arXiv:2602.13686v1 [quant-ph] 14 Feb 2026

带自环完全图上的 Grover 游走所产生的群结构及其应用

Tatsuya Tsurii[a,*], Naoharu Ito[b]

[a]东京信息科学大学信息学部信息学系，日本千叶县千叶市 *Wakabaku Onaridai 4-1*，邮编 *265-8501*[b]奈良教育大学数学教育系，日本奈良县奈良市 *Takabatake-cho*，邮编 *630-8528*

摘要

本文提出一种群论框架，用于分析带自环完全图上的 Grover 游走的代数结构。我们构造一个由 Grover 矩阵和一个对角矩阵生成的群，其中该对角矩阵的各项为复单位根的幂。随后，我们刻画由这些矩阵所涉及的换位子构成的子群所定义的商群。我们证明，该商群同构于一个有限循环群，其结构取决于顶点数量的奇偶性。这种群论刻画揭示了 Grover 游走时间演化中的内在对称性，并为理解其周期行为提供了代数框架。

关键词： 量子漫步，Grover 游走，群结构，完全图，周期性

*2020*年数学学科分类： 05C25, 15A30, 81Q99, 39A23

1. 引言

量子游走是经典随机游走的量子对应物，已成为量子计算、数理物理和图论中的有力工具（参见 [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9] 及其中的参考文献）。Aharonov 等人 [1] 将量子游走引入为一种计算框架，而

*通讯作者电子邮箱： t3tsuri23@rsch.tuis.ac.jp (TatsuyaTsurii), naoharu@cc.nara-edu.ac.jp (Naoharu Ito)

Kempe [6] 全面综述了量子游走在算法和结构方面的性质。

在各种量子游走中，Grover 游走尤为引人注目，不仅因为它在量子搜索算法中的作用，也因为其丰富的谱性质。研究者主要通过谱论和组合方法，考察了 Grover 游走在若干类图上的周期性，包括距离正则图 [10], 二部正则图 [7],以及带自环的完全图 [5], 。

本文采用群论框架，从不同视角分析带自环且具有 n个顶点的完全图上 Grover 游走所蕴含的代数结构。我们构造由两个矩阵生成的群 $\mathcal{K}$： 控制游走时间演化的 Grover 矩阵 G，以及对角矩阵 $S = \mathrm{diag}[1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}]$, 其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 。随后，我们通过一个由涉及 G 和 S的幂的交换子构成的子群$\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$来分析该群的结构，由此得到商群 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$。

我们的主要贡献是对 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$进行精确刻画。我们证明， $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 是一个有限循环群，其结构取决于n的奇偶性。这一结果从纯代数角度解释了 Grover 游走的周期性。具体而言，我们利用 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的结构来确定最小正整数 m，使得对于所有 $j = 0$，1，……，$n-1$，$(S^jG)^m$ 等于 $\mathcal{H}$ 的单位元。我们证明该整数 m 为 $2n$，这对应于 Grover 游走的周期。

本文结构安排如下。第2节介绍带自环的完全图上的 Grover 游走，并定义由 Grover 游走产生的群。第3节给出我们的主要结果，包括对 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的刻画以及 Grover 游走周期性的推导。

2. 由 Grover 游走产生的群

我们考虑每个顶点都带有一个自环的完全图上的 Grover 游走 $v_j (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$，其中 n 是大于 1 的正整数。图 1 展示了一个有四个顶点的完全图。

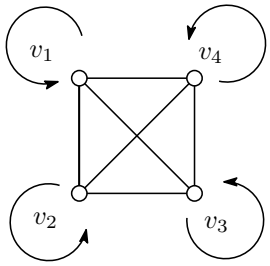

图 1：具有四个顶点的完全图

请注意，每个自环的边都是有向的，但方向的选择是任意的。每个顶点 v_j 都有一个 n 维复向量 $\psi_t(v_j)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$，称为概率振幅向量。

令 P_0、P_1，……，P_{n-1} 为由下式给出的 $n \times n$ 矩阵

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{n}-1 & \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \; P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n}-1 & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$P_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} & \frac{2}{n}-1 \end{bmatrix}.$$

矩阵 $G = P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1}$ 称为次数为n的 Grover 矩阵。注意，G 是对合的；也就是说，$G^2 = I_n$，其中 I_n 表示大小为 n的单位矩阵。

完全图上的 Grover 游走是一种量子漫步，其时间演化由下式给出

$$\Psi_{t+1} = U\Psi_t \quad \text{for} \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

其中， U 是一个由下式定义的 $n^2 \times n^2$ 矩阵

$$U = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_0 & \cdots & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_0 \end{bmatrix},$$

以及 $\Psi_t = [\psi_t(v_1)\ \ \psi_t(v_2)\ \ \cdots\ \psi_t(v_n)]^T$（另见 [5]）。

如果式 (1) 的所有解都是周期的，且 p是它们周期的最小公倍数，那么就称 Grover 游走是周期为 p的周期游走。

设 A 为由下式定义的 $n \times n$ 离散傅里叶矩阵:

$$A = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix},$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$。在先前的论文 [5], 中，我们证明演化矩阵 U可由矩阵 $A \otimes I_n$ 对角化如下:

$$(A \otimes I_n)^{-1} U (A \otimes I_n) = \mathrm{diag}[G, SG, \ldots, S^{n-1}G], \tag{2}$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^{n-1} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} \frac{2}{n} - 1 & \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} - 1 & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & \frac{2}{n} - 1 & \cdots & \frac{2}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} - 1 \end{bmatrix}.$$

注意， $S^n = I_n$ 以及

$$GS^j \neq S^j G \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

我们定义由矩阵 S 和 G 生成的群 $\mathcal{K}$ ，以及由交换子生成的子群 $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$

$$[S^j, G] := S^j G S^{-j} G^{-1} = S^j G S^{-j} G \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

证明了 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$ 的正规子群（参见第3节中的命题 2）。

本文旨在确定 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的商群结构，并利用该结构展示 Grover 游走的周期性。

3. 主要结果

设 $\mathbb{Z}_n$ 为阶为 n的循环群。我们的主要结果由以下两个定理给出。

定理1。 以下断言对 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$成立。

(i) 若 n 为偶数，则 $\mathcal{K}/\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ 。
(ii) 若 n 为奇数，则 $\mathcal{K}/\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_n$ 。

定理2。 $2n$ 是满足 G^m的最小正整数 m ，使得$(SG)^m$、$(S^2G)^m$、.....、$(S^{n-1}G)^m$ 在 $\mathcal{H}$中都等于单位元。

回顾（2），定理2表明， $2n$ 是满足 $U^m = I_{n^2}$ 的最小正整数m 。因此，我们得出结论：具有 n 个顶点的完全图上的 Grover 游走是周期的，其周期为 $2n$。这一结果为 [5] 中的定理2提供了另一种证明。

我们给出证明主要结果所需的引理和命题。

引理 1。 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$。那么，矩阵 $A^{-1}[S^j, G]A$ 是对角矩阵，其$(1,\ 1)$ 项和$(j+1,\ j+1)$ 项等于 -1，而所有其他项均等于1。

证明。通过直接计算，

$$A^{-1}S^jA = \begin{bmatrix} & & & \overset{(n-j+1)\text{-th column}}{\downarrow} & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}, \quad A^{-1}S^{-j}A = \begin{bmatrix} & & & \overset{(j+1)\text{-th column}}{\downarrow} & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}GA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

因此,

$$A^{-1}[S^j, G]A = A^{-1}S^jA \cdot A^{-1}GA \cdot A^{-1}S^{-j}A \cdot A^{-1}GA$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

($j+1$)-th column

□

令 $\mathbb{N}$ 为自然数集。由引理 **1** 可直接验证，下述引理成立。

引理2. 换位子 $[S^j, G]$ 是对合的；也就是说，对于 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$， $[S^j, G]^2 = I_n$，且

$$[S^j, G^k] = [G^k, S^j] \text{ for } j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

以下命题由引理 **1** 和引理**2** 推出。

命题1。 以下断言对 $\mathcal{H}$成立。

$$\mathcal{H} \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n-1 \text{ times}} \tag{4}$$

证明。由 $S^n = I_n$ 可知

$$[S^j, G] = [S^k, G] \text{ for } j \equiv k \bmod n,\ j, k = 1, 2, \ldots.$$

由引理 1 可得

$$[S^j, G] \neq [S^k, G] \text{ for } j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

and

$$[S^j, G][S^k, G] = [S^k, G][S^j, G] \text{ for } j, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

由于对于 $j = 1$，2，.....，$n-1$，$[S^j, G]$ 是对合的，因此

$$\mathcal{H} = \{[S, G]^{m_1}[S^2, G]^{m_2} \cdots [S^{n-1}, G]^{m_{n-1}} \mid m_1, m_2, \ldots, m_{n-1} = 0, 1\}. \quad (5)$$

因此，$\mathcal{H}$ 的阶为 2^{n-1}，从而得到 (4)。 □

命题 2。 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$的正规子群。

证明。由引理2，对于 $j = 1$，2，.....，$n-1$，可得

$$\begin{aligned} S[S^j, G]S^{-1} &= S[G, S^j]S^{-1} \\ &= S(GS^{-1}G)(GSG)[G, S^j]S^{-1} \\ &= [S, G]GSG(GS^jGS^{-j})S^{-1} \\ &= [S, G]GS^{j+1}GS^{-(j+1)} \\ &= [S, G][G, S^{j+1}] \\ &= [S, G][S^{j+1}, G] \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G[S^j, G]G &= GS^jGS^{-j}GG \\ &= [G, S^j] \\ &= [S^j, G] \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

因此，$\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$的正规子群。 □

由于 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{K}$的正规子群，我们可以考虑商群$\mathcal{K}/\mathcal{H}$。以下引理 3 和引理 4 用于阐明$\mathcal{K}/\mathcal{H}$的结构。

引理3. 以下断言成立。

$$S^jG^k\mathcal{H} = G^kS^j\mathcal{H} \text{ for } j,k \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{6}$$

证明。设 j， $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。由引理2和 $G^2 = I_n$ 可得

$$\begin{aligned} S^jG^k[S^{-j},G^k] &= S^jG^kS^{-j}G^kS^jG^{-k} \\ &= [S^j,G^k]S^jG^{-k} \\ &= [G^k,S^j]S^jG^{-k} \\ &= G^kS^jG^{-k}S^{-j}S^jG^{-k} \\ &= G^kS^j(G^2)^{-k} \\ &= G^kS^j. \end{aligned}$$

注意到 $[S^{-j},G^k] \in \mathcal{H}$，我们有 $S^jG^k[S^{-j},G^k] \in S^jG^k\mathcal{H}\cap G^kS^j\mathcal{H} \neq \emptyset$，这意味着 (6) 成立。□

引理4。 以下断言成立：

(i) $S^j \notin \mathcal{H}$ 对于 $j = 1$、2、.....、$n-1$。(ii) $S^jG \notin \mathcal{H}$ 对于 $j = 1$、2、.....、$n-1$。(iii) 若 n 为奇数，则 $G \in \mathcal{H}$；若 n 为偶数，则 $G \notin \mathcal{H}$。

证明。设 $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$。

(i) 假设 $S^j \in \mathcal{H}$。那么存在 m_1， m_2、.....、$m_r \in \{1,2,\ldots,n–1\}$使得

$$S^j = [S^{m_1},G][S^{m_2},G]\cdots[S^{m_r},G].$$

注意到 $G[S^k,G]G = [S^k,G]$ 对于 $k = 1$，2，.....，$n-1$，如命题 2 的证明所示，我们有

$$\begin{aligned} GS^j &= G[S^{m_1},G][S^{m_2},G]\cdots[S^{m_r},G] \\ &= G[S^{m_1},G]GG[S^{m_2},G]GG\cdots GG[S^{m_r},G]GG \\ &= [S^{m_1},G][S^{m_2},G]\cdots[S^{m_r},G]G \\ &= S^jG. \end{aligned}$$

这与 (3) 矛盾。

(ii) 假设 $S^jG \in \mathcal{H}$。则存在 $m_1, m_2 \ldots, m_r \in \{1, 2, \ldots, n–1\}$使得

$$S^jG = [S^{m_1}, G][S^{m_2}, G] \cdots [S^{m_r}, G].$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} G(S^jG) &= G[S^{m_1}, G][S^{m_2}, G] \cdots [S^{m_r}, G] \\ &= G[S^{m_1}, G]GG[S^{m_2}, G]GG \cdots GG[S^{m_r}, G]GG \\ &= [S^{m_1}, G][S^{m_2}, G] \cdots [S^{m_r}, G]G \\ &= (S^jG)G \\ &= S^j, \end{aligned}$$

这意味着 $GS^j = S^jG$。这与 (3) 矛盾。

(iii) 假设 n 为奇数。由引理 1 可得

$$\begin{aligned} & A^{-1}[S, G][S^2, G] \cdots [S^{n-1}, G]A \\ &= A^{-1}[S, G]AA^{-1}[S^2, G] \cdots AA^{-1}[S^{n-1}, G]A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \\ &= A^{-1}GA. \end{aligned}$$

T因此，我们有 $G = [S, G][S^2, G] \cdots [S^{n-1}, G]$，这意味着 $G \in \mathcal{H}$。

接下来，假设 n为偶数。定义

$$W = A^{-1}[S^{m_1}, G][S^{m_2}, G] \cdots [S^{m_r}, G]A,$$

其中 m_1，m_2，……，$m_r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$，$w_{jj}$表示 W 中的第 (j，j) 个元素，$j = 1$，2，……，n。若对于 $j = 2$，3，……，n，$w_{jj} = -1$为奇数，则 r为奇数。因此，$w_{11} = -1$。于是，由引理 1 可知，不存在满足 $G = [S^{m_1}, G][S^{m_2}, G] \cdots [S^{m_r}, G]$ 的 m_1，m_2，……，$m_r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$，这意味着 $G \notin \mathcal{H}$。□

利用引理 3 和引理 4，我们可以证明以下命题。

命题 3。以下断言成立：

(i) 若 n 为偶数，则 $\{I_n, S, S^2, \ldots, S^{n-1}, G, SG, S^2G, \ \ldots, S^{n-1}G\}$ 是 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的完全代表系。(ii) 若 n 为奇数，则 $\{I_n, S, S^2, \ldots, S^{n-1}\}$ 是 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的完全代表系。

证明。将 $g \in \mathcal{K}$ 表示为 $g = g_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_r^{m_r}$，其中 $g_j \in \{S, G\}$和 $m_j \in \mathbb{Z}$ 满足 $j = 1$，2，.....，r。由于 $S^n = I_n$和 $G^2 = I_n$，引理3表明存在 $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 和 $l \in \{0, 1\}$，使得

$$\begin{aligned} g\mathcal{H} &= g_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_r^{m_r} \mathcal{H} \\ &= S^k G^l \mathcal{H}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathcal{K}/\mathcal{H} = \bigcup_{j=0}^{n-1} S^j \mathcal{H} \cup \bigcup_{j=0}^{n-1} S^j G \mathcal{H}. \tag{7}$$

为了证明 $\mathcal{H}$，$S\mathcal{H}$，$S^2\mathcal{H}$，.....，$S^{n-1}\mathcal{H}$ 两两不相交，假设存在 j，$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，其中 $j \neq k$，使得

$$S^j \mathcal{H} \cap S^k \mathcal{H} \neq \emptyset.$$

于是存在 h_1，$h_2 \in \mathcal{H}$，使得 $S^j h_1 = S^k h_2$，从而 $S^{j-k} = h_2 h_1^{-1} \in \mathcal{H}$。这与引理4中的 (i) 矛盾。因此，$\mathcal{H}$，$S\mathcal{H}$，$S^2\mathcal{H}$，.....，$S^{n-1}\mathcal{H}$两两不相交。

假设 n 为奇数。那么由引理4中的(7)和(iii)可得

$$\mathcal{K}/\mathcal{H} = \bigcup_{j=0}^{n-1} S^j \mathcal{H}.$$

因此，我们得到(ii)。

假设 n 为偶数。设存在 j，$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，且满足 $j \neq k$ $(j < k)$，使得 $S^j G\mathcal{H} = S^k G\mathcal{H}$。那么由引理3可知

$$\mathcal{H} = GS^{k-j} G\mathcal{H} = S^{k-j} G^2 \mathcal{H} = S^{k-j} \mathcal{H},$$

这意味着 $S^{k-j} \in \mathcal{H}$。这与引理4中的 (i) 矛盾。接下来，假设存在 j，$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 使得 $S^j \mathcal{H} = S^k G\mathcal{H}$。那么引理3表明

$$\mathcal{H} = S^{k-j} G\mathcal{H},$$

这意味着 $S^{k-j}G \in \mathcal{H}$。若 $j \neq k$，则这与引理4中的 (ii) 矛盾。若$j = k$，则有 $G \in \mathcal{H}$，这与引理4中的 (iii) 矛盾。因此，我们得到 (i)。证明至此完成。□

我们现在准备证明主要结果。

定理1的证明。 设 g_1 和 g_2 分别为 $\mathbb{Z}_n$ 和 $\mathbb{Z}_2$的生成元。假设 n 为偶数。由命题 3可知，商群 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的阶为 $2n$ ，并且

$$\mathcal{K}/\mathcal{H} = \{\mathcal{H}, S\mathcal{H}, S^2\mathcal{H}, \ldots, S^{n-1}\mathcal{H}, G\mathcal{H}, SG\mathcal{H}, S^2G\mathcal{H}, \ \ldots, S^{n-1}G\mathcal{H}\}.$$

定义从 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 到 $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ 的映射 φ 如下

$$\varphi(S^kG^l\mathcal{H}) = (g_1^k, g_2^l) \text{ for } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \ l = 0, 1.$$

由引理3可知，对于 k_1， $k_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 和 l_1， $l_2 \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}
\varphi((S^{k_1}G^{l_1}\mathcal{H})(S^{k_2}G^{l_2}\mathcal{H})) &= \varphi(S^{k_1}G^{l_1}S^{k_2}G^{l_2}\mathcal{H}) \\
&= \varphi(S^{k_1+k_2}G^{l_1+l_2}\mathcal{H}) \\
&= (g_1^{k_1+k_2}, g_2^{l_1+l_2}) \\
&= (g_1^{k_1}, g_2^{l_1})(g_1^{k_2}, g_2^{l_2}) \\
&= \varphi(S^{k_1}G^{l_1}\mathcal{H})\varphi(S^{k_2}G^{l_2}\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

这表明 φ 是一个群同态。由于 φ 是双射，我们得到(i)。

接下来，假设 n为奇数。由命题 3可知，商群 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 的阶为 n ，并且

$$\mathcal{K}/\mathcal{H} = \{\mathcal{H}, S\mathcal{H}, S^2\mathcal{H}, \ldots, S^{n-1}\mathcal{H}\}.$$

定义映射 ψ ： 从 $\mathcal{K}/\mathcal{H}$ 到 $\mathbb{Z}_n$ ， 如下

$$\psi(S^k\mathcal{H}) = g_1^k \text{ for } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

由于 ψ 是群同态且为双射，我们得到(ii)。至此证明完成。□

定理2的证明。 由于根据引理4中的 (iii) 有 $G^n \in \mathcal{H}$ ， 由引理3和 $S^n = I_n$ 可得，对于 $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$(S^jG)^n\mathcal{H} = S^{nj}G^n\mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

因此，我们有 $(S^jG)^n \in \mathcal{H}$，对于 $j = 0,1,2,\ldots,n-1$。根据引理4中的 (i) 和 (ii)，我们有

$$(SG)^k\mathcal{H} = S^kG^k\mathcal{H} \neq \mathcal{H} \text{ for } k = 1,2,\ldots,n-1.$$

因此， n 是满足$(SG)^k \in \mathcal{H}$的最小正整数 k。假设 n 为偶数。由引理2可得

$$\begin{aligned}
&[S,G][S^2,G][S^3,G][S^4,G]\cdots[S^{n-3},G][S^{n-2},G][S^{n-1},G]\\
&=([S,G][G,S^2])([S^3,G][G,S^4])\cdots([S^{n-3},G][G,S^{n-2}])[S^{n-1},G]\\
&=(SGS^{-1}GGS^2GS^{-2})(S^3GS^{-3}GGS^4GS^{-4})\\
&\quad\cdots(S^{n-3}GS^{-n+3}GGS^{n-2}GS^{-n+2})(S^{n-1}GS^{-n+1}G)\\
&=(SGSGS^{-2})(S^3GSGS^{-4})\cdots(S^{n-3}GSGS^{-n+2})(S^{n-1}GS^{-n+1}G)\\
&=(SGSG)(SGSG)\cdots(SGSG)(SGS^{-n+1}G)\\
&=(SG)^n.
\end{aligned}$$

如果$(SG)^n$ 是 $\mathcal{H}$的单位元，则有

$$[S,G] = [S^2,G][S^3,G][S^4,G]\cdots[S^{n-3},G][S^{n-2},G][S^{n-1},G]$$

因为 $[S,G]$ 的阶为2。这与(5)矛盾。因此，我们得出$(SG)^n$不是 $\mathcal{H}$的单位元。由于当 $j = 0$，1，2，……，$n-1$时，$(S^jG)^n \in \mathcal{H}$，且 $\mathcal{H}$ 中除单位元外的每个元素的阶都是2，$2n$ 是满足 G^k、$(SG)^k$、$(S^2G)^k$，……，$(S^{n-1}G)^k$ 均为 $\mathcal{H}$的单位元的最小正整数 k。

假设 n 为奇数。由于$G^n = G$，G^n 不是 $\mathcal{H}$ 的单位元。由于当 $j = 0$，1，2，……，$n-1$ 时，$(S^jG)^n \in \mathcal{H}$，且$\mathcal{H}$ 中除单位元外的每个元素的阶都是2，$2n$ 是满足 G^k、$(SG)^k$、$(S^2G)^k$，……，$(S^{n-1}G)^k$ 均为 $\mathcal{H}$的单位元的最小正整数 k。证明完毕。□

致谢

我们感谢已故的松山丰树教授在本研究初期给予的宝贵指导与支持。

参考文献

[1] D. Aharonov、A. Ambainis、J. Kempe 与 U. Vazirani，图上的量子游走，载于：第33届年度 ACM 计算理论研讨会论文集，2001年，第50–59页。[2] J. Akahori、N. Konno、I. Sato 与 Y. Tamura，环上量子游走的绝对 ζ 函数与周期性，量子信息与计算 24(2024年) 901–916。[3] M. Bednarska、A. Grudka、P. Kurzyński、T. Łuczak 与 A. Wójcik，环上的量子游走，物理快报 A 317(1-2)(2003年) 21–25。[4]Y. Higuchi、N. Konno、I. Sato 与 E. Segawa，有限图上离散时间量子游走的周期性，跨学科信息科学 23(1)(2017年) 75–86。[5] N. Ito、T. Matsuyama 与 T. Tsurii，带自环的完全图上 Grover 游走的周期性，线性代数及其应用 599(2020年) 121–132。[6] J. Kempe，量子随机游走——导论综述，当代物理 44(4)(2003年) 307–327。[7] S. Kubota，至多具有五个不同特征值的二部正则图上 Grover 游走的周期性，线性代数及其应用 654(2022年) 125–142。[8] K. Manouchehri 与 J. Wang，《量子游走的物理实现》，施普林格出版社，2014年。[9] M. Štefaňák、I. Jex 与 T. Kiss，量子游走的回归与波利亚数，物理评论快报 100, 020501 (2008年)。[10]Y. Yoshie，距离正则图上 Grover 游走的周期性，图与组合 35(2019年) 1305–1321。