环、模及其同调理论的一致 S版本综述

张晓磊，齐伟

摘要

本文综述了交换环理论中“一致 S”代数结构理论的最新进展。该理论源自诺特环、凝聚环、冯·诺伊曼正则环和半单环等经典概念；引入乘法子集 S 后，推动了 S-诺特、 S-凝聚及其他 S-类似物的发展。然而，原始定义中的元素 $s \in S$ 往往取决于所考察的理想或模。为克服这一局限，并实现更深入的模论刻画，人们引入了“一致 S”的概念（简称 u-S）。本文系统介绍了 u-S-挠模、 u-S-正合列的定义、刻画和性质，以及基本模类的一致类似物： u-S-有限表示、 u-S-诺特、 u-S-凝聚、 u-S-平坦、 u-S-投射、 u-S-内射和 u-S-绝对纯模。随后，我们探讨了相关的一致同调维数，包括 u-S-弱整体维数、 u-S-整体维数，以及它们与多项式环和局部化之间的相互关系。本文还涵盖了若干结构性环类，例如 u-S-冯·诺伊曼正则环、 u-S-半单环、 u-S-阿廷环、 u-S-乘法环，以及具有 u-S-诺特谱的环。

关键词：一致 S-挠理论；经典环和模的一致 S-版本；一致 S-同调理论。*2020*年数学主题分类：13D30。

arXiv:2602.13809v1 [math.AC] 14 Feb 2026

目录

1 引言和背景 3

2 一致 S-挠理论与正合列 5

3 F一致 S-挠理论中的有限性条件 7

3.1 一致 S-有限表示模.8 3.2 一致 S-诺特环与模.9 3.3 一致 S-凝聚环与模.11 3.4 一致 S-Artin 环与模.12

4 经典模的一致S-版本 15

4.1 一致 S-平坦模.16 4.2 一致 S-投射模.18 4.3 一致 S-内射模.20 4.4 一致 S-绝对纯模.21

5 同调维数：一致 S-弱全局维数与一致 S-全局维数 23

5.1 一致 S-平坦维数与一致 S-弱全局维数 24 5.2 一致 S-投射（内射）维数，以及一致 S-全局维数.27

5.3 一致 S-全局维数的换环定理 31

6 经典环的一致 S-版本 32

6.1 一致 S-冯·诺伊曼正则环.32 6.2 一致 S-半单环.33 6.3 一致 S-乘法模与环.35 6.4 具有一致 S-诺特谱的环.38

1 引言与背景

交换环的研究深深植根于有限性条件。诺特环以理想满足升链条件为特征，是经典交换代数的基石。Anderson 和 Dumitrescu 在其具有开创性的 2002年 论文 [1] 中提出了诺特性质的一种自然且影响深远的推广。对于给定的乘法子集 $S \subseteq R$，他们将环 R 定义为 S-诺特环，若对 R的每个理想 I，都存在一个有限生成子理想$K \subseteq I$ 和一个元素 $s \in S$，使得 $sI \subseteq K$。这一优雅的定义放宽了每个理想都必须有限生成的要求；取而代之的是，每个理想都是“S-有限”的，也就是说，它包含于某个有限生成子模乘以 S中的一个元素所得的集合中。这篇论文开启了大量研究，推动了众多环论概念的 S类比的发展，包括S-诺特模 [6]、 S-相干环 [5]、 c-S-相干环 [5]、 S-阿廷环 [18]、 S-GCD 整环 [3]、 S-强 Mori 整环 [10], 以及 S-几乎完美环 [4]。这些概念在将经典结果推广到更广泛的背景方面发挥了重要作用，并已应用于各种环构造，例如多项式环、幂级数环、平凡扩张和拼合代数[11, 12, 13]。

这些初始定义的一个共同点是，见证有限性条件的元素 $s \in S$ 并不具有一致性；它可能会根据所涉及的理想或模而变化。例如，对于一个 S-诺特环 R，对每个理想 I，都存在一个 $s_I \in S$，使得 $s_I I \subseteq K_I$对某个有限生成的 K_I成立。尽管这种非一致性十分有力，但在试图证明模论刻画或经典定理的“一致”版本时，它会带来重大障碍，例如 Eakin-Nagata定理或 Cartan-Eilenberg-Bass 定理；在这些定理中，必须由单个元素控制所有子模或整个模族的行为。

为应对这一挑战，Zhang 在[20]中引入了“一致性”的概念。其核心思想是固定单个元素 $s \in S$，使其对给定类中的所有对象都一致地发挥作用。由此产生了 u-S-挠模的定义：如果存在一个 $s \in S$ 使得 $sT = 0$，则一个 R-模 T 是u-S-挠的。这一简单而强大的概念为同调代数的系统化“一致”推广铺平了道路。在此基础上，Zhang 及其合作者，包括 Qi、Kim、Wang、Chen、Zhao、Hamed 等人，发展出了一套完整的一致 S-结构理论。

这一统一视角的首个重要应用，是在 [20] 中引入了u-S-平坦模。若对模 F 进行张量积运算会保留 u-S-正合列，则称模 F 是 u-S-平坦的。这等价于对所有模 M，$\mathrm{Tor}_1^R(M, F)$ 都是 u-S-挠的，这与平坦性的经典刻画直接对应。这项工作还引出了 u-S-冯·诺伊曼正则环 [20], 的定义，其中单个元素 $s \in S$ 可以对所有 $a \in R$ 统一控制正则条件 $sa = ra^2$。研究证明，一个环是 u-S- 冯 · 诺伊曼正则的，当且仅当每个模都是 u-S-平坦的；这是冯·诺伊曼正则环经典刻画的完美 u-S-类比。

在此之后，Qi 等人 [7] 引入并深入研究了 u-S-诺特环和模。若存在一个固定的 $s \in S$，使得 R 环 u是 S- $s \in S$ -诺特的，则

环 I 中的每个理想 R 都满足 $sI \subseteq K$，其中某个 $K \subseteq I$是有限生成理想。这一统一条件使 Eakin-Nagata-Formanek 定理得以成功推广，更为关键的是，也使 Cartan-Eilenberg-Bass 定理得以推广。后者通过以下性质刻画 u-S-诺特环：内射模的直和是 u-S-内射的。这一里程碑式结果展示了统一方法的强大威力。在此背景下，人们定义并研究了 u-S-内射模，以刻画 u-S-诺特环。

阿廷环的概念也从一致的视角得到了研究。Zhang and Qi [24] 定义了 u-S-阿廷模和环，并用关于 s的一致降链条件刻画了它们。他们证明了一个基本结构定理：环 R 是 u-S-阿廷的，当且仅当它是 u-S-诺特的，其 u-S-雅各布森根 $\mathrm{Jac}_S(R)$ 是 S-幂零的，并且 $R/\mathrm{Jac}_S(R)$ 是 u-$S/\mathrm{Jac}_S(R)$-半单环。该定理与阿廷环的经典刻画形成了优美的平行关系，并展现了各种一致性质之间的深刻联系。

Zhang and Qi 于 [21]引入了 u-S-投射模和u-S-半单环，从而完成了对偶理论。若 $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ 保持 u-S- 正合列，则 R- 模 P 称为 u-S- 投射的；这等价于对所有 M，$\mathrm{Ext}^1_R(P, M)$ 都是 u-S-挠的。若每个自由模都是 u-S-半单的，则称一个环为 u-S-半单的；由此可得一系列等价条件，包括每个模都是 u-S-投射的，且每个模都是 u-S-内射的。

后续研究探讨了与这些概念相关的同调维数。Zhang [22] 定义了环 R的 u-S-弱全局维数，记为 u-S-w.gl.dim(R)，即所有 R-模的 u-S-平坦维数的上确界。研究表明，这一维数与局部化 R_S的经典弱全局维数有关。这项研究还引入了模的 u-S-平坦维数，并给出了经典弱全局维数的一种新的局部刻画。在一项平行研究中，Zhang [16]引入了 u-S-全局维数 u-S-gl.dim(R)，定义为所有模的 u-S-投射维数（或等价地，u-S-内射维数）的上确界。这项研究的一项重要成果是证明：对于多项式环，在温和条件下，u-S-gl.dim($R[x]$) $= u$-S-gl.dim(R)$+1$。这一结果显著偏离经典的希尔伯特零化子定理，并直接类比于弱全局维数的情形。

一致挠理论的进一步应用已出现在乘法模与环的研究中。Qi 和 Zhang [15]引入了 u-S-乘法模与环，其中一个 $s \in S$ 一致地控制着这样一个条件：每个子模都可表示为 IM 乘以 s的形式。这为先前研究的 S-乘法模 [2, 8]提供了一致版本。他们还探讨了这类环在理想化等构造下的行为。

该理论也已扩展到涵盖素谱的性质。Guesmi 和 Hamed [9] 引入了具有 u-S-诺特谱的环这一概念，其中存在一个一致的 $s \in S$，使得每个根理想在根意义下都是 S有限生成的。作者 [26] 证明了这类环的希尔伯特基定理，并研究了它们在多种构造下的性质，包括平坦上环、塞尔猜想环、永田环、安德森环和半群环。这项工作将一致理论与关于环的经典结果联系起来

诺特谱 [14, 17]。

2 一致 S-挠理论与正合列

一致 S理论的发展始于对挠概念的精细化。在经典环论中， S挠模是指其中每个元素都被乘法集 S中的某个元素消去的模。然而，这个元素可能因元素而异。为了实现一致性，我们要求存在一个 S 中的单个元素，能够消去整个模。由此得到以下基础定义。

定义 2.1. *[20]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。若存在一个元素 $s \in S$ 使得 $sT = 0$，则称 T 为一个 u-S-挠模（关于 s）。

这一概念比通常的 S-挠更严格，对一致理论至关重要。下面这个来自 [20]的例子说明了两者的区别。

例 2.2. *[20,* 例 *2.2]* 设 $R = \mathbb{Z}$ 且 $S = \{p^n \mid n \geq 0\}$，其中 p为一个素数。考虑 $M = \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$这个 $\mathbb{Z}$-模。则：

1. M 是 S-挠的，但不是 u-S-挠的。
2. M 没有极大 u-S-挠子模。

尽管一般而言并不存在极大 u-S-挠子模，但下面的命题表明，当这样的极大元存在时，它是唯一的。

命题 2.3。 *[20,* 命题 *2.4]* 设 R 为环， S 为 R的乘法子集。若一个 R-模 M 有极大 u-S-挠子模，则 M 只有一个极大 u-S-挠子模。

u-S-挠模与 S-挠自由模的类密切相关，如下面的函子刻画所示。

命题 2.4。 *[20,* 命题 *2.5]* 设 R 为环， S 为 R的乘法子集。则 R-模 F是 S-挠自由的，当且仅当对于任意 u-S-挠模 T，都有$\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$。

由此直接可得，将 Tor 函子作用于一个 u-S-挠模，会得到另一个 u-S-挠模。

推论 2.5. *[20,* 推论 *2.6]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集，且 T是一个 u-S-挠模。则对于任意 R-模 M和 $n \geq 0$，$\mathrm{Tor}_n^R(M, T)$ 都是 u-S-挠的。

有了这一精细化的挠概念，我们现在可以在一致意义下定义正合性。关键在于，通常的包含条件只需在乘以 S中的某个固定元素之后成立。

定义 2.6. *[20, 定义 2.7]* 设 R 为一个环，且 S 为 R的一个乘法子集。设 M、 N 和 L 为 R-模。

1. 若 $Ker(f)$（分别地，$Coker(f)$）是 u-S-挠模，则称 R-同态 $f: M \to N$ 为 u-S-单态射（分别地，u-S-满态射）。*2.* 若一个 R-同态 $f: M \to N$ 既是 u-S-单态射，又是 u-S-满态射，则称其为 u-S-同构。*3.* 若存在一个元素 $s \in S$，使得 $sKer(g) \subseteq Im(f)$ 且 $sIm(f) \subseteq Ker(g)$，则称 R-序列 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ 在 N处是 u-S-正合的。

不难验证，一个同态是 u-S-单态射，当且仅当 $0 \to M \xrightarrow{f} N$ 是 u-S-正合的。u-S-挠模在u-S-正合列下的性质至关重要。

命题 2.7. *[20, 命题 2.8]* 设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集，且 M 是一个 R-模。则以下断言成立。

1. 假设 M 是 u-S-挠的，且 $f: L \to M$ 是一个 u-S-单态射。则 L是 u-S-挠的。*2.* 假设 M 是 u-S-挠的，且 $g: M \to N$ 是一个 u-S-满态射。则 N 是u-S-挠的。*3.* 设 $f: M \to N$ 是一个 u-S-同构。若 M 和 N 之一是 u-S-挠的，则另一个也如此。*4.* 设 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ 是一个 u-S-正合列。当且仅当 L 和 N 是 u-S-挠的时， M 才是 u-S-挠的。

u-S-同构的一个关键性质是它们存在拟逆，从而在强意义下构成等价关系。

引理 2.8. *[21, 引理 2.1]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。假设存在一个 u-S-同构 $f: M \to N$，其中 M 和 N是 R-模。那么存在一个 u-S-同构 $g: N \to M$，且 $t \in S$ 满足 $f \circ g = t$ 恒等映射 $_N$ 以及 $g \circ f = t$ 恒等映射 $_M$。

[21] 中的一条注记澄清了，这比仅仅在局部化后存在同构的条件更强。

注 2.9. *[21, 注 2.2]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集，且M 和 N 是 R-模。条件“存在一个 R-同态 $f: M \to N$，使得 $f_S: M_S \to N_S$ 是一个同构”并不蕴含“存在一个 R-同态 $g: N \to M$，使得 $g_S: N_S \to M_S$ 是一个同构”。例如，取 $R = \mathbb{Z}$、 $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$以及包含映射 $f: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$。

同调代数中的一个强大工具是五引理。它的统一 S- 类比形式同样成立，并且常用于图表追踪。

命题 2.10。 *[22,* 命题 *1.2]*设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集。考虑如下交换图，其中各行均为 u-S-正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{g_1} & B & \xrightarrow{g_2} & C & \xrightarrow{g_3} & D & \xrightarrow{g_4} & E \\ {\scriptstyle f_A}\downarrow & & {\scriptstyle f_B}\downarrow & & {\scriptstyle f_C}\downarrow & & {\scriptstyle f_D}\downarrow & & {\scriptstyle f_E}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{h_1} & B' & \xrightarrow{h_2} & C' & \xrightarrow{h_3} & D' & \xrightarrow{h_4} & E' \end{array}$$

1. 若 f_B 和 f_D 是 u-S-单态射，且 f_A 是 u-S-满态射，则 f_C 是 u-S-单态射。

2. 若 f_B 和 f_D 是 u-S-满态射，且 f_E 是 u-S-单态射，则 f_C 是 u-S-满态射。

3. 若 f_A 是 u-S-满态射， f_E 是 u-S-单态射，且 f_B 和 f_D 是 u-S-同构，则 f_C 是 u-S-同构。

4. 若 f_A、 f_B、 f_D、 f_E 都是 u-S-同构，则 f_C 是 u-S-同构 $m.$

一致的 S-理论也与 S-有限性的经典概念密切相关。回顾一下，若存在一个有限生成子模 F 和一个元素 $s \in S$，使得 $sM \subseteq F$，则称模 M 是 S-**有限** 的（相对于 s）。

命题 2.11. *[20,* 命题 *2.9]*设 R 为一个环， S 为 R 的乘法子集，且 M 为一个 R-模。则下列断言成立。

1. 设 M 为一个 S-有限的 R-模，且 $f\colon\ M \to N$ 为一个 u-S-满同态。则 N 是 S-有限的。*2.* 设 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ 为一个 u-S-正合列。若 L 和 N 均为 S-有限的，则 M也是。*3.* 设 $f\colon\ M \to N$ 为一个 u-S-同构。若 M 和 N 之一是 S- 有限的，则另一个也是。

这些基础工具——u-S-挠、 u-S-正合性以及 S-有限性的性质——构成了后续所有一致概念的基石。它们使我们能够发展出一套稳健的同调代数理论：通过以 u-S-正合性替代正合性，并以 u-S-挠模替代零模，可以改写经典证明。

3 均匀 S-挠理论中的有限性条件

有限性条件是交换代数的核心。引入 S-诺特性质是为了放宽经典的诺特条件。它的一致对应概念—— u-S-诺特性质——通过要求同一个元素$s \in S$ 适用于所有理想而增强了该性质。这种一致版本使得强大的模论刻画成为可能，而这些刻画对于原始的 S-诺特环而言一直难以实现。

3.1 一致S-有限表示模

在定义 u-S-诺特环之前，我们需要有限表示的一致版本，它综合了 S-有限表示与 c-S-有限表示模的概念。

定义 3.1. *[25,* 定义 *2.1]*设 R 是一个环， S 是R 的一个乘法子集，且 $s \in S$。称 R-模 M 为 u-S-有限表示 （关于 s），如果存在一个正合列

$$0 \to T_1 \to F \xrightarrow{f} M \to T_2 \to 0$$

其中 F 是有限表示的，且 $sT_1 = sT_2 = 0$。

该定义意味着，一个模是 u-S-有限表示的，如果它与一个有限表示模 u-S-同构。这类模具有良好的封闭性质。

命题 3.2. *[25,* 命题 *2.2]* 设 $\Phi: \ 0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$是 R-模的一个u-S-正合列。下列陈述成立。

1。 u-S-有限表示模类在 u-S-同构下封闭 $ms.$

2. 若 M 与 L 均为 u-S-有限表示的，则 N亦然。

3. u-S-有限表示模的任意有限直和均为 u-S-有限表示的。*4.* 若 N 是 u-S-有限表示的，则 L 是 u-S-有限表示的当且仅当M 是 S-有限的。

下列命题在 S 由有限多个元素组成这一温和条件下，将 u-S-有限表示模与局部化 R_S上的经典有限表示概念联系起来。

命题 3.3. *[25,* 命题 *2.4]* 设 R 是一个环， S 是由有限元组成的 R 的乘法子集。则 R-模 M 是 u-S-有限表示R-模当且仅当 M_S 是有限表示 R_S-模。

有限生成的局部-整体原理是一个经典结果。其一致版本是诺特模刻画的先导。

引理 3.4. *[25,* 引理 *2.5]* 设 R 是一个环， S 是 R的乘法子集， M 是一个 R-模。下列陈述等价：

1. M 是有限生成的 R-模；

2. 对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$， M 都是 $\mathfrak{p}$-有限的；

3. 对任意 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$， M 都是 $\mathfrak{m}$-有限的。

有限表示也满足类似的局部-整体原理，这为经典有限表示模提供了一种新的刻画。

命题 3.5。 *[25,* 命题 *2.6]*设 R 为一个环， M 为一个 R-模。以下陈述等价:

1. M 是有限表示的 R-模;
2. 对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$， M 都是 u-$\mathfrak{p}$-有限表示的;
3. 对任意 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$， M 都是 u-$\mathfrak{m}$-有限表示的。

3.2 一致 S-诺特环与模

u-S-有限性的概念可以推广到模族。若同一个元素 $s \in S$ 适用于所有成员，则称模族是一致 S-有限的。这一概念是定义 u-S-诺特模的关键。

定义 3.6。 *[7,* 定义 *2.7]* 设 $\{M_j\}_{j\in\Gamma}$ 是一个 R-模族，且对每个 $j \in \Gamma$，N_j 是由 $\{m_{i,j}\}_{i\in\Lambda_j} \subseteq M_j$ 生成的 M_j 的子模。若存在 $s \in S$，使得对每个 $j \in \Gamma$ 都有 $sM_j \subseteq N_j$，则称该模族是关于 s的 u-S-有限 的。

若某个 R-模 M 的所有子模构成的集合是 u-S-有限的，则称其为 u-S-诺特模。

定义 3.7。 *[7,* 定义 *2.7]* 设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集。若 R-模 M 的所有子模构成的集合是 u-S-有限的，则称其为一致 S-诺特 （或 u-S-诺特）R-模。

该定义通过一致升链条件给出了如下优美的刻画。

定理 3.8。 *[7,* 定理 *2.8]*（一致S-诺特模的 *Eakin-Nagata-Formanek* 定理）设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集，且 M 是一个R-模。那么，以下条件等价:

1. M 是一致 S-诺特的;
2. 存在 $s \in S$，使得 M 的任意子模升链关于 s 都是稳定的;
3. 存在 $s \in S$，使得 M 的子模的任意非空子集相对于 s 都有一个极大元。

将此结论应用于环本身，可得到 u-S-诺特环的刻画。

推论 3.9. *[7,* 推论 *2.9]* 设 R 是一个环， S 是R的一个乘法子集。则以下条件等价:

1. R 是均匀 S-诺特的;
2. 存在 $s \in S$，使得 R 的任意理想升链关于 s 都是稳定的;

3. 存在 $s \in S$，使得 R 的任意非空理想子集关于 s 都有一个极大元。

当 S 满足极大倍数条件（即存在 $s \in S$ 使得 S 中的每个元素都整除 s）时，S-诺特性质与 u-S-诺特性质等价。

命题 3.10。 *[7,* 命题 *2.5]* 设 R 为一个环，S 为 R 的一个满足极大倍数条件的乘法子集。则以下陈述等价。

1. R 是一个一致 S-诺特环（分别为一致 S-主理想环）。

2. R 是一个 S-诺特环（分别为 S-主理想环）。

3. R_S 是一个诺特环（分别为主理想环）。

u-S-诺特性质在 u-S-正合列下表现良好。

引理 3.11. *[7,* 引理 *2.13]* 设 R 是一个环，R的乘法子集为 S。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 R-模的正合列。当且仅当 A 和 C 都是一致 S-诺特时，B 是一致S-诺特的。

这也推广到 u-S-正合列。

命题 3.12. *[7,* 命题 *2.14]* 设 R 是一个环，R的乘法子集为 S。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 R-模的 u-S-正合列。当且仅当 A 和 C 都是一致 S-诺特时，B 是一致 S-诺特的。

直接推论是，该性质在 u-S-同构下保持不变。

推论 3.13. *[7,* 推论 *2.15]*设 R 是一个环，R的乘法子集为 S，且 $M \xrightarrow{f} N$ 是 R-模的一个 u-S-同构。若 M 和 N 中有一个是一致S-诺特的，则另一个也是。

这引出了经典诺特模的一种新的局部刻画。

命题 3.14. *[7,* 命题 *2.16]* 设 R 是一个环，且 M 是一个 R-模。那么以下条件等价：

1. M 是诺特的；

2. 对任意 $\mathfrak{p} \in$素谱(R)，M 都是一致 $\mathfrak{p}$-诺特的；

3. 对任意 $\mathfrak{m} \in$极大谱(R)，M 都是一致 $\mathfrak{m}$-诺特的。

以下定理给出了 u-S-诺特环的若干等价刻画，其中包括一种关于有限生成模的 u-S-有限表示的新刻画。

定理 3.15。 *[25,* 定理 *2.7]* 设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法子集。那么以下陈述等价：

1. 环 R 是 u-S-诺特的;

2. 任意 S-有限模都是 u-S-诺特的;

3. 任意有限生成模都是 u-S-诺特的;

4. 存在 $s \in S$，使得任意有限生成模相对于 s 都是 u-S-有限表示的。

3.3 一致 S-相干环与模

相干环是诺特环的一种自然推广，其有限性条件施加于有限生成理想的呈现。一致S-类似概念定义如下。

定义 3.16. *[25,* 定义 *3.1]* 设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集。若存在 $s \in S$，使得 R-模 M 相对于 s 是 S-有限的，并且 M 的任意有限生成子模相对于 s都是 u-S-有限表示的，则称其为一个 u-S-相干模（相对于 s）。

u-S-相干模在 u-S-正合列下具有良好的性质。

定理 3.17. *[25,* 定理 *3.2]* 设 $\Phi\colon\ 0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$ 是一个 u-S-正合的 R-模正合列。以下陈述成立。

1. u-S-相干模的类在 u-S-同构下封闭。

2. 若 L 是 u-S-相干的，则 M 是 u-S-相干的，当且仅当 N 是 u-S-相干的 $t.$

3. 任意有限个 u-S-相干模的直和都是 u-S-相干的。

4. 若 N 是 u-S-相干的且 M 是 S-有限的，则 L 是 u-S-相干的。

若一个环作为自身上的模是 u-S-相干的，则称其为 u-S-相干环。

定义 3.18。 *[25,* 定义 *3.5]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。若存在一个元素 $s \in S$，使得 R 的每个有限生成理想都是关于 s u-S-有限表示的，则称 R 为关于 s的 u-S-相干环 。

u-S-相干模与 u-S-相干环之间的关系类似于经典情形。

推论 3.19。 *[25,* 推论 *3.4]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。设 N 是一个 R-模 M的子模。若 M 是 u-S-相干的，且 N 是S-有限的，则 M/N 是 u-S-相干的。

存在一种有用的 u-S-相干环的理想论刻画，类似于经典情形下对相干环的刻画。

命题 3.20 (Zhang [25], 命题 3.11)。 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。那么以下陈述等价:

1. R 是一个 u-S-凝聚环；*2.* 存在 $s \in S$，使得对于任意 $r \in R$，$(0 :_R r)$ 关于 s 是 S-有限的，并且 R 的两个有限生成理想的交关于s是 S-有限的；*3.* 存在 $s \in S$，使得对于任意元素$b \in R$ 和 R的任意有限生成理想 I，$(I :_R b)$ 关于 s 是 S-有限的。

一致性质比其非一致对应性质更强。u-S- 凝聚环既是 S-凝聚环，也是 c-S-凝聚环。

命题 3.21 (Zhang [25], 命题 3.12)。设 R 是一个环，S 是 R的乘法子集。若 R 是一个 u-S-凝聚环，则 R 既是 S-凝聚环，也是c-S-凝聚环。

当 S 是有限集时，所有这些概念都等价。

命题 3.22 (Zhang [25], 命题 3.13)。设 R 是一个环，S 是 R 中由有限元组成的乘法子集。则下列陈述等价:

1. R 是一个 u-S-凝聚环;

2. R 是一个 S-凝聚环;

3. R 是一个 c-S-凝聚环。

将一个 u-S-凝聚环在一致元素处局部化，可得到一个经典相干环。

命题 3.23。 *[25,* 命题 *3.14]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个乘法子集。若 R 是关于某个 $s \in S$的 u-S-凝聚环，则 R_s 是一个凝聚环。

下面的例子改编自 [25], ，它表明一个环可以既是S-凝聚的，又是 c-S-凝聚的，但并非 u-S-凝聚的，这凸显了一致条件的强度。

例 3.24。 *[25,* 例 *3.15]* 设 R 是一个整环，使得对任意非零 $s \in R$，R_s 都不是凝聚的。例如，$R = \mathbb{Q} + x\mathbb{R}[[x]]$。令 $S = R \setminus \{0\}$。则 R既是 S-凝聚的，也是 c-S-凝聚的，但它不是 u-S-凝聚的。

3.4 一致 S-阿廷环与模

阿廷环是满足理想降链条件的环。一致 S-类比要求由一致元素来控制该链条件。

定义 3.25。 *[24,* 定义 *2.1]* 设 R 为一个环，且 S 为 R的一个乘法子集。若一个 R-模 M 满足：存在 $s \in S$，使得其子模的每条下降链 $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ 均关于 s是 S-平稳的，即存在 $k \geq 1$，使得对所有 $n \geq k$都有 $sM_k \subseteq M_n$，则称其为 u-S-阿廷 模（关于 s）。

如果一个环作为自身上的模是 u-S-阿廷的，则称该环是 u-S-阿廷的。

定义 3.26 (Zhang andQi [24], 定义 3.1)。 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。若 R 是一个 u-S-阿廷 R-模，则称 R 为（关于s的） u-S-阿廷 环。

该性质在对 S取饱和时保持不变。

命题 3.27。 *[24,* 命题 *2.3]*设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集， M 是一个 R-模。设 S^* 是 S的饱和。那么， M 是一个 u-S-阿廷R-模，当且仅当 M 是一个 u-S^*-阿廷 R-模。

在一致元素处局部化一个 u-S-阿廷模，可得一个经典阿廷模。

引理 3.28。 *[24,* 引理 *2.4]* 设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集，M 是一个 R-模。若 M 是一个 u-S-阿廷 R-模，则存在一个元素$s \in S$ ，使得 M_s 是一个阿廷 R_s-模。

当 S 满足极大倍数条件时， S-阿廷与 u-S-阿廷等价。

命题 3.29. *[24,* 命题 *2.6]*设 R 是一个环， S 是 R 的一个满足极大倍数条件的乘法子集，且 M 是一个 R-模。那么， M 是u-S-阿廷模，当且仅当 M 是一个 S-阿廷模。

然而，一般而言， S-阿廷模未必是 u-S-阿廷模，赋值整环的一个例子说明了这一点。

例 3.30. *[24,* 例 *2.7]* 设 R 是一个赋值整环，其赋值群为 ***Hahn*** 积 $G = \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}$。设 $S = R \setminus \{0\}$。那么 R 本身是一个S-阿廷 R-模，但不是 u-S-阿廷模。

该性质在 u-S-同构下保持不变，并且在 u-S-正合列中表现良好。

引理 3.31. *[24,* 引理 *2.8]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。设 M 和 N 是 R-模。若 M 与 N是 u-S-同构的，则 M 是 u-S-阿廷模，当且仅当 N 是 u-S-阿廷模。

命题 3.32。 *[24,* 命题 *2.9]* 设 R 为一个环， S 为 R的乘法子集。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 为一个 S-正合列。当且仅当 A 和 C 均为 u-S-阿廷模时， B 是 u-S-阿廷模。因此，有限直和$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 是 u-S-阿廷模，当且仅当每个 M_i 都是 u-S-阿廷模。

得到了经典阿廷模的局部刻画。

命题 3.33。 *[24,* 命题 *2.10]* 设 R 为一个环， M 为一个 R-模。则以下陈述等价：

1. M 是阿廷的；

2. 对任意 $\mathfrak{p} \in$素谱(R)， M 都是 u-$\mathfrak{p}$-阿廷的；

3. M 对任意 $\mathfrak{m} \in$ 极大谱(R)，都是 u-$\mathfrak{m}$-阿廷的。

u-S-余有限模的概念是有限余生成模的一致版本。

定义 3.34. *[24,* 定义 *2.11]* 设 R 是一个环， R的一个乘法子集为 S 。若存在一个 $s \in S$，使得对于 M 的每个非空子模族 $\{M_i\}_{i\in\Delta}$， $\bigcap_{i\in\Delta} M_i = 0$ 蕴含 $s(\bigcap_{i\in\Delta'} M_i) = 0$ 对某个有限子集 $\Delta' \subseteq \Delta$ 成立，则称 R-模 M 是 u-S-余有限 （相对于 s）。

下面的定理给出了 u-S-阿廷模的若干刻画，包括涉及极小元以及商的余有限性的条件。

定理 3.35. *[24,* 定理 *2.15]* 设 R 是一个环， R的一个乘法子集为 S，且 M 是一个 R-模。设 $s \in S$。那么以下陈述等价：

1. M 是相对于 s的 u-S-阿廷模；*2.* M 满足相对于 s 的 *(S-MIN)* 条件（每个非空子模族关于 s都有一个 S-极小元）；*3.* 对于 M的任意非空子模族 $\{N_i\}_{i\in\Gamma}$，存在一个有限子集$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，使得 $s\bigcap_{i\in\Gamma_0} N_i \subseteq \bigcap_{i\in\Gamma} N_i$；*4.* 每个商模 M/N 都是相对于 s的 u-S-余有限模。

对于具有正则乘法集的环， u-S-阿廷蕴含经典阿廷。

命题 3.36。 *[24,* 命题 *3.2]*设 R 为一个环， S 为 R的正则乘法子集。若 R 是一个 u-S-阿廷环，则 R 是一个阿廷环。

该性质在有限直积下表现良好。

命题 3.37. *[24,* 命题 *3.3]* 设 $R = R_1 \times R_2$ 是环的直积R_1，且 $S = S_1 \times S_2$ 是乘法子集的直积。那么，对每个 $i = 1$， R 是u-S-阿廷环，当且仅当 R_i 是 u-S_i-阿廷环2。

一个非阿廷的 u-S-阿廷环可构造为直积。

例 3.38. *[24,* 例 *3.4]* 设 $R = R_1 \times R_2$，其中 R_1 是阿廷环，而 R_2不是阿廷环。令 $S = \{1\} \times \{1, 0\}$。那么， R 是 u-S-阿廷的，但不是阿廷的。

一个关键结果是 u-S-阿廷环的结构定理，它与经典定理相呼应：一个环是 u-S-阿廷的，当且仅当它是 u-S-诺特的，其 u-S-雅各布森根 $\mathrm{Jac}_S(R)$ 是 S-幂零的，并且该根的商是u-S-半单的。

首先，我们需要定义 u-S-Jacobson 根基。

定义 3.39。 *[24,* 定义 *4.1* 和 *4.2]*设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集。对于一个 R-模 M，其 u-S-***Jacobson*** 根基 $\mathrm{Jac}_S(M)$ 定义为 M的所有 u-S-极大子模的交。对于环 R，$\mathrm{Jac}_S(R)$是 R 作为一个 R-模的 u-S-***Jacobson*** 根基。

一个关键引理表明， u-S-阿廷模可有限分解为u-S-简单模，差一个 u-S-挠子模。

命题 3.40。 *[24,* 命题 *4.4]*设 M 是一个 u-S-阿廷 R-模，且具有S-挠的$\mathrm{Jac}_S(M)$ u。则存在 $T \subseteq M$，使得 $sT = 0$ 且 $M/T \subseteq \bigoplus_{i=1}^{t} S_i$，其中每个 S_i 都是相对于某个 $s \in S$而言的 u-S-简单模。由此，M 是一个 u-S-诺特 R-模。

由此可推得，对于 u-S-阿廷环，其根基的商是u-S-半单的。

命题 3.41。 *[24,* 命题 *4.5]*设 R 是一个 u-S-阿廷环。则$R/\mathrm{Jac}_S(R)$ 是一个 u-$S/\mathrm{Jac}_S($ $R)$-半单环。

u-S 阿廷环的雅各布森根是 S-幂零的。

命题 3.42。 *[24,* 命题 *4.8]* 设 R 是一个环， S 是 R的乘法子集。假设 R 是一个 u-S-阿廷环。那么 雅各布森根$_S(R)$ 是 S-幂零的。

最后，给出主要结构定理。

定理 3.43。 *[24,* 定理 *4.9]* 设 R 是一个环， S 是R的乘法子集。那么下列陈述等价:

1. R 是一个 u-S-阿廷环;
2. R 是一个 u-S-诺特环，雅各布森根$_S(R)$ 是 S-幂零的，并且 R/雅各布森根$_S(R)$ 是一个 u-S/ 雅各布森根 $_S(R)$- 半单环。

理想化也研究了这一性质，证明 $R(+)M$ 的 u-S-阿廷性质等价于 R 是 u-S-阿廷的，且 M 是 S-有限的。

命题 3.44. *[24,* 命题 *4.10]* 设 R 是交换环， S 是 R 的乘法子集， M 是一个 R-模。那么 $R(+)M$ 是一个 u-$S(+)M$-阿廷环，当且仅当 R 是一个 u-S-阿廷环，且 M 是一个 S-有限的 R-模。

4 经典模的均匀 S-版本

基于 u-S-挠和 u-S-正合列，我们现在可以定义并研究同调代数中基本模类的一致类似物。这些定义是对经典定义的直接转换，即用 u-S-正合性取代正合性。

4.1 一致S-平坦模

平坦性的概念是同调代数的核心。其一致 S类似物是最早得到系统研究的。

定义 4.1。 *[20, 定义 3.1]* 设 R 为一个环， S 为R的一个乘法子集。若一个 R-模 F 满足：对于任意 u-S-正合列$0 \to A \to B \to C \to 0$，诱导序列 $0 \to A \otimes_R F \to B \otimes_R F \to C \otimes_R F \to 0$是 u-S-正合的，则称其为 u-S-平坦模。

下面的定理给出了若干等价刻画，其中最重要的是：对于所有模 M，$\mathrm{Tor}_1^R(M, F)$ 是 u-S-挠。这是经典平坦性判别准则的完美 u-S-类比。

定理 4.2。 *[20, 定理 3.2]* 设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集，且 F 为一个 R-模。以下陈述彼此等价：

1. F 是 u-S-平坦模；*2.* 对于任意短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$，诱导序列$0 \to A \otimes_R F \xrightarrow{f\otimes_R F} B \otimes_R F \xrightarrow{g\otimes_R F} C \otimes_R F \to 0$ 是 u-S-正合的；

3. $\mathrm{Tor}_1^R(M, F)$ 对任意 R-模 M都是 u-S-挠；

4. $\mathrm{Tor}_n^R(M, F)$ 对任意 R-模 M 以及 $n \geq 1$都是 u-S-挠。

来自 [20] 的一个重要例子表明，与经典情形不同，仅考察 Tor_1 与循环模之间的关系，不足以保证 u-S-平坦性。

例 4.3. *[20, 例 3.3]* 设 $R = \mathbb{Z}$, p 为素数，且 $S = \{p^n \mid n \geq 0\}$。设$M = \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$。则对于 R 的任意理想 I，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M)$ 都是 u-S-挠。然而， M并非 u-S-平坦，因为$\mathrm{Tor}_1^R(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M) \cong M$不是 u-S-挠。

u-S-平坦模的类具有若干良好的封闭性质。

命题 4.4. *[20, 命题 3.4]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。则以下陈述成立。

1. 任意 u-S-平坦模的纯商模都是 u-S-平坦的。

2. 任意 u-S-平坦模的有限直和都是 u-S-平坦的。

3. 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是一个 u-S-正合列。若 A 和 C 是 u-S-平坦模，则 B 也是。*4.* 设 $A \to B$ 是一个 u-S-同构。若 A 和 B 中有一个是 u-S-平坦的，则另一个也是。*5.* 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是一个 u-S-正合列。若 B 和 C 是 u-S-平坦的，则 A 是 u-S-平坦的。

与经典平坦性不同， u-S-平坦性质在任意直和或直极限下不一定保持，正如 [20] 给出的一个反例所示。

注记 4.5. *[20,* 注记 *3.5]* 设 $R=\mathbb{Z}$, p 为一个素数，且 $S=\{p^n \mid n\geq 0\}$。模 $F_n=\mathbb{Z}/\langle p^n\rangle$ 是 u-S-挠的，因此是 u-S-平坦的。然而，它们的直极限 $\varinjlim F_n\cong \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ 不是 u-S-平坦的。类似地，直和 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathbb{Z}/\langle p^n\rangle$ 不是 u-S-平坦的。

将一个 u-S-平坦模在 S 处局部化，可得到一个经典平坦模。

推论 4.6. *[20,* 推论 *3.6]* 设 R 是一个环， S 是R的一个乘法子集。若 F 是 R上的 u-S-平坦模，则 F_S 是 R_S上的平坦模。

反过来一般并不成立，下一条注记说明了这一点。

注 4.7. *[20,* 注记 *3.7]*考虑 $R=\mathbb{Z}$、 $S=\{p^n \mid n\geq 0\}$ 和 $M=\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$。那么 $M_S=0$ 是 $\mathbb{Z}_S$上的平坦模，但 M 不是 $\mathbb{Z}$上的 u-S-平坦模。

然而，当 S 是有限集时，这两个性质等价。

命题 4.8. *[20,* 命题 *3.8]* 设 R 是一个环， F 是一个 R-模。设S 是 R 的一个由有限元组成的乘法子集。那么， F 是 R 上的 u-S-平坦模，当且仅当 F_S 是 R_S上的平坦模。

从统一理论中得出了经典平坦性的局部刻画 y.

命题 4.9。 *[20,* 命题 *3.9]* 设 R 是一个环， F 是一个 R-模。则以下陈述等价:

1. F 是平坦的;
2. 对任意 $\mathfrak{p}\in$素谱(R)， F 都是 u-$\mathfrak{p}$-平坦的;
3. 对任意 $\mathfrak{m}\in$极大谱(R)， F 都是 u-$\mathfrak{m}$-平坦的。

u-S-平坦性的其他刻画，尤其是在 S 为正则环时特别有用，见 [25]。

命题4.10。 *[25,* 命题*4.3]* 设 R 是一个环，且 R的一个乘法子集为 S 。那么以下陈述等价:

1. F 是 u-S-平坦的; *2.* 存在一个元素 $s\in S$，使得对于任意有限表示的 R-模 N，$Tor_1^R(N,F)$关于 s 是均匀 S-挠的; *3.* 对任意内射模 E，$Hom_R(F,E)$是 u-S-内射的; *4.* 对任意内射模 E，$Hom_R(F,E)$是 u-S-绝对纯的; *5.* 若 E 是一个内射余生成元，则$Hom_R(F,E)$是 u-S-内射的; *6.* 若 E 是一个内射余生成元，则$Hom_R(F,E)$是 u-S-绝对纯的。

此外，若 S 是正则的，则上述所有条件等价于:

7. 存在 $s \in S$，使得对于 R的任意理想 I，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, F)$ 关于 s 是一致 S-挠的；*8.* 存在 $s \in S$，使得对于 R的任意理想 I，自然同态σ_I：$I \otimes_R F \to IF$ 关于 s 是一个 u-S-同构；*9.* 存在 $s \in S$，使得对于 R的任意有限生成理想 K，$\mathrm{Tor}_1^R(R/K, F)$ 关于 s 是一致 S-挠的；*10.* 存在 $s \in S$，使得对于 R的任意有限生成理想 K，自然同态 σ_K： $K \otimes_R F \to KF$ 关于 s 是一个 u-S-同构。

4.2 一致 S-投射模

与平坦性对偶的概念是投射性。一致的 S 类比由 Hom 函子的行为定义。

定义 4.11. *[21,* 定义 *2.8]* 设 R 是一个环，S 是 R 的一个乘法子集。若 R-模 P 满足诱导序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, A) \to \mathrm{Hom}_R(P, B) \to \mathrm{Hom}_R(P, C) \to 0$$

对任意 u-S-正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 都是 u-S-正合的，则称其为 u-S-正合。

下面的定理给出了关键刻画，与 u-S-内射模的刻画相对应。等价于 $\mathrm{Ext}_R^1(P, M)$ 是 u-S-挠这一条件尤其有用。

定理 4.12. *[21,* 定理 *2.9]*设 R 是一个环，S 是 R 的一个乘法子集，且 P 是一个 R- 模。则以下陈述等价：

1. P 是 u-S-投射的；*2.* 对任意 u-S-满射 $B \xrightarrow{g} C$，存在 $s \in S$，使得对任意 R-同态 $h: P \to C$，存在一个 R-同态 $\alpha: P \to B$满足 $sh = g \circ \alpha$；*3.* 对任意短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$，诱导序列$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, C) \to 0$ 是 u-S-正合的；*4.* 对任意 R-模 M，$\mathrm{Ext}_R^1(P, M)$是 u-S-挠的；*5.* 对任意 R-模 M和 $n \geq 1$，$\mathrm{Ext}_R^n(P, M)$是 u-S-挠的。

u-S-投射与 u-S-分裂正合列之间的关系将在下面的推论中阐明。

推论 4.13。 *[21,* 推论 *2.10]*设 R 为一个环，S 为R 的乘法子集，P 为一个 R-模。则以下陈述成立：

1. 若 P 是 u-S-投射的，则任意 u-S-短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ 都是 u-S-分裂的；

2. 若存在 $s \in S$，使得任意短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ 相对于 s都是 u-S-分裂的，则 P 是 u-S-投射的。

与平坦性一样，u-S-挠模显然是 u-S-投射的。

推论 4.14. *[21,* 推论 *2.11]*设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法子集。设 P 是一个 u-S-挠 R-模，或是一个投射 R-模。则 P 是 u-S-投射的。

u-S-投射性质在有限直和下也保持，并且在 u-S-正合列中表现良好。

命题 4.15. *[21,* 命题 *2.14]* 设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法子集。则以下陈述成立。

1. 任意有限个 u-S-投射模的直和都是 u-S-投射的。*2.* 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是一个 u-S-正合列。若 C 是 u-S-投射的，则 A 是 u-S-投射的，当且仅当 B也是如此。*3.* 设 $A \to B$ 是一个 u-S-同构。则 A 是 u-S-投射的，当且仅当 B是 u-S-投射的。*4.* 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是一个 u-S-分裂的 u-S-正合列。若 B 是 u-S-投射的，则 A和 C 都是 u-S-投射的。

然而，u-S-投射模的任意直和未必是 u-S-投射的。

例 4.16. *[21,* 例 *2.15]* 设 $R = \mathbb{Z}$、$S = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。模 $M_n = \mathbb{Z}/\langle p^n \rangle$ 是 u-S-挠的，因而也是 u-S-投射的。它们的直和 $N = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ 不是 u-S-投射的，因为 $\mathrm{Ext}_R^1(N, N)$ 不是 u-S-挠的。

u-S-投射模与 u-S-平坦模之间的关系正如预期。

命题 4.17. *[21,* 命题 *2.13]*设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法子集。若 P 是 u-S-投射 R-模，则 P 是 u-S-平坦的。

下面给出经典投射模的一个局部刻画。

命题 4.18. *[21,* 命题 *2.16]*设 R 是一个环，P 是一个 R-模。则下列陈述等价：

1. P 是投射的；

2. 对任意 $\mathfrak{p} \in$素谱(R)，P 都是 u-$\mathfrak{p}$-投射的；

3. 对任意 $\mathfrak{m} \in$极大谱(R)，P 都是 u-$\mathfrak{m}$-投射的。

u-S-投射、u-S-平坦与 u-S-有限表示模之间的联系将在下一个命题中给出。

命题4.19。 *[25,* 命题*2.8]*设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法子集。则以下陈述成立。

1. 每个 S-有限的 u-S-投射模都是 u-S-有限表示的。

2. 每个 u-S-有限表示 u-S-平坦模都是 u-S-投射的。

4.3 一致 S-内射模

投射性的对偶概念是内射性。内射模的 uniform S-类比概念最初是在 u-S-诺特环的背景下研究的。

定义 4.20。 *[7, 定义 4.1]* 设 R 是一个环， S 是R的一个乘法子集。若一个 R-模 E 满足诱导序列是 u-S-内射的，则称其为.....

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, E) \to \mathrm{Hom}_R(B, E) \to \mathrm{Hom}_R(A, E) \to 0$$

对于任意 R-模的 u-S-正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$，该序列都是 u-S-正合的。

一个关键的技术引理是，与一个 u-S-挠模作 Ext 后仍然是 u-S-挠的。 .

引理 4.21。 *[7, 引理 4.2]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。若T是一个一致 S-挠模，则对于任意 R-模 M 和任意 $n \geq 0$，$\mathrm{Ext}^n_R(T, M)$ 与 $\mathrm{Ext}^n_R(M, T)$ 都是一致S-挠的。

u-S-内射模的刻画与经典情形相似。

定理 4.22. *[7, 定理 4.3]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集，且 E 是一个 R-模。则以下条件等价:

1. E 是 u-S-内射的;

2. 对任意 R-模的短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$，诱导序列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(C, E) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, E) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, E) \to 0$ 是u-S-正合的;

3. 对任意 R-模 M，$\mathrm{Ext}^1_R(M, E)$ 都是一致 S-挠的;

4. 对任意 R-模 M 和 $n \geq 1$，$\mathrm{Ext}^n_R(M, E)$ 都是一致 S-挠的。

该定理的一个推论是， u-S-挠模和内射模都是 u-S-内射的。

推论 4.23. *[7, 推论 4.4]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个乘法子集。假设 E 是一个一致 S-挠 R-模或一个内射 R-模。那么 E 是 u-S-内射的。

与平坦和投射的情形类似，仅针对循环模检验内射性是不够的，涉及 p-进整数的例子表明了这一点。

例 4.24. *[7, 例 4.5]* 设 $R = \mathbb{Z}$， p 是一个素数，且 $S = \{p^n \mid n \geq 0\}$。令$J_p$ 为 p-进整数的加法群。那么，对于 R的任意理想 I，$\mathrm{Ext}^1_R(R/I, J_p)$ 是 u-S-挠的。然而， J_p 不是 u-S-内射的，因为$\mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{Z}(p^\infty)\ J_p) \cong J_p$ 不是 u-S-挠的。

u-S-内射模类具有与u-S-投射模类似的封闭性质。

命题 4.25。 *[7, 命题 4.7]* 设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集。则以下陈述成立。

1. u-S-内射模的任意有限直和都是 u-S-内射的。

2. 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是 R-模的一个 u-S-正合列。若 A 和 C 是 u-S-内射模，则 B 也是。*3.* 设 $A \to B$ 是 R-模的一个 u-S-同构。若 A 和 B 中的一个是 u-S-内射的，则另一个也是。*4.* 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是 R-模的一个 u-S-正合列。若 A 和 B 是 u-S-内射模，则 C 是 u-S-内射的。

经典内射模也有一种局部刻画。

命题 4.26. *[7,* 命题 *4.8]*设 R 是一个环， E 是一个 R-模。则以下条件等价：

1. E 是内射的；

2. 对任意 $\mathfrak{p} \in$素谱(R)， E 都是 $\mathfrak{p}$-内射的；

3. 对任意 $\mathfrak{m} \in$极大谱(R)， E 都是 $\mathfrak{m}$-内射的。

接下来给出内射性的 Baer 判别准则的一致版本。它要求模是 S-可除的。

命题 4.27. *[7,* 命题 *4.9]* （u-S-内射模的 *Baer* 判别准则）设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集，且 E 是一个 R-模。若 E 是一个 u-S-内射模，则存在 $s \in S$使得对于 R 的任意理想I，均有 $s\operatorname{Ext}^1_R(R/I, E) = 0$。此外，若 E 是 S-可除的，则逆命题也成立。

这些性质最终导出了 u-S-诺特环的 Cartan-Eilenberg-Bass 定理，该定理通过内射模的直和与直并的性质来刻画这类环。

定理 4.28. *[7]*（一致 S-诺特环的 *Cartan-Eilenberg-Bass* 定理）设 R 是一个环，S 是 R的一个正则乘法子集。则以下条件等价：

1. R 是均匀 S-诺特的；

2. 任意内射模的直和都是 u-S-内射的；

3. 任意内射模的直接并都是 u-S-内射的。

4.4 均匀S-绝对纯模

绝对纯模（或 FP-内射模）是内射模的一种推广。其定义是对所有有限表示模N，$\operatorname{Ext}^1_R(N, -)$均为零。均匀 S-类比放宽了这一条件。

定义 4.29. *[23,* 定义 *3.1]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。若任意以 E 开头的短u-S-正合列都是 u-S-纯的，则称 E 这个 R-模是 u-S-绝对纯的 。

下面的定理给出了若干种刻画，其中包括关键的同调刻画：对于所有有限表示模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(N,\ E)$ 都是 u-S-挠的。

定理 4.30。 *[23,* 定理 *3.2]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集，且 E 是一个 R-模。则以下陈述等价:

1. E 是 u-S-绝对纯的；*2.* 任何以 E 开头的短正合列 $0 \to E \to B \to C \to 0$ 都是 u-S-纯的；*3.* E 是每个包含 E的 u-S-内射模中的一个 u-S-纯子模；*4.* E 是每个包含 E的内射模中的一个 u-S-纯子模；*5.* E 是其内射包中的一个 u-S-纯子模；*6.* 存在一个元素 $s \in S$ ，使得对于任意有限表示的 R-模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(N, E)$关于 s是 u-S-挠的；*7.* 存在一个元素 $s \in S$ ，使得若 P 是有限生成投射模， K 是 P 的有限生成子模，且 $f: K \to E$ 是一个 R-同态，则存在一个 R-同态 $g: P \to E$ ，使得$sf = gi$。

u-S-绝对纯模这一类在各种构造下表现良好。

命题 4.31 (Zhang [23], 命题 3.3)。 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。则以下陈述成立。

1. 任意绝对纯模以及任意 u-S-内射模都是 u-S-绝对纯模。*2.* 任意有限个 u-S-绝对纯模的有限直和都是 u-S-绝对纯模。*3.* 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是一个 u-S-正合列。若 A 和 C 是 u-S-绝对纯模，则 B也是。*4.* u-S-绝对纯模这一类在 u-S-同构下封闭。*5.* 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 u-S-纯 u-S-正合列。若 B 是 u-S-绝对纯模，则 A也是。经典绝对纯模也可以进行局部刻画。

命题 4.32 (Zhang [23], 命题 3.4). 设 R 是一个环， E 是一个 R-模。那么以下陈述等价:

1. E 是绝对纯的;

2. E 对任意 $\mathfrak{p} \in$ 素谱(R)，都是 u-$\mathfrak{p}$-绝对纯的;

3. E 对任意 $\mathfrak{m} \in$ 极大谱(R)，都是 u-$\mathfrak{m}$-绝对纯的。

下面的定理确立了一个优美的联系：环是 u-S-冯·诺伊曼正则的，当且仅当每个模都是 u-S-绝对纯的。这与经典结果相呼应：环是冯·诺伊曼正则的，当且仅当每个模都是绝对纯的。

定理 4.33 (Zhang [23], 定理 3.5)。 环 R 是一致的 S-冯·诺伊曼正则环，当且仅当任意 R-模都是 u-S-绝对纯模。

一个具体例子表明， u-S-绝对纯模未必是绝对纯模。

例 4.34 (Zhang [23], 例 3.6)。 设 $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $s = (1,0)$，以及$R = T[x]/\langle sx, x^2\rangle$，其乘法集为 $S = \{1, \bar{s}\}$。那么 R 是 u-S-冯·诺伊曼正则环，但不是冯·诺伊曼正则环。因此，由定理 *4.33* 可知，每个 R-模都是u-S-绝对纯模，但并非每个模都是绝对纯模。

最后，给出了用 u-S-绝对纯模刻画 u-S-诺特环的方法。这是关于诺特环的一个经典定理的直接类比。

定理 4.35 (Zhang [23], 定理 3.7)。 设 R 为一个环， S 为 R的正则乘法子集。那么以下陈述等价：

1. R 是一个一致 S-诺特环；
2. 任意 u-S-绝对纯模都是 u-S-内射的；
3. 任意绝对纯模都是 u-S-内射的。

与平坦模和投射模类似， u-S-绝对纯这一性质在任意直和或直积下并不封闭，如一个反例所示。

例 4.36。 *[23, 例 3.8]* 设 $R = \mathbb{Z}$, $S = \{p^n \mid n \geq 0\}$。循环群$\mathbb{Z}/\langle p^k\rangle$ 是 u-S-挠的，因此是 u-S-绝对纯的。然而，它们的直积$M = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}/\langle p^k\rangle$ 不是 u-S-内射的，因此根据定理 *4.35*，它也不是 u-S-绝对纯的（因为对于这个 S， $\mathbb{Z}$ 不是 u-S-诺特的）。类似地，它们的直和也不是 u-S-绝对纯的。

另一个例子表明，定义中的元素 s 必须是一致的；对于所有有限表示的 N，一个模的 $\mathrm{Ext}^1_R(N, E)$ 都可以是 u-S-挠的，而不必是u-S-绝对纯的。

例 4.37. *[23, 例 3.9]* 设 $R = \mathbb{Z}$、 $S = \{p^n \mid n \geq 0\}$和 J_p 为 p-进整数。那么，对于任意有限表示的 R-模 N， $\mathrm{Ext}^1_R(N, J_p)$ 都是 u-S-挠的。然而， J_p 不是 u-S-内射的（见例 *4.24*），因此根据定理 *4.35*， J_p 不是 u-S-绝对纯的（因为 $\mathbb{Z}$ 不是 u-S-诺特的）。

5 同调维数：一致 S-弱全局维数与一致 S-全局维数

在定义了平坦、投射和内射模的一致类似物之后，我们现在可以引入相应的同调维数。这些维数衡量一个环距离成为“u-S-冯·诺伊曼正则”或“u-S-半单”还有多远。

5.1 一致 S-平坦维数与一致 S-弱全局维数

模的 u-S-平坦维数定义为最短 u-S-平坦分解的长度。

定义 5.1. *[22, 定义 2.1]* 设 R 为一个环， S 为 R的乘法子集，且 M 为一个 R-模。若存在一个由 R-模组成的 u-S-正合列，则记 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

其中每个 F_i 在 $i = 0, \ldots, n$时都是 u-S-平坦的。若不存在这样的有限 u-S-平坦 u-S-分解，则称 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) = \infty$；否则，若$n$ 是此类分解的最短长度，则定义 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) = n$ 。

显然， u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \leq \mathrm{fd}_R(M)$。一个模是一致 S-平坦的，当且仅当其一致 S-平坦维数为 0。

Th下面的引理表明，该维数在 u-S-同构下保持不变 s.

引理 5.2. *[22, 引理 2.2]* 设 R 为一个环， S 为 R的乘法子集。若 A 与 B是 u-S-同构的，则 u-S-$\mathrm{fd}_R(A) = u$-S-$\mathrm{fd}_R(B)$。

u-S-平坦维数的关键刻画使用 Tor 函子。

命题 5.3. *[22, 命题 2.3]* 设 R 是一个环， R的一个乘法子集为 S 。对于一个 R-模 M，以下陈述等价:

1. u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$;
2. 对所有 R-模 N 以及所有 $k > 0$，$\mathrm{Tor}^R_{n+k}(M, N)$ 都是 u-S-挠;
3. 对所有 R-模 N，$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M, N)$ 都是 u-S-挠;
4. 存在 $s \in S$，使得对于 R 的所有理想 I， $s\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M, R/I) = 0$;
5. 如果 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个 u-S-正合列，其中 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 是 u-S- 平坦的，那么 F_n 是 u-S- 平坦的;
8. 如果 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个正合列，其中 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 是平坦的，那么 F_n 是 u-S-平坦的;
10. 存在一个正合列 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$，其中 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 是平坦的，且 F_n 是 u-S-平坦的。

A 一个直接推论给出了不同乘法子集对应维数之间的关系。

推论 5.4. *[22, 推论 2.4]* 设 R 是一个环，且 $S' \subseteq S$ 是 R 的乘法子集。设 M 是一个 R-模。那么 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \leq u$-S'-$\mathrm{fd}_R(M)$。

在一致元素处局部化，为局部化模的经典平坦维数提供了一个上界。

推论 5.5。 *[22,* 推论 *2.5]*设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集， M 为一个 R-模。若 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$，则存在一个元素 $s \in S$，使得 $\mathrm{fd}_{R_s}(M_s) \leq n$。

当 S 为有限集时，存在更精确的关系。

推论 5.6. *[22,* 推论 *2.6]*设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集。设 M 是一个 R-模。那么 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \geq \mathrm{fd}_{R_S} M_S$。此外，如果 S 由有限元组成，那么 u-S-$\mathrm{fd}_R(M) = \mathrm{fd}_{R_S} M_S$。

u-S-平坦维数在短正合列中的表现与其经典对应物相似。

命题 5.7. *[22,* 命题 *2.7]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是由 u-S-正合列构成的 R-模。则以下断言成立。

1. u-S-$\mathrm{fd}_R(C) \leq 1 +$ 极大谱$\{u$-S-$\mathrm{fd}_R(A)$ u-S-$\mathrm{fd}_R(B)\}$.
2. 若 u-S-$\mathrm{fd}_R(B) < u$-S-$\mathrm{fd}_R(C)$，则 u-S-$\mathrm{fd}_R(A) = u$-S-$\mathrm{fd}_R(C) - 1 > u$-S-$\mathrm{fd}_R(B)$。

利用素理想与极大理想处的统一维数，得到了经典平坦维数的一种新的局部刻画。

Pr命题 5.8. *[22,* 命题 *2.8]*设 R 为一个环， M 为一个 R-模。 n

$$\mathrm{fd}_R(M) = \sup\{u\text{-}\mathfrak{p}\text{-}\mathrm{fd}_R(M) \mid \mathfrak{p} \in \text{素谱}(R)\} = \sup\{u\text{-}\mathfrak{m}\text{-}\mathrm{fd}_R(M) \mid \mathfrak{m} \in \text{极大谱}(R)\}.$$

环的 u-S-弱整体维数是所有模的 u-S-平坦维数的上确界。

定义 5.9. *[22,* 定义 *3.1]* 环 R的 u-S-弱整体维数 定义为 u-S-弱。整体。维数$(R) =$ 上确界$\{u$-S-平坦维数$_R(M) \mid M$是一个 R-模$\}$。

显然， u-S-弱。 整体。 维数(R) $\leq$弱。 整体。维数(R)。下面的结果给出了若干等价刻画。

命题 5.10. *[22,* 命题 *3.2]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个乘法子集。对于 R，以下陈述等价:

1. u-S-$\mathrm{w.gl.dim}(R) \leq n$;
2. u-S-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$对所有 R-模 M均成立;
3. $\mathrm{Tor}^R_{n+k}(M, N)$对于所有 R-模 M、 N以及所有 $k > 0$，均为 u-S-挠;
4. $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M, N)$对于所有 R-模 M和 N，均为 u-S-挠;
5. 存在一个元素 $s \in S$，使得对于 R的任意理想 I 和 J，都有 $s\,\mathrm{Tor}^R_{n+1}(R/I, R/J)$。

一个直接推论揭示了不同乘法集对应的维数之间的关系。

推论 5.11. *[22,* 推论 *3.3]*设 R 是一个环，且 $S' \subseteq S$ 是 R的乘法子集。那么 u-S-w.gl. $\dim(R) \leq u$-S'-w. gl. $\dim(R)$。

在一致元素处局部化，可得经典弱全局维数的一个上界。

推论 5.12. *[22,* 推论 *3.4]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的乘法子集。若 u-S-w. gl.$\dim(R) \leq n$，则存在一个元素 $s \in S$，使得w.gl. $\dim(R_s) \leq n$。

当 S 是有限集时，二者之间存在更精确的关系。

推论 5.13. *[22,* 推论 *3.5]*设 R 是一个环，且 S 是 R的乘法子集。那么 u-S-w. gl. $\dim(R)$ $\leq$w. gl.$\dim(R_S)$。此外，若 S 由有限元组成，则 u-S-w. gl. $\dim(R)$ $=$w. gl.$\dim(R_S)$。

一个例子表明，该不等式可以是严格的。

例 5.14。 *[22,* 例 *3.6]*设 $R = k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ 是域 k 上的多项式环。令 $S = k[x_1] \setminus \{0\}$。则 $R_S = k$ （x_1） $[x_2, \ldots, x_{n+1}]$，且 w。gl。维数(R_S) $=n$。然而，对于任意 $s \in S$，w。gl。维数(R_s) $= n + 1$。因此， u-S-w。gl。维数(R) $\geq n + 1 >$ w。gl。维数(R_S)。

由此可得经典弱全局维数的局部刻画。

推论 5.15。 *[22,* 推论 *3.7]* 设 R 是一个环。则

w。 gl。 维数(R) $=$sup$\{u$-$\mathfrak{p}$-w。gl。 维数(R) $\mid \mathfrak{p} \in$ 素谱(R)$\}$ $=$sup$\{u$-$\mathfrak{m}$-w。 gl。 维数(R) $\mid \mathfrak{m} \in$ 极大谱(R)$\}$.

具有 u-S-弱整体维数 0 的环恰好是 u-S-冯·诺伊曼正则环，这是 [20]的一个结果。

推论 5.16. *[22,* 推论 *3.8]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。以下断言等价：

1. R 是一个 u-S-冯·诺伊曼正则环；*2.* 对任意 R-模 M和 N，存在 $s \in S$使得 $s \operatorname{Tor}_1^R(M, N) = 0$；*3.* 存在 $s \in S$使得 $s \operatorname{Tor}_1^R(R/I, R/J) = 0$，对任意理想 I和 J （属于R）均成立；

4. 任意 R-模都是 u-S-平坦的；

5. u-S-w.gl.维数(R) $= 0$.

弱整体维数至多为 1 的 u-S-环，其特征是： u-S-平坦模的子模是 u-S-平坦的。

命题 5.17。 *[22,* 命题 *3.9]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。以下断言等价：

1. u-S-w.gl.dim(R) ≤ 1;
2. 任意 u-S-平坦模的子模都是 u-S-平坦的；
3. 任意平坦模的子模都是 u-S-平坦的；
4. $\mathrm{Tor}_2^R(M, N)$ 对于所有的 R-模 M, N都是 u-S-挠的；
5. 存在一个元素 $s \in S$，使得对于 R的任意理想I, J， $s\,\mathrm{Tor}_2^R(R/I, R/J) = 0$。

以下例子表明，一个环可以具有有限的 u-S-弱整体维数，同时具有无限的经典弱全局维数。

例 5.18。 *[22,*例 *3.11]*设 A是一个满足 w 的环。$\mathrm{gl.dim}(A) = 1$, $T = A \times A$，且 $s = (1, 0) \in T$。设 $R = T[x]/\langle sx, x^2\rangle$ 和 $S = \{1, s\}$。则 u-S-$\mathrm{w.gl.dim}(R) = 1$，但 $\mathrm{w.gl.dim}(R) = \infty$。

5.2 一致 S-投射（内射）维数及一致 S-整体维数

投射维数和内射维数的一致类似物定义方式类似。

定义 5.19。 *[16,* 定义 *3.1]*设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集，且 M 是一个 R-模。若存在由 R-模构成的 u-S-正合列，我们记 u-S-$\mathrm{pd}_R(M) \leq n$

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

其中每个 F_i 对于 $i = 0, \ldots, n$ 都是 u-S-投射的。若不存在这样的有限 u-S-投射u-S-分解，则称 u-S-$\mathrm{pd}_R(M) = \infty$；否则，若 n 是此类分解中最短者的长度，则定义 u-S-$\mathrm{pd}_R(M) = n$ 。 u-S-内射维数 u-S-$\mathrm{id}_R(M)$ 采用对偶方式定义。

这些维数在 u-S-同构下保持不变。

引理 5.20. *[16,* 引理 *3.2]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。若A 与 B 是 u-S-同构的，则 u-S-$\mathrm{pd}_R(A) = u$-S-$\mathrm{pd}_R(B)$ 且 u-S-$\mathrm{id}_R(A) = u$-S-$\mathrm{id}_R(B)$。

u-S-投射维数的刻画使用 Ext函子。

命题 5.21. *[16,* 命题 *3.3]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。对于一个 R-模 M，以下陈述等价：

1. u-S-投射维数$_R(M) \leq n$;
2. $\mathrm{Ext}_R^{n+k}(M, N)$ 对于所有 R-模 N 和所有 $k > 0$，都是 u-S-挠的；

3. $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N)$ 对于所有 R-模 N，都是 u-S-挠的；

4. 若 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个 u-S-正合列，其中 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 是 u-S-投射的，则 F_n 是 u-S-投射的；

7. 若 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个正合列，其中 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 是投射的，则 F_n 是 u-S-投射的；

9. 存在一个正合列 $0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$，其中 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 是投射的，且 F_n 是 u-S-投射的。

u-S-内射维数也有类似的刻画。

命题 5.22. *[16,* 命题 *3.4]* 设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法子集。对于一个 R-模 M，以下陈述等价：

1. u-S-$\mathrm{id}_R(M) \le n$；*2.* 对所有 R-模 N 及所有 $k>0$，$\mathrm{Ext}_R^{n+k}(N,M)$都是 u-S-挠的；*3.* 对所有 R-模 N，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)$都是 u-S-挠的；*4.* 若 $0 \to M \to E_0 \to \cdots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$ 是一个 u-S-正合列，其中 $E_0, \ldots, E_{n-1}$ 均为 u-S-内射，则 E_n 是 u-S-内射；*7.* 若 $0 \to M \to E_0 \to \cdots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$ 是一个正合列，其中 $E_0, \ldots, E_{n-1}$ 均为内射，则 E_n 是 u-S-内射；*9.* 存在一个正合列 $0 \to M \to E_0 \to \cdots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$，其中 $E_0, \ldots, E_{n-1}$ 均为内射，且 E_n 是 u-S-内射。

对于 u-S-诺特环，u-S-投射维数与 u-S-平坦维数对 S-有限模而言相等。

命题 5.23。 *[16,* 命题 *3.6]* 设 R 为一个环，S 为 R的一个乘法子集。若 R 是一个 u-S-诺特环，则以下陈述成立。

1. 若 M 是一个 S-有限 R-模，则存在一个 u-S-正合列

$$\cdots \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

其中每个 F_n S-有限 u-S-模都是投射的。

2. 若 M 是一个 S-有限 R-模，则 u-S-投射维数$_R(M)$ $=$ u-S-平坦维数$_R(M)$。

这些维数在 u-S-正合列中的性质是标准的。

命题 5.24. *[16,* 命题 *3.10]* 设 R 是一个环，R 的一个乘法子集为 S 。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 u-S-正合的 R-模正合列。则以下陈述成立。

1. $u\text{-}S\text{-}\mathrm{pd}_R(C) \le 1 + \max\{u\text{-}S\text{-}\mathrm{pd}_R(A), u\text{-}S\text{-}\mathrm{pd}_R(B)\}$.

2. 若 u-S-$\mathrm{pd}_R(B) < u$-S-$\mathrm{pd}_R(C)$，则 u-S-$\mathrm{pd}_R(A) = u$-S-$\mathrm{pd}_R(C) - 1 > u$-S-$\mathrm{pd}_R(B)$。

3. u-S-$\mathrm{id}_R(A) \leq 1 +$ 极大谱$\{u$-S-$\mathrm{id}_R(B)\ u$-S-$\mathrm{id}_R(C)\}$.

4. 如果 u-S-$\mathrm{id}_R(B) < u$-S-$\mathrm{id}_R(A)$，那么 u-S-$\mathrm{id}_R(C) = u$-S-$\mathrm{id}_R(A) - 1 > u$-S-$\mathrm{id}_R(B)$。

对于 u-S-分裂正合列，中间项的维数是端项维数的极大值。

命题 5.25。 *[16,* 命题 *3.11]* 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 u-S-分裂u-S-正合列，由 R-模组成。则以下陈述成立。

1. u-S-$\mathrm{pd}_R(B) =$ 极大谱$\{u$-S-$\mathrm{pd}_R(A)\ u$-S-$\mathrm{pd}_R(C)\}$.

2. u-S-$\mathrm{id}_R(B) =$ 极大谱$\{u$-S-$\mathrm{id}_R(A)\ u$-S-$\mathrm{id}_R(C)\}$。

得到了经典投射维数和内射维数的一种新的局部刻画。

命题 5.26. *[16,* 命题 *3.12]* 设 R 为一个环， M 为一个 R-模。则

$$\mathrm{pd}_R(M) = \sup\{u\text{-}\mathfrak{p}\text{-}\mathrm{pd}_R(M) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} = \sup\{u\text{-}\mathfrak{m}\text{-}\mathrm{pd}_R(M) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\},$$

and

$$\mathrm{id}_R(M) = \sup\{u\text{-}\mathfrak{p}\text{-}\mathrm{id}_R(M) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} = \sup\{u\text{-}\mathfrak{m}\text{-}\mathrm{id}_R(M) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\}.$$

环的 u-S-整体维数是所有模的 u-S-投射维数的上确界，这也等于 u-S-内射维数的上确界。

定义 5.27. *[16,* 定义 *3.13]* 环 R 的 u-S-整体维数 定义为

$$u\text{-}S\text{-}\mathrm{gl.dim}(R) = \sup\{u\text{-}S\text{-}\mathrm{pd}_R(M) \mid M \textit{ is an } R\textit{-module}\}.$$

下述定理给出了若干等价刻画，与经典整体维数的刻画相呼应。

命题 5.28. *[16,* 命题 *3.14]*设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集。对 R而言，下述陈述等价:

1. u-S-$\mathrm{gl.dim}(R) \leq n$;

2. u-S-投射维数$_R(M) \leq n$ 对所有 R-模 M成立;

3. $\mathrm{Ext}_R^{n+k}(M, N)$ 对所有 R-模 M及所有 $k > 0$均为 u-S-挠； N

4. $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N)$ 对所有 R-模 M均为 u-S-挠； N

5. 对所有 R-模 M， u-S-同构$_R(M) \leq n$ 。

一个直接推论表明， u-S-整体维数从上方界定了 u-S-弱整体维数。

推论5.29. *[16,* 推论*3.15]*设 R 是一个环， S 是R的一个乘法子集。那么 u-S-全局.维数$(R) \geq u$-S-弱.全局.维数(R)。

乘法集发生变化时，维数的变化是可预测的。

推论5.30. *[16,* 推论*3.16]*设 R 是一个环， $S' \subseteq S$ 是 R 的乘法子集，且 S^* 是 S的饱和。那么 u-S-全局.维数$(R) \leq u$-S'-全局. 维数(R)和 u-S-全局.维数$(R) = u$-S^*-全局. 维数(R)。

对于环的有限直积， u-S-全局维数等于各因子维数的上确界。

推论5.31. *[16,* 推论*3.17]* 设 R_i 是一个环， S_i 是 $R_i (i = 1, \ldots, n)$的一个乘法子集。令 $R = R_1 \times \cdots \times R_n$，并设 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ 是 R_i的一个乘法子集。那么 u-S-全局. 维数$(R) =$上确界$_{1 \leq i \leq n}\{u$-S_i-全局.维数$(R_i)\}$。

一个例子表明，经典整体维数与 u-S-整体维数可能大不相同。

例5.32. *[16,* 例*3.18]* 设 R_1 是一个环，且gl.dim$(R_1) = n$ ；设 R_2是一个环，且gl. dim$(R_2) = m$。令 $R = R_1 \times R_2$ 且 $S = \{(1,1), (1, 0)\}$。则 gl. dim$(R) =$ 极大谱 $\{m, n\}$，但 u-S-gl.dim$(R) = n$。

经典整体维数的一个局部刻画如下。

推论5.33. *[16,*推论*3.19]*设 R 是一个环，则

gl. dim(R) $=$sup$\{u$-$\mathfrak{p}$- gl.dim(R) $\mid \mathfrak{p} \in$ 素谱$(R)\}$ $=$sup$\{u$-$\mathfrak{m}$- gl. dim(R) $\mid \mathfrak{m} \in$ 极大谱$(R)\}$.

u-S-整体维数为 0 的环恰好是 u-S-半单环，这一概念由 [21]引入。

推论5.34. *[16,* 推论 *3.20]*设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集。以下陈述等价:

1. R 是一个 u-S-半单环；*2.* 每个 R-模都是 u-S-半单的；*3.* 每个 R-模都是 u-S-投射的；*4.* 每个 R-模都是 u-S-内射的；*5.* u-S-gl.dim$(R) = 0$。

5.3 一致 S-全局维数的换环定理

理解同调维数在环同态和扩张下的变化规律，是同调代数中的一个核心主题。uniform S-理论也不例外。下面的命题给出了改变环时一个模的 u-S-投射维数的上界。

命题 5.35. *[16,* 命题 *4.1]* 设 $\theta : R \to T$ 是环同态，S 是 R 的乘法子集。假设 M 是一个 T-模。那么

$$u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_R(M) \le u\text{-}\theta(S)\text{-}\operatorname{pd}_T(M) + u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_R(T).$$

一个特殊情形是，我们对非零因子取商环。这给出了原环上的维数与商环上的维数之间的关系公式。

命题 5.36. *[16,* 命题 *4.2]*设 R 是一个环，S 是 R 的乘法子集。设 a 是 R 中的一个非零因子，它不整除 S 中的任何元素。记作$\overline{R} = R/aR$ 和 $\overline{S} = \{s + aR \in R \mid s \in S\}$。则以下陈述成立。

1. 设 M 是一个非零 $\overline{R}$-模。若 $u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_{\overline{R}}(M) < \infty$，则

$$u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_R(M) = u\text{-}\overline{S}\text{-}\operatorname{pd}_{\overline{R}}(M) + 1.$$

2. 若 $u\text{-}\overline{S}\text{-}\mathrm{gl.}$维数$(\overline{R}) < \infty$，则

$$u\text{-}S\text{-}\operatorname{gl.dim}(R) \ge u\text{-}\overline{S}\text{-}\operatorname{gl.dim}(\overline{R}) + 1.$$

一个关键结果是，多项式扩张下 u-S-投射维数的行为。

引理 5.37. *[16,* 引理 *4.3]* 设 R 是一个环，S 是 R 的乘法子集。假设 T 是一个 R-模，且 F 是一个 $R[x]$-模。若 P 在 $R[x]$ 上是 u-S-投射的，则 P 在 R 上是 u-S-投射的。

对于模 $M[x] = M \otimes_R R[x]$，其维数保持不变。

命题 5.38. *[16,* 命题 *4.4]*设 R 是一个环，S 是 R 的乘法子集，且 M 是一个 R-模。那么 $u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_{R[x]}(M[x]) = u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_R(M)$。

我们可以证明希尔伯特零化子定理的 u-S-类比结果。该结果指出，在一个较弱的条件下，转向多项式环时，u-S-整体维数恰好增加一。

定理 5.39。 *[16,* 定理 *4.6]* 设 R 为一个环，S 为R的乘法子集。那么

$$u\text{-}S\text{-}\operatorname{gl.dim}(R[x]) = u\text{-}S\text{-}\operatorname{gl.dim}(R) + 1,$$

前提是 $0 \notin S$。

一则注记指出，证明需要满足条件 $u\text{-}S\text{-}\operatorname{pd}_{R[x]}(R) = 1$，而在一些重要情形下该条件成立，例如 S 由单位构成，或在某些积环中。若 $0 \in S$，则定理可能不成立。

6 经典环的一致 S-版本

基于一致同调代数，人们定义并刻画了若干具有一致性质的重要环类。这些环类包括 u-S-冯·诺依曼正则环、 u-S-半单环以及 u-S-阿廷环。

6.1 一致 S-冯·诺伊曼正则环

冯·诺伊曼正则环的特征是：对于每个元素a，都存在一个元素 r ，使得 $a = ra^2$。一致 S-类比要求存在一个固定元素 $s \in S$ ，对所有 a都适用。

定义 6.1. *[20, 定义 3.12]*设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。 R 称为 u-S-冯·诺伊曼正则环（简称一致 S-冯·诺伊曼正则环），如果存在一个元素 $s \in S$ ，使得对任意 $a \in R$ ，都存在 $r \in R$ 满足 $sa = ra^2$。

下述定理给出了大量等价刻画，将这一概念与 u-S-平坦性、Tor 的挠性质以及由幂等元生成理想联系起来。

定理 6.2. *[20, 定理 3.13]* 设 R 是一个环， S 是R的一个乘法子集。以下陈述等价:

1. R 是一个 u-S-冯·诺伊曼正则环；*2.* 对任意 R-模 M和 N，存在 $s \in S$使得 $s\,\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$；*3.* 存在 $s \in S$使得对于R的任意理想 I和 J， $s\,\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) = 0$；*4.* 存在 $s \in S$使得对于 R的任意 S-有限理想 I和 J， $s\,\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) = 0$；*5.* 存在 $s \in S$使得对于任意元素 $a \in R$， $s\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle a\rangle, R/\langle a\rangle) = 0$；*6.* 任意 R- 模都是 u-S- 平坦的；*7.* R 的所有主理想构成的类由幂等元 u-S-生成；*8.* R 的所有有限生成理想构成的类由幂等元 u-S-生成。

在 S 处局部化 u-S-冯·诺伊曼正则环，可得到一个经典的冯·诺伊曼正则环。

推论 6.3. *[20, 推论 3.14]* 设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集。若 R 是一个 u-S-冯·诺伊曼正则环，则 R_S 是一个冯·诺伊曼正则环。因此，任意 u-S-冯·诺伊曼正则环都是 c-S-相干的。

然而， R_S 是冯·诺伊曼正则的环，不一定是 u-S-冯·诺伊曼正则的。

例 6.4. *[20, 例 3.15]* 设 $R = \mathbb{Z}$ 和 $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。则 $R_S = \mathbb{Q}$是冯·诺伊曼正则的。然而，R 不是 u-S-冯·诺伊曼正则的，因为$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ 不是 u-S-挠的。

当 S 是有限的时，这两个性质相同。

推论6.5. *[20, 推论3.16]* 设 R 是一个环。设 S 是 R 的一个由有限元组成的乘法子集。那么， R 是 u-S-冯·诺伊曼正则环，当且仅当 R_S 是冯·诺伊曼正则环。

如果 S 由非零因子组成，那么 u-S-冯·诺伊曼正则环实际上就是冯·诺伊曼正则环。

命题6.6. *[20, 命题3.17]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个正则乘法子集。那么，R 是 u-S-冯·诺伊曼正则的，当且仅当 R 是冯·诺伊曼正则的。

一个非平凡的例子表明，存在一个 u-S-冯·诺伊曼正则环，它并非冯·诺伊曼正则环，这说明 S 上的正则条件至关重要。

例6.7. *[20, 例3.18]*设 $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$和 $s = (1, 0) \in T$。设$R = T[x]/\langle sx, x^2\rangle$，其中 x 是不定元，且 $S = \{1, \bar{s}\}$。那么 R是一个 u-S-冯·诺伊曼正则环，但 R 不是冯·诺伊曼正则环（因为它不是约化环）。

通过素理想上的一致性质，给出了经典冯·诺伊曼正则环的一种新的局部刻画。

命题6.8。 *[20, 命题3.19]*设 R 是一个环。则以下陈述等价:

1. R 是冯·诺伊曼正则环;
2. 对任意 $\mathfrak{p} \in$ 素谱(R)， R 都是一个 u-$\mathfrak{p}$-冯·诺伊曼正则环;
3. 对任意 $\mathfrak{m} \in$ 极大谱(R)， R 都是一个 u-$\mathfrak{m}$-冯·诺伊曼正则环。

6.2 一致S-半单环

半单环是指每个模都是投射模的环。均匀 S-类似概念放宽了这一条件。

定义 6.9。 *[21, 定义 3.1]* 设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法子集。若任意 u-S-短正合列 $0 \to A \to M \to C \to 0$ 都是 u-S-分裂的，则称一个 R-模 M 为 u-S-半单。

若一个环的所有自由模都具有这一性质，则称该环为 u-S-半单环。

定义 6.10。 *[21, 定义 3.4]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个乘法子集。 R 称为 u-S-半单环，如果任意自由 R-模都是 u-S-半单的。

下面的定理给出了丰富的刻画，表明这一性质极其强大。

定理 6.11. *[21,* 定理 *3.5]* 设 R 是一个环， S 是R的一个乘法子集。那么以下陈述等价：

1. R 是一个 u-S-半单环；*2.* 任意 R-模都是 u-S-半单的；*3.* 任意 u-S-短正合列都是 u-S-分裂的；*4.* 任意短正合列都是 u-S-分裂的；*5.* 对任意 R-模 M和 N，$Ext^1_R(M,N)$都是 u-S-挠的；*6.* 任意 R-模都是 u-S-投射的；*7.* 任意 R-模都是 u-S-内射的。

u-S-半单环既是 u-S-诺特的，也是 u-S-冯·诺伊曼正则的。

冯·诺伊曼正则。

推论 6.12. *[21,* 推论 *3.6]* 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法子集。假设 R 是一个 u-S-半单环。那么 R 既是 u-S-诺特的，也是u-S-冯·诺伊曼正则的。因此，存在一个元素 $s \in S$，使得对于任意 R 的理想 I，都存在一个 R-同态 f_I：$R \to I$，满足 $f_I(i) = si$，其中任意 $i \in I$均成立。

一个环作为模可以是 u-S-半单的，而不必是 u-S-半单环。

例 6.13. *[21,* 例 *3.7]* 设 $R = \mathbb{Z}$ 和 $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。则 R 是一个 u-S-半单 $\mathbb{Z}$-模（对于任意理想 I，取 $s \in I$ 并定义 f： $R \to I$ 为 $f(1) = s$）。然而， R 并非 u-S-半单环，因为它不是 u-S-冯·诺伊曼正则的（见例 *6.4*）。

当 S 由非零因子组成时， u-S-半单环在经典意义下是半单的。

命题 6.14. *[21,* 命题 *3.8]*设 R 是一个环， S 是 R的一个正则乘法子集。则 R 是 u-S-半单环，当且仅当 R 是半单环。

该性质在有限直积下表现良好。

命题 6.15. *[21,* 命题 *3.10]* 设 $R = R_1 \times R_2$ 是环 R_1 和 R_2 的直积，且 $S = S_1 \times S_2$ 是乘法子集的直积。那么，对于每个 $i = 1$， R是 u-S-半单环，当且仅当 R_i 是 u-S_i-半单环2。

通过将一个非半单环与合适的 S作直积，可以举例说明一个环即使不是半单环，也可以是 u-S-半单环。

例 6.16. *[21,* 例 *3.11]* 设 R_1 为半单环， R_2 为非半单环。设 $R = R_1 \times R_2$ 和 $S = \{(1、1)、(1、0)\}$。则 R 是 u-S-半单的，但不是半单的。

下面给出经典半单环的局部刻画。

命题 6.17。 *[21,* 命题 *3.12]*设 R 是一个环。则以下陈述等价:

1. R 是一个半单环;

2. 对任意 $\mathfrak{p} \in$的素谱， R 都是一个 u-$\mathfrak{p}$-半单环;

3. 对任意 $\mathfrak{m} \in$ 的极大谱， R 都是一个 u-$\mathfrak{m}$-半单环。

6.3 一致 S-乘法模与环

乘法模是指每个子模都可以写成某个理想与该模的乘积的模。 S-版本允许因子 s 依赖于子模。一致版本则将其固定 s。

定义 6.18。 *[15,* 定义 *1]* 设 M 为一个 R-模，且 S 为 R 的乘法子集。若存在一个元素 $s \in S$，使得对于 M 的每个子模 N，都存在 R 的一个理想 I 满足 $sN \subseteq IM \subseteq N$，则称 M 为一个关于 s 的 u-S-乘法 模。

等价地， M 是一个 u-S-乘法模，当且仅当存在 $s \in S$，使得对于每个子模 N，都有 $sN \subseteq (N :_R M)M \subseteq N$。

该性质在有限直积下具有良好的保持性。

命题 6.19。 *[15,* 命题 *1]* 设 M_i 为一个 R_i-模，且 $S_i \subseteq R_i$ 为乘法子集 $(i = 1, 2)$。令 $R = R_1 \times R_2$、 $S = S_1 \times S_2$ 和 $M = M_1 \times M_2$。那么， M 为一个 u-S-乘法模，当且仅当 M_1 为一个 u-S_1-乘法模，且 M_2 为一个 u-S_2-乘法模。

一个例子表明， S-乘法模未必是 u-S-乘法模。

例 6.20. *[15,* 例 *1]* 考虑 $\mathbb{Z}$-模 $E(p) = \{\frac{r}{p^m} + \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$，其中 $S = \{p^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$。那么， $E(p)$ 是一个 S-乘法模，但不是 u-S-乘法模。

该性质在取 S 的饱和以及在 u-S-同构下保持不变。

命题 6.21. *[15,* 命题 *2]*设 M 是一个 R-模。则以下陈述成立。

1. 如果 $S \subseteq T$ 是 R 的乘法子集，且 M 是 u-S-乘法模，那么 M 是 u-T-乘法模。*2.* M 是 u-S-乘法模，当且仅当 M 是 u-S^*-乘法模，其中 S^* 是 S 的饱和。

命题 6.22。 *[15,* 命题 *3]* 设 M 和 M' 是 R-模。假设 M 与 M' 是 u-S-同构的。那么， M 是 u-S-乘法模，当且仅当 M' 是 u-S-乘法模。

在适当条件下，该性质在 u-S-满射下也保持不变。

命题 6.23。 *[15,* 命题 *4]* 设 M 和 M' 为 R-模。假设S 是 R 的一个乘法子集，且 $f:\ M \to M'$ 是一个 u-S-满射。如果 M 是一个 u-S-乘法模，那么 M' 是一个 u-S-乘法模。反之，假设 M'是一个 S-乘法模，且对于某个 $t \in S$，有 $t\,\mathrm{Ker}(f) = 0$；那么 M 是一个 u-S-乘法模。

局部化也保持该性质。

命题 6.24。 *[15,* 命题 *5]*设 R 是一个交换环，且 S 和T是 R的乘法子集。令 $\tilde{S} = \{\frac{s}{1} \in T^{-1}R \mid s \in S\}$。假设 M是一个u-S-乘法 R-模。那么 $T^{-1}M$是一个 u-$\tilde{S}$-乘法 $T^{-1}R$-模。

当 S 满足极大倍数条件时，该性质等价于成为一个 S-乘法模，也等价于局部化后得到一个乘法模。

命题 6.25. *[15,* 命题 *6]* 设 M 是一个 R-模，且 S 是 R 的一个满足极大倍数条件的乘法闭子集。则以下陈述成立：

1. M 是一个 u-S-乘法模。
2. M 是一个 S-乘法模。
3. $S^{-1}M$ 是一个乘法 $S^{-1}R$-模。

给出了与 u-S-诺特模的联系：在一个 u-S-诺特环上， u-S-乘法模是 u-S-诺特的。

命题 6.26. *[15,* 命题 *7]* 设 R 是一个 u-S-诺特环，且 M是一个 u-S-乘法 R-模。则 M 是一个 u-S-诺特 R-模。

理想化下的性质也得到了刻画。

定理 6.27. *[15,* 定理 *2]* 设 M 是一个 R-模， N 是M的一个子模，且 S 是 R 的一个乘法子集。则下列陈述等价。

1. N 是一个 u-S-乘法 R-模。
2. $0(+)N$ 是 u-$S(+0)$-乘法理想，属于 $R(+)M$。
3. $0(+)N$是 u-$S(+M)$-乘法理想，属于 $R(+)M$。

如果一个环作为自身上的 u-S-乘法模，则称其为 u-S-乘法环。

定义 6.28。 *[15, 定义 3]*设 R 为一个环，且 S 为 R的一个乘法子集。若存在 $s \in S$，使得 R 的每个理想都是关于 s的 u-S-乘法，则称 R 为关于 s的 u-S-乘法环；等价地，若存在 $s \in S$，使得对于 R的每一对理想 $J \subseteq K$，都存在 I 的一个理想 R 满足 $sJ \subseteq IK \subseteq J$。

每个乘法环对任意 S 都是 u-S-乘法的。

推论 6.29. *[15, 推论 1]* 每个乘法环都是 u-S-乘法环。

有限直积的该性质可分解为各因子的相应性质。

命题 6.30. *[15, 命题 9]* 设 $R = R_1 \times R_2$ 与 $S = S_1 \times S_2$。则 R是 u-S-乘法环当且仅当 R_1 是 u-S_1-乘法环且 R_2 是 u-S_2-乘法环。

当 S 满足极大倍数条件时， S-乘法性质与 u-S-乘法性质一致。

命题 6.31. *[15, 命题 10]* 设 S 是 R 的满足极大倍数条件的乘法子集。则 R 是 S-乘法环当且仅当 R 是 u-S-乘法环。

将一个 u-S-乘法环在一致元素处局部化，可得到一个经典乘法环。

命题 6.32。 *[15, 命题 11]* 设 R 是一个 u-S-乘法环。那么存在一个 $s \in S$，使得 R_s 是一个乘法环。

一个例子表明，每个理想都是 S-乘法理想的环未必是 u-S-乘法环，而且命题 6.32 的逆命题不成立。

例 6.33。 *[15, 例 3]*设 D 是一个整环，并且对于任意 $0 \neq s \in D$， D_s 都不是戴德金整环（例如， $D = k[x_1, x_2, \dots]$）。令 $S = D - \{0\}$。那么 D 的每个理想都是一个 u-S-乘法理想（因为对于任意非零的 K，取 $s \in K$，则 $sK \subseteq sR \subseteq K$），因此 D 是一个 S-乘法环。然而，根据命题 *6.32*， D 不是一个 u-S-乘法环。

注记说明，某个环在某个 s 下是乘法环，并不意味着它是 u-S-乘法的。

注 6.34. *[15, 注记 1]* 设 D 是一个赋值整环，其赋值群为$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，极大理想由 s 生成。令 $S = D \setminus \{0\}$。那么 D_s 是一个离散赋值整环，因此是一个乘法环；但根据例 *6.33* 中的论证， D 不是 u-S-乘法的。

给出了经典乘法环的局部刻画。

定理 6.35. *[15, 定理 3]* 设 R 是一个环。则以下陈述等价：

1. R 是一个乘法环。

2. 对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$， R 都是一个 u-$\mathfrak{p}$-乘法环。

3. 对每个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$， R 都是一个 u-$\mathfrak{m}$-乘法环。

最后，研究了理想化的这一性质，并证明 $R(+)M$ 是一个 u-$S(+)M$-乘法环，这意味着 R 是 u-S-乘法的，且 M 的每个子模都是 u-S-乘法的。

命题 6.36。 *[15,* 命题 *12]*设 R 是一个环， M 是一个 R-模，且 S 是 R 的一个乘法子集。假设 $R(+)M$ 是一个相对于某个 $(s, m) \in S(+)M$ 的 u-$S(+)M$-乘法环。那么， R 是一个相对于 s 的 u-S-乘法环，且 M 的每个子模都是一个相对于 s 的 u-S-乘法 R-模。

6.4 具有一致 S-诺特谱的环

具有诺特谱的环这一概念，是关于素理想集合的一个拓扑条件。 S类比由 Hamed 引入。其一致版本要求存在一个统一的元素来控制根有限性，该版本由 Guesmi 和 Hamed 研究，之后 Zhang、Hamed 和 Kim 也进行了进一步研究。

定义 6.37. *[9,* 定义 *3.1]*设 R 为一个环， S 为 R的一个乘法子集。若存在 $s \in S$，使得 R 的每个理想都相对于 s是根 S-有限的，则称 R 具有一致 S-诺特谱（或 u-S-诺特谱）。也就是说，对于 R的每个理想 I，都存在一个有限生成子理想 $J \subseteq I$，使得 $sI \subseteq \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$。[-]

下面的结果表明，当 S 满足极大倍数条件时， S-诺特谱与 u-S-诺特谱这两个性质等价。

命题 6.38. *[26,* 命题 *2.1]*设 R 是一个交换环，且 S 是 R 的一个满足极大倍数条件的乘法子集。那么， R 是一个具有 u-S-诺特谱的环，当且仅当 R 是一个具有 S-诺特谱的环。

一个关键引理是，将具有 u-S-诺特谱的环在一致元素处局部化后，可得到一个具有诺特谱的环。

引理 6.39. *[9,* 引理 *3.14]*设 R 是一个相对于某个 $s \in S$具有 u-S-诺特谱的环。那么， R_s 是一个具有诺特谱的环。

一个例子表明，环可以具有 S-诺特谱，却不具有 u-S-诺特谱。

例 6.40。 *[9,* 例 *3.15]*设 $R = k[x_1, x_2, \dots]$ 是域 k上的可数多个变量的多项式环，并令 $S = R \setminus \{0\}$。那么 R 是一个 S-诺特环（因此具有 S-诺特谱），但它不具有 u-S-诺特谱性质。

在假设 S 由非零因子组成的情况下，对具有 u-S-诺特谱的环的刻画涉及局部化 R_s 和一个相容性条件。

定理 6.41. *[26, 定理 2.4]*设 R 是交换环， S 是由 R的非零因子组成的乘法子集。那么， R 具有 u-S-诺特谱性质，当且仅当存在 $s \in S$ ，使得 R_s 具有诺特谱，并且

$$\sqrt{I}R_s \cap R = \sqrt{I} :_R s$$

对 R的每个有限生成理想 I ，

在这类环中，每个根理想都是有限个 s-素理想的交。

定理 6.42. *[26, 定理 3.1]*设 R 是交换环， S 是 R的乘法子集。若 R 相对于 s 具有 u-S-诺特谱，则 R 的每个根理想都是有限个 s-素理想的交。

此外，极小 s-素理想存在，并且每个根理想都是其中有限多个的交。

引理 6.43. *[26, 引理 3.2]* 设 I 是 R的真理想，且 P 是某个 $s \in S$ 所对应的 R 的 s-素理想，其中 $I \subseteq P$。那么，存在 s的一个 Q -素理想 R ，它在包含 I的 s-素理想中是极小的。

定理 6.44. *[26, 定理 3.3]*设 R 是一个交换环，且 S 是 R的一个乘法子集。若 R 关于 s具有 u-S-诺特谱，则 R 的每个根理想都是有限个极小 s-素理想的交。

当 S 由单位组成时，我们便得到经典结果。

推论 6.45. *[26, 推论 3.4]*若 R 具有诺特谱，则每个根理想都是有限个极小素理想的交。

该性质在各种环构造下都保持不变。

命题 6.46. *[26, 命题 4.1]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个乘法子集。若 R 关于 $s \in S$具有 u-S-诺特谱，则 $U^{-1}R$关于 $\frac{s}{1}$具有 u-$\bar{U^{-1}S}$-诺特谱。

平坦上环也继承该性质。

定理 6.47。 *[26, 定理 4.2]* 设 R 是一个环，且 S 是 R的一个乘法子集。若 R 具有 u-S-诺特谱，则 R 的任意平坦上环也具有 u-S-诺特谱（将 S 与其在 R的平坦上环中的像等同）。

希尔伯特基定理对这一性质成立： $R[X]$ 具有 u-S-诺特谱，当且仅当 R 具有该性质。

定理 6.48。 *[26, 定理 4.3]* 设 R 是一个交换环，且 S 是 R的一个乘法子集。那么， R 具有 u-S-诺特谱性质，当且仅当多项式环 $R[X]$具有 u-S-诺特谱性质。

一条注记指出，即使R 具有这一性质，幂级数环也可能不具有这一性质。

注 6.49。 *[26,* 注 *4*。*4]* 根据 *[17],* 存在一个交换环 R ，其具有诺特谱，但幂级数环 $R[[X]]$ 不具有诺特谱。因此，即使 R 具有 u-S-诺特谱， $R[[X]]$ 也可能不具有 u-S-诺特谱。

该性质也适用于纤维积（拉回）和合并。

定理 *6.50*。 *[26,* 定理 *4*。*5]* 设 (T, M) 是一个（准）局部整环，K 是其剩余域，$\phi : T \to K$ 是典范满射， D 是 K 的子环，并且$R = \phi^{-1}(D) \cong T \times_K D$。设 S_D （分别为 S_T ）是 D （分别为 T ）的乘法子集，且 $S = \{s \in R \mid \lambda'(s) \in S_T$ 以及 $\phi'(s) \in S_D\}$。则 R 具有 u-S-诺特谱，当且仅当 T 具有 u-S_T-诺特谱且 D 具有 u-S_D-诺特谱。

最后，对于一个环及其若干重要的环扩张，这一性质是等价的：多项式环、塞尔猜想环、永田环和安德森环。

定理 6.51. *[26,* 定理 *5.2]* 设 R 是含单位元的交换环，且 S 是 R的乘法子集。以下陈述等价：

1. R 具有 u-S-诺特谱性质。 2. $R[X]$ 具有 u-S-诺特谱性质。 3. $R[X]_U$ （塞尔猜想环）具有 u-S-诺特谱性质。 4. $R[X]_N$ （永田环）具有 u-S-诺特谱性质。 5. $R[X]_A$ （安德森环）具有 u-S-诺特谱性质。

当 S 由单位构成时，这便得到一个经典结果。

推论 6.52. *[26,* 推论 *5.3]* 对于交换环 R，以下陈述等价：

1. R 具有诺特谱。
2. $R[X]$ 具有诺特谱。
3. $R[X]_U$ 具有诺特谱。
4. $R[X]_N$ 具有诺特谱。
5. $R[X]_A$ 具有诺特谱。

给出了半群环 $R[\Gamma]$具有该性质的一个充分条件。

定理 6.53。 *[26,*定理 *5.4]*设 R 是一个含单位元的交换环， S 是 R的乘法子集，且 Γ 是一个幺半群。如果 R 具有 u-S-诺特谱性质，且 Γ有限生成，那么 $R[\Gamma]$也具有 u-S-诺特谱性质。

对于数值半群，该性质对环及其半群环等价。

推论 6.54。 *[26,* 推论 *5.5]*设 R 是一个含单位元的交换环， S 是 R的一个子集，且 Γ 是一个真数值半群。则 R 具有 u-S-诺特谱性质，当且仅当 $R[\Gamma]$ 具有 u-S-诺特谱性质。

参考文献

[1] D.D. Anderson, T. Dumitrescu, *S*-诺特环, Comm. Algebra 30 (2002年), 4407-4416.[2] D. D. Anderson, T. Arabaci, U. Tekir, S. Koç, 论 *S*- 乘法模 , Comm. Algebra 48 (2020), 3398-3407.[3] D. D. Anderson, A. Hamed, M. Zafrullah, 论 *S-GCD* 整环, J. Algebra Appl. 18(4) (2019), 1950067.[4] S. Bazzoni, L. Positselski, *S*-几乎完美交换环, J. Algebra 532 (2019), 323-356.[5] D. Bennis, M. El Hajoui, 论 *S*-相干性, J. Korean Math. Soc. 55 (2018), no. 6, 1499-1512.[6] Z. Bilgin, M. L. Reyes, U. Tekir, 论右 *S*-诺特环与 *S*-诺特模, Comm. Algebra 46 (2018), 863-869.[7] M. Z. Chen, H. Kim, W. Qi, F. G. Wang, W. Zhao, 一致 *S*-诺特环, Quaest. Math. 47(5) (2024), 1019-1038.[8] M. Chhiti, S. Moindze, 论 *S*-乘法环, J. Korean Math. Soc. 60 (2023), 327-339.[9] S. Guesmi, A. Hamed, 诺特谱条件与环 $A[X]$, J. Algebra Appl. (2025), 2550113.[10] H. Kim, M. O. Kim, J. W. Lim, 论 *S*-强 *Mori* 整环, J. Algebra 416 (2014), 314-332.[11] J. W. Lim, D. Y. Oh, 沿理想拼合代数上的 *S*-诺特性质, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 2099-2123.[12] J. W. Lim, D. Y. Oh, 复合环扩张上的 *S*-诺特性质, Comm. Algebra 43 (2015), 2820-2829.[13] Z. Liu, 论 *S*-诺特环, Arch. Math. (Brno) 43 (2007), 55-60。

[14] J. Ohm, R. Pendleton, 具有诺特谱的环, Duke Math. J. 35 (1968), 631-639. [15] W. Qi, X. L. Zhang, 论一致 *S*-乘法模与环, Mathe- matics 11(9) (2023), 2168.[16] W. Qi, X. L. Zhang, 交换环的 *u*-*S*-整体维数, Bull. Korean Math. Soc. 60, No. 6, 1523-1537 (2023).[17] P. Ribenboim, 根理想的升链条件, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 7 (1985), 277-280.[18] E. S. Sengele, U. Tekir, S. Koç, 论 *S*-阿廷环与有限 *S*-余生成环, J. Algebra Appl. 19(3) (2020), 2050051. [19] F. G. Wang, H. Kim, 《交换环及其模基础》, 新加坡, 施普林格, 2016.[20] X. L. Zhang, 用一致性刻画 *S*-平坦模与 *S*-冯·诺依曼正则环, Bull. Korean Math. Soc. 59 (2022), no. 3, 643-657.[21] X.L. Zhang, W. Qi, 用一致性刻画 *S*-投射模与 *S*-半单环, J. Commut. Algebra 15 (2023), no. 1, 139-149.[22] X. L. Zhang, 交换环的 *u*-*S*-弱整体维数, Commun. Korean Math. Soc. 38 (2023), no. 1, 97-112.[23] X. L. Zhang, 论一致 *S*-绝对纯模, J. Korean Math. Soc. 60 (2023), no. 3, 521-536.[24]X. L. Zhang, W. Qi, 一致 *S*-*Artin* 环与模, arxiv.org/abs/2207.12569.[25] X. L. Zhang, 论一致 *S*-相干环, Rocky Mt. J. Math. 55 (2025), no. 4, 1167-1183.[26] X. L. Zhang, A. Hamed, H. Kim, 具有一致 *S*-诺特谱的环的扩张与构造, 即将发表于 J. Algebra Appl.。