arXiv:2602.13779v1 [math.RT] 14 Feb 2026

由有理量子环面协调的环面李代数的可积表示

SUMAN RANI, PUNITA BATRA*

Abstract. 我们对由有理量子环面协调、且中心作用平凡的环面李代数的不可约可积模进行了分类，这些模具有有限维权空间。令 $\mathbb{C}_q$ 表示与有理量子矩阵 q相关联的有理量子环面，并令 $\hat{\tau}(d,q)$ 表示由有理量子环面协调的环面李代数，它是通过将导子空间 D 添入泛中心扩张$\tilde{\tau}(d,q) = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q) \oplus HC_1(\mathbb{C}_q)$ 得到的，其中 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$。中心作用非平凡的情形此前已由 S. Eswara Rao 和 K. Zhao [18] 分类。本文通过描述 n维中心 C 在模上作用平凡时所有具有有限维权空间的不可约可积 $\hat{\tau}(d,q)$-模，完成了这一分类。

2020年数学主题分类： 17B67;17B66

1. Introduction

仿射李代数在数学和理论物理中都发挥着核心作用，它们自然地出现在二维共形场论、弦理论和统计力学的研究中。这些代数具有丰富的表示论，也是理解更一般的多变量类比的出发点。特别地，环面李代数是仿射李代数自然的 n变量推广。它们可以实现为多环代数 [1, 9] 的泛中心扩张，最早由 Moody、Rao 和 Yokonuma [16]引入。在过去三十年间，环面李代数因其与扩展仿射李代数（EALAs）的深刻联系而备受关注；扩展仿射李代数在过去二十年里已成为研究的核心对象。值得注意的是，环面李代数构成扩展仿射李代数的核，而 A_{d-1} 型的环面李代数与李代数 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$相关联，其中 $\mathbb{C}_q$ 是由有理量子矩阵 q定义的、具有 n 个非交换变量 t_1、.....、 t_n 的 Laurent多项式代数，其矩阵元为单位根。

* 通讯作者

仿射李代数和环面李代数的可积表示在理论发展中发挥了奠基性作用，其历程始于 Kac [8],的经典工作、Chari [4] 的重要成果，并延续至今。这类表示尤为重要，因为它们具有最高权理论，拥有有限维权空间，并且在数理物理和组合学的应用中占据核心地位。类似的发展也出现在李超代数的研究中；李超代数通过 $\mathbb{Z}_2$–分级为偶部和奇部，从而推广了李代数。仿射李超代数的可积模已得到广泛研究，尤其是 Futorny 和 Rao [15], 的工作，他们在那里获得了不可约可积模的完整分类。这些结果揭示了仿射与环面情形之间密切的结构类比，促使人们进一步研究超代数情形下的可积表示。

本文结构如下。第 2 节中，我们定义与有理量子矩阵 q 相关联的有理量子环面 $\mathbb{C}_q$ 。我们用 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$ 表示 $M_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_q$ 的李代数，并考察其李子代数 $\tau(d,q) = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$，其中 $d \geq 2$ 和 $n \geq 2$ 为整数。 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$ 中矩阵的迹属于 $[\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q]$。 $\tau(d,q)$ 的泛中心扩张为 $\tilde{\tau}(d,q) = \tau(d,q) \oplus HC_1(\mathbb{C}_q)$。将次数导子 $d_1, \ldots, d_n$ 的线性张成 D 加到 $\tilde{\tau}(d,q)$ 上，得到环面李代数 $\hat{\tau}(d,q) = \tilde{\tau}(d,q) \oplus D$。我们对 $\hat{\tau}(d,q)$ 的不可约可积模 V 进行分类，这些模具有有限维权空间，且 n 维中心 C 的作用平凡。S. Eswara Rao 和 K. Zhao 在 [18]中给出了具有非平凡中心作用的不可约可积 $\hat{\tau}(d,q)$-模的分类。因此，我们的工作完成了平凡中心作用情形下的分类。

在第 3 节中，我们为 $\hat{\tau}(d,\ q)$ 引入可积模的概念，并探讨其基本结构性质。我们描述权格，定义实根和零根，并构造相应的魏尔群。若干与经典仿射情形相对应的引理，为后续章节奠定了技术基础。第 4 节重点讨论中心扩张 $HC_1(\mathbb{C}_q)$ 在不可约可积模上的作用。我们证明，若每个中心元 $c_i = \langle t_i,\ t_i^{-1} \rangle$ 在此类模 V 上的作用都平凡，则整个中心部分 $HC_1(\mathbb{C}_q)$ 的作用也平凡，从而将分类问题归结为研究中心作用为零的商代数上的模。

第5节构成本文的核心，阐述了 $\hat{\tau}(d,q)$ 的不可约可积模的最高权理论 。本节中，我们使用 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$-模代替 $\tau(d,q)$-模，并利用分解（见 [18, 1.10]） $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q) =$

$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q) \oplus (I \otimes Z(\mathbb{C}_q))$，其中核是中心的，因此每个 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$-模都可以视为一个 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$-模，其额外的中心部分作用平凡。我们引入最高权空间 V^+，并分析其作为 $H \otimes \mathbb{C}_q \oplus D$ 上的模的结构。我们证明了 V^+ 非零，且在该子代数作用下不可约。随后，我们构造了一族彼此可交换的双射线性算子，称为最高中心算子，它们作用于 V^+，并体现量子环面中心元的影响。这些算子为 $\hat{\tau}(d, q)$ 的分次表示论与 $\tau(d, q)$ 的非分次理论搭建了桥梁。利用这些构造，我们得到 V 的一个有限维商模，它具有自然的 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$-模结构。本节证明了一个重要结果——定理 5.16，确立了 V 作为 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$ 上的模存在一个有限维不可约商模 。

在第 6 节中，我们反向进行这一过程：从一个有限维不可约$\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$-模出发，通过与 Laurent 多项式环 $A_n = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$作张量积，构造相应的分次 $\hat{\tau}(d, q)$-模。我们证明，所得模是完全可约且可积的，并且具有有限维权空间；除分次平移外，只有有限个不可约分量。这在中心作用平凡的情形下，建立了分次模与非分次模之间的精确对应关系。最后，第 7 节回顾 S. Eswara Rao 和 K. Zhao [18] 所得的有限维 $\tau(d, q)$-模分类，并将其应用于我们的情形。将这些结果与我们的约化定理相结合，可得出中心作用平凡且具有有限维权空间的不可约可积 $\hat{\tau}(d, q)$-模的完整分类，从而完成有理量子环面所协调的环面李代数可积表示的整体分类工作。

2. NOTATIONS AND PRELIMINARIES

首先，我们回顾 [3] 中的一些记号和已知结果。我们始终分别用 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{C}$ 表示整数、非负整数、正整数和复数的集合。令 $q = (q_{ij})_{1 \le i,\, j \le n}$ 其中 q_{ij} 是非零复数，且 $q_{ii} = 1, q_{ij} = q_{ji}^{-1}$, $\forall\, 1 \le i, \; j \le n$。与此 q 相关的量子环面为 $\mathbb{C}_q = \mathbb{C}[t_1^{\pm}, \cdots, t_n^{\pm}]$; 其定义关系为 $t_i t_j = q_{ij} t_j t_i$ 的非交换劳朗多项式代数。注意，上文定义的 $\mathbb{C}_q$ 是 $\mathbb{Z}^n$-分次的，且各分次分量均为一维。我们假设量子环面是有理的，即对某个正整数 N_{ij}, $\forall\, 1 \le i, \; j \le n$，有 $q_{ij}^{N_{ij}} = 1$ 。

对于 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，记作 $t^a = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \in \mathbb{C}_q$。现在我们定义映射 ,

σ, f: $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}^\times$ 作者

$$\sigma(a,b) = \prod_{1\le i\le j\le n} q_{ij}^{a_j b_i}, \tag{2.1}$$

$$f(a,b) = \sigma(a,b)\sigma(b,a)^{-1}. \tag{2.2}$$

对于 a, $b \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$, 很容易验证如下

$$f(a,b) = \prod_{i,j=1}^{n} q_{ji}^{a_j b_i}, \tag{2.3}$$

$$f(a,b) = f(b,a)^{-1},$$

$$\sigma(a+b,c) = \sigma(a,c)\sigma(b,c),$$

$$\sigma(a,b+c) = \sigma(a,b)\sigma(a,c),$$

$$f(a+b,c) = f(a,c)f(b,c),$$

$$f(a,b+c) = f(a,b)f(a,c),$$

$$f(ka,a) = f(a,ka) = 1,$$

$$t^a t^b = \sigma(a,b)t^{a+b}, \qquad t^a t^b = f(a,b)t^b t^a. \tag{2.4}$$

f 的根式为

$$\operatorname{rad} f = \{a \in \mathbb{Z}^n \mid f(a,b) = 1,\ \forall b \in \mathbb{Z}^n\}. \tag{2.5}$$

注意, $m \in \operatorname{rad} f \Leftrightarrow f(a, b) = 1$, $\forall a$, $b \in \mathbb{Z}^n$, 其中 $a + b = m$。此外, $\operatorname{rad} f$ 是 $\mathbb{Z}^n$的一个子群。

命题 2.1. ([3,命题 2.44])
设 $\mathbb{C}_q$ 为如上定义的有理量子环面，则:

(1) $\mathbb{C}_q$的中心 $Z(\mathbb{C}_q)$有一组由单项式 t^a构成的基，其中 $a \in \operatorname{rad} f$.(2) $\mathbb{C}_q$ 的李子代数 $[\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q]$ 有一组由单项式 t^a 构成的基，其中$a \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{rad} f$.(3)
$\mathbb{C}_q = [\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q] \oplus Z(\mathbb{C}_q)$.

令 $M_d(\mathbb{C})$ 表示由 $d \times d$个复矩阵构成的结合代数，其标准基元素为 E_{ij}，其中 $1 \le i, j \le n$。我们用 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ 表示相应的李代数，并用 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$ 表示 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ 中由迹为零的矩阵构成的单子代数。

进一步，我们将元素属于 $\mathbb{C}_q$ 的 $d \times d$ 矩阵所构成的结合矩阵代数记为 $M_d(\mathbb{C}_q)$。

$$M_d(\mathbb{C}_q) \cong M_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_q$$

相应的李代数记为 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}_q)$，其李括号定义为

$$[X \otimes t^a, Y \otimes t^b]_0 = XY \otimes t^a t^b - YX \otimes t^b t^a.$$

我们定义 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q) = \{X \in M_d(\mathbb{C}_q) \mid Tr(X) \in [\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q]\}$。
现在考虑 $M_d(\mathbb{C}_q)$ 中的以下李子代数

$$\tau(d,q) = (I_d \otimes [\mathbb{C}_q, \mathbb{C}_q]) \oplus (\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_q),$$

其中李括号定义为

$$[I_d \otimes [t^a, t^b], X \otimes t^c] = X \otimes [[t^a, t^b], t^c],$$

$$[I_d \otimes [t^a, t^b], I_d \otimes [t^c, t^d]] = I_d \otimes [[t^a, t^b], [t^c, t^d]],$$

$$[X \otimes t^a, Y \otimes t^b] = [X, Y]' \otimes \frac{t^a \circ t^b}{2} + (X \circ Y) \otimes \frac{1}{2}[t^a, t^b] + \frac{1}{d} Tr(XY) I_d \otimes [t^a, t^b],$$

where

$$t^a \circ t^b = t^a t^b + t^b t^a,$$

$$[X, Y]' = XY - YX,$$

$$X \circ Y = XY + YX - \frac{2}{d} Tr(XY) I_d,$$

$$[t^a, t^b] = t^a t^b - t^b t^a.$$

现在容易看出（ [3] 中也提到了这一点）

$$\tau(d,q) = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q).$$

我们回顾 [3] 中给出的 $\tau(d, q)$ 的泛中心扩张。令 $J \subset \mathbb{C}_q \otimes \mathbb{C}_q$ 为由以下元素张成的子空间

$$x \otimes y + y \otimes x, \quad xy \otimes z + yz \otimes x + zx \otimes y, \quad x, y, z \in \mathbb{C}_q.$$

对于 $x, y \in \mathbb{C}_q$，令 $\langle x, y \rangle_0$ 为 $x \otimes y + J$ 在 $(\mathbb{C}_q \otimes \mathbb{C}_q)/J$ 中的像。
我们定义

$$HC_1(\mathbb{C}_q) = \{\langle t^a, t^b \rangle \mid a + b \in \operatorname{rad} f\}, \quad \langle t^a, t^b \rangle = \delta_{a+b, \operatorname{rad} f} \langle t^a, t^b \rangle_0.$$

设 $\tilde{\tau}(d, q) = \tau(d, q) \oplus HC_1(\mathbb{C}_q)$，其李括号为

$$[X \otimes t^a, Y \otimes t^b] = [X \otimes t^a, Y \otimes t^b]_0 + Tr(XY) \langle t^a, t^b \rangle_0 \delta_{a+b, \operatorname{rad} f}$$

其中

$$\delta_{a, \operatorname{rad} f} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in \operatorname{rad} f, \\ 0 & \text{if } a \notin \operatorname{rad} f. \end{cases}$$

由 [3]、 $\tilde{\tau}(d,\ q)$ 是 $\tau(d,\ q)$ 的泛中心扩张。 我们注意到 $\tilde{\tau}(d,\ q)$ 是 $\mathbb{Z}^n$-分次的。为了解释这一点，我们加入次数导子。令 D 为次数导子 $d_1,\ \cdots,\ d_n$ 的线性张成。

设 $\hat{\tau}(d,q) = \tilde{\tau}(d,q) \oplus D$，李括号按如下方式扩张：

$$[d_i, X \otimes t^a] = a_i X \otimes t^a,$$
$$[d_i, I \otimes t^a] = a_i I \otimes t^a,$$
$$[d_i, \langle t^a, t^b\rangle] = (a_i + b_i)\langle t^a, t^b\rangle,$$
$$[d_i, d_j] = 0.$$

则 $\hat{\tau}(d,q)$ 的中心 C 由 $c_i = \langle t_i, t_i^{-1}\rangle$ 张成，其中 $i = 1, \cdots, n$。

引理 2.2. ([3,引理 3.18、3.19])
对于 〈、 〉 和上文定义的 $HC_1(\mathbb{C}_q)$ ，我们有如下

(1) $\langle 1, t^a\rangle = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}^n$.

(2) $\langle t^a, t^b(t^a)^{-1}\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i \langle t_i, t^b t_i^{-1}\rangle$.

(3) $\langle t^a, t^b\rangle = \sigma(a,b) \sum_{i=1}^{d} a_i \langle t_i, t^{a+b} t_i^{-1}\rangle$.

(4) $(t^b)^{-1} = \sigma(b,b) t^{-b}$.

(5) $$\dim HC_1(\mathbb{C}_q)_a = \begin{cases} 0 & a \notin \operatorname{rad} f, \\ n-1 & a \in \operatorname{rad} f \setminus \{0\}, \\ n & a = 0. \end{cases}$$

在后续章节中，我们对具有有限维权空间且中心作用平凡的李代数 $\hat{\tau}(d,q)$ 的不可约可积模 进行分类。如果一个模是 $\hat{\tau}(d,q)$-模，则称其为分次的； 如果它是 $\hat{\tau}(d,q)$ 对其导子子代数取商所得的商模，则称其为非分次的 。

3. Integrable modules

本节中，我们引入李代数 $\hat{\tau}(d,q)$ 的可积模的概念，并确立其基本性质。以下始终假设 V 是一个具有有限维权空间的 $\hat{\tau}(d,q)$-模。

定义 3.1. 设 $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$。线性映射 $z\colon V \to V$称为次数为 r 的中心算子，如果

(1) z与 $\tilde{\tau}(d,q)$的作用可交换；(2) 对所有 $i=1,\cdots,n,\quad d_iz-zd_i=r_iz$。

以下由 [18, 命题 2.4] 改编的结果描述了作用于不可约模上的中心算子的结构。

命题 3.2. 设 V是一个具有有限维权空间的不可约 $\hat{\tau}(d,q)$ 模。那么，对 $\mathbb{C}_q$作适当的坐标变换后，以下结论成立

(1) 存在一个非负整数 k 以及非零中心算子 $z_1,\cdots z_k$，其次数为 $(m_1,0,\cdots,0)\ \cdots\ (0,\cdots,m_k,\cdots,0)$，其中 $m_1,\cdots,m_k$是某些正整数。(2) 如果 $\mathbb{C}_q$ 是有理数，那么 $k<n$。(3) 如果 $\langle t_i,t^rt_i^{-1}\rangle\neq 0$ 作用于 V上，那么 $i\geq k+1$ 且 $r_{k+1}=\cdots=r_n=0$。

现在我们引入与李代数 $\hat{\tau}(d,\ q)$相关的实根、零根和魏尔群 的概念。值得强调的是，在此语境下，魏尔群与交换环面情形中的魏尔群相同。这种等价性源于以下观察：任何具有有限维权空间的不可约可积模的权集，都具有与交换情形相同的结构性质。因此，我们采用 [12]中第 1 节的记号。

我们回顾一下，$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$的卡坦子代数是 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$中的 $\dot{\mathfrak{h}}=\{$迹为零的对角矩阵$\}$。

设 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{d-1}\in\dot{\mathfrak{h}}^*$ 为标准单根，设 $\alpha_1^\vee,\ \cdots,\ \alpha_{d-1}^\vee\in\dot{\mathfrak{h}}$ 为有限维李代数 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$的余根。

我们记

$$\dot{\Delta}\subset\dot{\mathfrak{h}}^*,\quad \dot{Q}=\bigoplus_{i=1}^{d-1}\mathbb{Z}\alpha_i,\quad \dot{Q}^+=\bigoplus_{i=1}^{d-1}\mathbb{N}\alpha_i$$

分别为相应的根系、根格和正根格。令 $\mathcal{W}_0$为 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$的魏尔群，它由反射 r_{α_i}生成。

现在定义

$$\mathfrak{h}=\dot{\mathfrak{h}}\oplus\sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}c_i\oplus\sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}d_i$$

其中 $c_i=\langle t_i,t_i^{-1}\rangle$ 是前面引入的中心元，而 d_i 是次数导子。因此 $\dim\mathfrak{h}=2n+d-1$。现在定义元素 $\delta_i,\omega_i\in\mathfrak{h}^*,\ 1\leq i\leq n$：

$$\delta_i(\dot{\mathfrak{h}})=0,\quad \delta_i(d_j)=\delta_{ij},\quad \delta_i(c_j)=0,$$

$$\omega_i(\dot{\mathfrak{h}})=0,\quad \omega_i(d_j)=0,\quad \omega_i(c_j)=\delta_{ij}.$$

那么，$\{\alpha_i,\delta_j,\omega_j\mid 1\leq i\leq d-1,\ 1\leq j\leq n\}$ 构成了 $\mathfrak{h}^*$的一组基。

设 $(\ ,\ )$ 是 $\mathfrak{h}^*$上的标准对称双线性形式，并将其规范化为 $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$。我们将其扩展到 $\dot{\mathfrak{h}}^*$，定义如下：

$$(\dot{\mathfrak{h}}^*, \delta_i) = 0, \quad (\dot{\mathfrak{h}}^*, \omega_i) = 0, \quad (\delta_i, \delta_j) = 0, \quad (\omega_i, \omega_j) = 0, \quad (\delta_i, \omega_j) = \delta_{ij}.$$

此形式是非退化的，且具有 $\mathcal{W}$-不变性。

对于 $m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$，我们定义

$$\delta_m = \sum m_i \delta_i, \quad (\delta_m, \delta_n) = 0,$$

其中 δ_m 称为零根。

实根 的集合记为 $\Delta^{\mathrm{re}} = \{\alpha + \delta_m \mid \alpha \in \Delta,\ m \in \mathbb{Z}^n\}$，零根 的集合记为 $\Delta^{\mathrm{null}} = \{\delta_m \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$。于是根系为 $\Delta = \Delta^{\mathrm{re}} \cup \Delta^{\mathrm{null}}$。对于每个实根 $\gamma = \alpha + \delta_m$，定义其余根 $\gamma^\vee = \alpha^\vee + \sum_{i=1}^n m_i c_i$。于是 $(\gamma,\ \gamma) = 2$ 且$\gamma(\gamma^\vee) = 2$。

设 $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C})$，其分解为 $\dot{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta} \cup \{0\}} \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$。

我们定义 $\tilde{\tau}_{\alpha+\delta_m} = \dot{\mathfrak{g}}_\alpha \otimes \mathbb{C}t^m$ 和

$$\tilde{\tau}_{\delta_m} = \begin{cases} \dot{\mathfrak{h}} \otimes \mathbb{C}t^m \oplus I \otimes \mathbb{C}t^m & m \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{rad} f, \\ \mathfrak{h}' \otimes \mathbb{C}t^m \oplus HC_1(\mathbb{C}_q)_m & m \in \operatorname{rad} f \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Then

$$\hat{\tau}(d, q) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \tilde{\tau}_\alpha$$

是 $\hat{\tau}(d, q)$ 的相应根空间分解。

对于任意实根 $\gamma \in \Delta^{\mathrm{re}}$，我们将 $\mathfrak{h}^*$ 上的反射定义为 $r_\gamma(\lambda) = \lambda - \lambda(\gamma^\vee)\gamma$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$。由这些反射生成的群是魏尔群 $\mathcal{W}$。容易验证， $\mathfrak{h}^*$ 上的形式是 $\mathcal{W}$-不变的。

对于 $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$，我们记作 $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in Q^+$，即当且仅当 $\mu - \lambda$ 是简单根的非负整数线性组合时。

定义 3.3. 称 $\hat{\tau}(d, q)$ 上的模 V 是可积的，如果
(1)（V 是权模） $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$，其中 $V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$；(2) 对每个 $\alpha \in \dot{\Delta},\ m \in \mathbb{Z}^n,\ v \in V,\ \exists\, k = k(\alpha, m, v)$，使得 $(\dot{\mathfrak{g}}_\alpha \otimes t^m)^k \cdot v = 0$。

我们用 $P(V)$ 表示权模 V 的所有权组成的集合。于是得到以下标准引理。

引理 3.4. ([18,引理 3.2])
设 V 是 $\hat{\tau}(d, q)$ 的不可约可积模。那么：

(1) $P(V)$ 是 $\mathcal{W}$-不变的；*(2)* 对所有 $w \in \mathcal{W}$ 和 $\lambda \in P(V)$，$\dim V_\lambda = \dim V_{\omega\lambda}$。*(3)* 对所有 $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$，$\lambda \in P(V)$，$\lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$。*(4)* 对于满足 $\lambda(\alpha^\vee) > 0$ 的 $\alpha \in \Delta^{re}$，$\lambda \in P(V)$，有 $\lambda - \alpha \in P(V)$。*(5)* 对所有 $\lambda \in P(V)$，$\lambda(c_i)$ 是一个常整数。

引理 3.5。设 V 是一个不可约可积模，其权空间有限维，且属于 $\hat{}\tau(d, q)$。则存在 $\lambda \in P(V)$，使得对所有 $\eta \in Q_+ \setminus \{0\}$，$V_{\lambda+\eta} = 0$。

证明。证明思路与（[4, 命题 2.4(ii)]）、（[12, 命题 2.12]）的证明类似，因为我们有相同的魏尔群。令 $\lambda \in P(V)$ 和 $\lambda = (\lambda(d_1) \cdots, \lambda(d_n))$，并定义 $V_\lambda = \{v \in V_\mu \mid \mu(d_i) = \lambda(d_i) \ 1 \le i \le n\}$。由于 d_i 是半单且彼此对易的，我们有

$$V = \bigoplus_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^n} V_{\underline{\lambda}+\underline{m}},$$

且每个 $V_{\lambda \pm m}$ 都是一个 $\dot{\mathfrak{g}}$-子模。特别地，V_λ 是一个可积 $\dot{\mathfrak{g}}$-模，其权空间有限维，因此可分解为有限维不可约 $\dot{\mathfrak{g}}$-模的直和。

设 $P(V_\lambda) = \{\mu \in P(V) \mid V_\mu \subseteq V_\lambda\}$，则 $P(V_\lambda) \subset P(V)$。由引理 3.4，可选取 $\lambda_0 \in P(V_\lambda)$，使得 $\lambda_0(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}^+$，$\forall i = 1, \cdots, n$。由于 $\dim V_{\lambda_0}$ 有限，因此子空间 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)V_{\lambda_0}$ 是有限维的。这意味着存在一个元素 $\eta \in Q_+$，使得

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)_\eta V_{\lambda_0} \neq 0, \quad \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)_{\eta'} V_{\lambda_0} = 0 \quad \forall \eta' > \eta. \tag{3.1}$$

我们称 $V_{\lambda_0+\eta+\mu} = 0$ 对所有 $\mu \in Q_+ \setminus \{0\}$成立；否则，$V_{\lambda_0+\eta+\mu} \neq 0$ 对某个 $\mu \in Q_+ \setminus \{0\}$成立。取满足 $\mathfrak{n}^+ \cdot v = 0$ 的 $0 \neq v \in V_{\lambda_0+\eta'+\mu}$，其中 $\eta' > \eta$。那么 $M = \mathcal{U}(\dot{\mathfrak{g}})v$是一个有限维不可约 $\dot{\mathfrak{g}}$–模，其最高权为 $\lambda_0 + \eta' + \mu$。根据 [4],$M \cap V_\lambda \neq 0$的引理 2.7，取一个权为 λ_0的非零权向量 $w \in M \cap V_\lambda$。由于 $M = \mathcal{U}(\dot{\mathfrak{g}})w$，且 $\mathrm{wt}(v) - \mathrm{wt}(w) = \eta' + \mu \in Q_+$，因此有 $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)_{\eta'+\mu} V_{\lambda_0}$，这与 (3.1) 矛盾。因此，对所有 $\mu \in Q_+ \setminus \{0\}$，$V_{\lambda_0+\eta+\mu} = 0$。□

我们定义 $P^+(V) = \{\lambda \in P(V) \mid V_{\lambda+\eta} = 0, \quad \forall \eta \in Q_+ \setminus \{0\}\}$，那么根据引理 3.5，$P^+(V)$ 非空。

4. ACTION OF CENTRAL EXTENSION PART

本节将证明，若每个中心元 c_i $(1 \leq i \leq n)$ 在不可约可积 $\hat{\tau}(d,\ q)$-模 V上都作用平凡，且该模具有有限维权空间，则整个中心扩张 $HC_1(\mathbb{C}_q)$ 在 V上也作用平凡。

设 V是这样的模。全文中，我们记 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$，其三角分解为 $\mathfrak{g} = N^- \oplus H \oplus N^+$，其中 N^-是严格下三角矩阵构成的子代数，H 是由对角矩阵组成的卡坦子代数，而 N^+ 是严格上三角矩阵构成的子代数。

命题 4.1. 假设 $c_i,\ 1 \leq i \leq n$ 在 V 上平凡作用。则存在非零的 $v, w \in V$，使得 $N^+ \otimes \mathbb{C}_q \cdot v = 0,\ N^- \otimes \mathbb{C}_q \cdot w = 0.$

证明. 令 $\lambda \in P^+(V)$，则对所有 $\eta \in Q_+ \setminus \{0\}.$ 都有 $V_{\lambda+\eta} = 0$。若对所有 $\alpha \in \Delta_+$及所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $V_{\lambda+\alpha+n\delta} = 0$，则命题得证。

设 $V_{\lambda+\alpha+n\delta} \neq 0$ 对某个 $\alpha \in \Delta_+ \ and \ n \in \mathbb{Z}.$ 成立。令 $\mu = \lambda + \alpha + n\delta$，则对所有 $\beta \in \Delta_+$ 及所有 $s \in \mathbb{Z}$，有 $V_{\mu+\beta+s\delta} = 0$。由于 $\alpha,\ \beta \in \Delta_+$，因此 $(\alpha + \beta \mid \alpha)$ 或 $(\alpha + \beta \mid \beta)$ 为正。假设 $(\alpha + \beta \mid \alpha) > 0$。令 $\gamma = \alpha + (s + n)\delta$，则 $(\mu + \beta + s\delta \mid \gamma) > 0$，故由 $[4, \text{引理 } 2.2]\ V_{\mu+\beta+s\delta-\gamma} = V_{\lambda+\beta} \neq 0$，这与 $\lambda \in P^+(V)$ 的事实矛盾，因此 $N^+ \otimes \mathbb{C}_q \cdot V_\mu = 0.$
同理，我们可以证明对某个 $w \in V$，有 $N^- \otimes \mathbb{C}_q \cdot w = 0$。 □

命题 4.2。 设 V 是 $\hat{\tau}(d, q)$ 的一个不可约可积模，且具有有限维权空间。令 k 如上面的命题 *3.2* 中所述。假设 $k \geq 1$ *and* $c_i = 0\ \forall\ i$ =1, $\cdots$, n; 那么这样的模 V 不存在。

证明。 此命题的证明将与（命题 4.13,[3]）类似。这里我们将构造一个不同的海森堡李代数。
令 $\langle t_i, t^r t_i^{-1} \rangle \neq 0$，则由引理 2.2，$r \in \text{rad}\, f$，并由命题 3.2，对于 $i \geq k+1$ 和 $r_{k+1} = \cdots = r_n = 0.$，我们有.....由于 $\mathbb{C}_q$ 是有理数，取 N_i 为满足 $t_i^{N_i} \in Z(\mathbb{C}_q).$ 的最小整数。现在考虑 $H = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{h \otimes t^r t_i^{N_i k}, h \otimes t_i^{-N_i k}, \langle t_i, t^r t_i^{-1} \rangle \mid k > 0\}$ 海森堡代数，并在一个有限维权空间 $\{Y t_i^{-N_i r}\ Y t_i^{N_i r} w,\ r > 0,\ r \neq \pm l_0\}$ 中构造一个线性无关向量的无限集，这与每个权空间都是有限维的事实矛盾。□

引理 4.3. $HC_1(\mathbb{C}_q)$ 在 V 上平凡地作用。

证明。 我们回顾 $HC_1(\mathbb{C}_q) = \{\langle t^a, t^b \rangle \mid a + b \in \text{rad}\ f\}$。根据命题 4.2，若 V 是一个具有有限维权空间的不可约可积模，且对所有 $i =$都有 $c_i = 0$

1, $\cdots$, n，则在 V 上非平凡作用的中心算子个数为 $k=0$。注意，$\langle t^a,\ t^b\rangle$ 是一个次数为 $a+b$ 的中心算子，若 $a+b\in \mathrm{rad}\ f$，因此引理得证。□

5. HIGHEST WEIGHT SPACE

本节中，我们引入最高权空间 V^+ 上的最高中心算子 的概念。随后，我们利用这些算子证明，V 作为 $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}_q$ 上的模，存在一个有限维不可约商模。回顾 (1.10, [18])，$\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}_q = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)\oplus(I\otimes Z(\mathbb{C}_q))$，且其核是中心的。我们可以将任意 $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}_q)$ 模视为一个 $(\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}_q)$ 模，其中额外的中心 $I\otimes Z(\mathbb{C}_q)$ 平凡作用。

设 V 是 $\hat{}\tau(d,q)$ 的不可约可积分次模，具有有限维权空间，并假设 $HC_1(\mathbb{C}_q)$ 在 V 上平凡作用。一般而言，这种模称为 $\tau(d,q)$ 的非分次模。

我们将建立分次模与非分次模之间的一一对应。从一个具有有限维权空间的可积分次模出发，我们可以得到一个有限维非分次模。有限维不可约非分次模很容易分类，而这一化约构成了后续章节所发展之分类理论的基石。

为此，我们定义 $V^+=\{v\in V\mid N^+\otimes\mathbb{C}_q\cdot v=0\}$，由命题 4.1 可知它显然非零。我们将此空间称为 V 的最高权空间。

命题 5.1.

(1) V^+ 是不可约$(H\otimes\mathbb{C}_q)\oplus D$-模。(2) $V=\mathcal{U}(N^-\otimes\mathbb{C}_q)V^+$。

证明。注意到 $[N^+\otimes\mathbb{C}_q, H\otimes\mathbb{C}_q]\subseteq N^+\otimes\mathbb{C}_q$和 $[d_i, X\otimes t^a]=a_iX\otimes t^a$，借助它们，我们可以证明 $(H\otimes\mathbb{C}_q\oplus D)\cdot V^+\subseteq V^+$。因此，$V^+$是一个 $H\otimes\mathbb{C}_q\oplus D$-模，并由 PBW 定理可得，$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}_q)=\mathcal{U}(N^-\otimes\mathbb{C}_q)\mathcal{U}(H\otimes\mathbb{C}_q)\mathcal{U}(N^+\otimes\mathbb{C}_q)$。由于 V是不可约模，我们有 $V=\mathcal{U}(N^-\otimes\mathbb{C}_q)V^+$。还需证明 V^+是不可约的。假设 $W\subseteq V^+$是一个非零的 $H\otimes\mathbb{C}_q\oplus D$- 子模。那么，$\mathcal{U}(N^-\otimes\mathbb{C}_q)W$ 是 V 的一个 $(\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}_q)\oplus D$- 子模。由 V 的不可约性可知，$V^+=W$。因此，V^+是不可约的。□

引理 5.2.

(1)存在唯一的 $\lambda\in H^*$ 和 $\beta\in\mathbb{C}^n$（不一定唯一），使得 V^+ 的权具有 $\lambda+\delta_{r+\beta}$ 的形式，其中 $r\in\mathbb{Z}^n$。(2) λ是支配整的。

证明。 (1) 由于 $H \otimes 1$ 与 $(H \otimes \mathbb{C}_q) \oplus D$对易，由命题 5.1 可知， $H \otimes 1$ 通过标量作用于 V^+ 。等价地，该作用由 V^+上的一个线性泛函决定，我们将其记为 λ。具体而言，对于每个 $h \in H$，都存在一个标量 $\lambda(h)$，使得

$$(h \otimes 1) \cdot v = \lambda(h) \cdot v \qquad \forall\, v \in V^+.$$

关于导子，回顾如下：

$$[d_i, x \otimes t^r] = r_i x \otimes t^r.$$

因此，如果 $v_0 \in V^+$ 具有 d-特征值 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$，即 $d_i v_0 = \beta_i v_0$，那么 V^+ 中的每个权向量都具有形如 $\beta + r$ 的 d-特征值，其中 $r \in \mathbb{Z}^n$。因此

$$P(V^+) \subseteq \{\lambda + \delta_{\beta+r} \mid r \in \mathbb{Z}^n\}.$$

(2) 设 $v_0 \in V^+$ 对某个 $r \in \mathbb{Z}^n$ 具有权 $\mu = \lambda + \delta_{\beta+r}$（因此 $\mu \in P(V)$ 且 $\mu|_H = \lambda$）。若对某个 $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$ 有 $\lambda(\alpha^\vee) < 0$，则根据引理 3.4， $\lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$ 且 $\lambda + \alpha \in P(V)$，这与 v_0 是最高权向量矛盾。因此，对于每个实根 α，都有 $\lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，也就是说， λ 是支配整权。

□

注 5.3.

(1) 设 $\lambda = 0$ 满足引理 *5.2*，则 V^+ 包含一个权为δ_β 的最高权向量，其中某个 $\beta \in \mathbb{C}^n$。由于 V 是不可约且可积的，对应于实根 α 的每个 $\mathfrak{sl}_2$-子代数都平凡作用(如 $\lambda(\alpha^\vee) = 0$，由引理 *3.4*)，因此所有权都与 δ_β相同。利用对易关系以及$HC_1(\mathbb{C}_q)$ 平凡作用这一事实，可知嘉当元 $h_\alpha \otimes t^m$ 也以0作用；因此整个子代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$ 在 V上平凡作用。由此， V是一维的，并且同构于最高权模 $V(\delta_\beta)$ ，其最高权为 δ_β。(2) 为简化记号，不失一般性，我们可以设引理 *5.2* 中的向量 β 为零向量。

为了进一步推进，对于每个 $j = 1, \cdots, n$，考虑 $\mathfrak{g} \otimes Z(\mathbb{C}_q) \oplus HC_1(\mathbb{C}_q) \oplus D$ 的子代数，其定义如下：

$$L_j = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t_j^{N_j}, t_j^{-N_j}] \oplus \mathbb{C}c_j \oplus \mathbb{C}d_j, \quad \text{where } c_j = \langle t_j, t_j^{-1} \rangle.$$

设 $\mathcal{W}_j$ 和 $\mathcal{W}_0$ 分别为与仿射 Kac–穆迪代数 L_j 和单有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 相关的魏尔群。令 θ 表示 $\mathfrak{g}$ 的最高根，并令 $\theta^\vee$ 为相应的余根。由 $\mathfrak{g}$ 上的非退化不变双线性形式 $(\,|\,)$ 诱导出一个自然同构 $\gamma : H \to H^*$，定义如下：

$$\gamma(h)(x) = (x|h), \quad \forall\, x \in H.$$

对每个 j，我们将 H上的这一相同识别记为 γ_j ；即$\gamma_j = \gamma$。利用这一识别，令

$$M_j = \gamma_j(\mathbb{Z}(\mathcal{W}_0\theta^\vee)), \quad T_j = \{t_{\alpha_j} \mid \alpha_j \in M_j\}.$$

于是由 [8, 命题 6.5], ，存在一个群同构

$$\mathcal{W}_j \cong \mathcal{W}_0 \ltimes T_j.$$

注 5.4. 若令 $H_j = H \oplus \mathbb{C}d_j$，则由于 c_j 在 V上作用平凡，由 [6, 式 6.5。5] 可知，平移 t_{α_j} 在 H_j^* 上的作用为

$$t_{\alpha_j}(\mu_j) = \mu_j - \mu_j(\alpha_j^\vee)\delta_j, \quad \forall\, \mu_j \in \widehat{H}_j^*,\ \alpha_j \in M_j.$$

命题 5.5. V^+中仅有有限多个 $H \otimes Z(\mathbb{C}_q)$-子模。

证明. 对每个 $j = 1, \cdots, n$，我们有

$$\frac{2\theta}{(\theta|\theta)} = \gamma_j(\theta^\vee) \in M_j.$$

令 $\theta_j = \gamma_j(\theta^\vee)$和 $p_j = (\lambda|\theta_j) \in \mathbb{N}$ （由引理 5.2 和注 5.3）。

对于任意 $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{Z}^n$，定义

$$s(m) = (s_1 m_1, \cdots, s_n m_n) \in \operatorname{rad} f.$$

再次地，对于任意满足 $|k_j| \geq m_j p_j$ 的整数 $k_j \in \mathbb{Z}$ ，存在非零整数 $q_j \in \mathbb{Z}$ 和 $r_j \in \mathbb{Z}_+$ ，使得

$$k_j = q_j p_j m_j + r_j,\ |r_j| < |p_j m_j|.$$

令 $t_j = t_{\theta_j}$ ，并将对应于 $\mathfrak{g} \otimes Z(\mathbb{C}_q) \oplus HC_1(\mathbb{C}_q) \oplus D$ 的魏尔群记为 $\mathcal{W}'$。定义

$$w = (\prod_{q_j<0} t_j^{-m_j q_j})(\prod_{q_j>0} t_j^{m_j q_j}) \in \mathcal{W}',$$

那么根据注 5.4，对于 $k = (k_1, \cdots, k_n)$ 和 $r = (r_1, \cdots, r_n)$，我们有

$$w(\lambda + \delta_k) = \lambda + \delta_r,\ |r_i| < |p_i m_i|, \quad \forall\, i = 1, \cdots, n.$$

现在设

$$P^{(1)} = \{\lambda + \delta_r \mid r \in \mathbb{Z}^n,\ |r_i| < |p_i m_i|\}.$$

最后，注意到 V^+ 的任意 $H \otimes Z(\mathbb{C}_q)$-子模都由其包含的 V 的最高权向量决定，因此它由这些最高权向量生成。根据上述 Weyl 平移论证以及权空间的有限维性，每个子模都由权属于 $P^{(1)}$ 的一组基向量生成。由于 $P^{(1)}$ 是有限集，这样的子模只有有限多个。因此命题得证。□

注 5.6. 根据上述论证，每个权 $\mu \in P(V^+)$ 都与某个 $\nu \in P^{(1)}$ $\mathcal{W}'$-共轭。由于 *Weyl* 平移保持维数不变，且每个 维数 V_ν 都有限，因此我们有

$$\dim V_\mu^+ \leq \max_{\nu \in P^{(1)}} \dim V_\nu.$$

特别地， V^+ 的所有权空间的维数均有一个统一的有限上界。

引理 5.7. 只有有限多个 λ_1、 $\cdots$、 $\lambda_l \in H^*$ 以及某个 $\beta \in \mathbb{C}^n$ 满足 $P(V)$ $\subseteq \{\lambda_i + \delta_{\beta+r} \mid 1 \leq i \leq l,\ r \in \mathbb{Z}^n\}$。

Proof. 由注 5.3 和命题 5.1， V 的权集满足

$$P(V) \subseteq \{\lambda - \eta + \delta_r \mid \eta \in \dot{Q}^+,\ r \in \mathbb{Z}^n\},$$

其中 λ 是如引理 5.2 中所述的 H^* 的唯一元素。固定一个形式为 $\mu =$. $\lambda - \eta + \delta_r \in P(V)$ 的权（其中 $\eta \in Q^+$， $r \in \mathbb{Z}^n$）。由 [7, 第 13.2], 节中的引理 A，存在唯一的支配整权 $\mu^+ \in H^*$ 以及某个 $\sigma \in \mathcal{W}_0$，使得

$$\sigma(\lambda - \eta) = \mu^+.$$

由于 $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}$，可得 $\sigma \in \mathcal{W}$，使得

$$\sigma(\lambda - \eta + \delta_r) = \mu^+ + \delta_r.$$

此外，由引理 3.4，得 $\mu^+ \leq \lambda$。因此， V 的每个权 μ 都与唯一的支配权 μ^+ 在 $\mathcal{W}_0$ 下共轭，且满足 $\mu^+ \leq \lambda$。根据第 13.2], 节的引理 B [7, ，只有有限多个支配整权 μ^+ 满足此不等式。我们将它们记为 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$。因此

$$P(V) \subseteq \{\lambda_i + \delta_{\beta+r} \mid 1 \leq i \leq l,\ r \in \mathbb{Z}^n\}.$$

□

注 5.8. 对于每个 $i=1$、$\cdots$、l，令

$$P_i^{(1)}=\{\lambda_i+\delta_{\beta+r}\ ;\ |r_j|<|p_jm_j|,\ 1\le j\le n\},$$

是通过命题 *5.5* 中的 *Weyl*群论证构造的有限基本集。相应陪集 $\lambda_i+\delta_{\beta+\mathbb{Z}^n}$ 中的每个权都属于 $P_i^{(1)}$ 中某个元素的 $\mathcal{W}'$-轨道。由于 V 是具有有限维权空间的可积表示，$\mathcal{W}'$ 作用保持权重数。因此，陪集中的每个权都与 $P_i^{(1)}$ 中的某个权具有相同的维数。令

$$C_i:=\max_{\nu\in P_i}\dim V_\nu<\infty\quad and\quad C=\max_{1\le i\le \ell}C_i,$$

我们得到所有权空间维数的统一上界

$$\dim V_\mu\le C,\quad for\ all\ weights\ \mu\ in\ V.$$

定义 5.9。 若线性映射 $z\colon V^+\to V^+$ 是次数为 m 的最高中心算子，则称其满足以下条件。

(1) z 与 $H\otimes\mathbb{C}_q$ 的作用交换；**(2)**
$d_iz-zd_i=m_iz\ \forall\ i=1$，**2**，$\cdots$，$n$。

注 5.10。

(1) $H\otimes Z(\mathbb{C}_q)$ 是一个阿贝尔李代数。(2) 对于每个 $h\in H$ 和 $r\in Z(\mathbb{C}_q)$，$h\otimes t^r$ 是 V^+ 上次数为 r 的最高中心算子。

引理 5.11。 设 V 是环李代数 $L=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$（不含中心扩张）的一个可积模。若 $v\in V$ 是权为 λ 的最高权向量，则

$$h\cdot v=\lambda(h)v=0\ if\ and\ only\ if\ (h\otimes t^k)\cdot v=0\ for\ all\ k>0.$$

证明。 固定一个正（单）根 β，并将余根记为 h_β。我们按 [6 中的方式定义形式幂级数]

$$\tilde{H}_\beta(u)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}h_{\beta,m}u^{m+1},$$

$$\Lambda_\beta^+(u)=\exp\left(-\sum_{k\ge1}\frac{h_\beta\otimes t^k}{k}u^k\right)=\sum_{m\ge0}\Lambda_{\beta,m}u^m,$$

因此常数项为 $\Lambda_{\beta,\ 0}=1$。根据 [6], 中最高权向量v的命题 **1.1(i)**，我们有 $\Lambda_{\beta,\ m}\cdot v=0$，对所有 $m>\lambda(h_\beta)$ 均成立。若 $\lambda(h_\beta)=0$，则 $\Lambda_{\beta,\ m}\cdot v=0$ 对所有 $m>0$ 均成立，因此

$$\Lambda_\beta^+(u)\cdot v=\Lambda_{\beta,0}\cdot v=1\cdot v=v.$$

由于 $\Lambda_\beta^+(u)$ 的常数项为 1，其对数有定义：

$$\log \Lambda_\beta^+(u) = -\sum_{k\geq 1} \frac{h_\beta \otimes t^k}{k} u^k.$$

作用于 v，我们有 $\Lambda_\beta^+(u)\cdot v = v$，因此 $\log \Lambda_\beta^+(u)\cdot v = 0$。比较 u^k的系数可得，对于所有 $k \geq 1$，有 $(h_\beta \otimes t^k)\cdot v = 0$。因此，对于所有 $k > 0$，有 $\lambda(h_\beta) = 0 \Rightarrow (h_\beta \otimes t^k)\cdot v = 0$。

反过来，假设对于所有 $k > 0$，都有 $(h_\beta \otimes t^k)\cdot v = 0$。那么，在$\Lambda_\beta^+(u)$的定义中，指数函数作用于 v时是平凡的，因此$\Lambda_\beta^+(u)\cdot v = v$，即对于所有$m \geq 1$，有$\Lambda_{\beta,0}\cdot v = v$和$\Lambda_{\beta,m}\cdot v = 0$。根据 [6], 的命题 1.1(iii)，我们有

$$\left(\tilde{H}_\beta(u)\Lambda_\beta^+(u)\right)_s \cdot v = 0 \quad \text{for all } s \in \mathbb{Z},$$

这可以写成

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\tilde{H}_\beta(u)\right)_{s-r} \Lambda_{\beta,r}\cdot v = \sum_{r=0}^{\infty} h_{\beta,s-r-1}\Lambda_{\beta,r}\cdot v = h_{\beta,s-1}\Lambda_{\beta,0}\cdot v = 0.$$

因此，对于所有 $s \in \mathbb{Z}$，有$h_{\beta,s-1}\cdot v = 0$。特别地，当 $s = 1$时，即 $h_\beta \cdot v = \lambda(h_\beta)v = 0$。证明至此完成。□

引理 5.12。 设 $h \in \mathfrak{h}$和 $a \in \operatorname{rad} f$。若存在 $v \in V^+$使得 $(h \otimes t^a)\cdot v \neq 0$，则对所有 $w \in V^+$.，$(h \otimes t^a)\cdot w \neq 0$

证明。 我们考虑 $W' = \{v \in V^+ \mid h \otimes t^a \cdot v = 0,\ h \in \mathfrak{h},\ a \in \operatorname{rad} f\}$（固定 h）。由于 $h \otimes t^a$与 $H \otimes \mathbb{C}_q$和 $[d_i, h \otimes t^a] = a_i h \otimes t^a$对易，因此 W'是一个 $(H \otimes \mathbb{C}_q) \oplus D$-模。由于 V^+不可约， W'必为 0 或 V^+。□

引理 5.13。 对每个 $1 \leq i \leq n$，都存在一个非零的双射最高中心算子

$$z_i = h \otimes t_i^{M_i}, \quad h \in H,\ M_i \in \mathbb{Z},$$

作用于 V^+。

证明。 固定 $i \in \{1, \cdots, n\}$并选择 $0 \neq v_0 \in V^+$。根据引理 5.11，在环李代数 $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t_i^{N_i}, t_i^{-N_i}]$中运算，存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 以及一个元素 $h \in H$，满足 $\lambda(h) \neq 0$，使得

$$(h \otimes t_i^{kN_i})\cdot v \neq 0.$$

令 $M_i = kN_i$并定义 $z_i = h \otimes t_i^{M_i}$，则 z_i在 v_0上非平凡地作用。
根据引理 5.12，如果中心元 $h \otimes t^a$在V^+的某个非零向量上作用非平凡，那么它在每个非零向量上都作用非平凡。因此， z_i在 V^+上是单射。由于 $z_i V^+$是不可约模 V^+的一个非零 $H \otimes \mathbb{C}_q$-子模，我们必有 $z_i V^+ = V^+$，因此 z_i 是双射。□

引理 5.14。设 $z_i:\ V^+ \to V^+$ 是次数为 $M_i e_i$的最高中心算子。定义线性算子 $T_i:\ V^+ \to V^+$ 为

$$T_i(z_i v) = v \quad \forall\, v \in V^+.$$

进一步定义

$$W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z_i v - v \mid v \in V^+,\ 1 \le i \le n\}.$$

则以下结论成立

(1) $T_i z_i = \mathrm{Id}$。(2) $[T_i, H \otimes \mathbb{C}_q] = 0$。(3) 对所有 $v \in V^+$, $T_i v - v \in W$。(4) 对所有 $k \ge 1$和 $v \in V^+$, $T_i^k v - v \in W$。(5) 对所有 $k \ge 1$ 和 $v \in V^+$, $z_i^k v - v \in W$。

证明。 结论 (1) 和 (2) 由定义立即得到。

(3) 对任意 $v \in V^+$，存在 $w \in V^+$ 使得 $z_i w = v$。于是

$$T_i v - v = T_i(z_i w) - z_i w = w - z_i w = z_i(-w) - (-w) \in W,$$

因此 $T_i v - v \in W$。

(4) 我们对 k进行归纳。基础情形 $k = 1$ 正是 (3)。假设该陈述对 $k-1$成立，则对于 $v \in V^+$,

$$\begin{aligned} T_i^k v - v &= T_i(T_i^{k-1} v) - v \\ &= \big(T_i(T_i^{k-1} v) - T_i^{k-1} v\big) + \big(T_i^{k-1} v - v\big) \in W, \end{aligned}$$

由于根据归纳假设和 (3)，这两项都属于 W。

(5) 证明与 (4) 类似，并对 k进行归纳。 □

命题 5.15。 $W = {}_{\mathbb{C}}\{z_i v - v \mid v \in V^+,\ 1 \le i \le n\}$ 是 V^+的一个真 $H \otimes \mathbb{C}_q$-子模。

证明。 对于每个 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ n$，定义

$$D_k = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{d_{k+1}, \ldots, d_n\} \quad \text{and} \quad W_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z_1 v - v \mid v \in V^+\}.$$

我们首先证明， W_1 是 V^+的一个真（$H \otimes \mathbb{C}_q$） $\oplus\, D_1$-子模。

假设并非如此，那么存在某个非零权向量 $v_0 \in V^+$，其权为 μ，且属于W_1。因此，存在有限多个非零权向量 v_1、……、 $v_m \in V^+$（这些向量可能

假设为 l　即处于不同的权空间中）以及非零标量 c_1，……，$c_m \in \mathbb{C}$，使得　t

$$v_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i(z_1 v_i - v_i).$$

利用初等权考量，不妨设（不失一般性）

$$c_i(z_1 v_i) = c_{i+1} v_{i+1}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, m-1.$$

Then

$$v_0 = c_m(z_1 v_m) - c_1 v_1.$$

由于 z_1 具有非零次数，$z_1 v_m$ 和 v_1 位于不同的导子权空间中。由于不同权空间的分解是直和分解，一个权空间中的非零向量不可能等于另一个权空间中向量的非零线性组合。因此必有 $c_1 = 0$ 或 $c_m = 0$，这就产生了矛盾。这表明 W_1 是一个真子模。

现在考虑

$$W_2 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z_2 v - v \mid v \in V^+/W_1\}.$$

重复相同的论证，我们可以证明 W_2 是V^+/W_1的一个真（$H \otimes \mathbb{C}_q$）$\oplus D_2$-子模。对 $k = 1$，……，n迭代这一过程，我们得到

$$W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z_i v - v \mid v \in V^+,\ 1 \le i \le n\}$$

是 V^+ 的一个真 $H \otimes \mathbb{C}_q$-子模，正如所断言的。 □

定理 5.16。设 $V' = \mathcal{U}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q)W$且 $V' = V/\mathcal{V}'$。则

(1) V'是 V 的一个真 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$-子模。(2) V'是一个有限维 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$-模。(3) V在 $\mathfrak{g} \otimes \overline{\mathbb{C}}_q$ 上有一个有限维不可约商模，即存在一个包含 V' 的 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$-子模 V''（V'' 是 V 的子模），使得 V/V'' 是 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$ 上的有限维不可约模。

证明。(1) 这由命题 5.1 和命题 5.15 得出。

(2) 根据引理 5.7，权集 $P(V)$ 包含于有限个 δ–陪集的并中；因此存在有限个代表元 $\mu^{(1)}$、……、$\mu^{(s)}$，使得

$$V = \bigoplus_{j=1}^{s} \widetilde{V}_{\mu^{(j)}}, \quad \text{where} \quad \widetilde{V}_{\mu^{(j)}} = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}^n} V_{\mu^{(j)} + \delta_r}.$$

由于 V' 也是 δ–分次的，我们得到相应的分解

$$V' = \bigoplus_{j=1}^{s} \widetilde{V}'_{\mu^{(j)}}, \qquad \text{where} \quad \widetilde{V}'_{\mu^{(j)}} = \widetilde{V}_{\mu^{(j)}} \cap V'.$$

因此

$$\overline{V} = V/V' \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \big(\widetilde{V}_{\mu^{(j)}}/\widetilde{V}'_{\mu^{(j)}}\big),$$

~ ~只需证明，对于固定的 μ，商模 V_μ/V'_μ 是有限维的。

~固定这样一个 μ ，并令 $v \in V_\mu$。由于 V 由最高权空间 V^+ 生成，我们可以写成

$$v = \sum_{i=1}^{m} u_i w_i, \quad u_i \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q),\ w_i \in V^+.$$

令 $\mathcal{Z}$ 表示由引理 5.13 中引入的双射最高中心算子 z_1、.....、 z_n 在 $\mathcal{U}(H \otimes Z(\mathbb{C}_q))$ 中生成的交换子代数。每个 z_j 都具有齐次的 δ–次数 $p^{(j)} \in \mathbb{Z}^n$ ，且在 V^+ 上可逆。考虑将 z_j 中的单项式作用于 $w_i \in V^+$ 所得到的所有向量，

$$\{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} w_i \mid (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

每个这样的向量的权都是 $\mathrm{wt}(w_i) + \delta_{k_1 p^{(1)} + \cdots + k_n p^{(n)}}$。由于对每个 j 都有 $t_j^{N_j} \in Z(\mathbb{C}_q)$，次数 $p^{(j)}$ 在各个坐标上模 N_j 周期变化，因此这种形式的不同权只有有限多个。由于 V 的每个权空间都是有限维的，因此

$$\mathrm{span}\{\, z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} w_i \mid (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \,\} \subseteq \bigoplus_{|k_j| < N_j} V_{\mathrm{wt}(w_i) + \delta_{k_1 p^{(1)} + \cdots + k_n p^{(n)}}}$$

是有限维的。在这个有限维空间上，每个 z_j 都满足一个非平凡的多项式关系。因此，存在满足（$1 - z'_i$）$w_i \in W$的 $z'_i \in \mathcal{U}$（$\mathcal{Z}$）。现在，我们可以将 v 的展开式中的每一项重写为

$$u_i w_i = u_i\big((1 - z'_i) w_i\big) + u_i(z'_i w_i).$$

根据构造， $u_i\big((1 - z'_i) w_i\big) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q) W = V'$，因此这些项在商模~ ~ V_μ/V'_μ 中消失。每个 z'_i 都是由单项式构成的有限 $\mathbb{C}$– 线性组合，这些单项式取自相互交换的中心算子 $z_1, \ldots, z_n$，记作

$$z'_i = \sum_{\alpha \in F_i} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},$$

其中 $F_i \subset \mathbb{Z}^n$ 是有限指标集，且 $c_\alpha \in \mathbb{C}$。由于每个 z_j 的次数为 $p^{(j)} \in \mathbb{Z}^n$，因此 z_i' 的次数属于有限集合

$$\deg(z_i') = \{\, \alpha_1 p^{(1)} + \cdots + \alpha_n p^{(n)} \mid \alpha \in F_i \,\} \subset \mathbb{Z}^n.$$

如果 u_i 具有齐次的 δ–次数 r_i，那么每个形如 $u_i(z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} w_i)$的项都属于权空间

$$V_{\mu+\delta_{r_i+\alpha_1 p^{(1)}+\cdots+\alpha_n p^{(n)}}}.$$

因此，所有向量 $u_i(z_i' w_i)$都属于这样的权空间：它们与 μ 的 δ–偏移量位于有限集合

$$S_\mu = \bigcup_{i=1}^{m} \{\, r_i + \beta \mid \beta \in \deg(z_i') \,\} \subset \mathbb{Z}^n.$$

由此可知，和 $\sum_{i=1}^m u_i(z_i' w_i)$属于有限直和

$$N(\mu) = \bigoplus_{\rho \in S_\mu} V_{\mu+\delta_\rho} \subset \widetilde{V}_\mu.$$

~因此， v 模 V_μ' 同余于 $N(\mu)$中的一个元素；这是 V_μ 的一个固定有限-~维子空间，仅取决于 μ，而与 v的选取无关。由于~ ~每个权空间 $V_{\mu+\delta_\rho}$ 都是有限维的，所以 $N(\mu)$也是有限维的。因此，对每个 μ， V_μ/V_μ' 都是有限维的，从而$V = V/V'$ 也是有限维的。证明完毕。 —

（3）我们考虑 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$ 的任意严格递增子模序列，其中包含 V'，例如

$$V' \subset V_1 \subset \cdots.$$

这就得到 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$ 上相应的递减商模序列，对此我们有

$$0 \neq \dim(V/V_1) < \dim(V/V').$$

由 (2) 可知，这样的子模链不可能无限延续，因此必定会终止。因此，存在一个包含 V' 的真极大子模 $N \subset V$。从此以后，我们将不可约商模 V/N 记为 V。

—

□

6. Recovering the original module

本节的目标是从上一节末尾定义的有限维不可约 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}_q$-模 V 中，恢复不可约 $\hat{\tau}(d, q)$-模 V。

由于 V是不可约可积的$\hat{\tau}(d, q)$-模，而 V是 V的有限维不可约商模，因此 V 是 $\tau(d, q)$。的有限维不可约可积模。于是， $\overline{V}$可视为与我们在开头固定的分次模 V 相对应的非分次模。

设 $A_n = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}]$ 是由 n 个交换变量构成的 Laurent 多项式环。现在我们将定义$\hat{\tau}(d, q)$在张量积 $V \otimes A_n$上的作用。对于 $m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$，任意次数为 r 的齐次元素 $x \otimes t^r \in \hat{\tau}(d, q)$，以及任意 $w \in V$，定义

$$(x \otimes t^r) \cdot (w \otimes t^m) = ((x \otimes t^r) \cdot w) \otimes t^{r+m},$$
$$d_i \cdot (w \otimes t^m) = m_i (w \otimes t^m), \quad 1 \le i \le n.$$

不难验证，这些运算满足$\hat{\tau}(d, q)$的李括号关系，因此赋予 $V \otimes A_n$左$\hat{\tau}(d, q)$-模结构。

由于 V 是 $\mathbb{Z}^n$-分次的 $\hat{\tau}(d, q)$-模，

$$V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} V_m,$$

商映射 $\psi : V \to V$ 诱导出一个自然映射

$$\Psi : V \to \overline{V} \otimes A_n$$
$$v \mapsto \bar{v} \otimes t^m,$$

其中 $v \in V_m$，对某个 $m \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\bar{v} = \psi(v)$。容易验证， Ψ 是 $\hat{\tau}(d, q)$-模的一个非零同态。因此，由于 V 不可约， Ψ 是一个单射同态。这意味着 $\Psi(V)$ 是 $V \otimes A_n$ 的一个非零不可约 $\hat{\tau}(d, q)$-子模。

定理 6.1。

(1) $\overline{V} \otimes A_n$ 是关于 $(H \otimes \mathbb{C}_q) \oplus D$ 的 $\hat{\tau}(d, q)$ 的完全可约可积模，且在分次平移意义下只有有限个同构的不可约分量。(2) 作为 $\hat{\tau}(d, q)$-模， V 与 $V \otimes A_n$ 的一个不可约分量同构。

证明。 该定理的证明与 [13] 中命题 3.8 和定理 3.9 的证明完全相同。在那里，我们需要假设量子环面 $\mathbb{C}_q$ 是交换的，但这些证明对任意 $\mathbb{C}_q$ 都成立。□

7. THE FINAL CLASSIFICATION THEOREM

上一节显然将我们对具有有限维权空间的不可约可积 $\hat{}\tau(d,\ q)$ 模的研究归结为对有限维不可约 $\tau(d,\ q)$ 模的研究。这些有限维不可约模已在 [18] 中得到完整分类。本节我们回顾 [18] 中给出的 $\tau(d,\ q)$-模的分类，并据此对所有具有有限维权空间的不可约可积 $\hat{}\tau(d,\ q)$-模进行分类。我们用 $\mathbb{C}^\times$ 表示所有非零复数的集合。

令 N_j 为 q_{ij} 的阶的最小公倍数（即 $t_j^{N_j} \in Z(\mathbb{C}_q)$）。取互不相同的标量 $a_{jk} \in \mathbb{C}^\times$, $1 \leq k \leq M_j$ 并定义

$$Q_j(t_j) = \prod_{k=1}^{M_j}(t_j^{N_j} - a_{jk}), \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n.$$

令 $\mathcal{J}$ 为由 $Q_j(t_j)$'s 生成的 $\mathbb{C}_q$ 的理想，并且

$$\tilde{\mathcal{J}} = \sum_{i\neq j} \mathcal{J}E_{ij} \ + \ \sum_{i\neq j}[\mathbb{C}_qE_{ij}, \mathcal{J}E_{ji}],$$

then

$$\tau(d,q)/\tilde{\mathcal{J}} \cong \bigoplus_{K-copies} \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C}),$$

通过扩展

$$X \otimes t^m \mapsto X \otimes \pi(t^m),$$

其中

$$\pi : \mathbb{C}_q \to \bigoplus_{K-copies} M_N(\mathbb{C})$$

是通过对 $\mathcal{J}$ 取商诱导的代数同态。设 $(\rho,\ V)$ 是 $\bigoplus_K \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C})$ 的不可约表示，则 $(\rho \circ \tilde{\pi},\ V)$ 经由沿着该映射的拉回成为 $\tau(d,\ q)$ 的表示

$$\tau(d,q) \xrightarrow{\tilde{\pi}} \bigoplus_{K-copies} \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}(V).$$

定理 7.1。([18,定理 6。6])
每个有限维不可约 $\tau(d,q)$-模，都是通过某个李代数直和的典范满射同态拉回的有限维不可约模

$$\bigoplus_{K-copies} \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C})$$

经由该李代数的典范满射同态

$$\tilde{\pi} : \tau(d,q) \to \bigoplus_{K-copies} \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C}),$$

其中 $N = N_1N_2\cdots N_n$、 $K = M_1M_2\cdots M_n$，且每个 M_j 都是 Q_j 的互异根的个数。

换言之， $\tau(d,q)$ 的每个有限维不可约表示都具有如下形式：$(\rho\circ\tilde{\pi}, V)$，其中 (ρ, V) 是

$$\bigoplus_{K-copies} \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C}).$$

定理 7.2. 设 V 是一个不可约可积 $\hat{}\tau(d,q)$-模，具有有限维权空间，并假设每个中心元 c_i $(1 \le i \le n)$ 在 V 上的作用均为平凡作用。那么 V 同构于 $V \otimes A_n$ 的一个不可约分量，其中 V 是一个有限维不可约可积 $\tau(d,q)$-模，它是某个有限维不可约可积模沿规范同态 $\tilde{\pi}$ 从 $\bigoplus_K \mathfrak{sl}_{dN}(\mathbb{C})$ 拉回所得。

结合我们对平凡中心作用情形的结果（定理 7.2），以及 S. Eswara Rao 和 K. Zhao [18]对具有非平凡中心作用的模所得的分类，我们得到了所有具有有限维权空间的不可约可积 $\hat{}\tau(d, q)$- 模的完整描述。下述定理总结了完整的分类。

定理 7.3。 设 V是一个具有有限维权空间的不可约可积 $\hat{}\tau(d, q)$–模。那么经过分次平移后， V 恰属于以下两种类型之一

(1) 若某个中心元 c_i 在 V上作用非平凡，则 V 是以下模的一个不可约分支

$$\overline{W} \otimes A_{n-1}, \qquad where \quad A_{n-1} = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_{n-1}^{\pm 1}]$$

且 $\overline{W}$ 是下述代数上的一个不可约可积最高权模

$$\tilde{\tau}^{(n)} = \tilde{\tau}(d,q) \oplus \mathbb{C}d_n.$$

$W \otimes A_{n-1}$ 的所有不可约分量在相差一个分次平移 [18,的意义下同构定理6.12]。

(2) 若所有中心元 c_i、 $1 \leq i \leq n$ 在 V上平凡作用，则 V 是一个不可约分量，属于

$$\overline{V} \otimes A_n, \qquad where \quad A_n = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$$

且 $\overline{V}$是一个有限维不可约可积的 $\tau(d, q)$–模。 $V \otimes A_n$ 的所有不可约分量在分次平移意义下均同构(定理 7.2)。

References

[1] P. Batra，《扭多重环李代数的表示》，《代数杂志》272 (2004)，第 1 期，404-416；MR2029040[2] P. Batra 和 S. Eswara Rao，《关于扭全环面李代数的可积模》，《李理论杂志》28 (2018)，第 1 期，79-105；MR3683373。[3] S. Berman，Y. Gao，Y. Krylyuk，《量子环面与椭圆拟单李代数的结构》，《泛函分析杂志》135 (1996)，339-389。[4] V. Chari，《仿射李代数的可积表示》，《数学发明》85 (1986)，317-335。[5] V. Chari，Jacob Greenstein，《仿射李代数的分次零级可积表示》，《美国数学会汇刊》360 (6) (2008)，2923-2940。[6] V. Chari，A. Pressley，《经典与量子仿射代数的韦尔模》，《表示论》5 (2001)，191–223。[7] J. E. Humphreys，《李代数与表示论导论》，《数学研究生教材》第 9 卷，施普林格出版社，纽约、柏林，1972。[8] V.G. Kac，《无限维李代数》第三版。剑桥大学出版社，剑桥，1990。[9] M. Lau，《多环代数的表示》，《太平洋数学杂志》245 (1) (2010)，167–184。[10] S. Pal，《具有有限维权空间的分次李环面的可积模》，《纯粹与应用代数》225 (2021)，第 9 期，论文编号 106679，共 21 页；MR4200814。[11] S. Pal 和 S. Eswara Rao，《扭全环面李代数零级不可约可积模的分类》，《代数杂志》578 (2021)，1-29；MR4234795。[12] S. E. Rao，《具有有限维权空间的环面李代数不可约可积模的分类》，《代数杂志》277 (2004)，318-348。[13] S. E. Rao，《环面李代数的不可约表示》，《纯粹与应用代数》202 (2005)，102-117。[14] S. E. Rao，P. Batra，《由二元量子环面协调的扩展仿射李代数的一类新表示》，《加拿大数学通报》45 卷 (4) (2002)，672-685。[15] S. Eswara Rao 和 V. M. Futorny，《仿射李超代数的可积模》，《美国数学会汇刊》361 (2009)，第 10 期，5435–5455；MR2515818。[16] S. Eswara Rao，R.V. Moody，T. Yokonuma，《环面李代数与顶点表示》，《奉献几何》35 (1990)，283–307。

[17] S. E. Rao，S. S. Sharma，P. Batra，《扭曲环面扩展仿射李代数的可积模》，《代数杂志》556 (2020)，1057-1072。[18] S. E. Rao，K. Zhao，《由有理量子环面协调的环面李代数的可积表示》，《代数杂志》361 (2012)，225-247。[19] S. Tantubay，P. Batra，《由有理量子环面协调的完整环面李代数的不可约可积模》，《代数杂志》610 (2022)，527-545；MR4466715。[20] S. Tantubay 和 P. Batra，《中心平凡作用的扩展仿射李代数不可约可积模的分类》，《李理论杂志》33 (2023)，第 3 期，747-762；MR4636906。

Harish-Chandra Research Institute, A CI of Homi Bhabha National Institute, Chhat-nag Road, Jhunsi, Prayagraj - 211019电子邮件地址：sumanrani@hri.res.in, batra@hri.res.in