arXiv:2602.13740v1 [math.CV] 14 Feb 2026

内部柯西变换的 L^2 范数：超越第一狄利克雷特征值

DAVID KALAJ

摘要。 我们研究有界平面域 L^2 上的内部柯西变换 C_D 的最佳D 界，并阐明其与狄利克雷谱的联系。我们分析了一种方法：将 D 上的分数阶狄利克雷幂替换为零延拓后的欧几里得傅里叶乘子，并证明这种替换可能改变最佳常数。特别是，我们在单位圆盘上构造了一个明确的端点反例，反驳了 [5]中出现的一个傅里叶加权不等式。这揭示了推导猜想恒等式 $\|C_D\|_{L^2\to L^2} = 2/\sqrt{\lambda_1(D)}$时存在的漏洞。

随后，我们根据一个自然的正势型算子的最大特征值，确定了端点傅里叶权 $|\xi|^{-1}$ 对应的正确最佳常数。最后，我们证明，在第一狄利克雷特征函数上检验 C_D 已经超过谱阈值，因此，对于单连通区域，$\|C_D\|_{L^2\to L^2} > 2/\sqrt{\lambda_1(D)}$；对于圆环域也有 $A(r,\ R)$。我们还证明了一个刚性结果：当且仅当 D 是圆盘时，等号才会在谱值处成立。

1. 引言

设 $D \subset \mathbb{C}$ 为一个有界区域。内部柯西变换

$$(C_D f)(z) := \frac{1}{\pi}\int_D \frac{f(w)}{z-w}\, dA(w), \qquad z \in D, \tag{1}$$

是平面函数论中的基本奇异积分算子，并为 D 上的 $\partial u = f$ 提供一个典范的 L^2–解算子[−]。它也自然地与伯格曼型投影并列出现，并涉及积分算子的谱性质和平滑性质问题（例如参见 [2, 5, 12, 15]）。

一个基本事实是，在 $\mathbb{C}$ 上的整体柯西变换在 $L^2(\mathbb{C})$ 上并不有界，但将其限制在有界区域上时，可能存在最佳的 L^2 界。在开创性工作 [1]，中，Anderson 和 Hinkkanen 考察了单位圆盘 $\mathbb{D}$，并证明：若将 $f \in L^2(\mathbb{D})$ 在 $\mathbb{D}$ 外延拓为零，则 $C_{\mathbb{D}} f \in L^2(\mathbb{D})$，且

$$\|C_{\mathbb{D}} f\|_{L^2(\mathbb{D})} \le \frac{2}{j_{0,1}}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}, \tag{2}$$

其中 $j_{0,\,1}$ 是贝塞尔函数的第一个正零点 J_0；此外，常数 $2/j_{0,\,1}$ 是最佳的。由于$\lambda_1(\mathbb{D}) = j_{0,\,1}^2$ 是圆盘上狄利克雷拉普拉斯算子的特征值，（2）可改写为以下谱恒等式

$$\|C_{\mathbb{D}}\|_{L^2(\mathbb{D})\to L^2(\mathbb{D})} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(\mathbb{D})}}.$$

这一引人注目的公式暗示了一个可能的一般原理： L^2 范数 C_D 可能由第一狄利克雷特征值 $\lambda_1(D)$决定。

在 [5], 中提出了这一原理的一个自然推广：对于具有充分正则边界的有界区域，

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}}. \tag{3}$$

除这一猜想性的最佳常数恒等式之外， [5] 在该课题的谱方面还包含若干有价值的贡献，包括与狄利克雷特征值及其渐近行为相关的结果与估计，并有助于激发人们将奇异积分界与拉普拉斯谱联系起来的进一步兴趣。本文直接受到这一谱观点的启发，我们的目标是精确阐明这一启发式图景中哪些部分可以被严格化。

2020 数学主题分类。 主要分类 47B38、35J25；次要分类 42B20、31B10、30E20、35P15 .

.....中的推理 [5]隐含地使用了这一启发式对应关系

$$(-\Delta_D)^{-\alpha} f \stackrel{?}{=} \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{-2\alpha}\big)\,\mathcal{F}(f\mathbf{1}_D),$$

也就是说，它将 $-\Delta_D$ 的分数阶狄利克雷幂视为欧几里得傅里叶乘子，并将 f 在 D 之外延拓为零。正如本文所阐明的，在缺乏额外结构的情况下，这个傅里叶乘子公式一般不适用于有界区域；依赖该公式可能会导致错误的最佳常数。

我们的证明。 我们的第一项贡献是给出一个明确的端点反例（即使在单位圆盘上也成立），反驳作为（3）证明基础的傅里叶加权不等式；见第 3 节。这准确指出了谱识别失效之处。

我们的第二项贡献是给出傅里叶权 $|\xi|^{-1}$ 在一般情形下的正确最佳常数。我们证明，二次型

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|}\, d\xi$$

由正自伴积分算子支配，而非由 $\lambda_1(D)$ 支配

$$(S_D f)(x) = \int_D \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy,$$

且最佳常数等于 $(2\pi)^{-1}\|S_D\|$；见定理 2。

最后，回到柯西变换本身，我们证明圆盘是唯一能达到谱值 $2/\sqrt{\lambda_1(D)}$ 的区域。更准确地说，对于具有光滑边界的单连通有界域 D 及其第一狄利克雷特征函数 u，我们证明

$$\frac{\|C_D u\|_{L^2(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}} > \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}},$$

从而

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} > \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}} \qquad \text{unless } D \text{ is a disk.}$$

注意，不等式

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}},$$

已在 [1]中得到证明。

等价地，

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}} \quad \Longleftrightarrow \quad D \text{ is a disk.}$$

证明的核心是将 $C_D u$ 正交分解为 L^2–最小 $\bar\partial$–解与一个非平凡的全纯分量，并通过刚性论证证明，只有在圆盘的情形下，全纯分量才恒等于零。

文章结构。 在第 3 节中，我们给出圆盘上的傅里叶加权反例。此外，在同一节中，我们通过算子 S_D 找到了正确的最佳常数。论文的最后一部分，即第 4 节，确立了非圆形区域上柯西变换的严格不等式，并证明了圆盘刚性结论。

2. Background, motivation, and main results

设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个有界区域。我们研究（内部）柯西变换

$$(C_D f)(z) := \frac{1}{\pi}\int_D \frac{f(w)}{z-w}\, \mathrm{d}A(w), \qquad z \in D, \tag{4}$$

最初定义于 $f \in C_0^\infty(D)$ 上。算子 C_D 是一阶复奇异积分，也是 $\bar\partial u = f$ 在 D 上的自然 L^2 解算子，并与 Bergman 型算子和谱问题相关（例如参见 [5, 14, 19]）。

2.1. **有界区域上的傅里叶乘子陷阱。** 中的一个关键步骤是 [5] 将 $f \in L^2(D)$ 零延拓至 $\mathbb{R}^2$，然后将 $-\Delta_D$ 的分数阶狄利克雷幂视为由全空间傅里叶乘子 $|\xi|^{-2\alpha}$给出。这会引出如下类型的二次型：

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^{2\alpha}}\, d\xi, \tag{5}$$

这对应于作用在零延拓上的算子（$-\Delta$）$^{-\alpha}$。然而，（5）一般并不是（$-\Delta_D$）$^{-\alpha}$的狄利克雷二次型。特别是，没有理由期待如下的尖锐界

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^{2\alpha}}\, d\xi \;\le\; \lambda_1(D)^{-\alpha}\, \|f\|^2_{L^2(D)}, \tag{6}$$

其中，$\lambda_1(D)$ 表示第一狄利克雷特征值。

在端点处，$\alpha = \frac{1}{2}$ 这变成了如下（错误的）不等式

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|}\, d\xi \;\le\; \lambda_1(D)^{-1/2}\, \|f\|^2_{L^2(D)}, \tag{7}$$

我们还在单位圆盘上给出了一个明确的反例，针对 [5,引理 2.2] 中所采用的傅里叶加权估计。

受 Anderson–Hinkkanen 关于圆盘的最佳结果启发，文献 [5] 声称，L^2 算子 C_D 的范数恰由 $\lambda_1(D)$ 确定：

定理 1 (声称于 [5]**).** 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为边界分段光滑的有界区域，则 C_D可有界延拓至 $L^2(D)$，且

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}}, \tag{8}$$

其中 $\lambda_1(D) > 0$ 是狄利克雷问题的最小特征值

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad in\ D, \\ u|_{\partial D} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

文献 [5] 中的证明使用了 §2.1中提到的傅里叶加权不等式。由于该不等式并不成立，这一论证无法证明（8）。

3. 对 (6) 在 $\alpha = \frac{1}{2}$ 处的反例，以及 $|\xi|^{-1}$傅里叶权的正确最佳常数

全文中，我们采用傅里叶归一化

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

设 $D = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 1\}$ 为单位圆盘，并令 $f = \mathbf{1}_D$。于是

$$\int_{|x|\le 1} e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-ir|\xi|\cos\theta}\, r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 J_0(r|\xi|)\, r\, \mathrm{d}r = 2\pi\, \frac{J_1(|\xi|)}{|\xi|},$$

因此

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{J_1(|\xi|)}{|\xi|}. \tag{10}$$

写出 $r = |\xi|$ 并使用 $\mathrm{d}\xi = r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2}{|\xi|}\, \mathrm{d}\xi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\left(J_1(r)^2/r^2\right)}{r}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{J_1(r)^2}{r^2}\, \mathrm{d}r. \tag{11}$$

利用经典恒等式

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(r)^2}{r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{4}{3\pi},$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi = \frac{8}{3}. \tag{12}$$

另一方面,

$$\int_D |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = |D| = \pi, \qquad \lambda_1(D) = j_{0,1}^2,$$

so

$$\lambda_1(D)^{-1/2}\int_D |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{j_{0,1}} < \frac{8}{3}. \tag{13}$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi > \lambda_1(D)^{-1/2}\int_D |f(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

且估计 [5, 引理 2。2] 在单位圆盘上对 $\alpha = \frac{1}{2}$ 不成立。

这里， J_k 表示阶数为 k 的第一类贝塞尔函数，其定义为级数

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$j_{0,\ 1}$ 表示 J_0 的第一个正零点，即

$$J_0(j_{0,1}) = 0, \qquad 0 < j_{0,1} < j_{0,2} < \cdots,$$

以及数值上

$$j_{0,1} \approx 2.4048255577.$$

定理 2 (最佳 L^2 常数（对应 $|\xi|^{-1}$ 傅里叶权）。 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 有界，且 $f \in L^2(D)$，并将其延拓为0 于 $\mathbb{R}^2$。定义傅里叶变换为

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

设 $S_D\colon L^2(D) \to L^2(D)$ 为积分算子

$$(S_D f)(x) = \int_D \frac{f(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y, \qquad x \in D.$$

则 S_D 在 $L^2(D)$ 上是正、自伴且紧的，并且对于每个 $f \in L^2(D)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\,\langle S_D f, f\rangle_{L^2(D)}\,. \tag{14}$$

因此，以下表达式中的最佳常数

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi \le C\,\|f\|^2_{L^2(D)} \qquad (f \in L^2(D))$$

is

$$C_{\mathrm{sharp}}(D) = \frac{1}{2\pi}\,\|S_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} = \frac{1}{2\pi}\,\lambda_{\max}(S_D).$$

此外，根据舒尔检验，

$$C_{\mathrm{sharp}}(D) \le \frac{1}{2\pi}\sup_{x\in D}\int_D \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}y.$$

证明。 在上述归一化下，帕塞瓦尔以如下形式成立：$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$，且卷积恒等式为 $\widehat{g * h} = 2\pi\,\widehat{g}\,\widehat{h}$。 令 $k(x) = |x|^{-1}$。在 $\mathbb{R}^2$ 中的缓增分布意义下，

$$\widehat{k}(\xi) = \frac{1}{|\xi|}.$$

定义 $Tf := \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{-1}\widehat{f}(\xi)\big)$。则

$$\widehat{Tf}(\xi) = \frac{1}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) = \widehat{k}(\xi)\,\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\widehat{k * f}(\xi),$$

因此 $Tf = \frac{1}{2\pi}(k * f)$。由于 f 支持于 D,

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi}\int_D \frac{f(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}(S_D f)(x) \quad \text{for a.e. } x \in D.$$

因此，利用帕塞瓦尔，令 $g(\xi) := |\xi|^{-1}\widehat{f}(\xi)$。那么 $\widehat{\mathcal{F}^{-1}g} = g$，所以

$$\big\langle \mathcal{F}^{-1}g,\, f\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \big\langle g,\, \widehat{f}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|\xi|}\,\widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{f}(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|}\,d\xi.$$

Thus

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi = \left\langle \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{|\xi|}\widehat{f}\Big), f\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle Tf, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{2\pi}\,\langle S_D f, f\rangle_{L^2(D)}\,,$$

这证明了（14）。

算子 S_D 在 $L^2(D)$ 上有界，且是自伴正算子，因为其核 $|x-y|^{-1}$ 为实对称函数。它是紧的，因为 $|x-y|^{-1} \in L^2(D\times D)$（该奇点在二维中可积），所以 S_D 是希尔伯特–施密特算子。因此

由（14），傅里叶不等式中的最佳常数为 $C_{\text{sharp}}(D) = 2\pi\|S_D\| = 2\pi\lambda_{\max}^{\frac{1}{}}(S_D)$。

最后，由舒尔检验可得

$$\|S_D\|_{2\to 2} \le \sup_{x\in D}\int_D \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}y,$$

再乘以 $1/(2\pi)$，即可得到 $C_{\text{sharp}}(D)$ 的所述界。

舒尔检验（此处使用）。设 $(Tf)(x) = \int_D K(x,\ y)f(y)\ dy$，其中 $K \ge 0$。取权函数 $m \equiv 1$，由舒尔检验可得

$$\|T\|_{2\to 2} \le \Big(\sup_{x\in D}\int_D K(x,y)\,dy\Big)^{1/2}\Big(\sup_{y\in D}\int_D K(x,y)\,dx\Big)^{1/2}.$$

若 $K(x,\ y) = K(y,\ x)$ 对称，则两个上确界相等，因此

$$\|T\|_{2\to 2} \le \sup_{x\in D}\int_D K(x,y)\,dy.$$

将此应用于 S_D，令 $K(x,\ y) = 1/|x-y|$，可得

$$\|S_D\|_{2\to 2} \le \sup_{x\in D}\int_D \frac{1}{|x-y|}\,dy,$$

并乘以 $1/(2\pi)$，即可得到 $C_{\text{sharp}}(D)$ 的相应界 $= \frac{1}{2\pi}\|S_D\|$. — □

注 3. 根据前一个定理的证明，若 $D = \mathbb{D}$

$$C \le \frac{1}{2\pi}\sup_{x\in D}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|x-y|}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|y|}\,dy = 1.$$

可以通过 u 运用离散方法和数值分析证明，不等式中的最佳常数 C

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\big|\widehat{f}(\xi)\big|^2}{|\xi|}\,\mathrm{d}\xi \le C\int_{\mathbb{D}} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x,$$

对于单位圆盘，$\mathbb{D}$ 等于 $C \approx 0.852$，大于从上述具体例子中得到的 $8/(3\pi) \approx 0.848$。

4. 第一特征函数检验与圆盘刚性

定理 4。 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个边界分段光滑的有界单连通域。设 u 是 D上的第一狄利克雷特征函数（实值），其归一化方式任意，并且

$$-\Delta u = \lambda_1(D)\, u \quad in\ D, \qquad u|_{\partial D} = 0.$$

Set

$$v_0 := -\frac{4}{\lambda_1(D)}\, \partial_z u, \qquad and \qquad w := C_D u.$$

那么 $h := w - v_0$ 在 D 上全纯，且

$$\|w\|^2_{L^2(D)} = \|v_0\|^2_{L^2(D)} + \|h\|^2_{L^2(D)}. \tag{15}$$

此外，

$$\|v_0\|_{L^2(D)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}}\, \|u\|_{L^2(D)}. \tag{16}$$

因此，

$$\frac{\|C_D u\|_{L^2(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}} \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}},$$

其中，当 $h \not\equiv 0$ 时（等价地，当 $C_D u \not\equiv v_0$时），不等式为严格不等式。特别地，

$$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}},$$

并且当 D 不是圆盘时，该值严格更大（见下文定理 *6* ）。

证明。 由于 $\Delta = 4\,\partial_z\partial_{\bar z}$ 且 $-\Delta u = \lambda_1 u$，我们有

$$\partial_{\bar z} v_0 = -\frac{4}{\lambda_1}\partial_{\bar z}\partial_z u = -\frac{1}{\lambda_1}\Delta u = u.$$

另一方面， $\partial_{\bar z}(C_D u) = u$ 属于 D，因此

$$\partial_{\bar z}(w - v_0) = 0,$$

因此 $h := w - v_0$ 在 D上全纯。

接下来，计算 $\|v_0\|_{2}$。由于 u 是实值的， $|\partial_z u|^2 = \frac{1}{4}|\nabla u|^2$，因此

$$\|v_0\|^2_{L^2(D)} = \frac{16}{\lambda_1^2}\int_D |\partial_z u|^2\, dA = \frac{4}{\lambda_1^2}\int_D |\nabla u|^2\, dA.$$

由格林恒等式和 $u|_{\partial D} = 0$,

$$\int_D |\nabla u|^2\, dA = \int_D u(-\Delta u)\, dA = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(D)},$$

从而得到（16）。

最后，我们证明 $v_0 \perp h$ 在 $L^2(D)$ 中。利用 $\overline{\partial_z u} = \partial_{\bar z} u$,

$$\langle v_0, h\rangle_{L^2(D)} = -\frac{4}{\lambda_1}\int_D (\partial_{\bar z} u)\, h\, dA.$$

¯进行一次 A ∂–分部积分可得

$$\int_D (\partial_{\bar z} u)\, h\, dA = \frac{i}{2}\int_{\partial D} u\, h\, dz - \int_D u\, (\partial_{\bar z} h)\, dA = 0,$$

因为 $u|_{\partial D} = 0$ 并且 $\partial_{\bar z} h = 0$。因此 $\langle v_0,\ h\rangle = 0$, 并且（15）成立。由（15）和（16），所述不等式显然成立。

□

引理 5（柯西变换的外部全纯性与衰减）。设 $D \subset \mathbb{C}$ 有界，且令$f \in L^1(D)$。定义

$$F(z) := \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(w)}{z-w}\, dA(w), \qquad z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

那么， F 在Ω 上全纯，并且，由于 $z \to \infty$，

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{M_0}{z} + \frac{M_1}{z^2} + \frac{M_2}{z^3} + \cdots \right), \qquad M_k := \int_D f(w)\, w^k\, dA(w),$$

特别是 $F(z) = O(1/z)$。

证明。 设 $D \subset \mathbb{C}$ 可测且有界， $f \in L^1(D)$，并定义

$$F(z) := \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(w)}{z-w}\, dA(w), \qquad z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

固定 $z_0 \in \Omega$。令

$$\delta := \operatorname{dist}(z_0, D) > 0.$$

取 $r \in (0,\ \delta/2)$。那么对所有 $z \in B(z_0,\ r)$ 以及所有 $w \in D$,

$$|z-w| \geq |z_0 - w| - |z - z_0| \geq \delta - r \geq \delta/2.$$

因此，这些核在 $B(z_0,\ r)$ 上一致有界：

$$\left|\frac{f(w)}{z-w}\right| \leq \frac{2|f(w)|}{\delta}, \qquad \left|\frac{f(w)}{(z-w)^2}\right| \leq \frac{4|f(w)|}{\delta^2},$$

且控制函数 $2|f|/\delta,\, 4|f|/\delta^2$ 属于 $L^1(D)$。

对每个固定的 w，映射 $z \mapsto (z-w)^{-1}$ 在 $B(z_0,\ r)$ 上全纯，其导数为 $-(z-w)^{-2}$。上述控制条件允许在积分号下求导（例如，对差商应用控制收敛定理），从而得到

$$F'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(w)}{(z-w)^2}\, dA(w), \qquad z \in B(z_0, r).$$

由于 z_0 是任意的， F 在 Ω 上全纯。

设 D 有界，并选取 $R > 0$，使得 $D \subset \{\, |w| \leq R \,\}$。若 $|z| > 2R$，则对 $w \in D$， $|w/z| \leq 1/2$，并且

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\, \frac{1}{1 - w/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^k,$$

并且绝对收敛（且关于 $w \in D$ 一致收敛）。

此外,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{w^k}{z^{k+1}}\right| \leq \frac{1}{|z|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{|z|}\right)^k \leq \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{2}{|z|}.$$

Thus

$$\left|\frac{f(w)}{z-w}\right| \leq |f(w)| \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{w^k}{z^{k+1}}\right| \leq \frac{2|f(w)|}{|z|},$$

它在 D 上可积。这使得逐项积分成为可能：

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_D f(w)\, w^k\, dA(w) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{M_0}{z} + \frac{M_1}{z^2} + \frac{M_2}{z^3} + \cdots \right),$$

其中

$$M_k := \int_D f(w)\, w^k\, dA(w).$$

特别地,

$$|F(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_D \frac{|f(w)|}{|z| - |w|}\, dA(w) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{|z| - R}\, \|f\|_{L^1(D)} = O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

因此，当 $z \to \infty$ 时， $F(z) = O(1/z)$，并且上面的洛朗级数对 $|z| > 2R$ 成立。

如果 $M_0 = M_1 = \cdots = M_{m-1} = 0$，那么展开从 $z^{-(m+1)}$ 开始，并且 $F(z) = O(|z|^{-(m+1)})$。

□

定理 6 (刚性)。 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个有界单连通区域，具有 $C^{1,\alpha}$ 边界。设 u 是第一狄利克雷特征函数，

$$-\Delta u = \lambda_1(D)\, u \quad in\ D, \qquad u = 0 \quad on\ \partial D,$$

并定义

$$v_0 := -\frac{4}{\lambda_1(D)}\, \partial_z u.$$

Then

$$C_D u \equiv v_0 \quad in\ D$$

当且仅当 D 是一个圆盘。

证明。 首先假设 $C_D u \equiv v_0$ 属于 D，其中 $v_0 = -(4/\lambda_1)\partial_z u$。令 $\Omega := \mathbb{C} \setminus D$，并考虑外部柯西变换

$$F(z) := \frac{1}{\pi} \int_D \frac{u(w)}{z-w}\, dA(w), \qquad z \in \Omega.$$

根据引理 5， F 在 Ω 上全纯，并满足 $F(z) = O(1/z)$ 当 $z \to \infty$时。

对于光滑的 u和 ∂D，同一积分定义了 $\mathbb{C}$上的连续函数，其在 D上的限制与 $C_D u$一致。因此， D 上的恒等式 $C_D u = v_0$ 意味着 v_0 可全纯延拓至 Ω，该延拓由下式给出

$$\partial_z u(w) := -\frac{\lambda_1}{4}\, F(w), \qquad w \in \Omega.$$

特别地，这个延拓在 Ω 上全纯，并且

$$\partial_z u(w) = O(1/w) \qquad (w \to \infty). \tag{17}$$

边界恒等式。在 ∂D 上，我们有 $u = 0$，因此 ∇u 是法向:

$$\nabla u = (\partial_n u)\, n,$$

其中 $n = n_x + i n_y$ 是单位外法线。利用 $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right)$，我们得到

$$\partial_z u = \frac{1}{2}(\partial_n u)\, \overline{n} \qquad \text{on } \partial D.$$

设 $\gamma = \gamma(s)$ 是 ∂D 的弧长参数化。那么 $|\gamma'(s)| = 1$，并且

$$n(s) = -i\,\gamma'(s), \qquad \text{hence} \qquad \overline{n(s)} = i\,\overline{\gamma'(s)} = \frac{i}{\gamma'(s)}.$$

因此,

$$\partial_z u(\gamma(s))\, d\gamma = \partial_z u(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = \frac{1}{2}(\partial_n u)\, \overline{n}\, \gamma'(s)\, ds = \frac{i}{2}(\partial_n u)\, ds,$$

所以复微分 $\partial_z u\, d\gamma$ 在 ∂D 上的实部为零（等价地，它沿着∂D为纯虚数）。

通过外部共形映射得到的刚性。令 $\Phi : \Omega \to \{|\zeta| > 1\}$ 为经归一化的外部共形映射，使其满足 $\Phi(\infty) = \infty$，并记

$$Z(\zeta) := \Phi^{-1}(\zeta).$$

定义

$$\omega(\zeta) := \big(\partial_z u\big)\big(Z(\zeta)\big)\, Z'(\zeta), \qquad |\zeta| > 1.$$

于是 ω 在 $|\zeta| > 1$上全纯，而（17）连同归一化条件

$$Z(\zeta) = a\zeta + b + O(1/\zeta) \qquad (\zeta \to \infty)$$

推出

$$\omega(\zeta) = O(1/\zeta) \qquad (\zeta \to \infty),$$

因此 $F_1(\zeta) := \zeta\, \omega(\zeta)$ 在 $|\zeta| > 1$ 上全纯，并且在 ∞处有界。

在 $|\zeta| = 1$ 上，我们有 $Z(\zeta) \in \partial D$ 且 $dZ = Z'(\zeta)\, d\zeta$，因此

$$\omega(\zeta)\, d\zeta = \big(\partial_z u\big)\big(Z(\zeta)\big)\, dZ.$$

上面的边界恒等式表明，这个微分在 $|\zeta| = 1$ 上的实部为零；因此，对于$\zeta = e^{it}$ （所以 $d\zeta = i\zeta\, dt$），我们得到

$$\Re\big(F_1(e^{it})\, i\, dt\big) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F_1(e^{it}) \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

因此， F_1 可通过施瓦茨反射全纯延拓至 $|\zeta| = 1$ ，且是有界整函数；故 F_1 为常数，记作 $F_1(\zeta) \equiv c \in \mathbb{R}$，于是

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta}.$$

展开 ω 的定义可知， $|Z'(\zeta)|$ 在 $|\zeta| = 1$上为常数。由于 $\log|Z'(\zeta)|$ 在$|\zeta| > 1$上是调和函数，边界值为常数意味着 $\log|Z'|$ 在 $|\zeta| > 1$上为常数，因此 $Z'(\zeta)$为常数，且 $Z(\zeta)$是莫比乌斯映射。因此， ∂D 是一个圆， D 是一个圆盘。

反过来。 如果 D 是一个圆盘，第一特征函数是径向函数，直接计算（例如在极坐标中）可知，$C_D u = -\frac{1}{4}\lambda_1(D)\,\partial_z u$ 恒成立。□

注记 7. 上述刚性定理针对光滑区域（例如 $C^{1,\alpha}$）表述，以便使用边界恒等式和共形映射。下一个例子的作用不同：它是在单位正方形上的纯内部计算，直接通过在单个点求值表明 $C_D u \neq v_0$ 。特别地，它推出

$$\frac{\|C_D u\|_{L^2(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}} > \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}},$$

因此$\|C_D\|_{L^2(D)\to L^2(D)} > \sqrt{\lambda_1}^{2}(D)$。因此，所声称的范数恒等式（3）不可能对正方形成立。

例 8. 设 $D = (0,1)^2$, , 满足 $\lambda_1(D) = 2\pi^2$，并取

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

然后 $u_z(0,\ 0) = 0$，因此 $v_0(0) = 0$。另一方面，在 $z = 0$ 处计算柯西变换，得到

$$(C_D u)(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)\sin(\pi y)}{x+iy}\, dy\, dx,$$

并将 $(x+iy)^{-1} = (x-iy)/(x^2+y^2)$ 写成....., 可得

$$\Re\,(C_D u)(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{x\,\sin(\pi x)\sin(\pi y)}{x^2+y^2}\, dy\, dx < 0.$$

因此 $(C_D u)(0) \neq v_0(0)$，故 $h \not\equiv 0$ 满足定理 4，因此

$$\frac{\|C_D u\|_{L^2(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}} > \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(D)}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

最后，我们给出一个类似的圆环刚性结果。

定理 9。 设 $A = A(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : \ \ r < |z| < R\}$，其中 $0 < r < R$，并设 f 为 A上的第一狄利克雷特征函数 $-\Delta$ ，即

$$-\Delta f = \lambda_1(A)\, f \quad in\ A, \qquad f = 0 \quad on\ \partial A,$$

任意归一化，并在 A 中取正值。定义柯西变换

$$C_A g(z) := \frac{1}{\pi}\int_A \frac{g(w)}{z-w}\, d\mu(w), \qquad d\mu = du\, dv,$$

并设

$$v_0 := -\frac{4}{\lambda_1(A)}\,\partial_z f.$$

那么 f 是径向的，且

$$C_A f(z) = \frac{2}{z}\int_r^{|z|} f(\rho)\,\rho\, d\rho, \qquad z \in A.$$

此外，还有如下精确恒等式

$$C_A f(z) = -\frac{4}{\lambda_1(A)}\,\partial_z f(z) \ + \ \frac{2r\, f'(r)}{\lambda_1(A)}\,\frac{1}{z}, \qquad z \in A,$$

以及正交关系

$$\left\langle v_0, \frac{1}{z}\right\rangle_{L^2(A)} = 0.$$

因此,

$$\|C_A f\|^2_{L^2(A)} = \|v_0\|^2_{L^2(A)} + \left|\frac{2r\,f'(r)}{\lambda_1(A)}\right|^2 \left\|\frac{1}{z}\right\|^2_{L^2(A)} > \|v_0\|^2_{L^2(A)},$$

并且由于 $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ 可得

$$\|v_0\|^2_{L^2(A)} = \frac{16}{\lambda_1(A)^2}\|\partial_z f\|^2_{L^2(A)} = \frac{16}{\lambda_1(A)^2}\cdot\frac{1}{4}\|\nabla f\|^2_{L^2(A)} = \frac{4}{\lambda_1(A)}\|f\|^2_{L^2(A)}.$$

因此,

$$\frac{\|C_A f\|_{L^2(A)}}{\|f\|_{L^2(A)}} > \frac{\|v_0\|_{L^2(A)}}{\|f\|_{L^2(A)}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(A)}}.$$

证明。 由于 $\lambda_1(A)$ 的单重性以及 A 的旋转不变性，第一特征函数是径向的。对于径向的 f，记 $z = \rho e^{i\theta}$ 和 $w = se^{i\varphi}$。于是

$$C_A f(z) = \frac{1}{\pi}\int_r^R \int_0^{2\pi} \frac{f(s)\,s}{\rho e^{i\theta} - se^{i\varphi}}\,d\varphi\,ds.$$

通过留数计算可得

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho e^{i\theta} - se^{i\varphi}} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{2\pi}{z}, & s < \rho, \\ 0, & s > \rho, \end{cases}$$

因此

$$C_A f(z) = \frac{2}{z}\int_r^{|z|} f(s)\,s\,ds.$$

特别地，$\lim_{|z|\downarrow r} C_A f(z) = 0$。令 $\lambda = \lambda_1(A)$ 和 $v_0 = -(4/\lambda)\partial_z f$。利用 $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}$和 $-\Delta f = \lambda f$，我们有 $\partial v_0 = f$属于 A。此外， $\partial(C_A f) = f$属于 A，因此 $h := C_A f - v_0$ 在 A中全纯。由于 f是径向的，$h(e^{it}z) = e^{-it}h(z)$，于是对于某个 $c \in \mathbb{C}$， $h(z) = c/z$。两边乘以 z 并令 $|z| \downarrow r$ 趋于极限，得到

$$c = \lim_{|z|\downarrow r}\big(zC_A f(z) - zv_0(z)\big) = -\lim_{|z|\downarrow r} zv_0(z).$$

对于径向的 f,

$$\partial_z f(\rho e^{i\theta}) = \frac{e^{-i\theta}}{2}f'(\rho), \qquad \Rightarrow \qquad zv_0(z) = -\frac{2\rho}{\lambda}f'(\rho),$$

因此 $c = (2r/\lambda)f'(r)$，且

$$C_A f = v_0 + \frac{c}{z}.$$

接下来,

$$\begin{aligned}\left\langle v_0, \frac{1}{z}\right\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_r^R \left(-\frac{2}{\lambda}e^{-i\theta}f'(\rho)\right)\left(\frac{e^{i\theta}}{\rho}\right)\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= -\frac{4\pi}{\lambda}\int_r^R f'(\rho)\,d\rho = -\frac{4\pi}{\lambda}\big(f(R) - f(r)\big) = 0.\end{aligned}$$

因此 $v_0 \perp 1/z$ 属于 $L^2(A)$，且

$$\|C_A f\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + |c|^2\left\|\frac{1}{z}\right\|_2^2.$$

由于根据 Hopf 引理有 $f'(r) \neq 0$ （因为 $\Delta f < 0$）， $c \neq 0$，此外

$$\left\|\frac{1}{z}\right\|^2_{L^2(A)} = \int_A \frac{1}{|z|^2}\,dA = 2\pi\int_r^R \frac{1}{\rho}\,d\rho = 2\pi\log\frac{R}{r} > 0,$$

我们得到 $\|C_A f\|_2^2 > \|v_0\|_2^2$。

最后,

$$\|\partial_z f\|_2^2 = \frac{1}{4}\|\nabla f\|_2^2 = \frac{1}{4}\lambda\|f\|_2^2,$$

由此得到 $\|v_0\|_2^2 = (4/\lambda)\|f\|_2^2$，以及所述的严格不等式。 □

注 10. 还值得强调的是，另一个与之密切相关的柯西型变换源自拉普拉斯算子的狄利克雷问题，对于该变换，最佳常数 $\sqrt{\lambda_1(\Omega)}/2$ 确实 适用于任意有界区域。按照 Astala–Iwaniec–Martin 的记法，令 $G(z,\tau)$ 表示有界区域 Ω 的格林函数，并对 $\varphi \in L^2(\Omega)$ 定义格林势

$$v = L_\Delta(\varphi) = \int_\Omega G(z,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

使得 $v|_{\partial\Omega} = 0$ 在分布意义下成立。相应的柯西变换为

$$\mathcal{C}_\Delta(\varphi)(z) = v_z = \int_\Omega G_z(z,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

文献 [13] 证明了

$$\|\mathcal{C}_\Delta\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(\Omega)}}, \tag{20}$$

其中 $\lambda_1(\Omega)$ 是 Ω 上 $-\Delta$ 的第一狄利克雷特征值。

补充背景。 关于内部柯西变换的谱估计与范数估计及其与拉普拉斯/狄利克雷谱数据的关系（包括最佳常数和渐近行为），参见 [3, 6, 7, 8, 17, 11]。关于与这些算子范数密切相关的势论变分观点（庞加莱型问题），参见 [10]。关于柯西变换及其在平面势论中的作用，可参阅一般性参考文献 [18]。关于近期奇异值渐近结果，参见 [19] 。

致谢

作者谨此感谢黑山教育、科学与创新部通过“数学分析、优化与机器学习”项目以及“复分析与几何技术在非欧机器学习中的应用：理论与应用”项目提供的经费支持。作者还感谢 D. Khavinson 和 P. Melentijević 提供的宝贵意见与鼓励。

利益冲突。作者声明不存在任何利益冲突。
数据可用性。由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

伦理审批。 不适用。**参与同意**。 不适用。
出版同意。不适用。

参考文献

[1] J. M. Anderson与A. Hinkkanen，有界域上的柯西变换，美国数学会会刊**107**（1989年），第 1, 179 185 https://doi.org/10.2307/2048052 期–。[2] J. M. Anderson、D. Khavinson与V. Lomonosov，“势理论中某些积分算子的谱性质”，《数学季刊》，第43卷，第4期，第387–407页，1992年12月。doi: 10.1093/qmathj/43.4.387。[3] J. Arazy与D. Khavinson，柯西变换的谱估计于 $L^2(\Omega)$，《积分方程与算子理论》**15**（ 1992 901 919 https://doi.org/10.1007/BF01203120 ），–。[4] K. Astala、T. Iwaniec与G. Martin，平面上的椭圆型偏微分方程与拟共形映射，普林斯顿数学丛书，第48卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年。[5] M. R. Dostanić，有界域上柯西变换的性质，《算子理论杂志》**36**（1996年），233–247。[6] M. R. Dostanić，柯西算子的谱性质及其与有界区域上伯格曼投影的乘积，伦敦数学会会刊（ 3 **76** 1998 667 684 https://doi.org/10.1112/S0024611598000367 ）（ ），–。[7] M. R. Dostanić，柯西变换的范数估计于 L^p(Ω)，《积分方程与算子理论》**52**（2005年），465–475。https://doi.org/10.1007/s00020-002-1290-9 [8] M. R. Dostanić，柯西变换谱渐近展开中第二项的估计，《泛函分析杂志》**249**（2007年），55 74 https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.04.007 –。[9] E. Heinz，关于某些非线性椭圆型微分方程与单叶映射，《数学分析杂志》**5**（1956年），197–272。doi: 10.1007/BF02937346。[10] D. Khavinson、M. Putinar与H. S. Shapiro，位势理论中的庞加莱变分问题，《理性力学与分析档案》**185**（2007年），143–184。 https://doi.org/10.1007/s00205-006-0045-1

[11] D. Khavinson，经典积分算子的谱性质与几何，载于《谱理论与应用》，A. Girouard（编），当代数学720，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；数学研究中心，魁北克省蒙特利尔，2018年，第205–212页。DOI： 10.1090/conm/720/14526。[12] D. Kalaj，柯西变换与泊松方程，《数学进展》231（2012年），第1期，213–242。doi:10.1016/j.aim.2012.05.003。[13] D. Kalaj，关于与泊松方程相关的某些积分算子，《积分方程与算子理论》72 4, 563 2012 575 10 1007 00020 012 1952 1（ ），第–期。doi: . /s - - - 。[14] D. Kalaj与Dj. Vujadinović，单位球中泊松方程解的梯度及相关算子，《加拿大数学通报》60（2017年），第3期，536–545。）。[15] J.-F. Zhu与D. Kalaj，柯西变换及相关算子的范数估计，《泛函分析杂志》279（2020年），第9期，文章编号108726。doi:10.1016/j.jfa.2020.108726。[16] D. Kalaj、P. Melentijević与J.-F. Zhu，单位圆盘上柯西变换的 L^p理论，《泛函分析杂志》282（2022年），第4期，文章编号109337。doi:10.1016/j.jfa.2021.109337。[17] C. Liu，柯西变换的范数，《积分方程与算子理论》85（2016年），303–306。 https://doi.org/10.1007/s00020-016-2294-1[18] S. R. Bell，《柯西变换、位势理论与共形映射》，第2版，CRC出版社，2015年。 https://doi.org/10.1201/b19222[19] Đ. Vujadinović，双连通域上柯西算子及其与伯格曼投影之积的谱渐近，《位势分析》62（2025年），355–375。 https://doi.org/10.1007/s11118-024-10139-3

黑山大学，自然科学与数学学院，采蒂涅斯基路 b.b. 81000 波德戈里察，黑山电子邮箱地址： davidk@ucg.ac.me