射常值分解的唯一性。鉴于诺特环上的模未必能唯一分解为不可分解直和项，因此不能指望投射常值分解在一般情形下具有唯一性。

然而，通过对 R-**模**施加额外条件，我们可以得到有意义的唯一性结果。我们首先证明，如果 R-**模**是一个克鲁尔-施密特范畴——即一个加性范畴，其中对象可唯一分解为有限个具有局部自同态环的不可分解对象的直和——那么每个持久模的投射常值分解都可以细化为不可分解形式（见定义9.3）。这种分解在同构和直和项置换的意义下是唯一的。此外，我们证明，当 R 是一个整环时，由小偏序集范畴索引的任意逐点有限生成持久模的区间分解同样满足这一唯一性性质。值得注意的是，本节不再要求 R 是诺特的，只假设 R 是一个含幺环，并且 R-**模** 表示所有幺左 R-模构成的范畴。此外，这些结果适用于由任意偏序集索引的持久模，超出了本文所介绍的 A_n型箭图、全序集或之字形偏序集等情形。

定义9.1。 设 P 是一个偏序集。若持久模 $F\colon P \to R\text{-}\mathbf{Mod}$非零，且 $F \cong G \oplus H$ 蕴含 $G = 0$ 或 $H = 0$，则称其为不可分解 的。同理，若一个 R-模 M 非零，且 $M \cong N \oplus L$蕴含 $N = 0$ 或 $L = 0$，则称其为不可分解 的。

引理9.2。 设 P 是一个偏序集，并设 $F\colon P \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ 是一个投射常值型模，其中 $F \cong F(I, M)$，对某个区间 I属于 P以及某个不可分解投射 R-模 M成立。则 F 是不可分解的。

证明。 只需证明结论对 $F(I, M)$ 成立。假设 $F(I, M)$ 有一个分解 $F(I, M) \cong G \oplus H$。那么对每个 $x \in I$，有 $F(I, M)_x \cong G_x \oplus H_x$。由于 $F(I, M)_x = M$是一个不可分解投射 R-模，因此，要么对所有 $x \in I$都有 $G_x = 0$，要么对所有 $x \in I$都有 $H_x = 0$，这意味着 $F(I, M)$ 是不可分解的。□

定义9.3。 设 P 为一个偏序集，且 $F\colon P \to R$-**模** 为一个持久模。 F 的一个不可分解投射常值分解 是指一个投射常值分解 $F = \bigoplus_{G \in \mathcal{A}} G$，满足对每个 $G \in \mathcal{A}$，都有 $G \cong F(I, M)$，其中 I 是 P 中的某个区间，且 M 是某个不可分解投射 R-模。

引理 9.4。 设 P 为一个偏序集，且 $F\colon P \to R$-模 是一个投射常值型模，满足 $F \cong F(I, M)$，其中 I 是 P 中的某个区间，且 M 是某个不可分解投射 R- 模。若 R-模 是一个 *Krull-Schmidt* 范畴，则 F 具有局部自同态环。

证明。 只需证明结论对 $F(I, M)$ 成立。设 $f\colon F(I, M) \to F(I, M)$ 是一个态射。注意，对所有满足 $r \le w$ 的 $r, w \in I$，都有

$$F(I, M)_{r,w} \circ f_r = f_w \circ F(I, M)_{r,w}.$$

因此 $f_r = f_w$由于 $F(I, M)_{r,w} = \mathrm{id}_M$。

现在考虑任意一个 $x, y \in I$。由于 I是连通的，存在 $y_0, y_1, \ldots, y_n \in I$，使得定义 1.4(2) 成立。根据上述观察，我们将得到 $f_x = f_{y_0} = f_{y_1} = \cdots = f_{y_n} = f_y$。这给出了一个同构

$$\mathrm{End}(F(I, M)) \cong \mathrm{End}_R(M),$$

其中，End($F(I,\ M)$) 和 $\mathrm{End}_R(M)$ 分别是 $F(I,\ M)$ 和M的自同态环。由于 M 不可分解，$\mathrm{End}_R(M)$ 是局部环，这进而保证 End($F(I,\ M)$) 是局部环。□

现在我们陈述并证明定理 J。

定理 9.5。 设 P 是一个偏序集，且 $F\colon\ P \to R$-模 是一个非零持久模。假设 R-模 是一个 *Krull-Schmidt* 范畴。如果 F 具有投射常值分解，那么 F 具有唯一的不可分解投射常值分解，且在同构和直和项的排列意义下唯一。

证明。 令 $F = \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} G$ 为 F的一个投射常值分解。对于每个$G \in \mathscr{A}$，都有 $G \cong F(I, M)$，其中某个区间 I属于 P，且某个投射R-模 M满足条件。由于 R-**模**构成一个 Krull-Schmidt 范畴，我们可以将 M 分解为有限个不可分解投射 R-模的直和。这导出一个有限分解 $G = \bigoplus_{i=1}^{n} G^{(i)}$，其中每个 $G^{(i)} \cong F(I, N_i)$，且对应某个不可分解投射 R-模 N_i。因此，每个 $G \in \mathscr{A}$ 都存在一个不可分解投射常值分解，进而 F 也存在一个不可分解投射常值分解。

为证明唯一性，令 $F = \bigoplus_{H \in \mathscr{B}} H$ 为 F的一个不可分解投射常值分解。根据引理 9.2 和 9.4，每个 $H \in \mathscr{B}$ 都是不可分解的，且其自同态环为局部环。Krull-Remak-Schmidt-Azumaya 定理 [1]保证该分解在同构和直和项的排列意义下唯一。□

推论 9.6. 设 P 是一个偏序集，且 $F\colon\ P \to R$-$\boldsymbol{Mod}$ 是一个非零持久模。假设 R-$\boldsymbol{Mod}$ 是一个 *Krull-Schmidt* 范畴，并且 R 是一个不可分解的 R-模。若 F 存在区间分解，则该区间分解在同构和直和项的排列意义下唯一。

证明. 由定理 9.5、引理9.2 和引理 9.4 可立即得出。 □

推论 9.6 中关于 R 作为 R-模不可分解的假设至关重要。该条件确保区间分解确实是一个不可分解的投射常值分解。

回顾一下，若一个范畴的对象集和态射集都是集合，则称该范畴为小的。 A_n型箭图、全序集和之字形偏序集的偏序集范畴都是小范畴。对于由小偏序集范畴索引的持久模，我们在不假设 Krull–Schmidt 性质的情况下，证明了整环上区间分解的唯一性。我们通过将标量扩张到分式域来实现这一点，从而将问题归结为域上持久模已知的唯一性结果。

定义 9.7。 设 R 为整环， $\mathfrak{F}$ 为 R的分式域，Vec($\mathfrak{F}$) 为 $\mathfrak{F}$-向量空间的范畴。设 P为偏序集，且 $F\colon P \to R$-**模**为一个持久模。定义 $\mathfrak{F} \otimes F\colon P \to$ Vec($\mathfrak{F}$) 为满足以下条件的持久模:

- $(\mathfrak{F} \otimes F)_x = \mathfrak{F} \otimes_R F_x$ 对所有 $x \in P$;
- $(\mathfrak{F} \otimes F)_{x,\ y} = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}} \otimes F_{x,\ y}$对所有 $x \leq y$属于 P。

现在我们陈述并证明定理 K。该结果通过推广 [11, §4 中引理 1], 的证明得到；该引理确立了以有限线性箭图为指标、定义在主理想整环上的逐点自由有限生成持久模的区间分解的唯一性。

定理 9.8。 设 R 为一个整环。设 P 为一个小偏序范畴，并设 $F : P \to R$-模 为一个非零有限生成投射持久模。如果 F 具有区间分解，则该分解在同构和直和项的排列意义下是唯一的。

证明。 设 $\mathfrak{F}$ 为 R 的分式域，Vec($\mathfrak{F}$)为 $\mathfrak{F}$-向量空间的范畴。设 $F = \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} G$ 为 F 的一个区间分解。对于每个 $x \in P$，我们有

$$(\mathfrak{F} \otimes F)_x = \mathfrak{F} \otimes_R F_x = \mathfrak{F} \otimes_R \left(\bigoplus_{G \in \mathscr{A}} G_x \right) \cong \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} (\mathfrak{F} \otimes_R G_x) \cong \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} (\mathfrak{F} \otimes G)_x,$$

其中第一个同构源于仅有有限多个 G_x 是非平凡的。因此，可以显然地定义一个持久模同构，使得

$$\mathfrak{F} \otimes F \cong \bigoplus_{G \in \mathscr{A}} (\mathfrak{F} \otimes G).$$

特别地，如果 G 支撑在 P中的区间 I 上，那么 $\mathfrak{F} \otimes G$ 是一个支撑在 I上的区间模。事实上，对于所有 $x \in I$，我们都有

$$(\mathfrak{F} \otimes G)_x = \mathfrak{F} \otimes_R G_x \cong \mathfrak{F} \otimes_R R \cong \mathfrak{F},$$

此外，对于所有满足 $x \leq y$的 x， $y \in I$，我们看到态射

$$(\mathfrak{F} \otimes G)_{x,y} = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}} \otimes G_{x,y}$$

是 $\mathfrak{F}$-向量空间之间的满射，而因此是一个同构。因此， $\mathfrak{F} \otimes F$ 是区间可分解的；当 P是一个小偏序范畴[3, §2]时，该分解在同构和直和项的排列意义下是唯一的。 F 的区间直和项与$\mathfrak{F} \otimes F$的区间直和项之间的显然双射保证了 F的区间分解同样在同构和直和项的排列意义下是唯一的。□

推论 9.9。 设 R 是以下环之一:

(1) 主理想整环；(2) 有限个变量的多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$，其中 k 是主理想整环或域；(3) 局部诺特整环；

(4) 形式幂级数环 $S[[x]]$，其中 *is* S 是局部诺特整环。

设 P 是一个偏序集，且 $F\colon\ P \to R$-模 是一个非零有限生成投射持久模。若 F 具有区间分解，则该分解在同构和直和项的排列意义下唯一。

证明。 由定理 9.8 立即得到，注意所列出的每个环都是整环。

□

回顾一下，推论 9.9 中列出的环具有这样的性质：每个有限生成投射模都是自由模（见推论 1.11）。因此，推论 D、E、F 和 9.9 共同确立了以下结论：对于以 A_n-型箭图、全序集和之字形偏序集为指标的持久模，只要满足相关的必要充分条件，其区间分解就存在且本质唯一。

References

[1] Gorˆo Azumaya, *Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull–Remak–Schmidt's theorem* **1** 1950 117 124 , 《名古屋数学杂志》 (), –。[2] Magnus Bakke Botnan, *Interval decomposition of infinite zigzag persistence modules*, 《美国数学会会刊》145（2017），第8期，3571–3577。[3] Magnus Bakke Botnan 和 William Crawley-Boevey, *Decomposition of persistence modules*, 《美国数学会会刊》（2018）。[4] Gunnar Carlsson 和 Vin de Silva, *Zigzag Persistence*, 《计算数学基础》10（2010），第4期，367–405。[5] David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer, *Stability of Persistence Diagrams* **37** 2007 1, 103 120 , 《离散与计算几何》 (), 第–期。[6] Peter Gabriel 和 Andrei Vladimirovich Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras* 73, 1992 , 《代数 VIII》, 《数学科学百科全书》，第卷，施普林格，柏林，。[7] Wee Liang Gan 和 Nadiya Upegui Keagy, *On interval decomposition of persistence modules*（2025年），arXiv 2507.01303，主要分类 math.AT[8] David Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, 《数学年刊》，第36卷，1890年。[9] Irving Kaplansky, *Projective modules*, 《数学年刊》（第2辑）68（1958），372-377。[10] T.Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, 《数学研究生教材》，施普林格纽约，纽约州，2012年。[11] Jiajie Luo 和 Gregory Henselman-Petrusek, *Interval Decomposition of Persistence Modules over a Principal Ideal Domain*, 《计算数学基础》，发表于2025年，数字对象唯一标识符 10.1007/s10208-025-09732-8。[12] Jiajie Luo 和 Gregory Henselman-Petrusek, *Interval Decomposition of Infinite Persistence Modules over a Principal Ideal Domain* 2025 2511 07614, (), arXiv 。主要分类 math.AT [13] Steve Y. Oudot, *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*, 《数学调查与专著》，第209卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015年。[14] Bodo Pareigis, *Categories and functors*, 《纯粹与应用数学》，第39卷，学术出版社，纽约—伦敦，1970年。[15] Daniel Quillen, *Projective modules over polynomial rings* 36, , 1976 《数学发明》，第卷。[16] Claus Michael Ringel, *Representation theory of Dynkin quivers. Three contributions*, 《中国数学前沿》11（2016），第4期，765–814。[17] Andrei Suslin, *Projective modules over polynomial rings are free* 17, , 《苏联数学》, 1976 第卷。[18] Afra Zomorodian 和 Gunnar Carlsson, *Computing Persistent Homology*, 《离散与计算几何》33（2005），第2期，249–274。