arXiv:2602.13613v1 [math.CV] 14 Feb 2026

关于 Clunie 和 Sheil-Small 单叶调和映射系数猜想的注记

OMENDRA MISHRA* 和 ASENA C.ETINKAYA

Abstract. 本文构造了广义单叶调和映射，并求得了其系数界。我们给出了反例，以验证 Clunie 和 Sheil-Small 针对函数类$f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$提出的系数猜想；借助这些例子，我们改进了函数类 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$的猜想界。

1. Introduction

设 $\mathcal{H}$ 表示在单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ 上为调和函数的复值函数 $f = u+iv$ 所构成的函数类：$|z| < 1\}$，其中 u 和 v 是在 $\mathbb{D}$中的实值调和函数。函数 $f \in \mathcal{H}$ 可表示为 $f = h + g$，其中 h 和 g 在 $\mathbb{D}$中解析，分别称为 f的解析部分和反解析部分。

$f = h + g$ 的雅可比行列式为

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2.$$

Lewy 的经典结果 [8] 表明，调和函数 $f = h + g \in \mathcal{H}$ 局部单叶且保向，当且仅当 $J_f(z) > 0$ 属于 $\mathbb{D}$，这等价于存在解析函数 $\omega_f(z) = g'(z)/h'(z)$ 属于 $\mathbb{D}$，使得$|\omega_f(z)| < 1$。通常，ω_f称为 f的膨胀。更多详情请参阅 [1, 3, 4, 5, 6, 7]。

具有规范化条件 $h(0) = g(0) = 0$ 和 $h'(0) = 1$ 的熟知单叶调和函数类 $f = h + g \in \mathcal{H}$ 记为 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$。对于映射 $f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$， h 和 g 具有如下形式

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{and} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (|b_1| < 1; z \in \mathbb{D}). \tag{1.1}$$

满足附加条件$g'(0) = 0$ 的函数子类$f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 记作 $\mathcal{S}^0_{\mathcal{H}}$。此外，$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ $\left(\mathcal{S}^0_{\mathcal{H}}\right)$ 中的星形函数、凸函数和近凸函数子类 f 分别记作 $\mathcal{S}^*_{\mathcal{H}}$ $\left(\mathcal{S}^{*,0}_{\mathcal{H}}\right)$、 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ $\left(\mathcal{K}^0_{\mathcal{H}}\right)$和 $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ $\left(\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}\right)$。

Date：2026年2月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 31A05、30C45、30C55。*Key words and phrases.* 单叶调和映射、剪切构造、猜想。

*通讯作者：Omendra Mishra，电子邮件：mishraomendra@gmail.com。

若区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 满足：对所有 $t \in \mathbb{C}$，集合 $\Omega \cap \{t + re^{i\varphi} : r \in \mathbb{R}\}$ 是连通的或为空集，则称其沿方向 $\varphi \in [0, \pi)$，凸。若函数将 $\mathbb{D}$ 单叶映射到沿方向 φ凸的区域，则称该函数沿方向 φ 凸。

1984 年，Clunie-Sheil-Small [2]引入了一种称为 剪切技术的方法，用于从相关的共形映射构造单叶调和映射。通过该方法，可以给出如下推广结果：

引理 1.1. 函数 $f = h + g$ 在 $\mathbb{D}$ 中是一个局部单叶调和函数，它是从 $\mathbb{D}$ 到沿方向 φ 凸的区域的单叶调和映射，当且仅当 $h - e^{2i\varphi} g$是从 $\mathbb{D}$ 到沿方向 φ凸的区域的单叶解析映射。

通过对*Koebe* 函数进行剪切

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

使其水平凸且膨胀为 $w(z) = z$，Clunie-Sheil-Small [2] 引入了调和 *Koebe* 函数 , 用于 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{H}}$

$$k_0(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}}. \tag{1.2}$$

他们猜想， h 和 g 的级数的泰勒系数满足不等式

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

对所有 $n \geq 2$。

通过剪切共形映射

$$s(z) = h(g) + g(z) = \frac{z}{1-z}$$

具有膨胀 $w(z) = -z$ 的垂直凸映射，Clunie-Sheil-Small [2] 还考察了调和半平面映射

$$s_0(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} - \overline{\frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}}. \tag{1.3}$$

They 证明了 h 和 g 的级数的泰勒系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}, \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{2}$$

对所有 $n \geq 2$。

Clunie-Sheil-Small [2] 还猜想，所有属于 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$类的函数都满足以下不等式

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1), \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1)$$

对所有 $n \geq 2$。

本文针对调和映射 $f_c = h_c + g_c \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^c$ 构造了广义调和 Koebe 函数，其中 $c > 0$。我们推广了*Koebe* 函数

$$k_c(z) = h_c - g_c = \frac{2c}{(1+c)} \frac{z}{(1-z)^2}$$

膨胀为 $w(z) = ((1-c)/(1+c)) + z)/(1 + ((1-c)/(1+c))z)$，其中 $c > 0$，并得到广义调和 Koebe 函数:

$$k_c(z) = \frac{z - \frac{c}{(1+c)}z^2 + \frac{1}{3(1+c)}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\frac{((1-c)/(1+c))z + \frac{c}{(1+c)}z^2 + \frac{1}{3(1+c)}z^3}{(1-z)^3}}. \quad (1.4)$$

h 和 g 的级数的泰勒系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{2n^2 + 3cn + 1}{3(1+c)}, \quad |b_n| \leq \frac{2n^2 - 3cn + 1}{3(1+c)}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。对于 $c = 1$，我们得到形式如 1.2 的调和 Koebe 函数（另见 [14, 15, 16]）。

广义右半平面映射用于调和函数类 $f_c = h_c + g_c \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$，该类最早由 Muir [10] 研究。通过对共形映射进行剪切

$$s_c(z) = h_c + g_c = \frac{2}{(1+c)} \frac{z}{1-z}$$

其关于膨胀 $w(z) = ((1-c)/(1+c)) - z)/(1 - ((1-c)/(1+c))z)$ 垂直凸，其中 $c > 0$，并考虑了广义调和右半平面映射

$$s_c(z) = \frac{(1+c)z - z^2}{(1+c)(1-z)^2} + \overline{\frac{(1-c)z - z^2}{(1+c)(1-z)^2}}. \quad (1.5)$$

Muir[10] 证明了 h和 g 的级数的泰勒系数满足不等式

$$|a_n| \leq \frac{1+nc}{1+c}, \quad |b_n| \leq \frac{1-nc}{1+c}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。

对于 $c = 1$，我们得到形式为 1.3 的调和右半平面映射。

我们还为调和映射 $f_a = h_a + g_a \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^a$ 构造了另一个广义调和 Koebe 函数，其中 $a \in (-1,1)$。我们将 *Koebe* 函数 进行了推广

$$k_a(z) = h_a - g_a = \frac{(1-a)z}{(1-z)^2}$$

其膨胀为 $w(z) = (a + z)/(1 + az)$，其中 $-1 < a < 1$，并得到广义调和 Koebe 函数如下

$$k_a(z) = \frac{z + \frac{a-1}{2}z^2 + \frac{1+a}{6}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\frac{az + \frac{1-a}{2}z^2 + \frac{1+a}{6}z^3}{(1-z)^3}}. \quad (1.6)$$

h 和 g 的级数泰勒系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{2(1+a)n^2+3(1-a)n+(1+a)}{6}, \quad |b_n| \leq \frac{2(1+a)n^2+3(a-1)n+(1+a)}{6}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。当 $a=0$ 时，我们得到如下形式的调和 Koebe 函数 1.2 .

Liu 和 Ponnusamy [9] 首先研究了调和函数类 $f_a = h_a + g_a \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^a$的广义右半平面映射。通过对共形映射进行剪切

$$s_a(z) = h_a + g_a = \frac{(1+a)z}{1-z}$$

其关于膨胀 $w(z) = a - z/1 - az$ 为垂直凸，其中 $-1 < a < 1$，他们研究了调和右半平面映射

$$s_a(z) = \frac{z - \frac{1}{2}(1+a)z^2}{(1-z)^2} + \overline{\frac{az - \frac{1}{2}(1+a)z^2}{(1-z)^2}}. \tag{1.7}$$

They 证明了 h 和 g 的级数泰勒系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{(1+a)+n(1-a)}{2}, \quad |b_n| \leq \frac{(1+a)-n(1-a)}{2}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。

对于 $a=0$，我们得到形式为 1.3 的调和右半平面映射。由 $f_c = h_c + g_c \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^c$ 定义的映射，其中 $c > 0$ 可通过在由 $f_a = h_a + g_a \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^a$ 定义的映射中代入 $a = (1-c)/(1+c)$ 轻易得到，其中 $a \in (-1, 1)$（见[11]）。

2. Coefficient Conjecture of univalent harmonic mappings

本节介绍 Clunie-Sheil-Small 提出的系数猜想[2] ，并给出反例以验证关于函数类$f = h \pm g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 的猜想，同时还为函数类 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$提出了改进的猜想。

猜想 2.1。 函数 $f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ 满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。

证明。该猜想的界由式 (1.2) 中定义的调和 Koebe 函数取得。□

猜想 2.2。 所有函数 $f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 均满足以下不等式

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1), \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1) \tag{2.1}$$

对所有 $n \geq 2$。

证明。 由广义调和 Koebe 函数 (1.6)。

$$k_c(z) = h_c - g_c = \frac{2c}{(1+c)}\frac{z}{(1-z)^2}$$

膨胀为 $w(z) = ((1-c)/(1+c)) + z)/(1 + ((1-c)/(1+c))z)$，其中 $c > 0$，并得到广义调和 Koebe 函数如下：

$$k_c(z) = \frac{z - \frac{c}{(1+c)}z^2 + \frac{1}{3(1+c)}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\frac{((1-c)/(1+c))z + \frac{c}{(1+c)}z^2 + \frac{1}{3(1+c)}z^3}{(1-z)^3}}.$$

h 和 g 的级数的泰勒系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{2n^2 + 3cn + 1}{3(1+c)}, \quad |b_n| \leq \frac{2n^2 - 3cn + 1}{3(1+c)}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。对于调和映射$f_a = h_a + g_a \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^a$的广义调和 Koebe 函数，其中 $a \in (-\overline{1}, 1)$，我们有

$$k_a(z) = h_a - g_a = \frac{(1-a)z}{(1-z)^2}$$

膨胀为 $w(z) = (a + z)/(1 + az)$，其中 $-1 < a < 1$，并得到广义调和 Koebe 函数如下：

$$k_a(z) = \frac{z + \frac{a-1}{2}z^2 + \frac{1+a}{6}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\frac{az + \frac{1-a}{2}z^2 + \frac{1+a}{6}z^3}{(1-z)^3}}. \tag{2.2}$$

h 和 g 的级数的泰勒系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{2(1+a)n^2 + 3(1-a)n + (1+a)}{6}, \quad |b_n| \leq \frac{2(1+a)n^2 + 3(a-1)n + (1+a)}{6}$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。这些界证明不等式 (2.1) 对所有类 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 都成立；此外，这些例子给出了类 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 的等号情形。□

我们针对所有函数 $f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 提出了如下形式的改进猜想

猜想 2.3. 所有函数 $f = h + g \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 都满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{2(1+a)n^2 + 3(1-a)n + (1+a)}{6}, \quad |b_n| \leq \frac{2(1+a)n^2 + 3(a-1)n + (1+a)}{6} \tag{2.3}$$

对所有 $n \geq 2$，其中 $-1 < a < 1$。

经费支持。 不适用。

Co利益冲突。 作者声明不存在利益冲突 .

数据可用性声明。 当前研究期间生成和/或分析的数据集可根据合理请求从通讯作者处获取。

References

[1] A. Aleman 和 A. Constantin, 《调和映射与理想流体流》, *Arch. Ration. Mech. Anal.* ( ), – **204** 2012 479 513 。[2] J. Clunie 和 T. Shiel-Small, 《调和单叶函数》, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I* ( ), – *Math.* **9** 1984 3 25 。[3] O. Constantin 和 M. J. Martín, 《流体流的调和映射方法》, *Math. Ann.* **369** (2017), 1–16。[4] M. Dorff, 《平面调和凸映射的卷积》, *Complex Var. Theory Appl.* **45** (2001), 263–271。[5] M. Dorff、M. Nowak 和 M. Wo

loszkiewicz, 《调和凸映射的卷积》, ( ), – 。[6] M. Dorff 和 J. Rolf, *Anamorphosis, mapping problems, and harmonic univalent functions*, 《复分析探索》, 美国数学协会, 华盛顿特区（2012）, 197–269。[7] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2004。[8] H. Lewy, 《关于某些一一映射中雅可比行列式不为零的问题》, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** 1936 689 692 。[9] Z. Liu 和 S. Ponnusamy, 《单叶调和右半平面映射卷积的单叶性》, 《计算方法与函数理论》 **17**（2017）, 第2期, 289–302。[10] S. Muir, 《在一个或每个方向上凸的调和映射》, *Comput. Methods Funct. Theory* ( ), – **6** 2012 221 239 。[11] A. Cetinkaya 、 O. Mishra, 《凸组合与广义单叶调和映射卷积的半径结果》, *Filomat* **40**, 第8期, （2026）。[12] M. Mateljevic, 《调和单射映射的导数模与雅可比行列式的下界》。Filomat 2015, **29**, 221–244。[13] M. Mateljevic、N. Mutavdzic, 《调和映射和多重调和映射的边界 Schwarz 引理及其若干推广》。Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2022, **45**, 3177–3195。[14] M. Mateljevic, 《Koebe 定理的拟共形与拟正则调和类比及其应用》, Ann. Acad. Sci. Fenn.-M, 第32卷, （2007）, 第2期, 301–315。[15] M. Mateljevic、N. Mutavdzic 和 B. N. Ornek, 《与 Jack 引理和 Schwarz 引理相关的若干全纯函数类注记》, Appl. Anal. Discrete Math. 16（2022）, 111–131。https://doi.org/10.2298/AADM200319006M。[16] M. Mateljevic, 《解析函数和拟正则调和函数的 Koebe 四分之一定理的不同形式及其应用》, 《数学研究所出版物》新系列, 第84（98）卷（2008）, 61–72。

*Omendra Mishra

Department of Mathematical and Statistical Sciences Institute of Natural Sci- , ences and Humanities Shri Ramswaroop Memorial University Lucknow 225003 India.

, , „*Email address*: mishraomendra@gmail.comAsena Çetinkaya

Department of Mathematics and Computer Science Istanbul Kültür University Is- , tanbul Türkiye.

, ,*Email address*: asnfigen@hotmail.com