有限群差异图的度量维数

MANISHA、PARVEEN、JITENDER KUMAR*

Abstract. 有限群 G 的差图 $\mathcal{D}(G)$ 是增强幂图 $\mathcal{P}_E(G)$与幂图 $\mathcal{P}(G)$之差，并移除了所有孤立顶点。本文刻画了有限幂零群的差图的顶点集，并求得其基数。由此，我们得到了有限幂零群的差图的度量维数。此外，本文还确定了若干非幂零群的差图的度量维数，即二面体群、广义四元数群和半二面体群。

arXiv:2602.13642v1 [math.GR] 14 Feb 2026

1. Historical Background and Preliminaries

有限群上可以定义多种图，例如凯莱图、幂图、交换图及其变体。这些图有助于理解群的代数性质与这些图的图论性质之间的联系。运用群论常常能为图论带来有用的构造和结果。

群 G 的幂图 $\mathcal{P}(G)$是一个以 G为顶点集的简单无向图。若两个不同顶点 x和y 中一个是另一个的幂，即 $x \in \langle y\rangle$ 或 $y \in \langle x\rangle$，则它们相邻。有向幂图由 Kelarev 和 Quinn [12]引入。此后，研究者从不同角度研究无向幂图，参见 [7, 9, 18]。关于幂图的综述见 [14]。

为了研究介于幂图和交换图之间的图，Aalipour 等人 [1] 引入了增强幂图。增强幂图 $\mathcal{P}_E(G)$的顶点集为 G，其中两个不同顶点 x 和 y 相邻，当且仅当它们都属于 G的某个循环子群。关于该图的研究见 [3, 17, 21]。

Cameron [5] 提出了若干关于群上定义的图的开放问题，其中包括增强幂图与幂图之间的差异。差图 $\mathcal{D}(G)$由增强幂图删去幂图的所有边，并删除孤立顶点而得。Biswas 等人 [4] 研究了 $\mathcal{D}(G)$的连通性和完美性。此后，Parveen 等人 [16, 19] 研究了有限幂零群的差图的结构性质和拓扑性质。

对于图 Γ，顶点 x 与 y 之间的距离记为 $d(x, y)$。若 $d(x, z) \neq d(y, z)$，则顶点 z 分辨 x 与 y 。若每一对顶点都被 W 中的某个顶点所分辨，则子集 $W \subseteq V(\Gamma)$ 称为分辨集。 Γ 的度量维数 记为 $\dim(\Gamma)$，即分辨集的最小基数。度量维数由 Harary 与 Melter [11] 以及 Slater [20] 独立提出。确定度量维数是 NP-困难的[10, 13]。它在导航、网络发现和机器人学中有应用。幂图与增强幂图的度量维数在 [9, 17] 中得到了研究。受此启发，我们研究差图的度量维数。我们的结果表明， $\mathcal{D}(G)$ 的度量维数并不能直接由 $\mathcal{P}(G)$ 与 $\mathcal{P}_E(G)$ 的度量维数得出。

现在我们回顾本文通篇使用的一些基本定义与记号。图 $\Gamma = (V, E)$ 由顶点集 $V(\Gamma)$ 和边集 $E(\Gamma)$ 组成。若 $\{u, v\} \in E(\Gamma)$，则两个顶点 u 与 v 相邻，记作 $u \sim v$。本文所考虑的图均为简单图。顶点 x 的开邻域为 $N(x)$，闭邻域为 $N[x] = N(x) \cup \{x\}$。若每对顶点之间都存在一条路径，则该图是连通的。顶点 u 的度记为 $\deg(u)$。若 $N[u] = N[v]$，则两个顶点 u 与 v 称为**真孪点**；若 $N(u) = N(v)$，则称为**假孪点**。若二者属于其中任一情形，则称为**孪点**。若 U 中每一对顶点都是孪点，则集合 U 称为孪点集。

注 1.1： [2, 注 3.3] 设 U 是连通图 Γ 中的一个孪点集，且满足 $|U| = l \geq 2$。那么， Γ 的每个分辨集都至少包含 U中的 $l - 1$ 个顶点。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 05C25.*Key words and phrases.* 边连通度，点连通度，最小度，幂零群。
* 通讯作者。

我们在 G 上定义如下等价关系：若 x 和 y 是孪点，则 $x \sim y$。令 $[x]$ 表示 x的等价类。对于元素 $a \in G$， a的阶 记为 $o(a)$，其大小为由 a生成的循环子群的大小。若对于某个素数 p有 $|G| = p^n$，则称 G 为 p-群。 G 的所有元素阶的集合记为 π_G。

G 的循环子群若不被 G的任何循环子群真包含，则称为极大循环子群。 G 的所有极大循环子群构成的集合记为 $\mathcal{M}(G)$。设 $M(G)$为有限群 G的所有极大循环子群的生成元所构成的集合。

对于 $n \geq 3$，阶为 $2n$ 的二面体群 D_{2n} 定义如下：

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = e,\ xy = yx^{-1} \rangle.$$

它有一个阶为 n 的极大循环子群 $\langle x \rangle$ ，以及 n 个阶均为 2 的极大循环子群 $\langle x^i y \rangle$、 $1 \leq i \leq n$。对于 $n \geq 2$，阶为 $4n$ 的广义四元数群 Q_{4n} 定义如下：

$$Q_{4n} = \langle a, b \mid a^{2n} = e,\ a^n = b^2,\ ab = ba^{-1} \rangle.$$

它有一个阶为 $2n$ 的极大循环子群 $\langle a \rangle$ ，以及 n 个阶均为 4 的极大循环子群 $\langle a^i b \rangle$、 $1 \leq i \leq n$。对于 $n \geq 2$，阶为 $8n$ 的半二面体群 SD_{8n} 定义如下：

$$SD_{8n} = \langle a, b \mid a^{4n} = b^2 = e,\ ba = a^{2n-1} b \rangle.$$

该群有一个阶为 $4n$ 的极大循环子群 $\langle a \rangle$ 、 $2n$ 个 2 阶极大循环子群，以及 n 个阶为 4 的极大循环子群。

此外，

$$\mathcal{D}(D_{2n}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{Z}_n), \quad \mathcal{D}(Q_{4n}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{Z}_{2n}), \quad \mathcal{D}(SD_{8n}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{Z}_{4n}).$$

定理 1.2 ([8,第193])。 设 G 是一个有限群。以下命题等价：

(1) G 是幂零群。(2) G 的每个 *Sylow* 子群都是正规子群。(3) G 是其 *Sylow* 子群的直积。(4) 阶互素的元素可交换。

定理 1.3 ([15, 定理 5。4])。 若 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$ 是一个幂零群，则

$$\mathcal{P}_E(G) \cong \mathcal{P}_E(P_1) \boxtimes \mathcal{P}_E(P_2) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{P}_E(P_r),$$

其中 P_i 是 G 的 *Sylow* p_i 子群。

命题 1.4 ([16, 命题 3.4]). 设 G 是一个有限群，且 x、 $y \in G \setminus \{e\}$ 满足 $o(x) \mid o(y)$。那么，在 $\mathcal{D}(G)$中， x 与 y 不相邻。

引理 1.5 ([6]). 设 p 是一个素数，且 $G = \mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_k}}$，其中 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k$。

(1) G 恰有 $\frac{p^k - 1}{p-1}$ 个阶为 p的元素。(2) 每个阶为 p^u、 $u > 1$的非极大循环子群，都恰好包含于 p^{k-1} 个阶为 p^{u+1}的循环子群中。

备注 1.6. 若 x 和 y 是有限群 G 的元素，且既不满足 $o(x) \mid o(y)$，也不满足 $o(y) \mid o(x)$，则 $x \nsim y$ 属于$\mathcal{P}(G)$。若 x 和 y 属于同一个循环子群，则反之亦成立。

记号 $x \nrightarrow y$ 表示 $y \in \langle x \rangle$ ，但 $x \notin \langle y \rangle$。

2. Main Results

命题 2.1. 设 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$是一个有限幂零群。那么两个顶点

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad and \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

在.....中相邻 当且仅当存在不同的指标 i、 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$，使得它们在差图 $\mathcal{D}(G)$ 中..... at

$$x_i \nrightarrow y_i \quad and \quad y_j \nrightarrow x_j,$$

对于所有的 $l \notin \{i, j\}$，元素 x_l 和 y_l 属于 P_l 的同一个循环子群。

证明。 假设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 和 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_k)$ 在 $\mathcal{D}(G)$ 中相邻。由定理 1.3 可知，对每个 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$，顶点 x_i 和 y_i 都属于 P_i 的同一个循环子群。由于 x 和 y 在 $\mathcal{D}(G)$ 中相邻，因此它们在幂图 $\mathcal{P}(G)$ 中不相邻。由命题 1.4 可知，这意味着 $o(x)\mid o(y)$ 和 $o(y)\mid o(x)$ 均不成立。记

$$o(x)=\prod_{i=1}^{k}o(x_i)\quad\text{and}\quad o(y)=\prod_{i=1}^{k}o(y_i),$$

我们得出结论：必定存在至少两个不同的指标 i 和 j，使得

$$o(x_i)>o(y_i)\quad\text{and}\quad o(x_j)<o(y_j).$$

因此，我们有 $x_i\nrightarrow y_i$ 和 $y_j\nrightarrow x_j$。对于其余所有指标 $l\notin\{i,j\}$，元素 x_l 和 y_l 属于 P_l的同一个循环子群，证毕。

反过来，假设存在不同的指标 i,j，使得 $x_i\nrightarrow y_i$ 和 $y_j\nrightarrow x_j$，并且对于所有 $l\notin\{i,j\}$，x_l 和 y_l 属于 P_l 的同一个循环子群。根据定理 1.3，x 和 y 在增强幂图$\mathcal{P}_E(G)$中相邻。此外，条件 $x_i\nrightarrow y_i$ 和 $y_j\nrightarrow x_j$ 意味着，既有 $o(x)\mid o(y)$ 不成立，也有 $o(y)\mid o(x)$不成立。因此，x 和y 在幂图 $\mathcal{P}(G)$中不相邻。于是，x 和 y 在差图 $\mathcal{D}(G)$中相邻。□

命题 2.2。 设 $G=P_1\times P_2\times\cdots\times P_k$ 是一个有限幂零群。那么，顶点 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$不属于差图 $\mathcal{D}(G)$ 的顶点集，当且仅当对于所有 $i\in[k]$，$x_i\in M(P_i)$ 成立，或者对于所有 $i\in[k].$，$x_i=e$成立。此外，$|V(\mathcal{D}(G))|=|G|-\big(|M(P_1)|\,|M(P_2)|\cdots|M(P_k)|+1\big)$.

证明。 假设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 不是 $\mathcal{D}(G)$ 的一个顶点。那么，x 是图 $\mathcal{P}_E(G)-\mathcal{P}(G)$ 中的一个孤立顶点。假设至少存在一个指标 i，不妨设为 $i=1$，使得 $x_1\notin M(P_1)$。

情形 1： $x_1=e$。

子情形 *1.1*： $x_j=e$ 对所有 $2\le j\le k$均成立。于是 $x=(e,\ e,\ \ldots,\ e)$，结论得证。

子情形 *1.2*： $x_j\neq e$ 对某个 $j\neq1$成立，设为 $j=2$。取

$$y=(g_1,e,x_3,\ldots,x_k),$$

其中 $g_1\in M(P_1)$。于是 x 和 y 都属于循环子群

$$\langle(g_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)\rangle,$$

因此在 $\mathcal{P}_E(G)$中相邻。此外，$o(x)\mid o(y)$和 $o(y)\mid o(x)$均不成立。因此，x和 y 在 $\mathcal{D}(G)$中相邻，这与 x是孤立点的假设矛盾。

情形 2： $x_1\neq e$。

子情形 *2.1*： $x_j\neq e$ 对某个 $j\neq1$成立，设为 $j=2$。取

$$y=(g_1,e,x_3,\ldots,x_k),$$

其中 $g_1\in M(P_1)$。与之前一样，$x,\ y\in\langle(g_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_k)\rangle$，因此 $x\sim y$属于 $\mathcal{P}_E(G)$。由于既非 $o(x)\mid o(y)$，也非$o(y)\mid o(x)$，我们得到 $x\sim y$ 属于 $\mathcal{D}(G)$，再次导出矛盾。

子情形 *2.2*： $x_j=e$ 对所有 $2\le j\le k$ 均成立。取

$$y=(e,g_2,e,\ldots,e),$$

其中 $g_2\in M(P_2)$。于是 $x,\ y\in\langle(x_1,\ g_2,\ e,\ \ldots\ldots,\ e)\rangle$，且既非 $o(x)\mid o(y)$，也非 $o(y)\mid o(x)$。因此，x与 y在 $\mathcal{D}(G)$中相邻，矛盾。

因此，若 x 不是 $\mathcal{D}(G)$ 的顶点，则要么对所有 $i\in[k]$，$x_i\in M(P_i)$ 均成立；要么对所有 $i\in[k]$，$x_i=e$ 均成立。

反之，假设对所有 $i\in[k]$，要么 $x_i\in M(P_i)$，要么 $x=e$。那么，对于任意 $y\in G$，若 x 和 y 在 $\mathcal{P}_E(G)$ 中相邻，则有 $o(x)\mid o(y)$ 或 $o(y)\mid o(x)$。因此，x 在 $\mathcal{D}(G)$ 中没有邻点，所以它是 $\mathcal{P}_E(G)-\mathcal{P}(G)$ 的一个孤立顶点。

孤立顶点的数目为 $|M(P_1)|\,|M(P_2)|\cdots|M(P_k)|+1$，从而得到 $|V(\mathcal{D}(G))|$的所述公式。□

在 G 上定义一个等价关系：规定当且仅当 x 且 y 是图 $\mathcal{D}(G)$ 中的孪点时，$x\approx y$。包含 x 的等价类记为 $[x]$。

引理 2.3. 设 $G=P_1\times P_2\times\cdots\times P_k$ 是一个有限幂零群，且设 $x\in P_1$，其中 $x\neq e$ 和 $o(x)=p_1^{\alpha}$。那么

$$[(x,e,e,\ldots,e)]=\Big\{(y,e,e,\ldots,e)\ :\ o(y)=p_1^{\alpha}\ \textit{and}\ |\langle y\rangle\cap\langle x\rangle|\ge p_1^{\alpha-1}\Big\}.$$

证明。 设 $(x, e, e, \ldots, e)$ 和 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 是差图 $\mathcal{D}(G)$ 中的孪点，即 s,

$$N(x, e, e, \ldots, e) = N(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

假设对于某个 $i > 1$，有 $x_i \neq e$。不失一般性，设 $x_2 \neq e$。考虑顶点

$$(e, x_2, e, \ldots, e).$$

由于 $x \twoheadrightarrow e$ 和 $x_2 \twoheadrightarrow e$，我们有

$$(e, x_2, e, \ldots, e) \in N(x, e, e, \ldots, e).$$

然而，

$$o(e, x_2, e, \ldots, e) \mid o(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

因此（e， x_2， e， ……， e）和（x_1， x_2， ……， x_k）在 $\mathcal{D}$（G）中不相邻。这与我们的假设矛盾。因此，对于所有 $i \geq 2.$，$x_i = e$。于是，

$$N(x, e, e, \ldots, e) = N(x_1, e, e, \ldots, e).$$

现在令（z_1， z_2，……， z_k） $\in N$（x， e， e，……， e）。由命题 2.1，我们得到 $x \twoheadrightarrow z_1$ 和 $x_1 \twoheadrightarrow z_1.$。因此， $\langle x \rangle$ 和 $\langle x_1 \rangle$ 都包含 $\langle z_1 \rangle$。这意味着 o（x_1） $= o$（x） $= p_1^{\alpha}$，并且 $\langle x_1 \rangle = \langle x \rangle$ 或

$$|\langle x_1 \rangle \cap \langle x \rangle| \geq p_1^{\alpha - 1}.$$

证明至此完成。 □

引理 2.4。 设 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$ 是一个有限幂零群。那么， G 有唯一一个阶为2 的元素 l，当且仅当 $|[l]| = 1$ 属于 $\mathcal{D}(G)$。

证明。 如果 G 有唯一一个阶为 2 的元素 l，那么在 $\mathcal{D}(G)$中不存在其他与 l具有相同邻域的顶点。因此， l 没有孪点，所以 $|[l]| = 1$。

反过来，假设 $|[l]| = 1$。若 $o(l) > 2$，则 $l \neq l^{-1}$，并且在 $\mathcal{D}(G)$ 中有 $N(l) = N(l^{-1})$。因此， l和l^{-1} 是孪点，这意味着 $|[l]| \geq 2$，矛盾。因此 $o(l) = 2$。

现在假设 G含有多个阶为 2 的元素。那么所有阶为 2 的元素都属于同一个等价类。这意味着 $|[l]| \geq 2$，再次导出矛盾。因此， l 是 G中唯一的阶为 2 的元素。□

引理 2.5. 设 $x = (x_1, \ldots, x_k)$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_k)$ 是有限幂零群 G 的差图 $\mathcal{D}(G)$ 的两个顶点，且 $N(x) = N(y) \cup \{z\}$，其中某个 $z \in V(\mathcal{D}(G))$ 满足该条件。那么

(i) z 是阶为2的唯一元素。(ii) o

$(y) = 2o(x)$。

证明。 假设 $N(x) = N(y) \cup \{z\}$。显然， $z \in N(x)$，但 $z \notin N(y)$。若 $o(z) > 2$，则 $z^{-1} \neq z$和$N(z) = N(z^{-1})$，这意味着 $z^{-1} \in N(x)$。这与假设矛盾： $N(x) \setminus N(y)$ 恰好包含一个顶点。因此 $o(z) = 2$。

接下来，我们证明 G 有一个 2 阶唯一元素。反设 G 包含不止一个 2 阶元素。由于 $x \sim z$，我们有 $2 \nmid o(x)$。于是每个 2 阶元素都与 x相邻，这意味着$|N(x) \setminus N(y)| \geq 2$，矛盾。因此， z是 G中唯一的 2 阶元素。

现在设 p 为奇素数。我们断言， $p^a \mid o(y)$ 当且仅当 $p^a \mid o(x)$。首先假设 $p^a \nmid o(x)$。选取一个元素 $l = (l_1, l_2, \ldots, e)$，使得 $o(l_1) = 2$、$o(l_2) = p^a$，且 $x_2 \in \langle l_2 \rangle$。那么，既有 $o(l) \mid o(x)$，也有 $o(x) \mid o(l)$。此外，l，x属于同一个循环子群。因此 $l \sim x$。由于 $2p^a \mid o(y)$，我们有 $l \not\sim y$，这与 $N(x) = N(y) \cup \{z\}$矛盾。

现在我们假设 $p^a \nmid o(y)$。取 $l = (e, l_2, \ldots, e)$，其中 $o(l_2) = p^a$ 且 $y_2 \in \langle l_2 \rangle$。那么，既非 $o(l) \mid o(y)$，也非$o(y) \mid o(l)$ 且 $l \sim y$。由于 $p^a \mid o(x)$，我们有 $o(l) \mid o(x)$，这意味着 $l \not\sim x$，再次产生矛盾。因此，对于所有奇素数 p，当且仅当 $p^a \mid o(y)$ 时， $p^a \mid o(x)$ 成立。

最后，假设对于某个 $a > 1$，有 $2^a \mid o(y)$。那么，阶为 2^a 的元素与 x 不相邻。否则，$N(x) \neq N(y) \cup \{z\}$。因此， $2 \mid o(x)$。这与 $x \sim z$（其中 $o(z) = 2$）这一事实矛盾。因此， $2 \mid o(y)$ 且 $2 \nmid o(x)$。

综合所有情况，我们得出结论： $o(y) = 2o(x)$。 □

引理 2.6. 设 $x = (x_1, \ldots, x_k)$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_k)$ 是有限幂零群 G 中的两个元素。那么$N(x) = N(y) \cup \{z\}$ 属于 $\mathcal{D}(G)$，当且仅当 $G \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times G', n > 1$ 或 $G \cong Q_{4m} \times G', m = 2^r, r \geq 1$，其中 G' 是一个西罗 p-子群，且含有一个素数阶极大循环子群。

证明。设 $N(x) = N(y) \cup \{z\}$。由引理 2.5， G 有唯一的 2 阶元素，且 $2 \nmid o(x)$。唯一含有一个 2 阶元素的有限幂零群只有 $\mathbb{Z}_{2^n} \times G'$（其中 $n \geq 1$）和 $Q_{4m} \times G'$（其中 $m = 2^r, r \geq 1$），这里G' 是一个奇数阶群。

假设 $|G'|$ 可被至少两个素数整除。由于 $2 \nmid o(x)$，不失一般性地考虑 $p_i \mid o(x)$。

情形 1： $p_j \nmid o(x)$ $j \neq i$。则 $x = (e, x_i, \ldots, e)$，其中 $o(x_i) = p_i^{a_i}$。由于 $p_i^{a_i} \mid o(x)$，我们有 $p_i^{a_i} \mid o(y)$。选取 $s = (e, y_i, e, \ldots, s_j, \ldots, e)$，其中 $o(s_j) = p_j$。于是 $o(s) = p_i^{a_i} p_j$，且 $o(y) = 2p_i^{a_i}$。因此， $o(y) \mid o(s)$ 和 $o(s) \mid o(y)$ 均不成立，而 s、y 位于同一个循环子群中，这意味着 $s \sim y$。然而， $o(x) \mid o(s)$ 意味着 $x \nsim s$，矛盾。

情形 2： $p_j \mid o(x)$ $j \neq i$。选取 u使得 $o(u) = 2\prod_{r \neq 1,\ j} o(x_r)$。于是 $o(u) \mid o(y)$推出 $u \nsim y$。此外，$o(u) \nmid o(x)$且 $o(x) \nmid o(u)$，而 u 和 x 属于同一个循环子群，这意味着 $u \sim x$，矛盾。

因此， $|G|$ 至多被两个素数整除。

现在假设 G' 不包含素数阶的极大循环子群。于是 $o(x) = p^\alpha$ 且 $o(y) = 2p^\alpha$.

情形 1： $\alpha = 1$。选取 $s = (e,\ s_2)$，使得 $o(s_2) = p^2$ 且 $y_2 \in \langle s_2 \rangle$。于是 $o(x) \mid o(s)$推出 $x \nsim s$，而 $o(y) \nmid o(s)$和 $o(s) \nmid o(y)$推出 $s \sim y$，矛盾。

情形 2： $\alpha > 1$。取 $s = (y_1,\ s_1)$，使得 $s_1 \in \langle x_1 \rangle$ 且 $o(s_1) = p$。于是 $o(s) \mid o(y)$ 蕴含 $y \nsim s$，而 $o(x) \nmid o(s)$ 和 $o(s) \nmid o(x)$ 蕴含 $x \sim s$，再次导出矛盾。

因此 G' 含有一个素数阶极大循环子群。

反之，设 $G \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times G'$ 满足 $n > 1$，或 $G \cong Q_{4m} \times G'$ 满足 $m = 2^r, r \geq 1$，其中 G' 是一个含有素数阶极大循环子群的 Sylow$p$-子群。取 $x = (e,\ x_2)$，使得 $o(x_2) = p$，并取 $y = (y_1,\ y_2)$，使得$o(y_1) = 2$，且 $o(y_2) = p$。于是 $N(x) = N(y) \cup \{z\}$，其中 z 是唯一的 2 阶元素。□

定理 2.7。设 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$是一个有限幂零群，且设 $x_1, \ldots, x_s$是 $\mathcal{D}(G)$中各等价类的代表元系。若 $G \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times G'$ 且 $n > 1$，或 $G \cong Q_{4m} \times G'$ 且 $m = 2^r, r \geq 1$，其中 G' 是一个含有素数指数极大循环子群的 *Sylow* p-子群，则

$$S = (V(\mathcal{D}(G)) \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}) \cup \{x_k\},$$

其中 $o(x_k) = 2$是 $\mathcal{D}(G)$的一个分辨集。否则，

$$S = V(\mathcal{D}(G)) \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$$

是 $\mathcal{D}(G)$的一个分辨集。此外，

$$\dim(\mathcal{D}(G)) \in \{\alpha, \alpha - 1\},$$

where $\alpha = |G| - \big(|M(P_1)||M(P_2)| \cdots |M(P_k)| + |\overline{G}|\big)$.

证明。设 $x_i \neq x_j$是 $\{x_1, \ldots, x_s\}$中的两个不同元素。则存在 $l_1 \in V(\mathcal{D}(G))$，使得 $l_1 \in N(x_i)$，但 $l_1 \notin N(x_j)$。

情形 1。 $|[l_1]| \neq 1$. 由于 $[l_1]$ 是一个非单点等价类，存在一个顶点 $t \in S = V(\mathcal{D}(G)) \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$ 使得 $t \in [l_1]$。因此 $x_i \sim t$和 $x_j \nsim t$，这意味着 $d(x_i, t) = 1$ 以及 $d(x_j, t) \neq 1$。于是 t区分了 x_i 和 x_j。

情形 2. $|[l_1]| = 1$. </style}在此情形下， $l_1 = x_k$，因此 $N(x_i) = N(x_j) \cup \{x_k\}$。由引理 2.6 可知，要么 $G \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times G'$ 且 $n > 1$，要么 $G \cong Q_{4m} \times G'$ 且 $m = 2^r, r \geq 1$，其中 G' 是一个 Sylow p-子群，且具有一个素数指数的极大循环子群。

假设 $x_i = (e,\ x)$，其中 x 是该素数指数极大循环子群的生成元，且 $x_j = (y_1,\ x)$，其中 $o(y_1) = 2$。那么 $N(x_i) = N(x_j) \cup \{x_k\}$，并且 x_k 是区分 x_i 和 x_j的唯一顶点。由于$x_k \in \{x_1, \ldots, x_s\}$，我们纳入 x_k 并定义

$$S = (V(\mathcal{D}(G)) \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}) \cup \{x_k\}.$$

因此 $x_k \in S$，且 S 区分 x_i 和 x_j。

因此，在这两种情况下，集合 S 能够区分任意一对不同的等价类代表元。该结果由备注 1.1 和命题 2.2 得出。 ow □

引理 2.8。设 G 是一个阶为 n 的有限循环群，其中 n 不是素数幂。那么，在关系 $\sim$ 下， $\mathcal{D}(G)$ 的等价类个数为 $\tau(n) - 2$，其中 $\tau(n)$ 表示 n 的正因子个数。

证明。设 $x, y \in G$，满足 $[x] = [y]$。若 $o(x) \neq o(y)$ 且 $o(x) = p^\alpha$，其中某个素数为 p，则由引理 2.3 可知必有 $o(y) = p^\alpha$，这与假设矛盾。因此，设 $o(x)$ 至少被两个不同的素数整除。

情形 1。 $o(x) \nmid o(y)$。由于 G 是循环的， x 和 y 属于同一个循环子群，因此 $x \sim y$。不妨设 $y \neq y^{-1}$。然而 $x \sim y^{-1}$，但 $y \nsim y^{-1}$，这与 $[x] = [y]$矛盾。

情形 2。 $o(x) \mid o(y)$。设 $o(x) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$且 $o(y) = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$，对所有 i都有 $\alpha_i \leq \beta_i$，并且对某个 j有 $\alpha_j < \beta_j$，其中 $k \geq 2$。选取一个满足 $o(y') = p_j^{\beta_j}$ 的元素 y'。然而 $x \sim y'$，但 $y \nsim y'$，这与 $[x] = [y]$矛盾。
因此 $o(x) = o(y)$，故等价类与元素阶一一对应。由于单位元和生成元分别构成单元素等价类，等价类总数为 $\tau(n) - 2$。□

推论 2.9. 设 G 是阶为 n的有限循环群，且 n 不是素数幂阶。那么 $dim(\mathcal{D}(G))$ 为$n - \phi(n) - \tau(n) + 2$，若 $G \cong \mathbb{Z}_{2^k} \times \mathbb{Z}_p, p \neq 2, k > 1$；否则 $dim(\mathcal{D}(G)) = n - \phi(n) - \tau(n) + 1$。

证明. 每个阶为 n 的有限循环群都同构于 $\mathbb{Z}_n$。因此， $\mathbb{Z}_n$的等价类数为 $\tau(n) - 2$。由定理 2.7， $dim(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n))$ $= n - \phi(n) - \tau(n) + 2$，若 $G \cong \mathbb{Z}_{2^k} \times \mathbb{Z}_p$；否则 $dim(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = n - \phi(n) - \tau(n) + 1$。□

定理 2.10。 对于二面体群 $D_{2n} = \langle x, y : \ x^n = y^2 = e, xy = yx^{-1} \rangle$，若阶为$n$ 的循环子群 $\langle x \rangle$ 与 $\mathbb{Z}_{2^k} \times \mathbb{Z}_p$同构，其中 $p \neq 2$ 且 $k > 1$，则

$$\dim(\mathcal{D}(D_{2n})) = n - \phi(n) - \tau(n) + 2.$$

否则，

$$\dim(\mathcal{D}(D_{2n})) = n - \phi(n) - \tau(n) + 1.$$

证明。 由于 $\mathcal{D}(D_{2n}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$，根据引理 2.8， $\mathcal{D}(D_{2n})$中的等价类数量为 $\tau(n) - 2$。由定理 2.7，得到

$$\dim(\mathcal{D}(D_{2n})) = \begin{cases} n - \phi(n) - \tau(n) + 2, & \text{if } \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{2^k} \times \mathbb{Z}_p, \\ n - \phi(n) - \tau(n) + 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

定理 2.11。 对于广义四元数群 $Q_{4n} = \langle a, b : \ a^{2n} = e, a^n = b^2, ab = ba^{-1} \rangle$，若循环子群 $\langle a \rangle$ 与 $\mathbb{Z}_{2^k} \times \mathbb{Z}_p$同构，其中 $p \neq 2$ 且 $k > 1$，则

$$\dim(\mathcal{D}(Q_{4n})) = 2n - \phi(2n) - \tau(2n) + 2.$$

否则，

$$\dim(\mathcal{D}(Q_{4n})) = 2n - \phi(2n) - \tau(2n) + 1.$$

定理 2.12。 对于半二面体群 $SD_{8n} = \langle a, b : \ a^{4n} = b^2 = e, ba = a^{2n-1}b \rangle$，若循环子群 $\langle a \rangle$ 与 $\mathbb{Z}_{2^k} \times \mathbb{Z}_p$同构，其中 $p \neq 2$ 和 $k > 1$，则

$$\dim(\mathcal{D}(SD_{8n})) = 4n - \phi(4n) - \tau(4n) + 2.$$

否则，

$$\dim(\mathcal{D}(SD_{8n})) = 4n - \phi(4n) - \tau(4n) + 1.$$

Declarations

资助：第一作者和第三作者谨此感谢 ANRF 资助的核心研究基金（CRG/2022/001142）。第二作者衷心感谢印度理工学院古瓦哈提分校通过校级博士后研究员项目（IITG/R&D/IPDF/2024-25/20240828P1181）提供的经费支持。

利益冲突 /竞争性利益：关于本文的发表，不存在利益冲突 s
论文。

数据和材料可用性（数据透明度）：不适用。

代码可用性（软件应用程序或自定义代码）：不适用。

References

[1] G. Aalipour、S. Akbari、P. J. Cameron、R. Nikandish 和 F. Shaveisi。论群的幂图与增强幂图的结构。 *Electron. J. Combin.*，24(3)：第 3.16 号论文，18 页，2017年。[2] F. Ali、M. Salman 和 S. Huang。论二面体群的交换图。 *Communications in Algebra*，44(6)：2389–2401，2016年。[3] S. Bera、H. K. Dey 和 S. K. Mukherjee。论有限群增强幂图的连通性。 *Graphs Combin.*，37(2)：591–603，2021年。[4] S. Biswas、P. J. Cameron、A. Das 和 H. K. Dey。论有限群的增强幂图与幂图之差。 *J. Combin. Theory Ser. A*，208：第 105932 号论文，31 页，2024年。[5] P. J. Cameron。群上定义的图。 *Int. J. Group Theory*，11(2)：53–107，2022年。[6] P. J. Cameron 和 H. K. Dey。论群的阶序列。 *The Electronic Journal of Combinatorics*，第 2–9 页，2025年。[7] P. J. Cameron 和 S. Ghosh。有限群的幂图。 *Discrete Math.*，311(13)：1220–1222，2011年。[8] D. S. Dummit 和 R. M. Foote。 *Abstract algebra*。Prentice Hall, Inc.，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1991年。[9] M. Feng、X. Ma 和 K. Wang。有限群幂图的结构与度量维数。 *European Journal of Combinatorics* 43 82 97, 2015 , : –。[10] M. R. Garey 和 D. S. Johnson。 *Computers and intractability*，第 29 卷。W. H. Freeman，纽约，2002年。[11] F. Harary 和 R. A. Melter。论图的度量维数。 *Ars combin*，2(191-195)：1，1976年。[12] A. V. Kelarev 和 S. J. Quinn。半群的组合性质与幂图。 *Comment. Math. Univ. Carolin.*，45 7，2004 1 1( )：–。[13] S. Khuller、B. Raghavachari 和 A. Rosenfeld。图中的地标。 *Discrete applied mathematics*，70(3)：217–229，1996年。[14] A. Kumar、L. Selvaganesh、P. J. Cameron 和 T. Tamizh Chelvam。有限群幂图的最新进展——综述。 *AKCE Int. J. Graphs Comb.*，18(2)：65–94，2021年。[15] J. Kumar、X. Ma、PARVEEN 和 S. Singh。有限群相关增强幂图的某些性质。 *Acta Math.* , ( ): –。 *Hungar.* 169 1 238 251, 2023 [16] J. Kumar、R. P. Panda 和 PARVEEN。论有限群幂图的差图。 *Quaest. Math.*，47(5)：997–1018，2024年。[17] X. Ma 和 Y. She。有限群增强幂图的度量维数。 *Journal of Algebra and Its Applications*，19 01( )：2050020，2020年。[18] R. P. Panda 和 K. V. Krishna。论有限群幂图的最小度、边连通度与连通性。 *Comm.* , ( ): –。 *Algebra* 46 7 3182 3197, 2018 [19] PARVEEN 和 J. Kumar。差图具有正亏格的幂零群。 *Ricerche di Matematica*，第 1–19 页，2023年。[20] P. J. Slater。树的叶子。 *Congr. Numer*，14(549-559)：37，1975年。[21] S. Zahirovi´ c、I. Bo˘ snjak 和 R. Madarasz。有限群增强幂图研究。 *J. Algebra Appl.*，( )：。 19 4 2050062, 20, 2020

MANISHA[1] , **PARVEEN**[1] , **JITENDER KUMAR**[1]

地址:

[1]Department of Mathematics, Birla Institute of Technology and Science Pilani, Pilani-333031, India

[2]Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Guwahati, India*Email address*:

yadavmanisha2611@gmail.com, p.parveenkumar144@gmail.com, jitenderarora09@gmail.com