arXiv:2602.13703v1 [math.AP] 14 Feb 2026

Painlevé-Liouville黎曼流形上各向异性 Calderón 问题的稳定性

Thierry Daudé *[1], Niky Kamran †[2] 和 François Nicoleau ‡[3]

[1] Université Marie et Louis Pasteur，法国国家科学研究中心，LmB（UMR 6623），F-25000，贝桑松，法国。法国国家科学研究中心—蒙特利尔大学 CRM—法国国家科学研究中心 电子邮箱：thierry.daude@univ-fcomte.fr，[2] 数学与统计学系，麦吉尔大学，蒙特利尔，QC，H3A 0B9，加拿大。电子邮箱：niky.kamran@mcgill.ca[3] Jean Leray 数学实验室，法国国家科学研究中心 UMR 6629，2 Rue de la Houssinière BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 03。电子邮箱：francois.nicoleau@univ-nantes.fr

2026年2月17日

摘要

我们研究 Painlevé-Liouville黎曼流形这一类空间上的整体与局部各向异性 Calderón 逆问题的稳定性。此类空间是带边界的紧致n维流形（M, g），其中 $M = [0,1] \times K$，K 是任意一个配备黎曼度量g_K的 $n-1$ 维光滑闭连通可定向流形，而 $g = \alpha^4 g_0$ 是 M上乘积度量 $g_0 = dx^2 + g_K$ 的任意共形变形，并且与 Laplace-Beltrami 算子的 Painlevé 块可分离性Δ_{g_0}相容。给定一对满足技术假设 1.1 的 Painlevé-Liouville黎曼流形（M, g）和（$M, \tilde{g}$），记相应的 Dirichlet-to-Neumann 映射为 Λ_g和 $\Lambda_{\tilde{g}}$，并假设$\|\Lambda_g - \Lambda_{\tilde{g}}\|_{\mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M)\ H^{-1/2}(\partial M))} = \epsilon$，我们在定理 1.1 中证明了整体各向异性 Calderón 问题的对数稳定性结果：存在常数 C和 $0 < \theta < 1$，使得$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{C^0,r}(M) \leq C\left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-\theta}$，其中某个 $0 < r < 1$成立。对于局部各向异性 Calderón 问题，我们在定理 1.2 中也得到了类似结果；该情形下，数据仅在边界的一个连通分支上测量。我们强调，尽管在假设条件中要求共形因子 α 与 Laplace-Beltrami 算子 Δ_{g_0} 的块可分离性相容，

*本研究由法国国家研究署（ANR）资助的 ScattHoloGR 项目（ANR-25-CE40-4883）提供支持

†本研究得到加拿大自然科学与工程研究委员会资助项目 RGPIN 105490-2025 的支持

‡本研究得到法国 GDR Dynqua 的支持

我们的横向流形（K， g_K）是闭流形，且对测地线射线变换的单射性没有任何限制。特别地，横向流形可以是圆球面；它是测地线射线变换不具单射性的经典反例。这意味着，[19, 20]提出的强大复几何光学技术无法应用于我们的情形。

目录

1 引言 **2**

2 狄利克雷到诺伊曼映射 11

3 边界确定结果及其在角向稳定性估计中的应用 1

3 4 全局 Calderón 问题中的径向稳定性估计 154.1 预备结果.15 4.2 径向稳定性的基本估计.21 4.3 化归为矩问题.23 4.4 矩问题的解及径向方程的稳定性估计 . 26**5 部分 DN 映射的径向稳定性估计** $\Lambda_{g,\ \Gamma_1,\ \Gamma_1}$ **276 共形因子的稳定性估计 29 A 关于 Painlevé-Liouville黎曼流形存在性的讨论 34 B 条件稳定性估计 35**

关键词。各向异性卡尔德龙反问题、Painlevé流形、矩问题、Weyl-Titchmarsh 函数、Carleman 估计。

*2010*年数学主题分类。主要分类号：81U40、35P25；次要分类号：58J50。

目录

1 引言

各向异性 Calderón 问题是一个重要的经典反问题，其内容是：根据 Laplace-Beltrami 算子在某个固定频率下的狄利克雷至诺伊曼（DN）映射所包含的信息，恢复带边界的紧致黎曼流形的度量（在某些自然的规范等价意义下）$(M,\ g)$,

其中该固定频率位于狄利克雷谱之外（关于这一经典问题的一般介绍，见 [37, 38] ）。

稳定性问题，即在仅知道 DN 映射存在以适当范数衡量的误差项的情况下，能否以稳定的方式量化反问题解中的误差，由于 Calderón反问题本质上具有病态性，因而具有相当大的复杂性（例如参见 [2, 5, 6, 31]）。在本文中，我们研究一类具有几何意义的特殊黎曼流形的稳定性问题；对于这类流形，基于通过复几何光学解和极限 Carleman 权函数重构度量的强大方法并不直接适用。现在我们定义这一类流形——将其称为*Painlevé-Liouville*黎曼流形 ——并陈述我们的主要结果。

设 M 表示一个带边界的 n维光滑紧致可定向乘积流形，其形式为

$$M = [0,1] \times K\,, \tag{1.1}$$

其中， K 是一个维数为 $n-1$的光滑闭连通可定向流形。 M 的边界的两个连通分支记为 Γ_0 和 Γ_1,

$$\partial M = \Gamma_0 \sqcup \Gamma_1\,, \quad \Gamma_0 = \{0\} \times K\,, \quad \Gamma_1 = \{1\} \times K\,,$$

并将与 K 等同。 M 中的点记作 $(x,\ \omega)$，其中 x 和 ω 分别称为 M 上的径向变量和角变量。我们在 M 上赋予乘积黎曼度量

$$g_0 = dx^2 + g_K\,, \tag{1.2}$$

其中 $x \in [0,1]$ 和 g_K 是 K 上的黎曼度量，并引入 g_0 的共形缩放 g ，定义为

$$g = \alpha^4(x,\omega) g_0\,. \tag{1.3}$$

一个经典结果表明，边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_g u = 0 & \text{on } M \\ \quad u = f & \text{on } \partial M \end{cases} \tag{1.4}$$

给定边界数据 $f \in H^{1/2}(M)$ 时，存在唯一解 $u \in H^1(M)$。当 f 光滑时，与边值问题 (1.4) 相关的 DN 映射定义为

$$\Lambda_g f = \partial_\nu u \mid_{\partial M}\,, \tag{1.5}$$

其中 $\nu = (\nu^i)$ 表示边界 ∂M 的单位外法向量。在 $f \in H^{1/2}(M)$ 的一般情形下，DN 映射在弱意义下定义为从 $H^{1/2}(\partial M)$ 到 $H^{-1/2}(\partial M)$ 的映射：

$$\langle \Lambda_g f | h \rangle = \int_M g(\nabla u, \nabla v)\ dvol_g\,, \quad \forall f, h \in H^{1/2}(\partial M), \tag{1.6}$$

其中 u 是方程 (1.4) 的唯一解， v 是 $H^1(M)$ 中满足 $v_{|\partial\Omega} = h$ 的任意元素，而 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是 $H^{1/2}(\partial M)$ 与 $H^{-1/2}(\partial M)$ 之间的标准 L^2 对偶配对。可以证明，DN 映射 Λ_g 是一个阶数为 1 的椭圆伪微分算子 Λ_g，并且在 $L^2(\partial M)$ 上自伴。与度量 g_0 相关的 DN 映射类似定义，记为 Λ_{g_0}。

我们分析中将发挥关键作用的一点是，通过设定，边值问题 (1.4) 等价于

$$v = \alpha^{n-2} u\,, \quad \psi = \alpha^{n-2}|_{\partial M} f\,, \tag{1.7}$$

相应薛定谔算子在 (M, g_0) 上的边值问题，其形式为

$$\begin{cases} (-\Delta_{g_0} + q)v = 0, & \text{on } M, \\ v = \psi, & \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中

$$q = \frac{\Delta_{g_0}\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-2}}\,.$$

这是由以下众所周知的事实得出的：正拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_{g_0}$ 和 $-\Delta_g$ 满足恒等式：

$$-\Delta_g = \alpha^{-(n+2)}(-\Delta_{g_0} + q)\alpha^{n-2}\,, \quad q = \frac{\Delta_{g_0}\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-2}}\,.$$

因此，与 (1.8) 相关地，我们也可以类似地定义 DN 映射 $\Lambda_{g_0,q}$，它是从 $H^{\frac{1}{2}}(\partial M)$ 到 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial M)$ 的算子，定义如下：

$$\Lambda_{g_0,q}\psi = \partial_\nu v_{|\partial M}.$$

我们注意到，关于 DN 映射 Λ_g 和 $\Lambda_{g_0,q}$ 的各向异性 Calderón 问题本质上是等价的，这一事实将在本文中起到关键作用。

我们同样关注以下情形对应的部分狄利克雷-诺伊曼映射：狄利克雷数据 f 仅支撑在 ∂M 的某一个连通分支 Γ_0 或 Γ_1 上，并且方程 (1.4) 的解 u 的法向导数也仅在某一个边界分支上测量。这些映射记为 $\Lambda_{g,\,\Gamma_i,\,\Gamma_j}$：$H^{1/2}(K) \to H^{-1/2}(K)$，其定义域为满足 $\mathrm{supp} f \subseteq \Gamma_i$ 的光滑函数 f，定义如下：

$$\Lambda_{g,\Gamma_i,\Gamma_j} f = \partial_\nu u\,|_{\Gamma_j}\,,$$

当 $f \in H^{1/2}(K)$ 时，其弱意义下的定义与 (1.6) 类似。最后，我们还将考虑与相应薛定谔算子的边值问题 (1.8) 相关的 DN 映射 $\Lambda_{g_0,\,q,\,\Gamma_i,\,\Gamma_j}$。

本文将在角度度量相等的假设下，研究如下形式的两个度量 $g,\ \tilde{g}$ 的稳定性问题，即 (1.3)

$$g_K = \tilde{g}_K\,.$$

因此，我们的任务是：假设存在某个 $0 < \epsilon < 1$，对共形因子 α 给出稳定性估计

$$\|\Lambda_g - \Lambda_{\tilde{g}}\|_{\mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M), H^{-1/2}(\partial M))} = \epsilon\,, \tag{1.9}$$

或其中一个较弱的条件

$$\|\Lambda_{g,\Gamma_i,\Gamma_i} - \Lambda_{\tilde{g},\Gamma_i,\Gamma_i}\|_{\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma_i), H^{-1/2}(\Gamma_i))} = \epsilon\,, \quad i \in \{0,1\}\,. \tag{1.10}$$

具体而言，在假设 (1.9)（分别对应全局 Calderón问题）或 (1.10)（分别对应部分 Calderón问题）下，我们旨在证明如下形式的估计

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{L^\infty(M)} \leq C f(\epsilon), \tag{1.11}$$

对于满足 $\lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon) = 0$ 的函数 f。

为了获得（并量化）此类稳定性估计，我们提出以下条件。

假设 1.1。*i*） $g_K = \tilde{g}_K$。
ii）存在常数 $c > 0$，使得 $\alpha,\ \tilde{\alpha} \geq c$ 在 M 上成立。
iii) 存在常数 $0 < r < 1$ 和 $B > 0$，使得 α、$\tilde{\alpha} \in C^{2,\,r}(M)$ 以及$\|\alpha\|_{C^{2,\,r}}$、$\|\tilde{\alpha}\|_{C^{2,\,r}} \leq B$。

iv) 存在 $\phi_1 = \Phi_1(x)$ $\phi_2 = \Phi_2(\omega)$（分别地，$\tilde{\phi}_1 = \Phi_1(x)$ $\tilde{\phi}_2 = \Phi_2(\omega)$），使得

$$q = \frac{\Delta_{g_0}\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-2}} = \phi_1(x) + \phi_2(\omega), \quad \tilde{q} = \frac{\Delta_{g_0}\tilde{\alpha}^{n-2}}{\tilde{\alpha}^{n-2}} = \tilde{\phi}_1(x) + \tilde{\phi}_2(\omega). \tag{1.12}$$

下面我们对假设 1.1 的内容作几点说明。条件 *i*) 是为了简化分析并获得更好的对数型稳定性估计（见下文）。在一篇配套论文 [18], 中，我们研究了扭曲积流形的一般情形，其中扭曲函数 $\alpha = \alpha(x)$ 和角度度量 g_K 均允许变化。条件 *ii*) 和*iii*) 是经典条件，反映了 Calderón问题是不适定的。这意味着映射 $g \mapsto \Lambda_g$ 的逆映射不连续，除非度量 g（此处为共形因子 α）属于某个紧集 [2]。此外，连续模通常至多为对数型 [31, 28]。条件 *iv*) 是最重要且限制性最强的条件。粗略地说，(1.12) 表示共形因子 α^4 与度量 (1.3) 的 Painlevé型分块可分离性相容。因此，经过适当选择的希尔伯特基上，狄利克雷-诺伊曼映射 Λ_g，$\Lambda_{\tilde{g}}$ 将是“可对角化的”（Y_k）$_{k\geq 0}$ 和（Y_k）$_{k\geq 0}$，这一点将在我们的分析中发挥关键作用。关于一般意义下的 Painlevé 分块可分离性，更多信息请参阅[14]；本文采用的简单分块可分离性实例见第 2 节。最后，我们将在附录 A 中证明，可以轻易构造出一大类满足上述所有条件的共形因子 α。

注释 1.1。*1.* 在假设 *ii)*、*iii)* 和 *iv)* 下，显然存在一个常数$A = A$（g_0、c、B），使得 ϕ_1、ϕ_2 满足以下假设：

$$\phi_1 \in C^{0,r}([0,1]),\ \phi_2 \in C^{0,r}(K), \quad \|\phi_1\|_\infty,\ \|\phi_2\|_\infty \leq A. \tag{1.13}$$

2. 由于对于任意常数 c，我们都可以将 ϕ_1 替换为 $\phi_1 + c$，并将 ϕ_2 替换为 $\phi_2 - c$，因此函数 ϕ_1、ϕ_2 在块可分离性质 （1.12）中并不唯一。利用这一规范，我们从一开始就假设

$$\phi_1(j) = \tilde{\phi}_1(j), \tag{1.14}$$

对于 $j = 0$ 或 $j = 1$，这一假设将略微简化接下来的分析 *sis.*

受上述假设条件启发，我们将 Painlevé-Liouville黎曼流形类定义如下:

Defi定义 1.1. 若(M, g) 满足以下条件，我们称之为 ***Painlevé-Liouville***黎曼流形:

$$M = [0, 1] \times K\,, \quad g = \alpha^4(x, \omega)g_0\,, \quad g_0 = dx^2 + g_K\,,$$

其中，对于某个正常数 c，我们有 $\alpha > c$，并且

$$\frac{\Delta_{g_0}\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-2}} = \phi_1(x) + \phi_2(\omega)\,. \tag{1.15}$$

在附录 A 中，我们讨论椭圆方程 (1.15) 的解 $\alpha > 0$ 是否存在这一重要问题；该问题与Painlevé-Liouville黎曼流形是否实际存在密切相关。

现在可以陈述相应的整体Calderón问题的主要稳定性结果如下。

定理 1.1. 设(M, g) 与$(M, \tilde{g})$ 为如(1.3)所述并满足假设*1.1*的两个***Painlevé-Liouville***黎曼流形。假定 (1.9) 成立。则
i) */*边界处的霍尔德稳定性 ∂M*/*存在常数 $C = C(g_0, c, B) > 0$，使得对所有 $j = 0$、1、 $k = 0$、1、2，存在 $0 < \theta_k \leq 1$:

$$\|\alpha(j, .) - \tilde{\alpha}(j, .)\|_{C^k_E(\Gamma_j)} \leq C\epsilon^{\theta_k}, \tag{1.16}$$

其中记号 $C^k_E(\Gamma_j)$ 表示 Γ_j 处的切向导数和法向导数包含在 C^k 范数的定义之中。

ii) */*对数稳定性（在 M*/*内）存在常数 $C = C(g_0, c, B)$ 与 $0 < \theta < 1$，使得:

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M)} \leq C\left(\ln\frac{1}{\epsilon}\right)^{-\theta}. \tag{1.17}$$

我们指出，边界处的第一个霍尔德稳定性结果是 Kang 和 Yun 在 [26]中得到的经典边界确定结果（以对我们方便的形式）的一个简单推论。流形 M 内的第二个对数稳定性结果是本定理中的新内容。

我们还得到了部分Calderón问题的稳定性结果，其中测量数据是在 Γ_0 或 Γ_1上进行的。粗略地说，假设测量数据是在 Γ_1上进行的，我们可以在任何不包含不可达部分 Γ_0某个邻域的区域上得到对数稳定性估计。具体而言，我们证明:

定理 1.2。设(M, g)和$(M, \tilde{g})$是(1.3)中所述的两个度量，且满足假设*1.1*。假设(1.10)在Γ_j，$j = 0$或1处成立，并且还存在常数$D > 0$和$0 < \nu < 1$，使得

$$\left| \int_0^1 (\phi_1(x) - \tilde{\phi}_1(x))dx \right| \leq D\epsilon^{\nu}. \tag{1.18}$$

Then

*1. [*边界处的霍尔德稳定性Γ_j*]*存在常数$C = C(g_0, c, B, D) > 0$使得对于所有$k = 0, 1, 2$，存在$0 < \theta_k \leq 1$：

$$\|\alpha(j, .) - \tilde{\alpha}(j, .)\|_{C_E^k(\Gamma_j)} \leq C\epsilon^{\theta_k}, \tag{1.19}$$

其中，记号$C_E^k(\Gamma_j)$表示在Γ_j处的切向导数和法向导数包含在C^k范数的定义中。

*2. [*内部的对数稳定性M*]*假设测度是在Γ_1上进行的。对于任意$0 < \tau < 1$，定义$M_\tau = [\tau, 1] \times K$。那么存在常数$C_\tau = C(g_0, c, B, D, \tau)$和$0 < \theta_\tau < 1$使得：

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M_\tau)} \leq C_\tau \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-\theta_\tau}, \tag{1.20}$$

其中$C_\tau \lesssim \tau^{-2}$以及

$$\theta_\tau = \frac{2(1-r)}{n} \frac{\theta\, \tau}{2 - \tau}.$$

当测度是在Γ_0上进行时，也有对称的结果。

注释 1.2。*1.* 假设(1.18)可以重新表述为关于标量曲率$Scal_g, Scal_{\tilde{g}}$的条件。更确切地说，众所周知

$$q = \frac{n-2}{4(n-1)} \left(\alpha^4 Scal_g - Scal_{g_0} \right).$$

由此可证明，(1.18)等价于以下条件：

$$\left| \int_0^1 [\alpha^4 Scal_g - \tilde{\alpha}^4 Scal_{\tilde{g}}]dx \right| \leq D\epsilon^{\nu}. \tag{1.21}$$

此外，我们强调，前述局部稳定性定理中的附加假设(1.18)是全局稳定性定理中所用假设(1.9)的推论。

2. 在估计(1.20)中，我们可以允许τ依赖于ϵ，使得$\tau(\epsilon) \to 0$。我们以这种方式（并在极限情形$\epsilon \to 0$下）将稳定性估计扩展到越来越大的区域$M_{\tau(\epsilon)}$，这些区域仍都避开不可达部分Γ_0，代价是稳定性速率有所减弱。例如，取

$$\tau(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\ln \ln(1/\varepsilon)}}.$$

Then

$$\|\alpha-\tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M_{\tau(\varepsilon)})} \lesssim \ln\ln(1/\varepsilon)\,\exp\Big(-\frac{(1-r)\theta}{n}\sqrt{\ln\ln(1/\varepsilon)}\Big), \quad \varepsilon\to 0.$$

因此，我们得到的稳定性速率强于 *Calderón* 型逆问题在部分数据情形下已有的全局双对数估计（例如，参见 *Caro–Dos Santos Ferreira–Ruiz [8]*）。

现在我们将结果与现有文献进行比较。首先，假设 $(K,g_K)=(\mathbb{S}^{n-1},d\omega^2)$ 是配备圆度量的 $(n-1)$ 维球面。令 $\beta(x,\omega)=\alpha(x,\omega)e^{\frac{x}{2}}$，并引入新坐标 $r=e^{-x}$，则黎曼流形 (M,g) 可表示为：

$$M=[e^{-1},1]\times\mathbb{S}^{n-1}, \quad g=\beta^4(r,\omega)[dr^2+r^2d\omega^2],$$

因此可将其视为配备欧几里得度量的 n 维环域的共形变形。对于这类对应于经典各向同性电导率 Calderón问题的模型，Alessandrini 首先在 [2] 中得到了对数稳定性估计。此后，这一结果在多个方向上得到改进，例如 Novikov [33] 研究了 Gelfand-Calderón问题（即 薛定谔方程的 Calderón问题）的稳定性；Alessandrini 和 Gaburro 针对具有特定形式（但仍依赖于一个标量函数）的各向异性 电导率，在 [3]中得到了稳定性估计，并在 [4] 中研究了相应的部分 Calderón 问题；最后，Heck 和 Wang，以及 Caro、Dos Santos Ferreira 和 Ruiz 分别在 [24] 和[8] 中研究了各向同性电导率的部分 Calderón问题。在后三篇文献中，针对部分 Calderón 问题仅得到了双对数型稳定性估计；但若边界的不可达部分是一个平面或球面的一部分，则存在对数型稳定性估计。因此，我们的对数稳定性结果将这些经典结果推广到了 Painlevé-Liouville黎曼流形类，涵盖全局和部分 Calderón 问题，其中电导率α 满足 (1.12)。不过请注意，在后一种情形下，我们只能在移除边界不可达部分的任意小邻域后，对 Painlevé-Liouville黎曼流形得到对数稳定性估计。

其次，与我们的模型更接近的是 [19, 20]中引入的所谓可容许流形。这类黎曼流形（M， g）满足

$$M\subset\subset\mathbb{R}\times L, \quad g=c(x,\omega)[dx^2+g_L], \tag{1.22}$$

其中， $c>0$ 是一个不受任何限制的正函数，横向流形（L， g_L）是一个带边界的（$n-1$）维紧黎曼流形，且其测地线射线变换是单射的 [1]。如 [19], 所示，满足 (1.22) 的模型——在 [20] 中称为共形横向各向异性流形（**CTA**）——是最一般的一类黎曼流形，在这类流形上可以通过极限 Carleman 权的存在性构造复几何光学（CGO）解，并将其用于研究各向异性 Calderón 问题中的唯一性和稳定性。

[1]这类黎曼流形的例子有：（a）任意维数的简单流形 [35]，（b）具有严格凸边界的负曲率流形 [23]，（c）维数为 ≥ 3 且具有严格凸边界、并由严格凸超曲面全局叶状分解的流形 [39, 34]。

本文涉及的是 Caro 和 Salo 在 [10]中针对共形因子 c 得到的双对数型稳定性估计。

我们的模型与可容许流形有三点重要区别:

• 我们的横向流形（K， g_K）是闭流形，对测地线射线变换的单射性没有任何限制。尤其是，横向流形可以是圆球面，而圆球面是测地线射线变换不具单射性的经典反例。因此，归根结底需要求逆测地线射线变换的经典 CGO 技术无法用于我们的情形。不过，我们的 Painlevé-Liouville 流形是满足 (1.22) 的 CTA 流形，因而其上存在极限 Carleman 权函数。我们将使用 [27] 中给出的经典 Carleman 估计，证明我们在偏 Calderón问题中的稳定性估计。

• 然而，我们的共形因子 α 满足可分离性条件 (1.12)，因此比可容许几何中允许的共形因子 c受到更多限制。它们本质上取决于两个（几乎）任意的函数 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(\omega)$。这一点将在附录 A 中得到严格证明。

• 我们的流形的边界（M， g）有两个连通分支，且与变量分离相容；这与可容许几何中使用的一般连通边界相反。由此便可以在一组精心选取的特征函数希尔伯特基上将 DN 映射对角化，这正是我们分析的核心。关于这一点，请参见第 2 节。

尽管可容许流形与 Painlevé-Liouville 流形之间存在这些差异，因而难以进行比较，但我们注意到，在无法应用 CGO 技术的情形下，我们的结果将 [10] 中得到的对数-对数型稳定性估计改进为对数型稳定性估计。

最后，我们简要介绍本文的结构。首先，在第 2 节中，我们利用 Painlevé-Liouville 流形（它们与乘积度量共形）的特殊几何性质，将 DN 映射 Λ_g 表示为 DN 映射$\Lambda_{g_0,\ q}$的形式。得益于可分离性条件 (1.12)，后者可以在一组希尔伯特基 $(Y_k)_{k\geq 0}$ 上对角化；该基对应于薛定谔算子 $-\Delta_{g_K}+\phi_2$ 的一组选定归一化特征函数，其中 $-\Delta_{g_K}$ 是横向流形（K， g_K）上的 Laplace-Beltrami 算子。因此，我们转而研究与以下薛定谔方程相关的一维 DN 映射

$$-v''+\phi_1(x)v=-\mu_k^2 v,\quad x\in[0,1], \tag{1.23}$$

由 $-\Delta_{g_K}+\phi_2$的特征值 $(\mu_k^2)_{k\geq 0}$ 参数化。更确切地说，利用边界可识别为 K的两个副本这一事实，我们证明了投影到由 (Y_k) 张成的每个子空间上的约化 DN 映射，是由如下一个 2×2 矩阵给出的乘法算子

$$(\Lambda_{g_0,q})_{|\langle Y_k\rangle}=\begin{pmatrix} -M(-\mu_k^2) & -\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} \\ -\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} & -N(-\mu_k^2)\end{pmatrix},$$

其中， M， N 和 Δ 分别是与 (1.23) 相关的 Weyl-Titchmarsh 函数和特征函数。这将使我们能够运用一维逆谱理论中的强大工具。其次，在第3节中，我们利用 [26] 中的经典边界确定结果，证明了定理 1.1 和 1.2 中所述的边界处的霍尔德稳定性。由此结果以及可分离性条件 (1.12)，我们便可轻易推出存在 $0 < \theta < 1$ 使得:

$$\|\phi_2 - \tilde{\phi}_2\|_\infty \leq C\epsilon^\theta, \quad \forall k \geq 0, \quad |\mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2| \leq C\epsilon^\theta.$$

第三，在第4节中，我们首先证明关于 Weyl-Titchmarsh 函数M、 N 和特征函数 Δ的一些初步结果。特别地，利用我们的主要假设条件 (1.9)，我们能够证明

$$\forall k \geq 0, \quad |M(-\mu_k^2) - \tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)| \leq C\epsilon^\theta, \quad |\Delta(-\mu_k^2) - \tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)| \leq C\epsilon^\theta \tag{1.24}$$

然后，我们从恒等式开始

$$\begin{aligned}\int_0^1 [\phi_1 - \tilde{\phi}_1 + \mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2] c_0(x,\mu_k)\tilde{s}_0(x,\tilde{\mu}_k)dx \\ = M(-\mu_k^2)\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)\left(\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2) - N(\mu_k^2)\right) + \frac{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2) - \Delta(-\mu_k^2)}{\Delta(-\mu_k^2)},\end{aligned}$$

该恒等式本质上来源于薛定谔方程。其中， c_0、 s_0 是在 0 处满足余弦型和正弦型边界条件的 (1.23) 的解。接下来，利用与 (1.23) 相关的经典变换算子（例如参见 [32]）以及之前的估计 (1.24)，我们可以证明（沿用 Gendron [22] 的方法并进行额外的技术处理），存在一个利普希茨可逆算子 R： L^2(0、2) $\longrightarrow L^2$(0、2)，使得

$$\forall k \geq 0, \quad \left|\int_0^2 e^{-2\mu_k x} R[\phi_1 - \tilde{\phi}_1](x)dx\right| \leq C\epsilon^\theta. \tag{1.25}$$

这等价于一个矩问题，我们可以使用与 [16, 17, 22] 相同的方法证明

$$\|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_2 \leq C\left(\ln(\frac{1}{\epsilon})\right)^{-\theta}.$$

请注意，经典矩问题众所周知的病态性，是流形内稳定性损失（从 Hölder 型变为对数型）的根源。综上，将之前的所有结果结合起来，到此我们已经证明

$$\|q - \tilde{q}\|_2 \leq C\left(\ln(\frac{1}{\epsilon})\right)^{-\theta}.$$

最后，利用势 q， $\tilde{q}$ 的特定形式，我们可以证明 $\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}$ 满足一个椭圆型偏微分方程，其非齐次项由 $q - \tilde{q}$ 给出。利用椭圆型偏微分方程的标准存在性结果以及 [9], 中给出的一个技巧，我们可以证明主要的内部稳定性估计

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{L^\infty(M)} \leq C\left(\ln(\frac{1}{\epsilon})\right)^{-\theta}.$$

在第5节中，我们研究部分 Calderón 问题的稳定性问题，其中测量数据仅在 Γ_0 或 Γ_1 上进行。策略与前面相同，但为了获得 $\|q-\tilde{q}\|_{L^2(M)}$ 的对数稳定性估计，我们需要施加额外条件 (1.18)。最后，$\|\alpha-\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(M_\tau)}$ 的对数稳定性估计是一般 CTA 流形上成立的经典 Carleman 估计的推论。请注意，在这一结果中，狄利克雷和诺伊曼数据是在相同的连通分支 Γ_0 或 Γ_1 上测量的。如果狄利克雷和诺伊曼数据是在不同（因而不相交）的连通分支上测量的，那么正如 [11, 12, 13] 所示，部分 Calderón 问题不具有唯一性。

最后，我们通过附录 A 和附录 B 完成本论文：附录 A 描述满足假设 1.1 的共形因子类 α，附录 B 则证明了我们在部分 Calderón 问题的稳定性估计中所使用的 Carleman 估计。

2 Dirichlet-to-Neumann 映射

本节利用边值问题 (1.4) 和 (1.8) 的变量分离来计算 DN 映射 Λ_g。我们的假设，即共形因子 $\alpha^4(x,\omega)$ 与度量 (1.3) 的 Painlevé 型分块可分离性相容，等价于 (1.8) 中的势 q 满足分块可分离性条件

$$q(x,\omega)=\phi_1(x)+\phi_2(\omega)\,,$$

因此，(1.8) 中的薛定谔方程写成

$$(-\partial_x^2+\phi_1(x)-\Delta_K+\phi_2(\omega))v=0\,, \tag{2.1}$$

其中，$-\Delta_K$ 表示 (K,g_K) 上的正 Laplace-Beltrami 算子。我们将角向算子 $-\Delta_K+\phi_2(\omega)$ 的归一化特征函数记为 $Y_k(\omega)$ $k\geq 0$，相应的特征值记为 μ_k^2，于是

$$(-\Delta_K+\phi_2)Y_k=\mu_k^2 Y_k\,.$$

特征函数 $\big(Y_k(\omega)\big)_{k\geq 0}$ 构成 $L^2(K,\ dvol_{g_K})$ 的希尔伯特基，因此我们设 v 具有如下形式

$$v(x,\omega)=\sum_{k\geq 0} v_k(x)Y_k(\omega)\,. \tag{2.2}$$

将 (2.2) 代入 (2.1)，并将 (1.8) 中的边界数据 ψ 按基 $\big(Y_k(\omega)\big)_{k\geq 0}$ 展开在 ∂M 的连通分支 $\{x=0\}$ 和 $\{x=1\}$ 上，得

$$\psi|_{x=0}(\omega)=:\psi_0(\omega)=\sum_{k\geq 0}\psi_{0,k}\,Y_k(\omega)\,,\quad \psi|_{x=1}(\omega)=:\psi_1(\omega)=\sum_{k\geq 0}\psi_{1,k}\,Y_k(\omega)\,,$$

我们得到如下关于 $k\geq 0$ 和 $x\in[0,1]$ 的径向边值问题序列

$$\begin{cases} -v_k''(x)+\phi_1(x)v_k(x)=-\mu_k^2 v_k(x)\,,\\ v_k(0)=\psi_{0,k}\,,\quad v_k(1)=\psi_{1,k}\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

现在我们考虑常微分方程的基本解系 $\{c_0(x,z)\ s_0(x,z)\}$ 和 $\{c_1(x,z)\ s_1(x,z)\}$

$$-v''(x)+\phi_1(x)v(x)=z\,v(x)\,,\quad z\in\mathbb{C}\,, \tag{2.4}$$

分别由柯西条件定义

$$c_0(0,z)=1\,,\ c_0'(0,z)=0\,,\quad s_0(0,z)=0\,,\ s_0'(0,z)=1\,, \tag{2.5}$$

and

$$c_1(1,z)=1\,,\ c_1'(1,z)=0\,,\quad s_1(1,z)=0\,,\ s_1'(1,z)=1\,. \tag{2.6}$$

与带有狄利克雷边界条件 $v(0)=0, v(1)=0$ 的常微分方程 (2.4) 相对应的特征函数 $\Delta(z)$ 以及韦尔-蒂奇马什函数 $M(z)\ N(z)$，随后由基本解组中各元素的朗斯基行列式定义为

$$\Delta(z)=W(s_0,s_1)(z)\,,$$

and

$$M(z)=-\frac{W(c_0,s_1)(z)}{\Delta(z)}=-\frac{c_0(1,z)}{s_0(1,z)}\,,\quad N(z)=-\frac{W(c_1,s_0)(z)}{\Delta(z)}=\frac{c_1(0,z)}{s_1(0,z)}\,.$$

我们在 t 中展开基 $\big(Y_k(\omega)\big)_{k\geq 0}$ 边值问题 (1.8) 的 DN 映射 $\Lambda_{g_0,q}$ 为

$$\Lambda_{g_0,q}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}=\sum_{k\geq 0}\left(\Lambda^k_{g_0,q}\begin{pmatrix}\psi_{0,k}\\ \psi_{1,k}\end{pmatrix}\right)Y_k\,, \tag{2.7}$$

其中

$$\Lambda^k_{g_0,q}\begin{pmatrix}\psi_{0,k}\\ \psi_{1,k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v_k'(0)\\ v_k'(1)\end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

系数 (2.8) 现在可以借助 (2.7) 以及柯西条件 (2.5)、(2.6)，通过直接计算，用在 $-\mu_k^2$ 处取值的特征函数 Δ 和韦尔-蒂奇马什函数 M,N 来表示（其中 μ_k^2 是角向算子 $-\Delta_K+\phi_2(\omega)$ 的特征值），从而得到

$$\Lambda^k_{g_0,q}\begin{pmatrix}\psi_{0,k}\\ \psi_{1,k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-M(-\mu_k^2) & -\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)}\\ -\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} & -N(-\mu_k^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{0,k}\\ \psi_{1,k}\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

注意，矩阵 (2.9) 的对角分量 $-M(-\mu_k^2)$ 和 $-N(-\mu_k^2)$ 分别是部分狄利克雷-诺伊曼映射 $\Lambda_{g_0、\ q、\ \Gamma_0、\ \Gamma_0}$ 和$\Lambda_{g_0、\ q、\ \Gamma_1、\ \Gamma_1}$的特征值。第4节中，我们将结合极小极大刻画利用这一简单观察。

最后一步是根据我们刚刚在（2.7）和（2.8）中得到的表达式，用边值问题（1.8）的 DN 映射 $\Lambda_{g_0,\ q}$ 来计算拉普拉斯算子 Δ_g 对应的原始边值问题（1.4）的 DN 映射 Λ_g。令

$$f|_{x=0}(\omega)=:f_0(\omega)\,,\quad f|_{x=1}(\omega)=:f_1(\omega)\,,$$

我们有

$$\Lambda_g \begin{pmatrix} f_0(\omega) \\ f_1(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2}(0,\omega)\,\partial_x u(0,\omega) \\ \alpha^{-2}(1,\omega)\,\partial_x u(1,\omega) \end{pmatrix} . \tag{2.10}$$

由 (1.7) 得到 $u = \alpha^{2-n} v$，因此利用 (2.8) 可得

$$\Lambda_g \begin{pmatrix} f_0(\omega) \\ f_1(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2-n)\alpha^{-3}(0,\omega)\,\partial_x \alpha(0,\omega) f_0(\omega) - \alpha^{-n}(0,\omega)\,\partial_x v(0,\omega) \\ (2-n)\alpha^{-3}(1,\omega)\,\partial_x \alpha(1,\omega) f_1(\omega) + \alpha^{-n}(1,\omega)\,\partial_x v(1,\omega) \end{pmatrix} . \tag{2.11}$$

令

$$B_1 = \begin{pmatrix} -(2-n)\alpha^{-3}(0,\omega)\,\partial_x \alpha(0,\omega) & 0 \\ 0 & (2-n)\alpha^{-3}(1,\omega)\,\partial_x \alpha(1,\omega) \end{pmatrix} , \tag{2.12}$$

and

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha^{-n}(0,\omega) & 0 \\ 0 & \alpha^{-n}(1,\omega) \end{pmatrix} , \tag{2.13}$$

这就得到

$$\Lambda_g \begin{pmatrix} f_0(\omega) \\ f_1(\omega) \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} f_0(\omega) \\ f_1(\omega) \end{pmatrix} + B_2\, \Lambda_{g_0,q} \begin{pmatrix} \psi_0(\omega) \\ \psi_1(\omega) \end{pmatrix} . \tag{2.14}$$

因此，利用 (1.7) 我们证明了：

引理 2.1。

$$\Lambda_g \begin{pmatrix} f_0(\omega) \\ f_1(\omega) \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} f_0(\omega) \\ f_1(\omega) \end{pmatrix} + B_2\, \Lambda_{g_0,q} \begin{pmatrix} \alpha^{n-2}(0,\omega) f_0(\omega) \\ \alpha^{n-2}(0,\omega) f_1(\omega) \end{pmatrix} , \tag{2.15}$$

其中 $\Lambda_{g_0,\ q}$ 是由傅里叶展开 (2.7) 和(2.9)给出的 2×2 矩阵乘法算子，而 B_1 和 B_2 分别是由 (2.12) 和(2.13) 给出的 2×2 矩阵乘法算子。

3 边界确定结果及其在角向稳定性估计中的应用

在本节中，我们证明定理 1.1 和 1.2 中所述的边界处的霍尔德稳定性，以及若干推论。

在假设 1.1 的条件 *i*) *ii*) 和 *iii*) 以及主要假设 (1.9) 或相应地 (1.10) 下，作为 [26] (定理 1.3)的直接应用，我们得到

$$\|\alpha^4(j,\omega) g_K - \tilde{\alpha}^4(j,\omega) \tilde{g}_K\|_{C_E^k(\Gamma_j)} \leq C \epsilon^{\theta_k} , \tag{3.1}$$

其中，对于给定的足够大的整数 $l \in \mathbb{N}$， $j \in \{0,1\}$, $k \in \{0,1,2\}$, $\theta_k = 2^{-lk}$，且 C =C(K, g_K, c, B) 是一个常数。这里回顾一下，记号 C_E^k(Γ_j) 表示切向

法向导数和法向导数包含在 C^k 范数的定义中。由于 g_K 是一个固定的黎曼度量，我们可以直接由 (3.1) 得到：

$$\|\alpha(j,\omega)-\tilde{\alpha}(j,\omega)\|_{C_E^k(K)}\leq C\epsilon^{\theta_k},\quad k=0,1,2, \tag{3.2}$$

这本质上就是 (1.16) 和 (1.19)。作为第一个推论，我们得到：

推论3.1. 在假设 (1.9)（分别地，(1.10)）下，我们有：

$$\|\Lambda_{g_0,q}-\Lambda_{g_0,\tilde{q}}\|_{\mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M),H^{-1/2}(\partial M))}\leq C\epsilon^{\theta_1},$$

$$(\text{resp.}\quad \|\Lambda_{g_0,q,\Gamma_j,\Gamma_j}-\Lambda_{g_0,\tilde{q},\Gamma_j,\Gamma_j}\|_{\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma_j),H^{-1/2}(\Gamma_j))}\leq C\epsilon^{\theta_1}).$$

证明. 这是引理 2.1、(1.9) 或 (1.10) 以及 (3.2) 的直接推论。事实上，由引理 2.1，我们首先得到

$$\big(\Lambda_{g_0,q}-\Lambda_{g_0,\tilde{q}}\big)\psi=B_2^{-1}\Lambda_g\big(\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\big)-B_2^{-1}B_1\big(\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\big)-\tilde{B}_2{}^{-1}\Lambda_{\tilde{g}}\big(\frac{\psi}{\tilde{\alpha}^{n-2}}\big)+\tilde{B}_2{}^{-1}\tilde{B}_1\big(\frac{\psi}{\tilde{\alpha}^{n-2}}\big),$$

将其改写为

$$\begin{aligned}\big(\Lambda_{g_0,q}-\Lambda_{g_0,\tilde{q}}\big)\psi=&\big(B_2^{-1}-\tilde{B}_2{}^{-1}\big)\Lambda_g\big(\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\big)+\tilde{B}_2{}^{-1}\Lambda_g\big(\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}-\frac{\psi}{\tilde{\alpha}^{n-2}}\big)+\tilde{B}_2{}^{-1}\big(\Lambda_g-\Lambda_{\tilde{g}}\big)\big(\frac{\psi}{\tilde{\alpha}^{n-2}}\big)\\&+\tilde{B}_2{}^{-1}\tilde{B}_1\big(\frac{\psi}{\tilde{\alpha}^{n-2}}-\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\big)+\big(\tilde{B}_2{}^{-1}\tilde{B}_1-B_2^{-1}B_1\big)\big(\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\big),\end{aligned}$$

由此，利用 B_1 和 B_2 的定义 (2.12)、(2.13)、(1.9) 或 (1.10) 以及边界确定估计 (3.2)，可知存在正常数 C 和 θ_1，使得

$$\begin{aligned}\|\big(\Lambda_{g_0,q}-\Lambda_{g_0,\tilde{q}}\big)\psi\|_{L^2(K)}\leq&C\,\|B_2^{-1}-\tilde{B}_2{}^{-1}\|_{L^\infty(K)}\cdot\|\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\|_{H^1(K)}+C\,\|\big(\frac{1}{\alpha^{n-2}}-\frac{1}{\tilde{\alpha}^{n-2}}\big)\psi\|_{H^1(K)}\\&+C\epsilon\,\|\frac{\psi}{\tilde{\alpha}^{n-2}}\|_{H^1(K)}+\|\tilde{B}_2{}^{-1}\tilde{B}_1-B_2^{-1}B_1\|_{L^\infty(K)}\cdot\|\frac{\psi}{\alpha^{n-2}}\|_{L^2(K)},\end{aligned}$$

因此

$$\|\big(\Lambda_{g_0,q}-\Lambda_{g_0,\tilde{q}}\big)\psi\|_{L^2(K)}\;\leq\;C\epsilon^{\theta_1}\|\psi\|_{H^1(K)}. \tag{3.3}$$

□

现在我们来探讨这些广为人知的边界确定结果所带来的其他一些推论。首先回顾

$$q=\frac{\Delta_{g_0}\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-2}},$$

由 (3.2) 可直接推出

$$\|q(j,.)-\tilde{q}(j,.)\|_{L^\infty(K)}\leq C\epsilon^{\theta_2},\quad j=0,1. \tag{3.4}$$

其次，利用可分离性条件 (1.12)，可得：

$$\|\phi_1(j) - \tilde{\phi}_1(j) + \phi_2 - \tilde{\phi}_2\|_{L^\infty(K)} \leq C\epsilon^{\theta_2}, \quad j = 0, 1.$$

˜但请回想注 1.1 的第 2 点，我们可以为 $j = 0$ 或 $j = 1$ 选择 $\phi_1(j) = \phi_1(j)$。因此，我们直接得到函数 ϕ_2 的霍尔德稳定性，即：

$$\|\phi_2 - \tilde{\phi}_2\|_{L^\infty(K)} \leq C\epsilon^{\theta_2}. \tag{3.5}$$

最后，我们得到以下重要推论，接下来的章节中将会频繁用到：

推论 3.2。 存在一个仅依赖于 K、g_K、c、B 的常数 $C > 0$，以及一个常数 $0 < \theta < \frac{1}{2}$，使得 –

$$\forall k \geq 0, \quad |\mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2| \leq C\epsilon^\theta.$$

特别地，

$$\forall k \geq 0, \quad |\mu_k - \tilde{\mu}_k| \leq C\frac{\epsilon^\theta}{\mu_k + \tilde{\mu}_k}.$$

证明。 首先注意到，我们可以写成

$$-\Delta_{g_0} + \tilde{\phi}_2 = -\Delta_{g_0} + \phi_2 + V, \quad V = \tilde{\phi}_2 - \phi_2,$$

其中，根据 (3.5)

$$\|V\|_\infty \leq C\epsilon^{\theta_2}.$$

因此，令 $\theta = \theta_2$，根据特征值 $\mu_k^2, \tilde{\mu}_k^2$ 的极小极大刻画（例如见 [36], 推论 4.1），即可直接得到结果。

□

4 全局 Calderón问题中的径向稳定性估计

4.1 预备结果

在接下来的两节中，我们将反复使用方程（2.4）的解s_j,c_j, $j = 0, 1$ 的 Marchenko 表示。根据 [32], 第 9 页，例如对所有 $\mu \in \mathbb{R}$，有：

$$s_0(x, -\mu^2) = \frac{\sinh(\mu x)}{\mu} + \int_0^x H_0(x, t)\frac{\sinh(\mu t)}{\mu}dt, \tag{4.1}$$

$$c_0(x, -\mu^2) = \cosh(\mu x) + \int_0^x P_0(x, t)\cosh(\mu t)dt, \tag{4.2}$$

以及对应于 s_1, c_1 的公式。此外，利用 (1.1)，Gendron [22], 第 30 页证明，存在一个仅依赖于 A 的常数 $C_A > 0$，使得核 H_0 和 P_0 满足

$$\|H_0\|_\infty + \|\partial_x H_0\|_\infty + \|\partial_t H_0\|_\infty \leq C_A, \quad \|P_0\|_\infty + \|\partial_x P_0\|_\infty + \|\partial_t P_0\|_\infty \leq C_A. \tag{4.3}$$

我们将利用这些公式证明若干技术性结果。首先，引入一些记号。对于定义在 $[0,1]\times\mathbb{N}$ 上的函数 $f = f(x,\ k)$ 以及正数列 $(u_k)_{k\geq 0}$，记

$$f(x,k) = O_A(u_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C_A > 0\,|\,\forall x\in[0,1], \forall k\geq 0,\ |f(x,k)|\leq C_A u_k.$$

引理 4.1. 使用上述记号，特征函数 Δ的渐近行为为：

$$\Delta(-\mu_k^2) = \frac{\sinh(\mu_k)}{\mu_k} + O_A\left(\frac{e^{\mu_k}}{\mu_k^2}\right).$$

更确切地说，我们有

$$\Delta(-\mu_k^2) = \frac{\sinh(\mu_k)}{\mu_k} + \left(\frac{1}{2}\int_0^1 \phi_1(x)dx\right)\frac{\cosh(\mu_k)}{\mu_k^2} + O_A\left(\frac{e^{\mu_k}}{\mu_k^3}\right).$$

证明。 利用 (4.1) 并进行分部积分，可得

$$\begin{aligned} s_0(x,-\mu_k^2) = &\frac{\sinh(\mu_k x)}{\mu_k} + \frac{H_0(x,1)\cosh(\mu_k) - H_0(x,0)}{\mu_k^2} \\ &- \frac{1}{\mu_k^2}\int_0^x \partial_t H_0(x,t)\cosh(\mu_k t)\,dt\,, \end{aligned} \tag{4.4}$$

结合估计 (4.3)，这意味着

$$\Delta(-\mu_k^2) = \frac{\sinh(\mu_k)}{\mu_k} + O_A(\frac{e^{\mu_k}}{\mu_k^2})\,.$$

现在，回顾 [21] (定理 1.2.3，第 22 页)，可知

$$H_0(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x \phi_1(t)dt\,, \quad H_0(x,0) = 0\,, \tag{4.5}$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta(-\mu_k^2) = \ s_0(1,-{\mu_k}^2) = &\frac{\sinh(\mu_k)}{\mu_k} + \left(\frac{1}{2}\int_0^1 \phi_1(t)dt\right)\frac{\cosh\mu_k}{\mu_k^2} \\ &- \frac{1}{\mu_k^2}\int_0^1 \partial_t H_0(1,t)\cosh(\mu_k t)\,dt\,. \end{aligned}$$

由 (4.3) 可得

$$\Delta(-\mu_k^2) = \frac{\sinh(\mu_k)}{\mu_k} + +\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \phi_1(t)dt\right)\frac{\cosh\mu_k}{\mu_k^2} + O_A\left(\frac{\sinh(\mu_k)}{\mu_k^3}\right),$$

正如所声称的。 □

接下来，我们给出关于 Weyl-Titchmarsh 函数 M， N 渐近性质的一个结果。

引理 4.2。 对所有 $\mu \in \mathbb{R}^+$，我们有

$$-M(-\mu^2), -N(-\mu^2) = \mu + O_A\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

证明。 利用 (4.1)、(4.2)、(4.5) 并进行分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} s_0(x,-\mu^2) &= \frac{\sinh(\mu x)}{\mu} + \left(\frac{1}{2\mu^2}\int_0^x \phi_1(t)dt\right)\cosh\mu + O_A(\frac{e^\mu}{\mu^3}), \\ c_0(x,-\mu^2) &= \cosh(\mu x) + \left(\frac{1}{2\mu}\int_0^x \phi_1(t)dt\right)\sinh\mu + O_A(\frac{e^\mu}{\mu^2}), \end{aligned}$$

由此可得

$$-M(-\mu^2) = \frac{c_0(1,-\mu^2)}{s_0(1,-\mu^2)} = \frac{\cosh\mu\left(1+\frac{1}{2\mu}\left(\int_0^1 \phi_1(t)dt\right)\tanh\mu + O_A(\frac{1}{\mu^2})\right)}{\frac{\sinh\mu}{\mu}\left(1+\frac{1}{2\mu}\left(\int_0^1 \phi_1(t)dt\right)\coth\mu + O_A(\frac{1}{\mu^2})\right)},$$

进而得到

$$\begin{aligned} &= \mu\big(1+O\big(e^{-2\mu}\big)\big)\left(1+\frac{1}{2\mu}\int_0^1 \phi_1(t)dt(1+O(e^{-2\mu})) + O_A(\frac{1}{\mu^2})\right) \\ &\quad \times\left(1-\frac{1}{2\mu}\int_0^1 \phi_1(t)dt(1+O(e^{-2\mu})) + O_A(\frac{1}{\mu^2})\right). \end{aligned}$$

展开最后一个表达式中的乘积可知，含有 $\frac{1}{2\mu}\int_0^1 \phi_1(t)dt$ 的项相互抵消，剩下

$$-M(-\mu^2) = \mu + O_A(\frac{1}{\mu}) + O(\mu e^{-2\mu}) = \mu + O_A(\frac{1}{\mu}),$$

如所述。 □

我们以关于 Weyl-Titchmarsh 函数和特征函数单调性的一个结果结束本小节。

引理 4.3。我们有：

i) 以下 韦尔-蒂奇马什函数 $\lambda \mapsto M(\lambda)$ 和 $\lambda \mapsto N(\lambda)$ 在 $\lambda \in \mathbb{R}^-$ 上递增。

ii) $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}^-$ 仅取决于 A 和 (K, g_K)，且特征函数 $\lambda \mapsto \Delta(\lambda)$ 在 $\forall \lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ 上递减。

证明。 我们首先证明$i)$。由(2.3)和(2.4)，可得 $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$,

$$W(s_0(x,\lambda_1), s_0(x,\lambda_2))' = (\lambda_1 - \lambda_2) s_0(x,\lambda_1) s_0(x,\lambda_2)\,,$$

这经积分后意味着

$$s_0(1,\lambda_1)s_0'(1,\lambda_2) - s_0'(1,\lambda_1)s_0(1,\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 s_0(x,\lambda_1)s_0(x,\lambda_2)\,dx\,. \tag{4.6}$$

在 [22], 中应用命题 4.4，我们得到

$$s_0(1,\lambda_1)s_0'(1,\lambda_2) - s_0'(1,\lambda_1)s_0(1,\lambda_2) = \Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)\big[-N(\lambda_2) + N(\lambda_1)\big]\,,$$

因此，(4.6) 等价于

$$\frac{N(\lambda_1) - N(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)}\int_0^1 s_0(x,\lambda_1)s_0(x,\lambda_2)\,dx\,.$$

取极限 $\lambda_1 \to \lambda_2 = \lambda$，我们得到

$$\frac{dN}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\Delta^2(\lambda)}\int_0^1 s_0^2(x,\lambda)\,dx \geq 0\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^-\,.$$

对于 $M(\lambda)$，论证类似。
接下来我们证明$ii)$。我们再次从 (2.3) 和 (2.4) 出发，得到， $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$,

$$W(s_0(x,\lambda_1), s_1(x,\lambda_2))' = (\lambda_1 - \lambda_2) s_0(x,\lambda_1) s_1(x,\lambda_2)\,.$$

我们从 0 积分到 1，并再次利用 [22] 中的命题 4.4，得到

$$\frac{\Delta(\lambda_1) - \Delta(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \int_0^1 s_0(x,\lambda_1)s_1(x,\lambda_2)\,dx\,.$$

取极限 $\lambda_1 \to \lambda_2 = \lambda$，得到

$$\frac{d\Delta}{d\lambda}(\lambda) = \int_0^1 s_0(x,\lambda)s_1(x,\lambda)\,dx\,. \tag{4.7}$$

对 (4.7) 右端符号的分析，比引理中相应项$i)$ 的分析稍复杂一些。回顾方程 (2.4) 的解 s_0, s_1 的 Marchenko 表示，它们由 $\mu \in \mathbb{R}^+$ 给出:

$$\begin{aligned}
s_0(x,-\mu^2) =& \frac{\sinh(\mu x)}{\mu} + \int_0^x H_0(x,t)\frac{\sinh(\mu t)}{\mu}\,dt\,,\\
s_1(x,-\mu^2) =& -\frac{\sinh(\mu(1-x))}{\mu} + \int_x^1 H_1(x,t)\frac{\sinh(\mu(1-t))}{\mu}\,dt\,,
\end{aligned}$$

我们可以将 (4.7) 的右端拆分为以下四项之和:

$$\int_0^1 s_0(x,\lambda)s_1(x,\lambda)\,dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,,$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_0^1 \frac{\sinh(\mu x)\sinh(\mu(1-x))}{\mu^2}dx\,,\\
I_2 &= -\int_0^1\int_0^x \frac{\sinh(\mu t)\sinh(\mu(1-x))H_0(x,t)}{\mu^2}\,dt\,dx\,,\\
I_3 &= \int_0^1\int_x^1 \frac{\sinh(\mu x)\sinh(\mu(1-t))H_1(x,t)}{\mu^2}\,dt\,dx\,,\\
I_4 &= \int_0^1\int_0^x\int_x^1 \frac{\sinh(\mu t)\sinh(\mu(1-s))H_0(x,t)H_1(x,s)}{\mu^2}\,ds\,dt\,dx\,.
\end{aligned}$$

现在我们来估计 依次估计这些项。对于 I_1，结果很容易得到；我们有

$$I_1 = -\frac{\cosh\mu}{2\mu^2} + \frac{\sinh\mu}{2\mu^3} = -\frac{e^\mu}{2\mu^2}\big(1+O(\frac{1}{\mu})\big)\,. \tag{4.8}$$

对于其余各项，我们将使用双曲函数满足的标准恒等式，以及存在正常数 C_A 使得$|H_{0,\ 1}(x,\ \ t)| \le C_A$ 对于 $0 \le x,\ \ t \le 1$ 这一事实。对于 I_2，这给出

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le \frac{C_A}{2\mu^2}\left|\int_0^1\int_0^x \big[\cosh(\mu(t-x+1)) + \cosh(\mu(t+x-1))\big]\,dt\,dx\right|\\
&\le \frac{C_A}{2\mu^3}\left|\int_0^1 \big[\sinh\mu + \sinh(\mu(2x-1))\big]\,dt\,dx\right|\,,
\end{aligned}$$

这给出

$$|I_2| \le C_A\frac{e^\mu}{2\mu^3}\,. \tag{4.9}$$

同样，对 I_3 进行类似计算可得

$$|I_3| \le C_A\frac{e^\mu}{\mu^3}\,. \tag{4.10}$$

最后，我们将通过把该量拆分为两项并分别处理来估计 I_4。首先，利用标准双曲恒等式和变量代换$v = t-s$, $u = t+s$，可得

$$I_4 = I_{4,1} + I_{4,2}\,,$$

其中

$$I_{4,1} = \frac{1}{2\mu^2}\int_0^1\int_0^x\int_{t-1}^{t-x} H_0(x,t)H_1(x,t-v)\cosh(\mu(v+1))dv\,dt\,dx\,,$$
$$I_{4,2} = -\frac{1}{2\mu^2}\int_0^1\int_0^x\int_{t+x}^{t+1} H_0(x,t)H_1(x,u-t)\cosh(\mu(u-1))du\,dt\,dx\,.$$

应用富比尼定理于 $I_{4,1}$，我们得到

$$I_{4,1} = \frac{1}{2\mu^2}\int_{-1}^0 \cosh(\mu(v+1))\bigg(\int_0^1\int_{x+v}^{1+v} H_0(x,t)H_1(x,t-v)dt\,dx\bigg)\,dv\,,$$

这意味着

$$|I_{4,1}| \le \frac{C_A}{2\mu^3}\sinh\mu\,.$$

对于 $I_{4,2}$，我们两次应用富比尼定理，得到

$$\begin{aligned} I_{4,2} = &-\frac{1}{2\mu^2}\int_0^1\bigg(\int_0^u\int_0^{u-x} H_0(x,t)H_1(x,u-t)dt\,dx\bigg)\cosh(\mu(u-1))du \\ &-\frac{1}{2\mu^2}\int_1^2\bigg(\int_{u-1}^1\int_0^{u-x} H_0(x,t)H_1(x,u-t)dt\,dx\bigg)\cosh(\mu(u-1))du\,, \end{aligned}$$

进而可得

$$|I_{4,2}| \le \frac{C_A}{2\mu^3}\sinh\mu\,.$$

结合刚才针对 $I_{4,1}$ 和 $I_{4,2}$得到的估计，我们得出

$$|I_4| \le C_A\frac{e^\mu}{\mu^3}\,. \tag{4.11}$$

最后，综合我们针对 I_1, I_2, I_3, I_4 推导出的估计 (4.8)、(4.9)、(4.10)、(4.11)，得到

$$\frac{d\Delta(-\mu^2)}{d(-\mu^2)} = -\frac{e^\mu}{2\mu^2}\big(1+O_A(\frac{1}{\mu})\big)\,,$$

这意味着 $\exists\mu^*(A)\ |\forall\mu\ge\mu^*$，我们有

$$\frac{d\Delta(-\mu^2)}{d(-\mu^2)} \le 0\,, \tag{4.12}$$

这证明了 *ii)* □

推论 4.1。我们有：

(i) 映射 $\mu\in\mathbb{R}^+\to -M(-\mu^2)$和 $\mu\in\mathbb{R}^+\to -N(-\mu^2)$是递增的。***(ii)*** $\exists\,\mu^*\in\mathbb{R}$仅依赖于 A 和 (K, g_K)，使得映射 $\mu\mapsto \Delta^{-1}(-\mu^2)$是递增的 $\forall\,\mu\in[-\mu^*,\infty)$。

证明。结论*i)* 和*ii)* 由引理 4.3 中的*i)* 和*ii)* 通过变量代换 $\lambda=-\mu^2$立即得出，这意味着 $\frac{d}{d\lambda} = -2\mu\frac{d}{d\mu}$。 □

4.2 径向稳定性的基本估计

引理 4.4。 存在一个常数 C_A，它仅取决于 A、K、g_K，使得 $\forall\, k \geq 0$ 我们有：

$$\left|M(-\mu_k^2) - \tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)\right| < C_A\, \epsilon^{\frac{1}{2}}\,, \quad |N(-\mu_k^2) - \tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2)| < C_A\, \epsilon^{\frac{1}{2}}\,. \tag{4.13}$$

证明。 我们只给出 Weyl-Titchmarsh 函数 M 的相关命题证明；对于 N，论证类似。首先考虑 μ_k 取值较大的情形，此时我们有如下渐近关系

$$-M(-\mu^2) = \mu + O_A\left(\frac{1}{\mu}\right)\,,$$

˜，对于 M 也有类似的渐近关系。因此，利用推论 3.2，我们得到

$$\left|M(-\mu_k^2) - \tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)\right| = \left|\mu_k - \tilde{\mu}_k + O_A\left(\frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\tilde{\mu}_k}\right)\right| \leq \frac{Ce^{\theta}}{\mu_k + \tilde{\mu}_k} + C_A\left(\frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\tilde{\mu}_k}\right) \leq \frac{C_A}{\mu_k}\,.$$

现在我们利用 Weyl 定律

$$\mu_k = c_{n-1} k^{\frac{1}{n-1}} + O(1), \tag{4.14}$$

由此可推得，存在一个仅依赖于 K，g_K 的常数 c_0，使得

$$\forall k \geq 0, \quad c_{n-1} k^{\frac{1}{n-1}} - c_0 \leq \mu_k \leq c_{n-1} k^{\frac{1}{n-1}} + c_0. \tag{4.15}$$

我们得出结论：可以选取 $k_1 = k_1(\epsilon) \geq \underbrace{\left(\frac{c_0 + \epsilon^{-a}}{c_{n-1}}\right)^{n-1}}$，使得 $0 < a < 1$

$$\mu_k \geq \epsilon^{-a}, \quad \forall k \geq k_1(\epsilon)$$

因此

$$\left|M(-\mu_k^2) - \tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)\right| \leq C_A \epsilon^a \quad \forall k \geq k_1(\epsilon). \tag{4.16}$$

接下来我们考虑 μ_k 取值较小的情形，并使用极小极大论证进行处理。事实上，回顾一下，矩阵 (2.9) 的上对角分量序列 $-M(-\mu_k^2)$ 给出了部分 DN 映射 Λ_0 的特征值：$= \Lambda_{g_0,q,\Gamma_0,\Gamma_0}$，该映射在 $L^2(K, dvol_{g_K})$ 上是自伴的。由于根据引理 4.1，函数 $\mu_k \mapsto -M(-\mu_k^2)$ 是递增的，因此我们可以使用极小极大刻画：

$$-M(-\mu_k^2) = \min_{\psi_1,\ldots,\psi_k} \max_{\psi \in \mathrm{span}\,\{\psi_1,\ldots,\psi_k\}} \frac{\left(\psi, \Lambda_0 \psi\right)_{L^2(K, dvol_{g_K})}}{\|\psi\|^2_{L^2(K, dvol_{g_K})}}\,.$$

由此可知，根据我们的主要假设 (1.9)，

$$\begin{aligned}
-M(-\mu_k^2) &\leq \max_{\psi \in \mathrm{span}\,\{\tilde{Y}_1 \ldots \tilde{Y}_k\}} \frac{\left(\psi, \tilde{\Lambda}_0 \psi\right)_{L^2(K, dvol_{g_K})} + \left(\psi, (\Lambda_0 - \tilde{\Lambda}_0)\psi\right)_{L^2(K, dvol_{g_K})}}{\|\psi\|^2_{L^2(K, dvol_{g_K})}} \\
&\leq -\tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2) + \epsilon \max_{\psi \in \mathrm{span}\,\{\tilde{Y}_1 \ldots \tilde{Y}_k\}} \frac{\|\psi\|_{H^1(K, dvol_{g_K})}}{\|\psi\|_{L^2(K, dvol_{g_K})}} \\
&\leq -\tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2) + \epsilon(1 + \mu_k^2)^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

因此，由对称性可得

$$\left|M(-\mu_k^2)-\tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)\right|\le\epsilon(1+\mu_k^2)^{\frac{1}{2}}\,,\quad\forall k\ge 0\,. \tag{4.17}$$

由 (4.15) 以及我们对 $k_1(\epsilon)$ 的选取，结合 (4.17)，可得

$$\left|M(-\mu_k^2)-\tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)\right|\le\epsilon^{1-a}\,,\quad\forall k\le k_1(\epsilon). \tag{4.18}$$

将 (4.16) 和 (4.18) 结合起来，可得

$$\left|M(-\mu_k^2)-\tilde{M}(-\tilde{\mu}_k^2)\right|\le C_A(\epsilon^{1-a}+\epsilon^a)\,,\quad\forall k\ge 0\,,$$

其中常数 C_A 仅依赖于 A，K，g_K。令 $a=1/2$，即可得到结论 (4.13)。

□

引理 4.5. 存在常数 $k_0=k_0(A)$、$0<\delta<\frac{1}{2}$ 和 $C_A>0$，它们仅依赖于 A、K、g_K，使得 $\forall\, k\ge k_0$ 成立：

$$\left|\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)}-\frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)}\right|<C_A\,\epsilon^{1-\delta}\,.$$

证明. 我们首先考虑 μ_k 的取值较大的情形，此时有如下渐近关系

$$\Delta(-\mu^2)=\frac{\sinh\mu}{\mu}\left(1+O_A(\frac{1}{\mu})\right).$$

由此，利用推论 3.2 可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)}-\frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)}\right|&\le\left|\frac{\mu_k}{\sinh\mu_k}-\frac{\tilde{\mu}_k}{\sinh\tilde{\mu}_k}\right|+C_A\left|\frac{1}{\sinh\mu}-\frac{1}{\sinh\tilde{\mu}_k}\right|\\
&\le\frac{|\mu_k-\tilde{\mu}_k|}{\sinh\mu_k}+\tilde{\mu}_k\left|\frac{\sinh\tilde{\mu}_k-\sinh\mu_k}{\sinh\mu_k\,\sinh\tilde{\mu}_k}\right|+\frac{C_A}{\sinh\mu_k}\\
&\le\frac{C\,e^{\theta}}{\mu_k\sinh\mu_k}+2\tilde{\mu}_k\left|\frac{\cosh\big((\tilde{\mu}_k+\mu_k)/2\big)\sinh\big((\tilde{\mu}_k-\mu_k)/2\big)}{\sinh\mu_k\,\sinh\tilde{\mu}_k}\right|+\frac{C_A}{\sinh\mu_k}\\
&\le\frac{C\,e^{\theta}}{\mu_k\sinh\mu_k}+\frac{C\,e^{\theta}}{\sinh\mu_k}+\frac{C_A}{\sinh\mu_k}\\
&\le\frac{C_A}{e^{\mu_k}}\,.
\end{aligned}$$

利用 Weyl 定律 (4.14) 以及与前一引理相同的论证可得，存在 $k_2=k_2(\epsilon)\ge\left(a\ln\frac{\epsilon+c_0}{c_{n-1}}\right)^{n-1}$，使得 $\forall\, k\ge k_2$，对于 $\overline{0<a}<1$，我们有，

$$\left|\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)}-\frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)}\right|\le C_A\epsilon^a\,. \tag{4.19}$$

现在我们转而讨论 μ_k 的取值较小的情形，此时我们再次使用极小极大论证。事实上，回顾一下，矩阵 (2.9) 的非对角分量序列 $-1/\Delta(-\mu_k^2)$ 给出了部分 DN 映射 $\Lambda_0 := \Lambda_{g_0,\ q,\ \Gamma_0,\ \Gamma_1}$ 的特征值，该映射在 $L^2(K,\ dvol_{g_K})$ 上是自伴的。此外，根据推论 4.1，对于所有 $k \geq k_0$，映射 $\mu_k \mapsto -\Delta^{-1}_{(-\mu_k^2)}$ 都是递增的。运用与引理 4.4 的证明中所用方法相似的极小极大论证，可得对于所有 $k \geq k_0 = k_0(A)$

$$\left| \frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} - \frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)} \right| \leq C\epsilon\, \mu_k\,.$$

因此，对于所有满足 $k_0 \leq k \leq k_2$ 的 k（这等价于对于某个仅依赖于 A 的常数 C_A，有 $\mu_k \leq -C_A \ln \epsilon, K, g_K$），我们有

$$\left| \frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} - \frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)} \right| \leq C_A(-\epsilon \ln \epsilon)\,. \tag{4.20}$$

结合 (4.19) 和 (4.20)，我们对所有 $k \geq k_0$ 得到：

$$\left| \frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} - \frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)} \right| \leq C_A(-\epsilon \ln \epsilon + \epsilon^a)\,,$$

令 $a = 1 - \delta$，即可得到我们的结论。 □

4.3 化归为矩问题

我们从恒等式

引理 4.6. 对于所有 $k \geq 0$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_0^1 &[\tilde{\phi}_1(x) - \phi_1(x) + \tilde{\mu}_k^2 - \mu_k^2] c_0(x, \mu_k) \tilde{s}_0(x, \tilde{\mu}_k) dx \\ &= \tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2) \left(\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} - \frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)} \right) + M(-\mu_k^2)\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2) \left(\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2) - N(\mu_k^2) \right).\end{aligned}$$

证明。 这是对 [22], 命题 4.4 和引理 4.5 中所给微积分的简单改编。

□

该恒等式可方便地改写为

$$\begin{aligned}\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]c_0(x,\mu_k)\tilde{s}_0(x,\mu_k)dx= &\quad \tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)\left(\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)}-\frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)}\right)\\ &+M(-\mu_k^2)\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)\left(\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2)-N(\mu_k^2)\right)\\ &+(\mu_k^2-\tilde{\mu}_k^2)\int_0^1 c_0(x,\mu_k)\tilde{s}_0(x,\mu_k)dx,\\ &+\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]c_0(x,\mu_k)(\tilde{s}_0(x,\mu_k)-\tilde{s}_0(x,\tilde{\mu}_k))dx.\end{aligned}\tag{4.21}$$

接下来，利用 Marchenko 表示 (4.1)-(4.2)，并参考 Gendron [22],第 32 页的工作，存在一个有界算子 $R\colon L^2(0,1)\longrightarrow L^2(0,1)$，使得 (4.21) 的左端可以改写为:

$$\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]c_0(x,\mu_k)\tilde{s}_0(x,\mu_k)dx=\frac{1}{\mu_k}\int_0^1\sinh(2\mu_k x)R[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x)dx.\tag{4.22}$$

现在，将 (4.22) 乘以 $2\mu_k e^{-2\mu_k}$，并按照 Gendron [22], 第 33 页中的计算，我们得到

$$\begin{aligned}I:= &\quad 2\mu_k e^{-2\mu_k}\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]c_0(x,\mu_k)\tilde{s}_0(x,\mu_k)dx\\ = &\quad \int_0^{+\infty}e^{-2\mu_k x}\big[R[\tilde{\phi}_1-\phi_1](1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)-R[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x-1)\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\big]dx,\end{aligned}$$

也就是说，乘以 $2\mu_k e^{-2\mu_k}$ 后的左端呈现为简单的拉普拉斯变换。在此阶段，我们已经证明，对于所有 $k\geq 0$

$$\begin{aligned}I= &\quad 2\mu_k e^{-2\mu_k}\Bigg\{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)\left(\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)}-\frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)}\right)\\ &+M(-\mu_k^2)\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)\left(\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2)-N(\mu_k^2)\right)\\ &+(\mu_k^2-\tilde{\mu}_k^2)\int_0^1 c_0(x,\mu_k)\tilde{s}_0(x,\mu_k)dx\\ &+\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]c_0(x,\mu_k)(\tilde{s}_0(x,\mu_k)-\tilde{s}_0(x,\tilde{\mu}_k))dx.\Bigg\},\\ = &\quad I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}\tag{4.23}$$

为了估计该表达式中的项 $I_1+I_2+I_3$，我们回顾一下，利用引理 4.1 和 4.2 以及解 s_0、c_0 的 Marchenko 表示 (4.1)-(4.2)，对于所有 $k\geq 0$ 以及

对于所有 $x \in [0,1]$：

$$\left|M(-\mu_k^2)\right| \le C_A \mu_k\,, \quad \left|\Delta(-\mu_k^2)\right| \le C_A \frac{e^{\mu_k}}{\mu_k}\,, \tag{4.24}$$

$$\left|\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2)\right| \le C_A \frac{e^{\tilde{\mu}_k}}{\tilde{\mu}_k}\,, \quad \left|c_0(x,-\mu_k^2)\right| \le C_A e^{\mu_k}\,. \tag{4.25}$$

接下来回忆推论 3.2,

$$|\mu_k - \tilde{\mu}_k| \le C\frac{\epsilon^\theta}{\mu_k} \le C\frac{\epsilon^\theta}{\mu_1}, \quad \frac{\tilde{\mu}_k}{\mu_k} \le 1 + \frac{C\epsilon^\theta}{\mu_k} \le 1 + \frac{C\epsilon^\theta}{\mu_1}, \quad \forall k \ge 1,$$

我们得到:

$$|I_1 + I_2 + I_3| \le C_A \Bigg\{ \left|\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2) - N(-\mu_k^2)\right| + e^{-\mu_k} \left|\frac{1}{\Delta(-\mu_k^2)} - \frac{1}{\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)}\right| + \left|\mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2\right| \Bigg\}.$$

最后，再次利用引理 4.4 和引理 4.5 以及推论 3.2，我们得出存在一个常数 $C_A > 0$，它仅依赖于 A, K, g_K, c, B，使得对所有 $k \ge k_0(A)$，都有

$$|I_1 + I_2 + I_3| \le C_A \Big\{ \sqrt{\epsilon} + \epsilon^{1-\delta} + e^\theta \Big\} \le 2\ C_A e^\theta,$$

当 ϵ 充分小时。

为了估计上述恒等式中的第四项，我们需要以下引理

引理 4.7. 我们有 :

$$\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2) = \tilde{s}_0(x,-\mu_k^2) + O_A\big(\epsilon^\theta\, \frac{e^{\mu_k}}{\mu_k}\big)\,.$$

证明。回想一下，我们有 $\tilde{s}_0(x,\ -\mu_k^2)$ 的 Marchenko 表示 (4.1)，其形式为

$$\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2) = \frac{\sinh(\tilde{\mu}_k x)}{\tilde{\mu}_k} + \int_0^x \tilde{H}_0(x,t)\frac{\sinh(\tilde{\mu}_k t)}{\tilde{\mu}_k}\,dt\,, \tag{4.26}$$

其中 $\left|\tilde{H}_0(x,\ t)\right| \le C_A$，对于 $0 \le x,\ t \le 1$。利用推论 3.2，我们可以写成

$$\tilde{\mu}_k = \mu_k + r_k\,, \quad |r_k| \le C\epsilon^\theta\,.$$

利用双曲正弦加法公式可得，对于所有 $x \in [0,1]$ 以及所有 $k \ge 0$

$$\frac{\sinh(\tilde{\mu}_k x)}{\tilde{\mu}_k} = \frac{\sinh(\mu_k x)}{\mu_k} + O\big(\epsilon^\theta\, \frac{e^{\mu_k}}{\mu_k}\big)\,.$$

˜结合（4.26）以及上述关于 $H_0(x,\ t)$ 的一致有界性，即可得到该结果 . □

利用注 1.1 和（4.25），我们立即得到以下推论

推论 4.2. 我们有：

$$I_4 = 2\mu_k e^{-2\mu_k} \int_0^1 [\tilde{\phi}_1(x) - \phi_1(x)] s_0(x, -\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x, -\tilde{\mu}_k^2) - \tilde{s}_0(x, -\mu_k^2))\, dx = O_A\big(\epsilon^\theta\big)\,.$$

综合以上结果，对于所有 $k \geq k_0(A)$，我们得到

$$|I| \leq C_A e^\theta\,, \tag{4.27}$$

这正是引言中所陈述的矩问题。

4.4 径向方程的矩问题解与稳定性估计

令

$$g(x) = R[\tilde{\phi}_1 - \phi_1](1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) - R[\tilde{\phi}_1 - \phi_1](x-1)\mathbf{1}_{[1,2]}(x).$$

变量代换 $t = e^{-x}$ 将（4.27）变为：

$$\left| \int_0^1 t^{2\mu_k - 1} g(-\ln t) dt \right| \leq C_A \epsilon^\theta, \quad \forall k \geq k_0.$$

现在令 $\gamma = 2\mu_{k_0} - 1$ 和

$$h(t) = t^\gamma g(-\ln t), \quad \lambda_k = 2\mu_{k+k_0} - 1 - \gamma, \forall k \geq 0.$$

由此我们得到经典的豪斯多夫矩问题：

$$\left| \int_0^1 t^{\lambda_k} h(-\ln t) dt \right| \leq C_A \epsilon^\theta, \quad \forall k \geq 0, \tag{4.28}$$

对于一个矩序列

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \to +\infty,$$

以及一个支集位于 $[e^{-2}, 1]$ 中的函数 $h \in L^2(0,1)$。

在我们此前的论文中，我们已经处理过这种情形：针对扭曲球模型 [16, 17]，或在 Gendron [22]中，针对横向流形为圆球面的扭曲积情形K，$g_K = (\mathbb{S}^{n-1},\ d\omega^2)$。例如，结合 [22],第4.4.1节中的结果（该情形与我们的模型更为接近）以及 [16], 第4.5节中研究一般横向流形的结果，我们可以证明存在仅取决于 $C_A > 0$，K，g_K，c，B和 $0 < \theta < 1$的常数，使得

$$\|h\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right)^{-\theta}. \tag{4.29}$$

由于 $h = h_1 + h_2$，其中 supp $h_1 = [e^{-1}, 1]$ 且 supp $h_2 = [e^{-2}, e^{-1}]$，我们沿用 [22]中给出的方法，推得 (4.29)

$$\|R[\phi_1 - \tilde{\phi}_1]\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \left(\ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right)^{-\theta}. \tag{4.30}$$

最后，Gendron 在 [22], 第4.4.2节证明了算子 R 可逆，且其逆算子的范数有界于 $\|R^{-1}\| \leq C_A$。因此，由 (4.31) 可得

$$\|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \left(\ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right)^{-\theta}. \tag{4.31}$$

5 R部分 DN 映射的径向稳定性估计$\Lambda_{g,\Gamma_1,\Gamma_1}$

本节中，我们现在只考虑如下情形下的部分稳定性问题：狄利克雷数据的支集为 Γ_1，而 Neumann 数据在 Γ_1 上测量，即

$$\|\Lambda_{\tilde{g},\Gamma_1,\Gamma_1} - \Lambda_{g,\Gamma_1,\Gamma_1}\|_{\mathcal{B}(H^{1/2}(K),H^{-1/2}(K))} \leq \epsilon\,. \tag{5.1}$$

狄利克雷和诺伊曼数据均在 Γ_0 上测量的情形也可类似处理。此外，回顾一下，本节还假设对于给定的 $\nu > 0$

$$\left| \int_0^1 [\tilde{\phi}_1(x) - \phi_1(x)]\, dx \right| \leq C\epsilon^{\nu}\,, \tag{5.2}$$

这可以看作对共形因子 α 和 $\tilde{\alpha}$ 的径向分量之差的积分施加的小量约束。

在假设 (5.1) 下，定理 1.2 关于边界的赫尔德稳定性结果可直接由第3节的结果推出。特别地，由 (3.5) 和推论 3.2 可知，存在仅依赖于 K、g_K、c、B 的常数 $C > 0$，以及常数 $0 < \theta < \frac{1}{2}$，使得

$$\|\phi_2 - \tilde{\phi}_2\|_{L^\infty(K)} \leq C\epsilon^{\theta}\,.$$

and

$$|\mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2| \leq C\,\epsilon^{\theta}\,, \quad \forall\, k \geq 0\,.$$

现在我们来证明定理 1.2 中给出的流形内的对数稳定性结果。首先，我们从 [22], 引理 5.3 中证明的一个恒等式开始。对于所有 $k \geq 0$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_0^1 [\tilde{\phi}_1(x) - \phi_1(x)] s_0(x, -\mu_k^2)\tilde{s}_0(x, -\tilde{\mu}_k^2)\, dx =& \big[\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2) - N(-\mu_k^2)\big]\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2) \\ &+ (\mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2)\int_0^1 s_0(x, -\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x, -\tilde{\mu}_k^2)\, dx\,,\end{aligned} \tag{5.3}$$

我们将这个恒等式改写为便于使用的形式

$$\begin{aligned}\int_0^1 [\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]s_0(x,-\mu_k^2)\tilde{s}_0(x,-\mu_k^2)\,dx&\\ =\big[\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2)-N(-\mu_k^2)\big]\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)&\\ +(\mu_k^2-\tilde{\mu}_k^2)\int_0^1 s_0(x,-\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2)\,dx\,,&\\ +\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]s_0(x,-\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x,-\mu_k^2)-\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2))\,dx.&\end{aligned}\tag{5.4}$$

利用 [22], 中的命题5.4可知，存在一个算子 $D\colon\ L^2(0,\ 1)\to L^2(0,\ 1)$，使得式(5.4)的左端可以写成

$$\begin{aligned}\forall k\geq 1,\quad \int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]s_0(x,-\mu_k^2)\tilde{s}_0(x,-\mu_k^2)\,dx=&\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^1\cosh(2\mu_k x)D[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x)\,dx\\ &-\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]\,dx\,.\end{aligned}\tag{5.5}$$

因此，由式(5.4)和(5.5)可得，对所有 $k\geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^1\cosh(2\mu_k x)D[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x)\,dx=&\big[\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2)-N(-\mu_k^2)\big]\Delta(-\mu_k^2)\tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2)\\ &+(\mu_k^2-\tilde{\mu}_k^2)\int_0^1 s_0(x,-\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2)\,dx\,,\\ &+\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]s_0(x,-\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x,-\mu_k^2)-\tilde{s}_0(x,-\tilde{\mu}_k^2))\,dx.\\ &+\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^1[\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)]\,dx\,.\end{aligned}\tag{5.6}$$

将此恒等式乘以 $2\mu_k^2e^{-2\mu_k}$ 并令

$$R[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x):=D[\tilde{\phi}_1-\phi_1](1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)+D[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x-1)\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\,,$$

我们可以将 (5.6) 的左端改写为

$$\int_0^\infty e^{-2\mu_k x}R[\tilde{\phi}_1-\phi_1](x)\,dx\,.$$

最终，我们得到了对所有 $k \geq 1$ 都成立的恒等式：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2\mu_k x} R[\tilde{\phi}_1 - \phi_1](x)\, dx = \; & 2\mu_k^2 e^{-2\mu_k} \Big\{ \big[\tilde{N}(-\tilde{\mu}_k^2) - N(-\mu_k^2)\big] \Delta(-\mu_k^2) \tilde{\Delta}(-\tilde{\mu}_k^2) \\ & + (\mu_k^2 - \tilde{\mu}_k^2) \int_0^1 s_0(x, -\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x, -\tilde{\mu}_k^2)\, dx\,, \\ & + \int_0^1 [\tilde{\phi}_1(x) - \phi_1(x)] s_0(x, -\mu_k^2)(\tilde{s}_0(x, -\mu_k^2) - \tilde{s}_0(x, -\tilde{\mu}_k^2))\, dx, \\ & + \frac{1}{\mu_k^2} \int_0^1 [\tilde{\phi}_1(x) - \phi_1(x)]\, dx\,. \Big\}. \qquad (5.7) \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

与第4.3节中一样，我们使用引理4.1、4.2和4.4、推论3.2和4.2以及（4.27）来估计各项 $I_1 + I_2 + I_3$。具体而言，我们证明存在一个常数 $C_A > 0$，其仅依赖于A，K，g_K，c，B，使得

$$|I_1 + I_2 + I_3| \leq C_A(\sqrt{\epsilon} + \epsilon^\theta) \leq C_A \epsilon^\theta. \qquad (5.8)$$

现在，利用假设（5.2）和（4.25），我们很容易估计项 I_4，得到

$$|I_4| \leq C_A \epsilon^\nu\,. \qquad (5.9)$$

将（5.8）和（5.9）合并，得到

$$|I| = \left| \int_0^\infty e^{-2\mu_k x} R[\tilde{\phi}_1 - \phi_1](x)\, dx \right| \leq C_A \epsilon^\theta\,, \quad \forall k \geq 1. \qquad (5.10)$$

因此，我们再次面临与第4.4节中相同类型的矩问题。采用 [16, 17, 22] 中使用的相同策略，并利用 R 可逆且其逆有界，满足$\|R^{-1}\| \leq C_A$，由（5.10）可得

$$\|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right)^{-\theta}, \qquad (5.11)$$

其中常数 $C_A > 0$ 仅依赖于 A，K，g_K，c，B，而 $0 < \theta < 1$为一个常数。

6 共形因子的稳定性估计

本节的目标是将我们得到的关于势之差$q - \tilde{q}$ 的稳定性估计转化为关于势之差 $\alpha - \tilde{\alpha}$ 的稳定性估计。

首先回顾

$$\begin{aligned} q - \tilde{q} &= \alpha^{-(n-2)} \Delta_{g_0} \alpha^{n-2} - \tilde{\alpha}^{-(n-2)} \Delta_{g_0} \tilde{\alpha}^{n-2} \\ &= \phi_1(x) - \tilde{\phi}_1(x) + \phi_2(\omega) - \tilde{\phi}_2(\omega)\,. \end{aligned}$$

由（4.31）或（5.11）可知

$$\|q-\tilde{q}\|_{L^2(M)} \leq C_A \left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{-\theta}. \tag{6.12}$$

按照 [10], 第 20–21 页所采用的策略，我们需要进行一个简单的计算

引理 6.1. 我们有

$$\begin{aligned}\alpha^{n-2}\tilde{\alpha}^{n-2}(q-\tilde{q}) &= \tilde{\alpha}^{n-2}\Delta_{g_0}\alpha^{n-2} - \alpha^{n-2}\Delta_{g_0}\tilde{\alpha}^{n-2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g_0|}}\partial_{x^j}\left[\alpha^{n-2}\tilde{\alpha}^{n-2}g_0^{jk}\sqrt{|g_0|}\partial_{x^k}(\ln\alpha^{n-2}-\ln\tilde{\alpha}^{n-2})\right].\end{aligned}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{|g_0|}}\partial_{x^j}\left[\alpha^{n-2}\tilde{\alpha}^{n-2}g_0^{jk}\sqrt{|g_0|}\partial_{x^k}(\ln\alpha^{n-2}-\ln\tilde{\alpha}^{n-2})\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g_0|}}\partial_{x^j}\left(\tilde{\alpha}^{n-2}g_0^{jk}\sqrt{|g_0|}\partial_{x^k}\alpha^{n-2}\right) - \frac{1}{\sqrt{|g_0|}}\partial_{x^j}\left(\alpha^{n-2}g_0^{jk}\sqrt{|g_0|}\partial_{x^k}\tilde{\alpha}^{n-2}\right) \\ &= \tilde{\alpha}^{n-2}\Delta_{g_0}\alpha^{n-2} - \alpha^{n-2}\Delta_{g_0}\tilde{\alpha}^{n-2} - (\partial_{x^j}\tilde{\alpha}^{n-2})g_0^{jk}(\partial_{x^k}\alpha^{n-2}) + (\partial_{x^j}\alpha^{n-2})g_0^{jk}(\partial_{x^k}\tilde{\alpha}^{n-2}) \\ &= \tilde{\alpha}^{n-2}\Delta_{g_0}\alpha^{n-2} - \alpha^{n-2}\Delta_{g_0}\tilde{\alpha}^{n-2}.\end{aligned}$$

□

我们将使用这一结果的以下一个便于应用的推论:

引理 6.2. 设

$$g_1 = (\alpha\tilde{\alpha})g_0, \quad v := (n-2)\ln\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}.$$

我们有

$$\Delta_{g_1} v = \frac{q-\tilde{q}}{(\alpha\tilde{\alpha})^2}. \tag{6.13}$$

证明。令

$$g_1 = \beta g_0.$$

我们得到

$$(g_1)^{-1} = \frac{1}{\beta}(g_0)^{-1}, \quad |g_1| = \beta^n |g_0|,$$

因此

$$\Delta_{g_1} = \frac{1}{\beta^{\frac{n}{2}}\sqrt{|g_0|}}\partial_{x^j}\left(\beta^{\frac{n}{2}-1}g_0^{jk}\sqrt{|g_0|}\partial_{x^k}\right).$$

结论　　在前一个方程中令 $\beta = (\alpha\tilde{\alpha})^2$，并应用引理 6.1，即可得出　　.

□

首先，我们利用引理 6.2，得到关于整体Calderón问题中共形因子 α 与 $\tilde{\alpha}$ 之差的如下稳定性估计。我们的证明与 [10] 中使用的论证非常相似。

命题 6.1。 存在正常数 C 和 θ'，使得

$$\|\alpha-\tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M)} \leq Ce^{\theta'}.$$

证明。 我们首先对该偏微分方程应用标准的椭圆存在性与正则性定理，得到 (6.13)

$$\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M)} \leq C\left(\|\frac{q-\tilde{q}}{(\alpha\tilde{\alpha})^2}\|_{H^{-1}(M)}+\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{H^{1/2}(\partial M)}\right),$$

对于某个正常数 C，由此我们推得

$$\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M)} \leq C\big(\|q-\tilde{q}\|_{L^2(M)}+\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(\partial M)}\big). \tag{6.14}$$

利用 (6.12)、定理 1.1 和 (1.16)，可立即得到 (6.14) 的右端有界于

$$\|q-\tilde{q}\|_{L^2(M)}+\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(\partial M)} \leq C\left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{-\theta}. \tag{6.15}$$

我们完成证明，使用 Caro、Garcia 和 Ruiz [9] 提出的一个技巧。首先注意到 t

$$\forall f\in L^\infty(M),\quad |f(x)|^{\frac{n}{1-r}} \leq \|f\|_{L^\infty(M)}^{\frac{n}{1-r}-2}|f(x)|^2,\quad 0<r<1. \tag{6.16}$$

因此，由 (6.14)-(6.16) 和假设 1.1，我们得到

$$\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{W^{1,\frac{n}{1-r}}(M)} \leq C\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M)}^{\frac{(1-r)2}{n}} \leq C\left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{-\theta'}. \tag{6.17}$$

最后，我们利用莫雷嵌入证明 (6.17) 蕴含

$$\|\ln\alpha-\ln\tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M)} \leq \left(\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{-\theta'}, \tag{6.18}$$

从而得到我们的主要结果 (1.17)。 □

最后，我们利用引理 6.2 推导共形因子 α 与 $\tilde{\alpha}$ 之差的稳定性估计，针对在 Γ_1上进行测度的部分 Calderón问题。我们能够在远离（但可任意接近）边界 Γ_0的内部区域中得到稳定性估计。

对任意 $\tau\in(0,1)$，我们令

$$M_\tau := [\tau,1]\times K.$$

作为标准 Carleman 估计（附录 B 中回顾）的推论，我们首先在 $M\tau$ 上得到一个局部对数稳定性估计。

命题 6.2 (局部对数稳定性**)**。 固定 $r \in (0,\ 1)$。那么，对于任意 $\tau \in (0,\ 1)$，存在一个常数 $C_\tau > 0$ ，使得

$$\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M_\tau)} \ \le\ C_\tau \,|\ln(1/\varepsilon)|^{-\theta_\tau}, \tag{6.19}$$

其中指数 $\theta_\tau > 0$ 显式依赖于到边界 Γ_0 的距离 τ ，其表达式为

$$\theta_\tau = \frac{2(1-r)}{n}\,\frac{\theta\,\tau}{2-\tau}.$$

此外， C_τ 可以选取为使得 $C_\tau \lesssim \tau^{-2}$。

证明。 结合引理 6.2 与附录 B 中的定理 B.1，可得

$$\begin{aligned}\|\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M_\tau)} \ \le\ C_\tau\Big(e^{(1-\tau)/h}\Big(&\big\|\tfrac{q-\tilde{q}}{(\alpha\tilde{\alpha})^2}\big\|_{L^2(M)} \\ &+ \|\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(\Gamma_1)} + \|\partial_\nu(\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha})\|_{L^2(\Gamma_1)}\Big) \\ &+ e^{-\tau/(2h)}\,\|\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M)}\Big),\quad \forall\ 0 < h < h_0.\end{aligned} \tag{6.20}$$

利用 (6.12)、定理 1.2（估计 (1.19)），并注意到共形因子 α 和 $\tilde{\alpha}$满足假设 1.1，可得

$$\|\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M_\tau)} \ \le\ C_\tau\Big(e^{(1-\tau)/h}\,\big|\ln\tfrac{1}{\varepsilon}\big|^{-\theta} + e^{-\tau/(2h)}\Big),\quad \forall 0 < h < h_0.. \tag{6.21}$$

这里， $C_\tau > 0$ 仅依赖于 τ 以及 M的几何性质；此外，如附录 B 所示，可以选取 $C_\tau \lesssim \tau^{-2}$。通过平衡 (6.21) 中的两项，即可对半经典参数 h 进行优化，从而得到如下选取

$$h = \frac{1-\tau/2}{\theta\ \ln|\ln(1/\varepsilon)|}.$$

采用这一选取后，可得对数稳定性估计

$$\|\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}\|_{H^1(M_\tau)} \ \le\ C_\tau\,|\ln(1/\varepsilon)|^{-\kappa},\qquad \kappa = \frac{\theta\tau}{2-\tau}. \tag{6.22}$$

我们通过将 Caro、García 和 Ruiz [9] 提出的方法调整到当前的局部化情形，并追踪赫尔德指数对 τ 的依赖，来完成证明。令$0 < r < 1$ 并设

$$p := \frac{n}{1-r} > n.$$

我们回顾一下，对于任意 $f \in L^\infty(M_\tau)$,

$$|f(x)|^p \ \le\ \|f\|^{p-2}_{L^\infty(M_\tau)}\,|f(x)|^2,\qquad x \in M_\tau. \tag{6.23}$$

逐点界 (6.23) 表明，对 M_τ 积分后，

$$\|f\|_{L^p(M_\tau)} \;\le\; \|f\|_{L^\infty(M_\tau)}^{1-\frac{2}{p}}\, \|f\|_{L^2(M_\tau)}^{\frac{2}{p}}.$$

将该不等式应用于 $f = \nabla(\ln\alpha - \ln\,\tilde\alpha)$，并利用共形因子满足可容许性条件（假设 1.1）这一事实可知，其梯度存在一致的 L^∞ 界，从而得到

$$\|\nabla(\ln\alpha - \ln\tilde\alpha)\|_{L^p(M_\tau)} \;\le\; C\,\|\nabla(\ln\alpha - \ln\tilde\alpha)\|_{L^2(M_\tau)}^{\frac{2}{p}}.$$

最后，将此估计与 $\ln\alpha - \ln\,\tilde\alpha$ 本身的类似界相结合，得到

$$\|\ln\alpha - \ln\tilde\alpha\|_{W^{1,p}(M_\tau)} \;\le\; C_\tau\,\|\ln\alpha - \ln\tilde\alpha\|_{H^1(M_\tau)}^{\frac{2}{p}}, \tag{6.24}$$

将 (6.24) 与对数稳定性估计 (6.22) 相结合，可得

$$\|\ln\alpha - \ln\tilde\alpha\|_{W^{1,p}(M_\tau)} \;\le\; C_\tau\,|\ln(1/\varepsilon)|^{-\frac{2\kappa}{p}}. \tag{6.25}$$

最后，由于 $p > n$，根据 Morrey 嵌入可得

$$W^{1,p}(M_\tau) \hookrightarrow C^{0,r}(M_\tau).$$

因此，我们得到局部 Hölder 稳定性估计

$$\|\ln\alpha - \ln\tilde\alpha\|_{C^{0,r}(M_\tau)} \;\le\; C_\tau\,|\ln(1/\varepsilon)|^{-\theta_\tau}, \tag{6.26}$$

其中，指数 $\theta_\tau > 0$ 明确依赖于到边界 Γ_0 的距离 τ，且其表达式为

$$\theta_\tau = \frac{2\kappa}{p} = \frac{2(1-r)}{n}\,\frac{\theta\,\tau}{2-\tau}.$$

由此即得命题中所述的结果。 □

作为命题 6.2 的直接推论，我们得到如下推论。它表明，若使局部化参数 $\tau = \tau(\varepsilon)$ 以足够缓慢的速度趋于 0，则仍可得到一种稳定性速率，该速率强于针对具有部分数据的 Calderón 型逆问题所能得到的全局 log–log 估计（例如，参见 Caro–Dos Santos Ferreira–Ruiz [8]）。

推论 6.1（远离禁边界时的改进稳定性）。设 $r \in (0,1)$ 固定，并令

$$\tau(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\ln\,\ln(1/\varepsilon)}}.$$

于是，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\|\alpha - \tilde\alpha\|_{C^{0,r}(M_{\tau(\varepsilon)})} \;\lesssim\; \ln\,\ln(1/\varepsilon)\,\exp\Big(-\frac{(1-r)\theta}{n}\,\sqrt{\ln\,\ln(1/\varepsilon)}\Big).$$

注记 6.1. 推论 *6.1* 中关于 $M_{\tau(\epsilon)}$ 所得的稳定性估计呈现出介于对数稳定性与对数-对数稳定性之间的中间性态。一方面，它严格强于任何对数-对数型估计：对每一个 $\kappa > 0$,

$$\ln\ln(1/\varepsilon)\,\exp\Big(-\frac{(1-r)\theta}{n}\sqrt{\ln\ln(1/\varepsilon)}\Big) = o\big((\ln\ln(1/\varepsilon))^{-\kappa}\big), \qquad \varepsilon\to 0.$$

另一方面，它仍弱于真正的对数稳定性，因为对于任意 $\alpha > 0$,

$$\ln\ln(1/\varepsilon)\,\exp\Big(-\frac{(1-r)\theta}{n}\sqrt{\ln\ln(1/\varepsilon)}\Big) \gg (\ln(1/\varepsilon))^{-\alpha}, \qquad \varepsilon\to 0.$$

更一般地，命题 *6.2* 允许灵活选择局部化参数 $\tau = \tau(\varepsilon) \to 0$。例如，对于任意整数 $k \geq 3$，取

$$\tau(\varepsilon) = \frac{1}{\ln_k(1/\varepsilon)}, \qquad \ln_1 = \ln, \quad \ln_{j+1} = \ln\circ\ln_j,$$

即可得到估计

$$\|\ln\alpha - \ln\tilde{\alpha}\|_{C^{0,r}(M_{\tau(\varepsilon)})} \lesssim \big(\ln_k(1/\varepsilon)\big)^2\,\exp\Big(-\frac{(1-r)\theta}{n}\frac{\ln\ln(1/\varepsilon)}{\ln_k(1/\varepsilon)}\Big), \qquad \varepsilon\to 0.$$

这类界严格强于推论 *6.1* 中的稳定性速率，但仍弱于 $\ln(1/\varepsilon)$ 的任何固定负次幂。此外，在约束 $\tau(\varepsilon) \to 0$ 下，$\tau(\varepsilon)$ 并不存在最优选择：通过令 $\tau(\varepsilon)$ 以任意缓慢的速度趋于零，可以获得任意接近对数稳定性的稳定性速率，代价是局部化位置远离禁边界 Γ_0。

关于 Painlevé-Liouville黎曼流形的存在性

Painlevé-Liouville黎曼流形存在的一个关键问题，是针对控制共形因子的椭圆型偏微分方程 (1.15)，是否存在适当选取的边值问题的正解 α。以下将对此进行讨论：

命题 A.1. 假设 $\phi_1 + \phi_2 \in C^{k-2}(M)$ 满足 $k \geq 2$, $\phi_1 + \phi_2 > 0$ 于 M, $\eta \in H^{k-\frac{1}{2}}(\partial M)$，且 $\eta > 0$ 于 ∂M。那么边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{g_0} w + (\phi_1+\phi_2)w = 0 & on\ M \\ w = \eta & on\ \partial M \end{cases} \tag{A.27}$$

有解 $w \in H^k(M)$。特别地，若 $k = 2 + \frac{n}{2}$，则 $w \in C^2(M)$；若 $k = 2 + r + \frac{n}{2}$，则 $w \in C^{2,r}(M)$。

证明。设 $\overline{\eta} \in H^k(M)$ 满足 $\eta|_{\partial M} = \overline{\eta}$，并设 $v = w - \eta$。那么，令

$$f = \Delta_{g_0}\overline{\eta} - (\phi_1 + \phi_2)\overline{\eta}\,,$$

边值问题 (A.27) 变为

$$\begin{cases} -\Delta_{g_0} v + (\phi_1 + \phi_2)v = f & \text{on } M \\ v = 0 & \text{on } \partial M \end{cases} \tag{A.28}$$

我们的正性假设 $\phi_1 + \phi_2 > 0$ 意味着 $0 \notin \sigma(-\Delta_{g_0} + (\phi_1 + \phi_2))$，因此 (A.28) 有唯一解，给出如下

$$v = (-\Delta_{g_0} v + (\phi_1 + \phi_2))^{-1} f\,,$$

其中 $(-\Delta_{g_0} v + (\phi_1 + \phi_2))^{-1}$：$H^s(M) \to H^{s+2}(M)$。于是，我们的假设 $\phi_1 + \phi_2 \in C^{k-2}(M)$ 意味着 $f \in H^{k-2}(M)$；结合 $\eta \in H^{k-\frac{1}{2}}(\partial M)$ 可得 $v \in H^k(M)$，因此 $w \in H^k(M)$。利用索伯列夫嵌入

$$H^k(M) \subset C^{p,r}(M)\,, \quad p + r = k - \frac{n}{2}\,,$$

我们可知，当 $k = 2 + \frac{n}{2}$ 时存在解 $w \in C^2(M)$，而当 $k = 2 + r + \frac{n}{2}$ 时存在解 $w \in C^{2,\,r}(M)$。最后，利用带边界紧流形上椭圆算子的强最大值原理（[1], & 8），我们知道 $w = \alpha^{n-2}$ 在 M 上严格为正。 □

B 条件稳定性估计

本节中，我们在赋有光滑黎曼度量的圆柱体 $M = [0,1] \times K$ 上证明一个条件稳定性估计

$$g_1 = c^4\, g_0,$$

其中 $g_0 = dx^2 + g_K$，且 c 是一个正的共形因子。流形 $(M,\ g_1)$ 是 Dos Santos Ferreira、Kenig、Salo 和 Uhlmann [19] 意义下的共形横向各向异性 (CTA) 流形。特别地，CTA 流形具有极限 Carleman 权，这些权在推导 Carleman 估计时起着至关重要的作用。在当前设定下，一个方便的极限 Carleman 权选择为

$$\varphi(x) = x,$$

其中 $x \in [0,1]$ 表示圆柱体 $M = [0,1] \times K$ 上的径向坐标。记

$$\Gamma_0 := \{0\} \times K, \qquad \Gamma_1 := \{1\} \times K,$$

并且，对于任意固定的 $\tau \in (0,\ 1)$,

$$M_\tau := [\tau, 1] \times K.$$

我们引入椭圆算子

$$P := -\Delta_{g_1}.$$

定理 B.1 (柱体上的条件稳定性)。 设 $\tau \in (0,1)$ 为固定值。则存在常数 $C_\tau > 0$ 和 $h_0 > 0$，它们仅取决于 τ 以及 M的几何性质，使得对于所有$0 < h < h_0$ 以及所有 $u \in H^2(M)$,

$$\|u\|_{H^1(M_\tau)} \le C_\tau \Big(e^{(1-\tau)/h} \big(\|Pu\|_{L^2(M)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_1)} + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_1)} \big) + e^{-\tau/(2h)} \, \|u\|_{H^1(M)} \Big). \tag{B.29}$$

这里， ν 表示相对于度量 g_1在 ∂M 上的外向单位法向量场。此外，常数 C_τ 可以选取为使得 $C_\tau \lesssim \tau^{-2}$。

证明。 证明过程相对经典，遵循 Isakov [25, 第 54] 页以及 Bourgeois [7], 的定理 2.3 中所述的策略，并将其适用于柱状几何；同时依赖 Kenig-Salo [27, 命题 4.2] 和 Li-Lü [29, 推论 1.2] 中的边界 Carleman 估计。

步骤 1：化为 在 上的齐次柯西数据 Γ_1。 我们首先将问题化为在 Γ_1上具有齐次柯西数据的情形。

根据圆柱体上的标准椭圆理论，可以通过椭圆边值问题的提升论证完成这一化简；例如参见 Lions–Magenes [30]。更具体地说，存在一个仅依赖于边界数据的函数 $u^* \in H^2(M)$，使得

$$u^*\big|_{\Gamma_1} = u\big|_{\Gamma_1}, \qquad \partial_\nu u^*\big|_{\Gamma_1} = \partial_\nu u\big|_{\Gamma_1},$$

and

$$\|u^*\|_{H^2(M)} \le C \Big(\|u\|_{H^1(\Gamma_1)} + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_1)} \Big). \tag{B.30}$$

因此，将 u 替换为 $u - u^*$ 后，不妨设 u 及其法向导数 $\partial_\nu u$ 在 Γ_1 上均为零。

步骤 2：不可达边界 Γ_0 **附近的截断**。我们选取一个截断函数 $\chi \in C^\infty([0,1])$ 使得

$$\chi \equiv 1 \quad \text{on } [\tfrac{\tau}{2}, 1], \qquad \chi \equiv 0 \quad \text{in a neighborhood of } x = 0, \qquad \operatorname{supp}(\chi') \subset [\tfrac{\tau}{4}, \tfrac{\tau}{2}].$$

然后令

$$v := \chi \, u, \qquad U := e^{\varphi/h} \, v,$$

其中 $\varphi(x) = x$。特别地，由于 $\chi \equiv 1$ 在 M_τ 上，我们有 $v = u$ 在 M_τ 上。此外，根据构造， $U \in H^2(M) \cap H_0^1(M)$。

步骤 3：Carleman 估计。我们首先回顾 Kenig-Salo [27, 命题 4.2] 和 Li-Lü [29, 推论 1.2]中的边界 Carleman 估计。设 (M, g_1) 是一个可容许流形，且 φ 是一个极限 Carleman 权函数。那么存在常数 $C > 0$ 和 $h_0 > 0$ ，使得对于所有 $0 < h < h_0$、 $\delta > 0$ 以及所有 $U \in H^2(M) \cap H_0^1(M)$，都有

$$\begin{aligned} & h^2 \left(\|U\|^2_{L^2(M)} + \|h \nabla_{g_1} U\|^2_{L^2(M)} \right) \\ & \quad + \delta h^3 \|\partial_\nu U\|^2_{L^2(\{\partial_\nu \varphi \le -\delta\})} + h^4 \|\partial_\nu U\|^2_{L^2(\{-\delta < \partial_\nu \varphi < h/3\})} \\ & \le C \Big(\|e^{\varphi/h} (h^2 P)(e^{-\varphi/h} U)\|^2_{L^2(M)} + h^3 \|\partial_\nu U\|^2_{L^2(\{\partial_\nu \varphi \ge h/3\})} \Big). \end{aligned} \tag{B.31}$$

现在，我们将 (B.31) 应用于上面构造的函数 $U = e^{\varphi/h}v$ ，并取线性权$\varphi(x) = x_\circ$ 由于 $g_1 = c^4 g_0$ 且 $c > 0$，我们有

$$\partial_\nu \varphi = -c^{-2} \quad \text{on } \Gamma_0, \qquad \partial_\nu \varphi = \quad c^{-2} \quad \text{on } \Gamma_1,$$

其中， ν 表示关于度量 g_1的 ∂M 上的外向单位法向量场。因此，当 h充分小时，我们得到 Carleman 估计

$$h^2 \|U\|^2_{H^1_{\mathrm{scl}}(M)} \;\le\; C\Big(\|e^{\varphi/h}(h^2 P)(e^{-\varphi/h}U)\|^2_{L^2(M)} + h^3 \|\partial_\nu U\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \Big), \tag{B.32}$$

其中 $\|U\|^2_{H^1_{\mathrm{scl}}(M)} := \|U\|^2_{L^2(M)} + \|h\nabla U\|^2_{L^2(M)}$.

在我们的情形中， u 和 $\partial_\nu u$ 在 Γ_1上消失，并且截断函数的选取满足在 Γ_1的某个邻域内 $v = \chi u = u$ 。因此， $U = e^{\varphi/h}v$也满足$\partial_\nu U|_{\Gamma_1} = 0$，故 (B.32) 中$\Gamma_1$ 上的边界项为零。将 (B.32) 除以 h^2，再开平方，并利用 $\chi \equiv 1$ 在 M_τ上成立，我们得到

$$\|e^{\varphi/h}u\|_{H^1_{\mathrm{scl}}(M_\tau)} \le \|e^{\varphi/h}\chi u\|_{H^1_{\mathrm{scl}}(M)} \le C\, h\, \|e^{\varphi/h}P(\chi u)\|_{L^2(M)}. \tag{B.33}$$

步骤 4：在 M_τ 上进行权比较。 首先，我们对 (B.33) 的左端作下界估计。由于 $\varphi(x) = x$和 $M_\tau = [\tau, 1] \times K$，我们有 $\varphi \ge \tau$在 M_τ上成立，因此 $e^{\varphi/h} \ge e^{\tau/h}$在 M_τ上成立。此外，

$$h\nabla_{g_1}\big(e^{\varphi/h}u\big) = e^{\varphi/h}\big(h\nabla_{g_1}u + (\nabla_{g_1}\varphi)\, u\big).$$

因此，我们得到

$$\|e^{\varphi/h}u\|_{H^1_{\mathrm{scl}}(M_\tau)} \;\ge\; c\, e^{\tau/h}\, \|u\|_{H^1_{\mathrm{scl}}(M_\tau)} \;\ge\; c\, h\, e^{\tau/h}\, \|u\|_{H^1(M_\tau)}, \tag{B.34}$$

其中常数 $c > 0$ 仅依赖于$\|\nabla_{g_1}\varphi\|_{L^\infty(M)}$。

步骤 5：对易子分解。现在我们估计 (B.33) 的右端。利用恒等式

$$P(\chi u) = \chi\, Pu + [P, \chi]u,$$

由三角不等式可得，

$$\|e^{\varphi/h}P(\chi u)\|_{L^2(M)} \le \|e^{\varphi/h}\chi\, Pu\|_{L^2(M)} + \|e^{\varphi/h}[P, \chi]u\|_{L^2(M)}. \tag{B.35}$$

由于 $\chi \le 1$，我们有

$$\|e^{\varphi/h}\chi\, Pu\|_{L^2(M)} \le \|e^{\varphi/h}Pu\|_{L^2(M)} \le e^{1/h}\, \|Pu\|_{L^2(M)}. \tag{B.36}$$

此外， $[P, \chi]$ 是一个支集位于

$$S_\tau := \mathrm{supp}(\chi') \times K \subset [\tfrac{\tau}{4}, \tfrac{\tau}{2}] \times K.$$

由于在 S_τ上， $\varphi(x) \equiv x \le \frac{\tau}{2}$，我们有

$$\|e^{\varphi/h}[P,\chi]u\|_{L^2(M)} \le e^{\tau/(2h)}\|[P,\chi]u\|_{L^2(S_\tau)}. \tag{B.37}$$

此外，存在一个常数 $C_\tau > 0$ （仅取决于 P 和截断函数 χ），使得

$$\|[P,\chi_\tau]u\|_{L^2(S_\tau)} \le C_\tau \|u\|_{H^1(S_\tau)}. \tag{B.38}$$

对于以长度尺度 τ 变化的标准截断函数，有 $C_\tau \lesssim \tau^{-2}$。结合 (B.37)–(B.38) 可得

$$\|e^{\varphi/h}[P,\chi]u\|_{L^2(M)} \le C_\tau\, e^{\tau/(2h)}\, \|u\|_{H^1(S_\tau)}.$$

利用上述估计和 (B.36)，再结合 (B.35)，我们得到

$$\|e^{\varphi/h}P(\chi u)\|_{L^2(M)} \lesssim e^{1/h}\,\|Pu\|_{L^2(M)} + C_\tau\, e^{\tau/(2h)}\,\|u\|_{H^1(S_\tau)}. \tag{B.39}$$

步骤 6：结论。 将下界 (B.34) 与上界 (B.39) 结合，我们得到

$$h\, e^{\tau/h}\,\|u\|_{H^1(M_\tau)} \;\le\; C_\tau\, h\left(e^{1/h}\,\|Pu\|_{L^2(M)} + e^{\tau/(2h)}\,\|u\|_{H^1(S_\tau)}\right).$$

将两边除以 $h\, e^{\tau/h}$，可得

$$\|u\|_{H^1(M_\tau)} \le C_\tau\Big(e^{(1-\tau)/h}\,\|Pu\|_{L^2(M)} + e^{-\tau/(2h)}\,\|u\|_{H^1(S_\tau)}\Big). \tag{B.40}$$

证明至此完成。 □

参考文献

[1] Aubin, T.流形上的非线性分析。*Monge-Ampère* 方程，Springer 1982年，204页。[2] Alessandrini, G., 通过边界测量稳定确定电导率，应用分析 27 (1988年)，第1–3期，153–172页。[3] Alessandrini, G., Gaburro, R.,通过边界测量确定具有特殊各向异性的电导率，SIAM 数学分析杂志 33 (2001年)，第1期，153–171页。[4] Alessandrini, G., Gaburro, R., 局部 *Calderón* 问题与边界处电导率的确定，Comm. Partial Differential Equations 34 (2009年)，第7–9期，918–936页。[5] Alessandrini, G., 逆边值问题中不稳定性的例子，《逆问题》13 (1997年)，第4期，887–897页。[6] Alessandrini, G., 逆电导率问题中的稳定性开放问题，逆问题与病态问题杂志 15 (2007年)，第5期，451–460页。

[7] Bourgeois, L., 关于适定性不良的椭圆柯西问题的稳定性与正则化：以 $C^{1,\,1}$ 域为例，ESAIM，数学建模与数值分析 44 (2010)，第4期，715–735页。[8] Caro, P., Dos Santos Ferreira, D., Ruiz, A., 带部分数据的 *Calderón* 问题的稳定性估计，微分方程杂志 260 (2016)，第3期，2457–2489页。[9] Caro, P., García, A., Reyes, J.,较低正则性电导率下 *Calderón* 问题的稳定性，微分方程杂志 254 (2013)，第2期，469–492页。[10] Caro, P., Salo, M., 可容许几何中的 *Calderón* 问题的稳定性，《逆问题成像》8 (2014)，第4期，939–957页。[11] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 在不相交集合上测量数据的各向异性 *Calderón* 问题的非唯一性结果，格勒诺布尔傅里叶研究所年刊 69 (2019)，第1期，119–170页。[12] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 关于带不相交集合数据的各向异性 *Calderón* 问题非唯一性背后的隐藏机制，(2017)，亨利·庞加莱年刊 20 (2019)，第3期，859–887页。[13] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 带不相交数据的各向异性 *Calderón* 问题非唯一性结果综述，哈佛 CMSA 数学丛书，第2卷：几何与应用数学中的非线性分析，T. Collins 和 S.-T. Yau 编，(2018)。[14] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., *Painlevé* 度量及其共形变形的 *Francois* 可分性与对称算子，SIGMA 对称性、可积性、几何方法与应用 15 (2019)，论文编号069，42页。[15] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 带部分数据的各向异性 *Calderón* 问题的非唯一性，数学论坛：Sigma 8 (2020)，论文编号e7，17页。[16] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 扭曲乘积黎曼流形上的反斯捷克洛夫问题的稳定性，几何分析杂志 31 (2021)，第2期，1821–1854页。[17] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 径向薛定谔算子的反斯捷克洛夫问题与 *Calderón* 问题的局部 *Hölder* 稳定性及定量共振，亨利·庞加莱年刊 25 (2024)，第8期，3805–3830页。[18] Daudé T., Kamran N., Nicoleau F., 扭曲乘积流形上逆各向异性 *Calderón* 问题的稳定性，编写中 (2026)。[19] Dos Santos Ferreira, D., Kenig, C., Salo, Mi., Uhlmann, G., 极限 *Carleman* 权与各向异性逆问题，《数学发明》178 (2009年)，第1期，119–171页。

[20]Dos Santos Ferreira, D., Kurylev, Y., Lassas, M., Salo, M., 横向各向异性几何中的 *Calderón*问题, 欧洲数学会杂志 (JEMS) 18 (2016), no. 11, 2579- 2626.[21] Freiling G., Yurko V., 反斯图姆-刘维尔问题及其应用, Nova Science Publishers, Inc., 纽约州亨廷顿, 2001年. x+356pp[22] Gendron, G.一类空心球中反斯捷克洛夫问题的稳定性估计, 渐近分析 126 (2022), no. 3-4, 323-377.[23] Guillarmou, C., 具有双曲捕获集的流形的镜像刚性, 美国数学会杂志 30 (2017), no. 2, 561-599.[24] Heck, H., Wang, J.-N., 利用部分测量获得反边界值问题的最优稳定性估计, 的里雅斯特大学数学研究所学报 48 (2016), 369-383.[25] Isakov V., 偏微分方程反问题, 应用数学科学丛书,**127**, Springer, 纽约 (2006).[26] Kang, H., Yun, K.,通过局部狄利克雷到诺伊曼算子确定电导率和黎曼度量的边界, SIAM 数学分析杂志 34 (2002), no. 3, 719-735.[27] Kenig C., Salo M, 流形上具有部分数据的 *Calderón*问题及其应用, 分析与偏微分方程 **6**, no. 8, (2013), 2003-2048.[28] Koch, H., Rüland, A.,Salo, M., 反问题中的不稳定机制, Ars Inven. Anal., 2021, no. 7, 93, 2769-8505.[29] Li, Z., Lü, Q.,极限权下二阶椭圆算子的 *Carleman* 估计：一种初等方法, 中国科学：数学, 69 (2026), 251–268.[30]Lions, J.-L., Magenes, E., 非齐次边界值问题及其应用。第一卷, 施普林格出版社, 柏林–海德堡–纽约, 1972.[31] Mandache, N.,薛定谔方程反问题中的指数不稳定性, 《逆问题》17 (2001), no. 5, 1435-1444.[32] Marchenko, V.A. 斯图姆-刘维尔算子及其应用, 修订版。AMS Chelsea Publishing, 罗得岛州普罗维登斯, 2011. xiv+396pp.[33] Novikov, R. G., *Gel'fand-Calderón*反问题的新全局稳定性估计, 《逆问题》27 (2011), no. 1, 015001, 21 pp[34] Paternain, G., Salo. Uhlmann, G., Zhou, H., 带矩阵权的测地线*X*射线变换, 美国数学杂志 141 (2019), no. 6, 1707-1750.[35] Sharafutdinov, V. A.,张量场积分几何, VSP, 乌得勒支 (1994).

[36] Teschl G., 量子力学中的数学方法, 数学研究生丛书第 99 卷, 美国数学学会 罗得岛州普罗维登斯, (2009 年).

[37] Uhlmann G.，电阻抗断层成像与*Calderón*问题，《逆问题》**25**，（2009年），123011，39页。

[38] Uhlmann G.，反问题：洞察不可见之物，《数学科学通报》**4**（2014），第2期，209–279。

[39] Uhlmann, G., Vasy, A., 局部测地线射线变换的反问题，《数学发明》(2016), 205,83-120。

Université Marie et Louis Pasteur，法国国家科学研究中心，LmB（UMR 6623），F-25000，法国贝桑松。法国国家科学研究中心—蒙特利尔大学 CRM—法国国家科学研究中心电子邮箱：thierry.daude@univ-fcomte.fr

麦吉尔大学数学与统计学系，蒙特利尔，QC，H3A 0B9，加拿大。电子邮箱：niky.kamran@mcgill.ca

Jean Leray 数学实验室，法国国家科学研究中心第 6629 联合研究单位，2 Rue de la Houssinière BP 92208，F-44322 南特 Cedex 03电子邮箱地址：francois.nicoleau@univ-nantes.fr