arXiv:2602.13734v1 [math.CV] 14 Feb 2026

圆环域上柯西变换的 L^2-范数

DAVID KALAJ

摘要。我们计算了柯西变换的精确 L^2 算子范数

$$(C_\Omega f)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{z-w}\,dA(w)$$

在圆环域 $\Omega = A(r,R) = \{r < |z| < R\}$ 上。利用旋转对称性和傅里叶模态分解，我们将问题化约为一维加权哈代算子，并得到

$$\|C_{A(r,R)}\|_{L^2\to L^2} = \frac{2}{\sqrt{\mu_1^{ND}(r,R)}},$$

其中，$\mu_1^{ND}(r,R)$ 是区域 $A(r,R)$ 上拉普拉斯算子的第一特征值，内边界满足诺伊曼条件，外边界满足狄利克雷条件。极值函数可用贝塞尔函数明确描述。

1. Introduction

平面区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的柯西变换,

$$(C_\Omega f)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{z-w}\,dA(w),$$

是复分析和椭圆型偏微分方程中的一个基本算子。它为$\bar{\partial}$方程提供了一个典范解算子,

$$\bar{\partial}\,(C_\Omega f) = f \qquad \text{in } \Omega$$

（在分布意义下成立；当 f 足够光滑时，逐点成立）。因此，算子范数$\|C_\Omega\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)}$的锐界与定量 ∂ 估计以及相关椭圆型边值问题的谱数据密切相关。

对于边界光滑的连通区域，有如下谱下界

$$\|C_\Omega\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(\Omega)}},$$

其中，$\lambda_1(\Omega)$表示Ω上的第一狄利克雷特征值；参见 [2]。更确切地说，该估计可等价地表示为

命题 1（柯西变换的范数估计）。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界光滑的区域。那么

$$\left\|\frac{C_\Omega^* C_\Omega}{4}\right\| = \frac{1}{4}\|C_\Omega\|^2 \geq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)},$$

wh其中，$\lambda_1(\Omega)$ 是区域Ω中边值问题(1.2)的最小正特征值 .

对于单位圆盘 $D = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}$，Anderson 和 Hinkkanen 计算出了精确的 L^2-算子范数。若 $j_{0,1}$ 表示贝塞尔函数 J_0 的最小正零点，则

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} = \frac{2}{j_{0,1}}, \qquad \text{equivalently} \qquad \frac{1}{4}\|C_D\|^2 = \frac{1}{j_{0,1}^2}.$$

由于 $\lambda_1(D) = j_{0,1}^2$，这表明在圆盘情形下等号成立:

$$\frac{1}{4}\|C_D\|^2 = \frac{1}{\lambda_1(D)}.$$

2020 数学主题分类。 主要分类 47B38、35J25；次要分类 42B20、31B10、30E20、35P15 .

有关最佳常数和显式极值函数，请参阅 [1]。相比之下，对于多连通域，额外的全纯分量可能会影响最佳性。

本文 中，我们计算了当 Ω 为圆环域时 L^2-算子范数 C_Ω 的精确值

$$A(r,R)=\{z\in\mathbb{C}:\ r<|z|<R\}.$$

我们的主要结果表明，该范数等于拉普拉斯算子的第一混合特征值（在 $|z|=r$ 上满足诺伊曼边界条件，在 $|z|=R$ 上满足狄利克雷边界条件）。

定理 2（主要结果）。 设 $0<r<R$。那么

$$\|C_{A(r,R)}\|_{L^2\to L^2}=\frac{2}{\sqrt{\mu_1^{ND}(r,R)}},$$

其中 $\mu_1^{ND}(r,R)$ 是下列问题的第一特征值

$$-\Delta U=\mu U\ in\ A(r,R),\qquad \partial_\nu U=0\ on\ |z|=r,\qquad U=0\ on\ |z|=R.$$

等价地，$\mu_1^{ND}(r,\ R)=\kappa_1^2$，其中 κ_1 是贝塞尔行列式的最小正根（见定理 7）。

该证明利用了旋转对称性：傅里叶分解将 $C_{A(r,R)}$ 化为一族作用于径向剖面的一维加权哈代型算子。随后，通过变分论证得到一个 Sturm–Liouville 问题，其第一特征值决定了精确的算子范数；通过显式求解径向特征值方程可得到贝塞尔行列式。极值函数由相应的混合特征函数给出，揭示了单连通区域与二连通域之间的结构性区别。

1.1. 背景与相关工作。柯西变换及相关算子的范数界和谱性质已从多个角度得到研究。有界区域上的映射性质由 [1], 率先展开，而势论积分算子的谱方法则由 [2]建立。精确的 L^2 估计及其与谱数据的关系见于 [3] 以及 Dostanić [4, 5, 6]的后续工作。与泊松型问题和定量偏微分方程估计的联系在 [7, 8], 中进行了研究；此外， [12] 中还给出了关于柯西型算子的进一步范数估计，并在 [9] 中讨论了圆盘上的精确 L^p 理论。关于伯格曼型空间和二连通几何中的相关谱问题，可参见 [10, 11]。

2. The proof of main results

引理 3（对单个傅里叶模态的精确作用）。 令 $A=A(r,\ R)=\{z:\ r<|z|<R\}$ 并且

$$(C_Af)(z)=\frac{1}{\pi}\int_A\frac{f(w)}{z-w}\,dA(w).$$

固定 $m\in\mathbb{Z}$，并记 $w=\rho e^{i\phi}$, $z=\rho_0e^{i\theta}$。若

$$f(w)=g(\rho)e^{im\phi},$$

则 C_Af 属于（$m-1$）阶角向模态，且其表达式为

$$(C_Af)(\rho_0e^{i\theta})=\begin{cases}-2\,\rho_0^{m-1}e^{i(m-1)\theta}\displaystyle\int_{\rho_0}^{R}g(\rho)\,\rho^{1-m}\,d\rho, & m\geq 1,\\[2mm] \ \ 2\,\rho_0^{m-1}e^{i(m-1)\theta}\displaystyle\int_{r}^{\rho_0}g(\rho)\,\rho^{1-m}\,d\rho, & m\leq 0.\end{cases}$$

证明。 使用 $(z-w)^{-1}$ 的几何级数展开：

$$\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{w}{z}\Big)^n,\quad |w|<|z|,\qquad \frac{1}{z-w}=-\frac{1}{w}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{z}{w}\Big)^n,\quad |w|>|z|.$$

代入 $w=\rho e^{i\phi}$、 $z=\rho_0e^{i\theta}$ 并乘以 $e^{im\phi}$。对 ϕ 在 $[0,2\pi]$ 上积分，会消去所有项，仅留下角频率为 0 的唯一一项；当 $n=-m$ 且属于情形 $|w|<|z|$ （因此 $m\leq 0$）时，才会出现这一项；而在情形 $|w|>|z|$ 中，仅当 $n=m-1$ （因此 $m\geq 1$）时才会出现。对剩余部分作径向积分后，即得所述公式。□

引理4 (关于 $m \geq 1$ 的加权 Hardy 约化**)**。 固定 $m \geq 1$ 并令

$$(T_m g)(\rho) := -2\,\rho^{m-1} \int_\rho^R g(t)\, t^{1-m}\, dt, \qquad r < \rho < R.$$

那么，当 H_m、H_{m-1} 都配备 L^2（A） 范数时， $\|C_A\|_{H_m \to H_{m-1}} = \|T_m\|$。此外，若 F（ρ）：$=$ $\int_\rho^R g$（t） $t^{1-m}\, dt$ （因此 F（R） $= 0$ 且 $F\prime$（ρ） $= -g$（ρ） ρ^{1-m}），则

$$\frac{\|T_m g\|^2_{L^2((r,R),\rho\, d\rho)}}{\|g\|^2_{L^2((r,R),\rho\, d\rho)}} = \frac{4\int_r^R |F(\rho)|^2\, \rho^{2m-1}\, d\rho}{\int_r^R |F'(\rho)|^2\, \rho^{2m-1}\, d\rho}.$$

因此

$$\|T_m\| = \frac{2}{\sqrt{\mu_m}},$$

其中 μ_m 是.....的第一特征值

$$-(\rho^{2m-1}F'(\rho))' = \mu\, \rho^{2m-1} F(\rho), \quad r < \rho < R, \qquad F'(r) = 0, \quad F(R) = 0. \tag{1}$$

证明。 引理 3 中的模态公式表明，将 C_A 限制在模态 m 上后，其在径向剖面上的作用恰为 T_m。 g（ρ）的 L^2（A）范数为 $2\pi \int_r^R |g$（ρ）$|^2 \rho\, d\rho$，输出模态也同理，因此算子范数可化简为 $\|T_m\|$。 F 中的 Rayleigh 商可由 $T_m g = -2\rho^{m-1}F$ 和 $g = -\rho^{m-1}F'$ 直接得到，而欧拉–拉格朗日方程给出带自然边界条件 F'（r） $= 0$ 的方程 **(1)**。最后一步的细节如下:

令 $w(\rho) := \rho^{2m-1}$。由上一步可得 Rayleigh 商

$$\frac{\|T_m g\|^2_{L^2((r,R),\rho\, d\rho)}}{\|g\|^2_{L^2((r,R),\rho\, d\rho)}} = \frac{4\int_r^R |F(\rho)|^2\, w(\rho)\, d\rho}{\int_r^R |F'(\rho)|^2\, w(\rho)\, d\rho}.$$

因此，使左侧最大化等价于使下式最小化

$$\mathcal{R}[F] := \frac{\int_r^R |F'(\rho)|^2\, w(\rho)\, d\rho}{\int_r^R |F(\rho)|^2\, w(\rho)\, d\rho} \quad \text{over } F \not\equiv 0 \text{ with } F(R) = 0.$$

引入拉格朗日乘子 μ，并考虑

$$\mathcal{J}[F] := \int_r^R \Big(|F'(\rho)|^2 - \mu\, |F(\rho)|^2 \Big)\, w(\rho)\, d\rho, \qquad F(R) = 0.$$

取一个变分 $F_\varepsilon = F + \varepsilon\varphi$，满足 $\varphi(R) = 0$。则

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{J}[F_\varepsilon] = 2\int_r^R \big(F'(\rho)\varphi'(\rho) - \mu F(\rho)\varphi(\rho) \big)\, w(\rho)\, d\rho.$$

分部积分可得

$$2\int_r^R F'\varphi'\, w\, d\rho = 2\Big[w(\rho)F'(\rho)\varphi(\rho) \Big]_r^R - 2\int_r^R (w(\rho)F'(\rho))'\, \varphi(\rho)\, d\rho,$$

因此

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{J}[F_\varepsilon] = 2\Big[w(\rho)F'(\rho)\varphi(\rho) \Big]_r^R - 2\int_r^R \Big((wF')' + \mu w F \Big)\varphi(\rho)\, d\rho.$$

由于 $\varphi(R) = 0$，在 R 处的边界项消失。在 $\rho = r$ 处，值 $F(r)$ 是自由的，因此 $\varphi(r)$ 是任意的；所以剩余的边界项要求

$$w(r)F'(r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F'(r) = 0 \qquad (\text{since } w(r) = r^{2m-1} > 0).$$

由于 φ 在 (r, R) 中是任意的，积分项给出欧拉–拉格朗日方程

$$(w(\rho)F'(\rho))' + \mu\, w(\rho)F(\rho) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -(\rho^{2m-1}F'(\rho))' = \mu\, \rho^{2m-1} F(\rho),$$

以及边界条件 $F'(r) = 0$和 $F(R) = 0$。这正是斯图姆–刘维尔问题 **(1)**。

□

贝塞尔函数和特征方程。符号 J_k 和 Y_k 表示第一类和第二类（诺伊曼函数） k阶贝塞尔函数。它们构成贝塞尔微分方程的一组线性无关的基本解

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\big(x^2-k^2\big)y(x)=0.$$

函数 J_k 是在 $x=0$处有限的解，而 Y_k 是第二个线性无关解，当 $k\geq 0$时，它在 $x=0$ 处奇异。在当前的环域问题中，分离变量法将拉普拉斯算子的混合边值特征值问题化为径向贝塞尔常微分方程。在$|z|=r$ 处施加诺伊曼条件，并在 $|z|=R$ 处施加狄利克雷条件，当且仅当某个贝塞尔行列式为零时，才存在非平凡解；对于主模态，其形式为

$$J_1(\kappa r)Y_0(\kappa R)-Y_1(\kappa r)J_0(\kappa R)=0,$$

并且t 最小正根 κ 通过 $\|C_{A(r,R)}\|_{2\to 2}=2$/确定最佳范数常数 κ.

引理5 ($m\geq 1$的贝塞尔形式)。 令 $m\geq 1$ 并记$\mu_m=\kappa_{m,\,1}^2$ 其中$\kappa_{m,\,1}>0$。则$\kappa_{m,\,1}$ 是以下方程的最小正解

$$J_m(\kappa r)\,Y_{m-1}(\kappa R)-Y_m(\kappa r)\,J_{m-1}(\kappa R)=0, \tag{2}$$

and

$$\|C_A\|_{H_m\to H_{m-1}}=\|T_m\|=\frac{2}{\kappa_{m,1}}.$$

特别地，对于 $m=1$ ，可得(2) 如下

$$J_1(\kappa r)\,Y_0(\kappa R)-Y_1(\kappa r)\,J_0(\kappa R)=0.$$

证明。 令 $U(\rho):=\rho^{m-1}F(\rho)$。于是 (1) 等价于贝塞尔型方程

$$U''(\rho)+\frac{1}{\rho}U'(\rho)+\Big(\kappa^2-\frac{(m-1)^2}{\rho^2}\Big)U(\rho)=0,$$

因此 $U(\rho)=aJ_{m-1}(\kappa\rho)+bY_{m-1}(\kappa\rho)$。边界条件 $F(R)=0$变为 $U(R)=0$。条件$F'(r)=0$变为 $rU'(r)=(m-1)U(r)$，根据标准恒等式 $xJ'_{m-1}(x)-(m-1)J_{m-1}(x)=-xJ_m(x)$（以及关于 Y 的类似恒等式），这等价于 $aJ_m(\kappa r)+bY_m(\kappa r)=0$。存在非平凡的 (a,b)，可得 (2)。 最后，由引理4可得$\|T_m\|=2/\sqrt{\mu_m}=2/\kappa_m$,1。□

引理6。对于 $m\geq 1$，令 μ_m 为 (1) 的第一特征值。那么 $\mu_1\leq\mu_m$ 对所有 $m\geq 1$ 均成立，因此 e

$$\sup_{m\geq 1}\|C_A\|_{H_m\to H_{m-1}}=\|C_A\|_{H_1\to H_0}=\frac{2}{\sqrt{\mu_1}}=\frac{2}{\kappa_{1,1}}.$$

证明。利用 $U(\rho)=\rho^{m-1}F(\rho)$ 重写引理4中的商：直接计算可得 s

$$\int_r^R|F'(\rho)|^2\rho^{2m-1}\,d\rho=\int_r^R\Big(|U'(\rho)|^2\rho+\frac{(m-1)^2}{\rho}|U(\rho)|^2\Big)\,d\rho+(m-1)|U(r)|^2,$$

而

$$\int_r^R|F(\rho)|^2\rho^{2m-1}\,d\rho=\int_r^R|U(\rho)|^2\rho\,d\rho.$$

因此， μ_m 具有如下变分刻画

$$\mu_m=\inf_{\substack{U\in H^1(r,R),\\ U(R)=0,\ U\neq 0}}\frac{\displaystyle\int_r^R\Big(|U'|^2\rho+\frac{(m-1)^2}{\rho}|U|^2\Big)\,d\rho+(m-1)|U(r)|^2}{\displaystyle\int_r^R|U|^2\rho\,d\rho}.$$

对于 $m=1$，分子变为 $\int_r^R|U'|^2\rho\,d\rho$（没有势项，也没有边界项）。因此，对于每个可容许的 U，

$$\frac{\int_r^R\Big(|U'|^2\rho+\frac{(m-1)^2}{\rho}|U|^2\Big)\,d\rho+(m-1)|U(r)|^2}{\int_r^R|U|^2\rho\,d\rho}\ \geq\ \frac{\int_r^R|U'|^2\rho\,d\rho}{\int_r^R|U|^2\rho\,d\rho}.$$

对同一类 $\{U\in H^1:\,U(R)=0\}$ 取下确界，得到 $\mu_m\geq\mu_1$。 □

定理 7（圆环域上的精确 L^2-范数）。 设 $0 < r < R$, $A = A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$，且

$$(C_A f)(z) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{f(w)}{z - w}\, dA(w), \qquad f \in L^2(A).$$

Then

$$\|C_A\|_{L^2(A)\to L^2(A)} = \frac{2}{\kappa_1},$$

其中， $\kappa_1 > 0$ 是下式的最小正解

$$J_1(\kappa r)\, Y_0(\kappa R) - Y_1(\kappa r)\, J_0(\kappa R) = 0. \tag{3}$$

证明。 由引理3和引理4,

$$\|C_A\| = \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|C_A\|_{H_m\to H_{m-1}}, \qquad \|C_A\|_{H_m\to H_{m-1}} = \begin{cases} \|T_m\|, & m \geq 1, \\ \|T_{1-m}\|, & m \leq 0, \end{cases}$$

且对于 $m \geq 1$,

$$\|T_m\| = \frac{2}{\sqrt{\mu_m}},$$

其中 μ_m 是式(1)的第一特征值。引理6给出 $\mu_m \geq \mu_1$ 对所有 $m \geq 1$均成立，因此上确界在 $m = 1$ 处取得，且

$$\|C_A\| = \|T_1\| = \frac{2}{\sqrt{\mu_1}}.$$

最后，引理5（取 $m = 1$）得出 $\mu_1 = \kappa_1^2$，其中 κ_1 是式(3)的最小正根。因此$\|C_A\| = 2/\kappa_1$。

此外，若 $F > 0$是(1)关于 $m = 1$的第一特征函数，且 $f(\rho e^{i\theta}) = -F\prime(\rho)e^{i\theta}$，则引理 3 给出

$$(C_A f)(\rho e^{i\theta}) = 2F(\rho),$$

因此 f 是一个极值函数，详见下文注记。 □

注记 8（一个显式极值函数与导数计算）。 设 $\kappa_1 > 0$ 为(3)的最小正解。定义

$$F(\rho) := c\Big(Y_0(\kappa_1 R)\, J_0(\kappa_1 \rho) - J_0(\kappa_1 R)\, Y_0(\kappa_1 \rho)\Big), \qquad r < \rho < R,$$

其中选取 $c \neq 0$，使得 $F > 0$在(r, R)上成立。于是由构造可知 $F(R) = 0$成立。此外，利用恒等式 $J_0'(x) = -J_1(x)$与 $Y\prime_0(x) = -Y_1(x)$，并结合链式法则，我们计算

$$\begin{aligned} F'(\rho) &= c\Big(Y_0(\kappa_1 R)\, \frac{d}{d\rho} J_0(\kappa_1 \rho) - J_0(\kappa_1 R)\, \frac{d}{d\rho} Y_0(\kappa_1 \rho)\Big) \\ &= c\,\kappa_1 \Big(Y_0(\kappa_1 R)\, J_0'(\kappa_1 \rho) - J_0(\kappa_1 R)\, Y_0'(\kappa_1 \rho)\Big) \\ &= c\,\kappa_1 \Big(J_0(\kappa_1 R)\, Y_1(\kappa_1 \rho) - Y_0(\kappa_1 R)\, J_1(\kappa_1 \rho)\Big). \end{aligned}$$

特别地,

$$F'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad J_1(\kappa_1 r)\, Y_0(\kappa_1 R) - Y_1(\kappa_1 r)\, J_0(\kappa_1 R) = 0,$$

因此 κ_1恰为使边界条件 $F'(r) = 0$与 $F(R) = 0$得以满足的参数。从而,

$$f(\rho e^{i\theta}) = -F'(\rho)\, e^{i\theta}$$

是定理 7 中 $\|C_A\|$的极值函数。

注 9（关于$2/\kappa_{1,\ 1}(r)$对 $R = 1$ 的图以及 R中的缩放）。 定理 7 给出 s

$$\|C_{A(r,R)}\|_{2\to 2} = \frac{2}{\kappa_{1,1}(r, R)},$$

其中 $\kappa_{1,1}(r, R)$ 是超越贝塞尔行列式 (3) 的最小正根。一般而言，$\kappa_{1,1}(r, R)$ 无法用初等函数表示成闭式表达式，因此无法得到该函数的显式公式

。不过，对于每个固定的 $r \in (0,1)$，可以通过求解数值计算 $\kappa_{1,1}(r,1)$

$$D_r(\kappa) := J_1(\kappa r)Y_0(\kappa) - Y_1(\kappa r)J_0(\kappa) = 0$$

求其最小正根（例如使用二分法、牛顿法或标准特殊函数求解器）。由此得到.....的图

$$r \longmapsto \frac{2}{\kappa_{1,1}(r,1)}, \qquad 0 < r < 1 (\text{see Figure 1}).$$

只需绘制 $R = 1$ 的情形，因为该问题具有简单的缩放性质。事实上，在伸缩变换 $z = R\zeta$ 下，环域 $A(r, R)$ 被映射到 $A(r/R, 1)$，变量的直接替换可得

$$\|C_{A(r,R)}\|_{2\to 2} = R\,\|C_{A(r/R,1)}\|_{2\to 2}.$$

等价地，记 $a = r/R \in (0,1)$，并令 $x = \kappa R$ 取自 (3)，可见该根仅取决于比值 a:

$$\kappa_{1,1}(r,R) = \frac{1}{R}\,\kappa_{1,1}(a,1), \qquad a = \frac{r}{R}.$$

因此， $R = 1$ 对应的图具有普适性；其他所有半径 R 均可通过上述缩放得到。在极限情形 $r = 0$ 和 $R = 1$ 下，环域 $A(r, R)$ 变为单位圆盘。此时，$\kappa_{1,1}(0,1)$ 与 J_0 的最小正零点重合。将该零点记为 $\alpha = j_{0,1} \approx 2.4048255577$，则有

$$\kappa_{1,1}(0,1) = \alpha, \qquad \text{and hence} \qquad \frac{2}{\kappa_{1,1}(0,1)} = \frac{2}{\alpha} \approx 0.8319.$$

因此,

$$\|C_{\mathbb{D}}\|_{L^2(\mathbb{D})\to L^2(\mathbb{D})} = \frac{2}{j_{0,1}},$$

一个值已由 Anderson 和 Hinkkanen 得到 [1]，（比较图1和图2）。

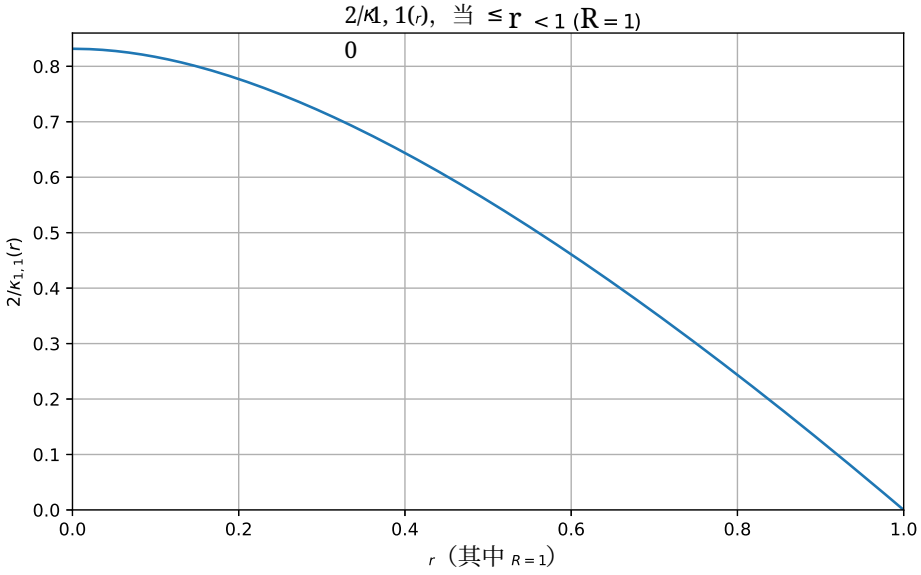


图1. $2/\kappa_{1,1}(r)$，其中 $R = 1, 0 \le r < 1$。

3. 狄利克雷–柯西算子及其精确 L^2 范数

固定一个内外半径为 $0 < r < R$ 的环域。对于 $g \in L^2(A)$，令 u 为零狄利克雷泊松问题的（弱）解

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{in } A, \\ u = 0 & \text{on } \partial A, \end{cases} \tag{4}$$

并定义狄利克雷–柯西算子如下

$$\mathcal{C}_A[g](z) := \partial_z u(z), \qquad \partial_z = \tfrac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y). \tag{5}$$

等价地，用方程 (4) 的格林函数 $G_A(\cdot\ \tau)$ 表示，

$$u(z) = \int_A G_A(z,\tau)\, g(\tau)\, dA(\tau), \qquad \mathcal{C}_A[g](z) = \int_A \partial_z G_A(z,\tau)\, g(\tau)\, dA(\tau). \tag{6}$$

令 $\lambda_1(A)$ 为 $-\Delta$ 在 A 上的第一狄利克雷特征值，并设

$$k_1 := \sqrt{\lambda_1(A)}. \tag{7}$$

在平面情形中， k_1 可表征为贝塞尔交叉乘积方程的最小正根

$$J_0(kr)\, Y_0(kR) - J_0(kR)\, Y_0(kr) = 0. \tag{8}$$

定理 10 ([8])。 狄利克雷–柯西算子(5) 在 $L^2(A)$ 上有界延拓，并满足锐估计

$$\|\mathcal{C}_A\|_{L^2(A)\to L^2(A)} = \frac{2}{k_1}. \tag{9}$$

注 11（归一化）。 [8] 中给出的常数写作 $\frac{1}{\sqrt{2}\,k_1}$。这是归一化造成的影响：在复数记号下，有

$$\Delta = 4\,\partial_z \partial_{\bar z},$$

因此，将泊松方程写为 $u_{z\bar z} = g$ 对应于 $\Delta u = 4g$。此外，有些作者将变换定义为 $\partial_z u$ ，另一些则采用 $2\,\partial_z u$（或估计 ∇u 而非 $\partial_z u$），这会使算子范数按固定因子缩放。在这些约定之间进行转换后，最佳常数是一致的。

当 $R = 1$ 时，参数 $k_1 = k_1(r)$ 是下式的最小正解

$$J_0(k)\, Y_0(rk) - Y_0(k)\, J_0(rk) = 0,$$

因此，绘制 $2/k_1(r)$（其中 $r \in (0,\ 1)$），即可得到锐范数 (9) 的图。

致谢

作者衷心感谢黑山教育、科学与创新部通过以下项目提供的经费支持：“数学分析、优化与机器学习”以及“非欧机器学习的复分析与几何方法：理论与应用。”作者还感谢 D. Khavinson 和 P. Melentijević 提供的宝贵意见与鼓励。

利益冲突。作者声明不存在利益冲突。
数据可用性。由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

伦理审批。不适用。
参与同意。不适用。
发表同意。不适用。

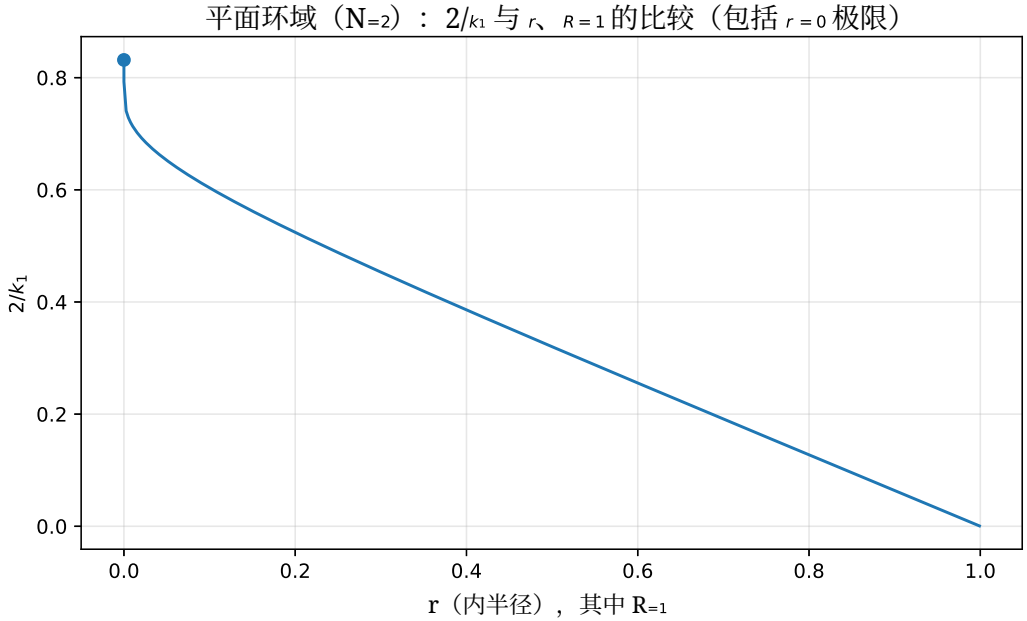


图 2. $R = 1$ 和 $0 < r < 1$对应的归一化量 $2/k_1(r)$ 的图像。

参考文献

[1] J. M. Anderson 和 A. Hinkkanen，有界区域上的柯西变换，《美国数学会会刊》107 (1989)，第 1 期，179–185。DOI: 10.1090/S0002-9939-1989-0972226-5.[2] J. M. Anderson、D. Khavinson 和 V. Lomonosov，位势论中某些积分算子的谱性质，《牛津数学季刊》(2) 43 (1992)，第 4 期，387–407。DOI: 10.1093/qmathj/43.4.387。[3] J. Arazy 和 D. Khavinson， $L^2(\Omega)$ 中柯西变换的谱估计，《积分方程与算子理论》15 (1992)，901–919。DOI: 10.1007/BF01203120。[4] M. R. Dostanić，有界区域上的柯西变换的性质，《算子理论杂志》36 (1996)，233–247。[5] M. R. Dostanić，有界区域上柯西算子的谱性质及其与伯格曼投影的乘积，《伦敦数学会会刊》(3) 76 (1998)，第 3 期，667–684。DOI: 10.1112/S0024611598000367。[6] M. R. Dostanić， $L^p(\Omega)$ 上柯西变换的范数估计，《积分方程与算子理论》52 (2005)，465–475。DOI: 10.1007/s00020-002-1290-9.[7] D. Kalaj，柯西变换与泊松方程，《数学进展》231 (2012)，第 1 期，213–242。[8] D. Kalaj，关于与泊松方程相关的一些积分算子，《积分方程与算子理论》72 4, 563 2012 575 ( )，第 – 期。[9] D. Kalaj、P. Melentijević 和 J.-F. Zhu，单位圆盘上柯西变换的 L^p-理论，《泛函分析杂志》282 (2022)，第 4 期，109337。DOI: 10.1016/j.jfa.2021.109337。[10] D. Vujadinović，调和函数伯格曼空间上柯西算子的谱估计，《数学分析与应用杂志》437 (2016)，第 2 期，902–911。DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.01.011。[11] D. Vujadinović，双连通区域上柯西算子及其与伯格曼投影的乘积的谱渐近，《位势分析》62 (2025)，355–375。DOI: 10.1007/s11118-024-10139-3。[12] J.-F. Zhu 和 D. Kalaj，柯西变换及相关算子的范数估计，《泛函分析杂志》279 9, 108726 2020( )，第 . 期。DOI: 10.1016/j.jfa.2020.108726。

黑山大学，自然科学与数学学院，采蒂涅斯基路 b.b.，81000 波德戈里察，黑山电子邮箱地址： davidk@ucg.ac.me