arXiv:2602.13582v1 [math.GR] 14 Feb 2026

大直径扩张群

SEAN EBERHARD 和 LUCA SABATINI

Abstract. 我们研究凯莱图的谱隙和直径在很大程度上如何取决于生成集的选择。我们通过构造一列有限群 G_n，回答 Pyber 和 Szab´o 在 2013年提出的一个问题：这些群允许有界大小的生成集 X_n，Y_n 使得 Cay(G_n，X_n) 是扩张图，而 Cay(G_n，Y_n) 的直径则超多对数。该构造使用半直积 $G_n = C_p^{n-1} \rtimes S_n$，其中 p 在 n中呈指数级增长；分析则归结为对某些置换型指数和的估计。

1. Introduction

设 G 是由有限集 X生成的无限群。凯莱图 Cay(G，X) 的若干重要性质不依赖于 X 的选择，实际上是群的性质：增长类型、端数、双曲性、可 amen 性（通过 Følner 条件），以及性质 (T)。这些事实背后的关键观察是，对于 G 的任意其他有限子集 Y，存在一个常数 c，使得 Y 中的每个元素都可以写成至多 c 个 X 中元素的乘积。

对于有限群序列，情况有所不同。为回答 Lubotzky–Weiss 的一个问题，[10], Alon、Lubotzky 和 Wigderson [1] 构造了有限群，使得它们的凯莱图相对于某个有界大小的生成集是扩张图，而相对于另一个生成集则不是。具体而言，他们证明群 $C_2^{p+1} \rtimes \mathrm{PSL}_2(p$具有这一性质。在具有开创性的论文中，[8], Kassabov 证明对称群也具有这一性质；随后，Kassabov、Lubotzky 和 Nikolov [9] 证明，几乎所有非阿贝尔有限单群相对于适当的有界大小生成集都是扩张图。

然而，上面列出的所有群的最坏情形直径很可能都是多对数级的。对于有限单群，这正是 Babai 的著名猜想 [2, 猜想 1.7]的内容。这一观察促使 Pyber 和 Szab´o 提出了以下问题：

问题 1.1 (Pyber &Szab´o [11, 问题 23])。设 $(G_n)^{n\geq 1}$ 是有限群的一个序列，并假设对于某些基数有界的集合 $(X_n)^{n\geq 1}$，凯莱图(G_n, X_n) 是扩张图。对于每个生成集序列$(Y_n)^{n\geq 1}$，是否有

$$\mathrm{diam}(\mathrm{Cay}(G_n, Y_n)) \leq C(\log |G_n|)^C$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：20F65；次要分类：05C25、11L07。本研究由英国皇家学会通过授予 S.E. 的大学研究奖学金（URF\R1\221185）提供资助。

某个常数 C?

第二作者在 2024年 Oberwolfach 会议上提出了一个类似的问题群中的增长与扩张 [3, 第 1028 页，问题 5]：其中询问，是否只需假设 diam(Cay(G_n, X_n)) 是多对数的；换言之，多对数直径是否是一种群性质。

在本文中，我们对这两个问题都给出了否定的回答。事实上，我们证明了，相对于第二个生成集， G 的直径可以大到 exp($c\sqrt{\log|G|}$)。

定理 1.2。 存在常数 δ、$\varepsilon > 0$ 以及一列有限群 $(G_n)_{n\geq 1}$，其中 $|G_n| \to \infty$ 具有大小有界的生成集 X_n、$Y_n \subseteq G_n$，使得

(a) Cay(G_n, X_n) 是 ε-扩张图，并且(b)

diam(Cay(G_n, Y_n)) $\geq \exp(\delta\sqrt{\log\ |G_n|})$。

相比之下，具有多项式级大直径是一种群性质，这类群称为几乎平坦：见 [5, 定理 4.1，推论 4.16]。特别地，若 (a) 成立，则 diam(凯莱图(G_n, Y_n)) $\leq |G_n|^{o(1)}$，而找到 (b) 中的最优界是一个有趣的开放问题。

现在我们来描述这一构造。值得注意的是，其中有些元素与 Alon–Lubotzky–Wigderson 和 Kassabov 的工作都有共同之处。从现在起，我们省略下标 n，其含义可由上下文明确。这个群就是

$$G \ = \ V_0 \rtimes S_n,$$

其中 $V_0 < V = \mathbf{F}_p^n$ 是维数为 $n-1$ 的删去置换模，且$p \sim e^{cn}$ 是一个大素数。注意

$$|G| \ = \ p^{n-1}n! \ = \ \exp\big(cn^2 + O(n\log n)\big).$$

两个生成集 X 和 Y 都具有 $\{v\} \cup T$ 的形式，其中 $v \in V_0$ 且$T \subset S_n$。对于 Y，我们选择了一个毫无新意的取法

$$v = (1, -1, 0, \dots, 0), \qquad T = \{(1,2), (1,2,\dots,n)\}.$$

显然，凯莱图 Cay(G, Y) 的直径为 $\geq \lfloor pn/2 \rfloor \geq p \sim e^{cn}$，因此 (b) 成立。

证明中非平凡的部分是证明存在一种对 v 和 T 的选取，使得凯莱图 Cay(G, X) 具有一致谱隙。对于 T，我们取 S_n 的一个有界大小扩张生成集（根据 Kassabov 的结果，这样的生成集存在）。通过类似于 [1], 中的分析，寻找 $v \in V_0$ 的问题可归结为以下 “ 置换指数和 ” 估计。

对于 $v, w \in V = \mathbf{F}_p^n$，令 $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$。令 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ 表示全一向量，因此 $V_0 = \mathbf{1}^\perp$，并令 $e_p(x) := \exp(2\pi i x/p)$。

定理 1.3。 存在常数 $\delta, \varepsilon > 0$，使得下述结论成立。对每个整数 $n \geq 1$ 和素数 $p \leq e^{\delta n}$，都存在 $v \in V_0$，使得对所有非常数$w \in V$，

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_p(\langle v, w^\sigma\rangle) \right| \ \leq \ 1 - \varepsilon.$$

事实上，我们证明随机的 $v \in V_0$ 就可以。当 p 有界时，可以通过直接修改 [1] 中的分析来证明这一点。我们的结果的主要新意在于， p 可以非常大：从技术角度来说，我们之所以可以取 p 为 n 的指数级，是因为我们不需要对所有向量使用并集界，只需对单支撑向量使用并集界；随后，我们可以基于柯西–施瓦茨不等式，运用确定性切换论证来处理所有其他向量。

注 1.4. 我们选择给出回答问题 1.1 的最简单论证，但更深入的分析表明，对于任意常数 $\delta > 0$ ，以及某个合适的 $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$，定理 1.2 和 1.3 都成立。此外， $\varepsilon(\delta)$ 可以取为连续单调函数，使得当 $\delta \to 0$ 时， $\varepsilon(\delta) \to 1$ 。另一方面，加法组合学中的标准“整化”论证（例如参见 [4, 第 3] 节）表明，在定理 1.3 中，必然有 $\varepsilon(\delta) \to 0$ ，当 $\delta \to \infty$ 时成立。

2. Preliminaries

若 Γ 是一个 d-正则图，则 $\mathrm{gap}(\Gamma)$ 表示归一化邻接矩阵的谱隙。众所周知，$\mathrm{gap}(\Gamma) > 0$ 当且仅当 Γ 连通；若 $\mathrm{gap}(\Gamma) \geq \varepsilon$ （通常 ε 是隐含的），则称 Γ 是一个（ε-扩张图 。对于扩张图，其直径与顶点数的对数同阶。

若 G 是有限群且 $S \subseteq G$，则凯莱图 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 是一个无向图，其顶点集为 G ，边为 $(g, gs^{\pm 1})$，其中 $g \in G$ 且 $s \in S$。我们允许重边，因此 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 总是一个 d-正则图。我们将 $\mathrm{gap}(G, S)$ 记作 $\mathrm{gap}(\mathrm{Cay}(G, S))$；若 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 是扩张图，则称 G 是相对于 S 的扩张图。

在实际应用中，从技术上说，使用*Kazhdan* 常数来进行论证通常更为方便。其定义为

$$\kappa(G, S) := \inf_{\substack{\pi\colon G \to U(V) \\ V^G = 0}} \inf_{\substack{\xi \in V \\ \|\xi\| = 1}} \max_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|,$$

其中，第一个下确界取遍所有酉表示 $\pi\colon G \to U(V)$，这些表示没有非零的 G-不变向量；第二个下确界取遍所有单位向量 $\xi \in V$。由定义可知， $\kappa(G, S)$ 的以下基本性质大多是显然的。

引理 2.1。 设 G 是有限群，且设 $S, T \subseteq G$。

(1) $\kappa(G, S) \leq \kappa(G, T)$ 若 $S \subseteq T$; *(2)* $\kappa(G, S) \leq 2$; *(3)* $\kappa(G, G) \geq \sqrt{2}$; *(4)* $\kappa(G, S) \geq \frac{1}{n}\kappa(G, S^n)$。

证明。(1)–(2) 显然。关于 (3)–(4)，参见 [8,命题 1.3–1.4]。 □

众所周知，谱隙与 Kazhdan 常数之间满足以下不等式。

引理 2.2。 设 G 是一个有限群，且 $S \subseteq G$。则

$$\frac{\kappa(G, S)^2}{2|S|} \leq \mathrm{gap}(G, S) \leq \frac{\kappa(G, S)^2}{2}.$$

证明。 见 [6,命题 III]。 □

特别地，若 S 的基数有界，则 gap(G,S) 远离零当且仅当 $\kappa(G,S)$ 亦远离零。

3. Expansion in semidirect products

Alon–Lubotzky–Wigderson [1] 通过将半直积视为之字形积的特例来分析其扩张。我们借此机会阐述一种基于 Kazhdan 常数的更直接的方法。

3.1. Kazhdan 常数与半直积。 设 $\pi\colon G \to U(V)$ 为一个酉 G-表示， $S \subseteq G$，以及 $\varepsilon > 0$。若对所有 $s \in S$ 都有 $\|\pi(s)\xi - \xi\| < \varepsilon\|\xi\|$，则称 $\xi \in V$ 是 ε-几乎 S-不变的。于是 $\kappa(G,S)$ 是最大的常数 $\varepsilon \geq 0$，它具有如下性质：每个具有 ε-几乎 S-不变向量的酉 G-表示都有一个非零的 G-不变向量。

引理 3.1. 设 $\pi\colon G \to U(V)$，且设 $\xi \in V$ 为 ε-几乎 S-不变。假设$\kappa(G,S) > 0$，并设 $\varepsilon' = \varepsilon/\kappa(G,S)$。则

(i) 存在一个 G-不变向量 $\xi_1 \in V$，使得 $\|\xi - \xi_1\| < \varepsilon'\|\xi\|$; *(ii)* ξ_1 是 $2\varepsilon'$- 几乎 G- 不变的。

证明。*(i)* 将 $\xi = \xi_1 + \xi_2$ 作正交分解，其中 $\xi_1 \in V^G$ 且 $\xi_2 \in (V^G)^{\perp}$。由于 $((V^G)^{\perp})^G = 0$，存在某个 $s \in S$，使得

$$\kappa(G,S)\|\xi_2\| \leq \|\pi(s)\xi_2 - \xi_2\| = \|\pi(s)\xi - \xi\| < \varepsilon\|\xi\|.$$

因此 $\|\xi_2\| < \varepsilon' \|\xi\|$

(ii) For $g \in G$, $\|\pi(g)\xi - \xi\| = \|\pi(g)\xi_2 - \xi_2\| \leq 2\|\xi_2\| < 2\varepsilon'\|\xi\|$. □

引理 3.2。 若 $H \leqslant G$ 则 $\kappa(G, S) \geq \frac{1}{2}\kappa(G, S \cup H)\,\kappa(H, S \cap H)$。

证明。设 $\pi\colon G \to U(V)$ 是一个酉表示，且满足 $V^G = 0$，并假设 $\xi \in V$ 是一个 ε-几乎 S-不变向量 ξ，其中 $\varepsilon > 0$。那么特别地， ξ 是一个 ε-几乎 $(S\cap H)$-不变的。由引理 3.1(b)， ξ 是 $2\varepsilon'$-几乎 H-不变的，其中 $\varepsilon' = \varepsilon/\kappa(H, S\cap H)$。由于 $\kappa(H, S\cap H) \leq 2$, $\varepsilon \leq 2\varepsilon'$，所以 ξ 是 $2\varepsilon'$-几乎 $(S \cup H)$-不变的。由于 $V^G = 0$，可得 $2\varepsilon' \geq \kappa(G, S\cup H)$，即 $\varepsilon \geq \frac{1}{2}\kappa(G, S\cup H)\kappa(H, S\cap H)$。□

引理 3.3。 若 $N \trianglelefteqslant G$，则 $\kappa(G, S\cup N) \geq \frac{1}{4}\kappa(G/N, SN/N)$。

证明。设 $\pi\colon G \to U(V)$ 为一个带有 $V^G = 0$的酉表示，并假设 $\xi \in V$是 ε-几乎 $(S \cup N)$-不变的，其中 $\varepsilon = \frac{1}{4}\kappa(G/N, SN/N) \leq 1/2$。由引理 3.1(a)，存在某个 $\xi_1 \in V^N$使得 $\|\xi - \xi_1\| < \varepsilon'\|\xi\|$，其中 $\varepsilon' = \varepsilon/\kappa(N,N) \leq \varepsilon/\sqrt{2}$。这意味着 $\|\xi_1\| > (1-\varepsilon')\|\xi\|$。现在 V^{N^-}是一个 G/N-表示，并且如果 $s \in S$则

$$\begin{aligned}\|\pi(s)\xi_1 - \xi_1\| &\leq \|\pi(s)\xi - \xi\| + 2\|\xi - \xi_1\| \\ &< (\varepsilon + 2\varepsilon')\|\xi\| < \frac{\varepsilon + 2\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\|\xi_1\| < 4\varepsilon\|\xi_1\|.\end{aligned}$$

因此， ξ_1是 4ε-几乎（SN/N）-不变的。由于（V^N）$^{G/N} = V^G = 0$并且 $4\varepsilon = \kappa$（G/N， SN/N），这就产生了矛盾。□

下述结果可用于在凯莱图的背景下替代 [12, 定理 6。4]。

Pro位置 3.4. 设 $G = N \rtimes H$, $S \subseteq N$ 和 $T \subseteq H$。设 $R = S \cup T \subseteq G$。则

$$\kappa(G, R) \geq \frac{\sqrt{2}}{48}\,\kappa(N, S^H)\,\kappa(H, T),$$

其中 $S^H = \{s^h : \quad s \in S, h \in H\}$。

证明。 由引理 3.2 应用于 $H \leqslant G$ 可得

$$\kappa(G, R) \geq \frac{1}{2}\kappa(G, S \cup H)\kappa(H, T).$$

现在 $S^H \cup H \subseteq (S \cup H)^3$, 因此由引理 2.1(1,4) 可得

$$\kappa(G, S \cup H) \geq \frac{1}{3}\kappa(G, (S \cup H)^3) \geq \frac{1}{3}\kappa(G, S^H \cup H).$$

将引理 3.2 和 3.3 应用于 $N \trianglelefteq G$,

$$\begin{aligned}\kappa(G, S^H \cup H) &\geq \frac{1}{2}\kappa(G, N \cup H)\kappa(N, S^H)\\ &\geq \frac{1}{8}\kappa(G/N, G/N)\kappa(N, S^H) \geq \frac{\sqrt{2}}{8}\kappa(N, S^H).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3.2. **化简为指数和估计**。 现在我们在假设定理1.2(a)和定理1.3 的前提下证明定理（定理 $V = \mathbf{F}_p^n$，并将在下一节中证明）。令 $V_0 < V$为维数为 $n-1$的删去置换模。令 $G = V_0 \rtimes S_n$且 $v \in V_0$。由 Kassabov [8] 可知，存在一个大小有界的生成集 $T \subseteq S_n$，使得$\kappa(S_n, T)$ 有一个正的统一下界。若 $X = \{v\} \cup T$，则由命题 3.4 和引理2.2 可得

$$\begin{aligned}\kappa(G, X) &\geq \frac{\sqrt{2}}{48}\kappa(V_0, v^{S_n})\kappa(S_n, T)\\ &\geq \frac{1}{24}\,\mathrm{gap}(V_0, v^{S_n})^{1/2}\kappa(S_n, T).\end{aligned}$$

现在我们重点考察 gap(V_0, v^{S_n})。注意到 Cay(V, v^{S_n}) 是 p 个两两不交的图的并，且这些图都同构于 Cay(V_0, v^{S_n})。因此，Cay(V_0, v^{S_n}) 的邻接算子的特征值与 Cay(V, v^{S_n}) 的相同，唯一的区别在于它们的重数。由于 V 是阿贝尔群，其正则表示同构于由不可约复特征标标记的一维表示的直和。我们可以利用公式将这些特征标与向量 $w \in V$ 对应起来

$$\chi_w(u) = e_p(\langle u, w\rangle) \qquad (u, w \in V).$$

（回忆一下， $e_p(x) := \exp(2\pi i x/p)$。）由此可得，凯莱图 V, v^{S_n} 的特征值，以及凯莱图 V_0, v^{S_n} 的特征值，均由下式给出

$$\frac{1}{2|S_n|}\sum_{\sigma \in S_n}(\chi_w(v^\sigma) + \chi_w(-v^\sigma)) \qquad (w \in V).$$

这些恰好是实数 $\{\mathrm{Re}[\lambda_{v,w}]\}_{w\in V}$，其中

$$\lambda_{v,w} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} e_p(\langle v, w^\sigma\rangle).$$

平凡特征值对应于常向量，因此 $\mathrm{gap}(V_0,\ v^{S_n}) = 1 - \max_{w\in V\setminus\langle \mathbf{1}\rangle} \mathrm{Re}[\lambda_{v,w}]$。由于 $\mathrm{Re}[\lambda_{v,w}] \le |\lambda_{v,\ w}|$，该约化得证。

4. Permutational exponential sums

本节将用一个概率论论证证明定理 1.3，该定理断言存在常数 $\delta,\ \varepsilon > 0$，使其满足以下性质。对于每个整数 $n > 0$和素数 $p \le e^{\delta n}$，存在某个向量 $v \in V_0$ 使得

$$\max_{w\in V\setminus\langle \mathbf{1}\rangle} |\lambda_{v,w}| \le 1 - \varepsilon.$$

证明这一点的主要难处在于，若 p 很大，那么向量$w \in V \setminus \langle \mathbf{1}\rangle$ 的数量实在太多，朴素的并集界无法奏效（即便我们只考虑排序向量）。

对于 $v = (v_1, \ldots,\ v_n) \in V_0$和 $u \in \mathbf{F}_p$，令 $\lambda_v(u) = \lambda_{v,\ (u,0,\ldots,0)}$并注意到

$$\lambda_v(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_p(uv_i).$$

引理 4.1。设 $\varepsilon \ge 2/n$ 并假设 $0 \ne u \in \mathbf{F}_p$。若 $v \in V_0$ 是均匀随机的，则

$$\Pr(|\lambda_v(u)| \ge \varepsilon) \le 4\exp(-\varepsilon^2 n/8).$$

因此，

$$\Pr\left(\max_{0\ne u\in\mathbf{F}_p} |\lambda_v(u)| \ge \varepsilon\right) \le 4p\exp\left(-\varepsilon^2 n/8\right).$$

证明。随机变量 $(e_p(uv_i))_{i=1}^{n-1}$ 是相互独立的均匀随机复 p次单位根。若 $\Sigma = \sum_{i=1}^{n-1} e_p(uv_i)$，根据霍夫丁不等式 [7, 定理 2]可得

$$\Pr\left(|\Sigma| \ge \varepsilon n/2\right) \le 4\exp(-\varepsilon^2 n^2/8(n-1)) \le 4\exp(-\varepsilon^2 n/8).$$

另一方面，若 $|\Sigma| \le \varepsilon n/2$，则根据三角不等式

$$|\lambda_v(u)| \le \varepsilon/2 + 1/n \le \varepsilon.$$

第二个界由并集界得到。 □

现在我们推导出适用于所有非恒定 $w \in V$ 的确定性界。

引理 4.2。设 $v \in V_0$。我们有

$$\max_{w\in V\setminus\langle \mathbf{1}\rangle} |\lambda_{v,w}|^2 \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\max_{0\ne u\in\mathbf{F}_p} |\lambda_v(u)|^2.$$

证明。 我们运用基于柯西–施瓦茨不等式的切换论证。

设 $w \in V \setminus \langle \mathbf{1} \rangle$，并令我们来估计 $\lambda_{v,\ w}$。显然，对于所有 $\sigma \in S_n$，都有 $\lambda_{v,\ w} = \lambda_{v,\ w^\sigma}$，因此不失一般性，我们可以假设 $w_1 \neq w_2$。设 $u = w_1 - w_2$，并令 τ 为换位 $(1,\ 2)$。于是

$$\lambda_{v,w} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_p(\langle v, w^\sigma \rangle) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{2} (e_p(\langle v, w^\sigma \rangle) + e_p(\langle v, w^{\tau\sigma} \rangle)).$$

应用柯西–施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned} |\lambda_{v,w}|^2 &\leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{4} \left| e_p(\langle v, w^\sigma \rangle) + e_p(\langle v, w^{\tau\sigma} \rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{4} (2 + 2 \operatorname{Re} \left[e_p(\langle v, w^\sigma \rangle - \langle v, w^{\tau\sigma} \rangle) \right]) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_p(\langle v, (w - w^\tau)^\sigma \rangle) \right]. \end{aligned}$$

现在 $w - w^\tau = (u,\ -u,\ 0,\ 0,\ \ldots)$，因此

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_p(\langle v, (w - w^\tau)^\sigma \rangle) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} e_p(uv_i - uv_j),$$

and

$$\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} e_p(uv_i - uv_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} e_p(uv_i - uv_j) - n = n^2 |\lambda_v(u)|^2 - n,$$

因此我们得到

$$|\lambda_{v,w}|^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{n|\lambda_v(u)|^2 - 1}{n-1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} |\lambda_v(u)|^2.$$

由于 $u \neq 0$，引理得证。 □

定理的证明 *1.3*。 设 $\varepsilon = 1/2$ 与 $\delta = 1/100$。设 n 为一个整数，$p \leq e^{\delta n}$ 为一个素数，并注意 $\varepsilon \geq 2/n$ 成立。对于 $v \in V_0$ 均匀随机，由引理 4.1与 4.2 我们有

$$\begin{aligned} \Pr \left(\max_{w \in V \setminus \langle \mathbf{1} \rangle} |\lambda_{v,w}|^2 \geq (1 + \varepsilon^2)/2 \right) &\leq \Pr \left(\max_{0 \neq u \in \mathbf{F}_p} |\lambda_v(u)| \geq \varepsilon \right) \\ &\leq 4pe^{-\varepsilon^2 n/8} \leq e^{(3\delta - \varepsilon^2/8)n} < 1. \end{aligned}$$

这就用 $\sqrt{(1+\varepsilon^2)/2}$ 替代 $1 - \varepsilon$ 证明了该定理，这已经足够。 □

References

[1] Noga Alon、Alexander Lubotzky 和 Avi Wigderson, *Semi-direct product in groups and zig-zag product in graphs: Connections and applications*, 《第42届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集》, 2001年, 第1–8页。 ↑1, 2、3、4[2] L´aszl´o Babai 和 ´Akos Seress, *On the diameter of permutation groups*, 《欧洲组合学杂志》13（1992年）, 第4期, 231–243页。MR1179520 ↑1[3] Jitendra Bajpai 和 Daniele Dona, *Mini-workshop: Growth and expansion in groups*, 《Oberwolfach 报告》 **21** 2024 1005 1040 ↑2（）, –。Yuri F. Bilu、Vladimir F. Lev 和 Imre Z. Ruzsa, *Rectification principles in additive number theory* **19** 1998 3, 343 353 ↑3 , 《离散与计算几何》（）, 第–期, –。[4] [5] Emmanuel Breuillard 和 Matthew Tointon, *Nilprogressions and groups with moderate growth*, 《数学进展》 **289** 2016 1008 1055 ↑2（）, –。Pierre de la Harpe、A. Guyan Robertson 和 Alain Valette, *On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group* **81** 1993 1 2, 65 , 《以色列数学杂志》（）, 第–期, – 96。 ↑4[6] [7] Wassily Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, 《美国统计学会杂志》58（1963年）, 13–30页。 ↑6[8] Martin Kassabov, *Symmetric groups and expander graphs*, 《数学新进展》170（2007年）, 327–354页。 ↑1, 3、5[9] Martin Kassabov、Alexander Lubotzky 和 Nikolay Nikolov, *Finite simple groups as expanders*, 《美国国家科学院院刊》103（2006年）, 第16期, 6116–6119页。MR2221038 ↑1[10] Alexander Lubotzky 和 Benjamin Weiss, *Groups and expanders*, 离散数学与理论计算机科学 DIMACS 系列, 1993年, 第95–109页。 ↑1[11] L´aszl´o Pyber 和 Endre Szab´o, *Growth in linear groups*, 《稀疏群与超强逼近》, 2013年, 第253–268页。 ↑1[12] Omer Reingold、Salil Vadhan 和 Avi Wigderson, *Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders* **155** 2002 157 187 ↑5 , 《数学年刊》（）, –。

Sean Eberhard, Mathematics Institute, University of Warwick Coventry CV4 7AL, United Kingdom*Email address*: sean.eberhard@warwick.ac.uk, eberhard.math@gmail.comLuca Sabatini, Mathematics Institute, University of WarwickCoventry CV4 7AL, United Kingdom*Email address*: luca.sabatini@warwick.ac.uk, sabatini.math@gmail.com