arXiv:2602.13819v1 [math.LO] 14 Feb 2026

纤维预序无需自然数集上的非主超滤子即可预线性化

Azul Fatalini LukeSerafin

摘要

根据选择公理，每个预序都可以扩展为一个全预序，同时保留严格预序关系。我们将这种扩展称为该预序的预线性化，并研究构造预线性化在何种程度上需要选择公理。我们界定了函子性预序这一类，并证明，在不包含自然数集上的非主超滤子的 策梅洛-弗兰克尔集合论 + 依赖选择公理模型中，这类预序都存在预线性化。函子性预序包括自然数集上的逐坐标支配、图灵可归约性，以及社会选择理论中出现的各种预序。首先，我们利用 Larson 和 Zapletal 的几何集合论工具构造相关模型，这需要一个不可达基数；随后，再运用科恩实数的 amalgamation 方法消去这一不可达基数。

1 引言

无选择集合论的一个重要方面，是在 策梅洛-弗兰克尔集合论下衡量选择公理所蕴含结论的逻辑强度。如果 A 和 B是两个在 ZFC中可证明的命题，那么在没有选择公理的情况下，它们可能等价、不可比较，也可能一个蕴含另一个而反之不成立。蕴含关系和等价关系通常可以直接证明，但要在数学上确立蕴含关系下的不可比较性，或证明某个蕴含关系是严格的，通常需要构造策梅洛-弗兰克尔集合论的模型，使其中一个命题成立而另一个不成立。直到最近，大多数关于选择公理否定情形下的模型的研究，都集中于确立某些特定命题与策梅洛-弗兰克尔集合论（可能再加上大基数公理）相容；这类命题的例子包括决定公理 [16] ，以及以下命题： $\aleph_1$ 是一个奇异基数（Feferman-L´evy 模型，参见 [12,第 10 节。1]）。

构造并验证见证模型、以说明仅在策梅洛-弗兰克尔集合论下A并不蕴含B的策略，是一个活跃的研究领域。著作几何集合论 [15] 部分致力于为此目的构造方法与准则，并已在多种不同情境中成功应用；例如，参见 [18, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]。此外，也有借助其他技术得到的结果，例如 [1, 3, 5, 19]。

第一作者获得了英国研究与创新署（UKRI）未来领军人才奖学金 [MR/Y034058/1] 的资助。第二作者获得了美国国家科学基金会（NSF）DMS-2153975 和 DMS-2451350 号拨款的资助。

本文关注如下陈述A，其形式为“存在对$\sqsubseteq$的预线性化”，其中 $\sqsubseteq$ 是一个固定的可定义预序（见定义2.1），且B是如下陈述：存在 ω 上的非主超滤子（记作$\mathsf{Uf}(\omega)$）。

社会选择理论这一经济学分支为研究特定预序何时能够预线性化提供了动机，正如长期未发表的论文“Flutters and Chameleons” [2]所指出的。这篇论文阐述了解决社会选择理论中各种问题所需的数学理论，而其姊妹论文 [6] 则展示了如何运用这一数学理论证明：社会选择理论中传统上借助自然数集 ω 上的非主超滤子或更强原则完成的各种构造，在某些模型中实际上并不需要超滤子。

回到集合论的视角，第二作者已证明，存在一个策梅洛-弗兰克尔集合论 + 依赖选择公理的模型，其中一个与社会选择理论中公平问题相关的预序$\sqsubseteq_{\mathrm{SEA}}$ 具有预线性化，且自然数集 ω [20]上不存在非主超滤子。该结果运用了几何集合论的方法；更确切地说，它利用了这样一个事实：通过可数逼近添加预线性化的自然偏序集是平稳的，而平稳性是几何集合论中的一种概念。然而，并非所有与预序预线性化相关的强迫概念都是平稳的；特别是，我们观察到（命题3.3）自然数集 $\mathbb{R}^{\omega}$ 上的逐坐标支配序缺少一项技术性质，因而无法验证其自然强迫概念是平稳的，所以需要采用其他方法。逐坐标支配序在社会选择理论中特别重要，因为它编码了帕累托效率条件。

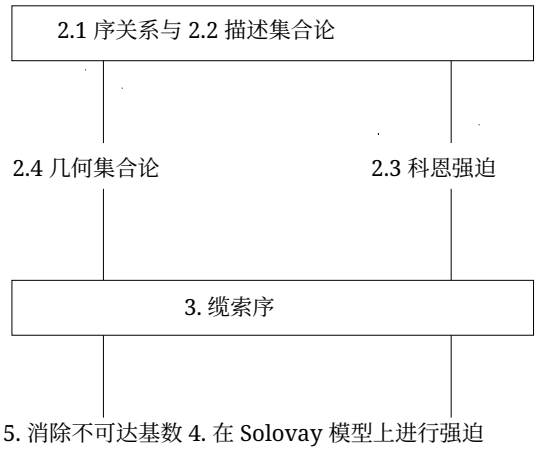
受这一先前结果的启发，我们想弄清楚哪些预线性化不需要 $\mathsf{Uf}(\omega)$（在 ZF + DC中）。我们提炼出一个有助于部分回答这一问题的概念：若一个博雷尔预序 $\sqsubseteq$ 是 函子性的 （定义 3.1），且存在一个不可达基数，那么就存在一个 $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \neg \mathsf{Uf}(\omega)$ 模型，其中 $\sqsubseteq$可预线性化。(3,2)-平衡强迫的概念由 [15], 引入，用来确保所构造的模型满足 $\neg\mathsf{Uf}(\omega)$：通过证明函子性预序与(3,2)-平衡强迫自然相关联（引理4.3）。

然而，我们始终希望弄清楚能否去掉不可达基数 [21]。几何集合论方法通常用于在 Solovay 模型上进行强迫的情形，而该模型必然是借助一个不可达基数构造的。因此，要去掉不可达基数，我们需要解决两个问题：

1. 在不使用不可达基数的背景下，提出一个类似于 (3,2)-平衡的判据；2. 证明我们的纤维型博雷尔预序族所关联的强迫满足该判据。

它们分别是定理 5.8和引理 5.4。

如前所述，本文既包含一个直接运用几何集合论方法的论证，也包含对该论证的重大修改，从而不再需要使用不可达基数。下图展示了后续各节或小节之间的关系。读者若只想沿其中一条路径阅读，应沿图中对应的路线进行。



2 预备知识

我们将函数和关系视为其图像，并用 $f \restriction A$ 表示函数在集合 A 上的限制。因此，若 $f : X \to Y$ 且 $A \subseteq X$，则 $f \restriction A = f \cap (A \times Y)$。集合 A 在函数 f 下的逐点像记作 $f \mathbin{''} A$。对于集合 X 和 Y，X^Y表示所有定义域为 Y、陪域为 X 的函数构成的空间。记号 $X^{<\omega}$表示由 X 的元素组成的所有有限序列构成的空间；注意，(根据所采用的具体定义，经过显然的双射) $X^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} X^n$。对于 $s \in X^{<\omega}$，记号 $|s|$ 表示序列 s 的长度；这确实等于将 s 视为有序对集合时的基数。

2.1 序关系

集合 X 上的二元关系 *binary relation* 是 R 的一个子集，其中 $X \times X$（即 X 与自身的笛卡尔积）。对于 x、$y \in X$，当 $\langle x, y\rangle \in R$ 时，我们记作 $x R y$。暂且设变量 x、y 和 z 表示 X 中的任意元素。二元关系 R 是

- 传递当 $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$时，
- 自反当 $x R x$时，
- 反自反当 $\neg x R x$时，
- 完全当 $x R y$或$y R x$时，
- 反对称当且仅当$x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$，
- 对称当且仅当$x R y \Rightarrow y R x$，且
- 非对称当 $x R y \Rightarrow \neg y R x$时。

对于集合 X 上的二元关系 R，有序对 (X,R) 称为一个关系结构。关系结构 (X,R) 是

- 当R 是自反且传递的时，称其为预序，
- 当R 是反对称预序时，称其为偏序，
- 当R 是完全偏序时，称其为线性序，
- 当R 是全预序时，称其为预线性序，并且
- 当R是对称预序时，称其为等价关系。

容易看出，预序 $\sqsubseteq$ 会诱导出由$x \sim_{\sqsubseteq} y$ 定义的等价关系$\sim_{\sqsubseteq}$，当且仅当$x \sqsubseteq y$ 且$y \sqsubseteq x$。当预序 $\sqsubseteq$ 的含义可从上下文中明确时，我们简单地用$x \sim y$ 代替$x \sim_{\sqsubseteq} y$。此外，给定预序 $\sqsubseteq$，相应的严格 关系 $\sqsubset$ 定义为：当且仅当$x \sqsubset y$ 且$y \sqsubseteq x$ y x。这是一种反自反、非对称且传递的关系。

当且仅当S 延伸二元关系R 时，$R \subseteq S$。现在我们来到了本文研究的主要对象。

定义 2.1。设 $\sqsubseteq$是集合X上的一个预序。$\lesssim$ 是$\sqsubseteq$的一个预线性化，当且仅当 $\lesssim$是X上的一个预线性序，$\sqsubseteq \subseteq \lesssim$，且 $\sqsubset \subseteq <$。

$\lesssim$是$\sqsubseteq$ 的一个预线性化，若进一步满足 $\sim_{\lesssim} = \sim_{\sqsubseteq}$，则称其为逐等价类预线性化。

请注意，预序 $\sqsubseteq$ 的预线性化可以将不可比较的$\sim_{\sqsubseteq}$-等价类识别为同一类，而逐等价类预线性化则不允许这样做。可以使用选择公理证明逐等价类预线性化总是存在；而在依赖选择公理下，存在一些偏序可以预线性化，却不能线性化（因此不能逐等价类预线性化，因为偏序所诱导的等价关系是恒等关系）。

定理 2.2 (ZFC；Szpilrajn [23] 和 Hansson [10])。设 $\sqsubseteq$ 和 $\lesssim$ 是集合 X 上的两个预序。如果 $\sqsubseteq \subseteq \lesssim$ 并且 $\sqsubset \subseteq <$，那么 $\lesssim$ 可以扩展为$\sqsubseteq$的逐等价类预线性化。

注意到，刚才陈述的 Szpilrajn-Hansson 定理在依赖选择公理下未必成立：Solovay 模型 W 满足依赖选择公理 [22], ，但实数集上的子集关系不存在预线性序。这是因为，若存在这样的预线性序，就意味着 E_0 等价类[1], 上存在线性序W 中不存在这样的线性序，因为通过 Kuratowski-Ulam 定理可知，该线性序在商投影下的原像是一个不具有贝尔性质的实数集，而 ω^ω 到 ω^ω/E_0 中的每个实数集在 W 中都具有贝尔性质。

[1]这里 E_0 是 ω^ω中元素之间的最终相等标准关系；例如参见 [7]。

2.2 一般集合论与描述集合论

波兰空间是指存在一个生成其拓扑的完备度量的可分拓扑空间。

注意，波兰空间的可数不交并和乘积仍是波兰空间（例如参见 [13]）。波兰空间的一个子集称为G_δ，如果它可以表示为可数个开集的交集；若该子集属于由开集生成的 Borel*Borel* 代数，则称其为σ。波兰空间之间的函数称为 Borel 函数，如果陪域中任一开子集在定义域中的原像是 Borel 集。波兰空间的子空间是波兰空间，当且仅当它是G_δ [13]。波兰空间 X 的子集 A 称为解析或$\mathbf{\Sigma}^1_1$，如果存在一个波兰空间 Y 以及一个连续函数 $f\colon Y \to X$，使得A 是Y 在f下的像。

我们采用策梅洛-弗兰克尔集合论（ZF）作为基础集合论，通常再加上依赖选择公理。特别是，除非特别说明，我们不假设选择公理。我们的论证是在一个背景模型中进行的，并假定该模型满足选择公理，因此有时我们确实会用到完整的选择公理。关于这些公理的详情，见 [11, 第 0] 章。为完整起见，我们在此陈述依赖选择公理。

定义2.3. 依赖选择公理记为依赖选择公理，断言：对每一个二元关系R，若对每一个$x \in \mathrm{dom}(R)$都存在y 使得$x\ R\ y$，则存在一个函数$f\colon \omega \to \mathrm{dom}(R)$，使得对每一个$n \in \omega$，$f(n)\ R f(n+1)$。

关于集合论模型上的强迫的基本事实，参见诸如 [14] 之类的集合论标准教材。我们对力迫序采用布尔约定，因此 $\mathrm{p} \leq \mathrm{q}$ 表示 p 是比 q 更强的条件。对于力迫条件 p 与 q，$\mathrm{p} \perp \mathrm{q}$ 表示 p 与 q 不相容（即不存在条件 r 满足 $\mathrm{r} \leq \mathrm{p}, \mathrm{q}$）。若 P 是一个力迫概念，$\dot{\mathrm{a}}$ 是一个 P-名称，且 g 是集合论模型 V 上的一个 P-泛滤子，则我们用 $\dot{\mathrm{a}}_{\mathrm{g}}$ 表示 $\dot{\mathrm{a}}$ 由 g 给出的解释。对于乘积$\prod_{\alpha<\kappa} \mathrm{P}_\alpha$ 与 $\alpha < \kappa$中的泛滤子 g，我们用 $\mathrm{g} \restriction \alpha$ 表示集合 $\{\mathrm{p} \restriction \alpha : \mathrm{p} \in \mathrm{g}\}$。

关于内模型，我们假定读者熟悉 G¨odel 的可构造宇宙 L、形如 $L(A)$ 的变体、序数可定义集类 OD 及其相对化 OD_A（请注意，这些通常并非集合论模型），以及序数可定义集类 HOD 及其相对化 HOD_A

2.3 科恩强迫

我们假定读者熟悉科恩强迫，但为阐明一些细微之处并确立第 5 节将用到的记号，我们在此记录一些重要的定义和结果。本小节中假定选择公理的完整形式成立。

定义2.4。强迫 $\mathbf{C}$，称为科恩强迫，定义如下。

$$\mathbf{C} = \{p\colon \omega \to 2 \mid p \text{ is a partial function with } \mathrm{dom}(p) < \omega\},$$

按反向包含排序，其中 $\mathbb{1}_{\mathbf{C}} = \emptyset$。此外，当 X 是一个序数集时，我们定义

$$\mathbf{C}(X) = \{p \in \Pi_{\alpha\in X}\mathbf{C} : |\{\alpha \in X : p(\alpha) \neq \emptyset\}| < \omega\},$$

按逐坐标排序。这是 $|X|$ 份科恩强迫的有限支撑积。

对于 ZFC 的一个模型V 以及$g \subseteq \mathbf{C}$ （一个在V上泛型的滤子）， $\cup g \in {}^{\omega}\omega \cap V[g]$ 是一个实数，称为由$\mathbf{C}$添加的（规范）科恩实数。“规范”一词是必要的，因为科恩强迫实际上会添加不可数多个实数，它们是与科恩强迫等价的强迫的泛型滤子的并。

若g 在V上是$\mathbf{C}(X)$-泛型的，则对于每个 $\alpha \in X$，$\bigcup_{p\in g} p(\alpha)$ 对每个 $\alpha \in X$都是一个实数；事实上，它是一个科恩实数。我们常常滥用记号，把一个科恩泛型滤子$g \subseteq \mathbf{C}$ 当作实数，而不显式写出 $\cup g$。

在$\mathbf{C}(\omega_1)$这一特殊情形下，乘积的每个真初始段都等价于一次单独的科恩强迫$\mathbf{C}$ （因为它是可数积），并且事实上，$\mathbf{C}(\omega_1)$-延伸中的每个实数都是由某个真初始段添加的；这一事实我们将会频繁使用。

引理 2.5. 对于 V 上任意的 $\mathbf{C}(\omega_1)$-泛滤子，以及任意满足 $r \in {}^{\omega}\omega \cap V[g]$ 的 r，都存在 $\alpha < \omega_1$ 使得 $r \in V[g \restriction \alpha]$。

注意，$g \restriction \alpha$ 是$\mathbf{C}(\alpha)$-泛型滤子，且其泛型扩张为V；因此，记作$V[g \restriction \alpha]$ 是有意义的。模型$V[g \restriction \alpha]$ 实际上是V 的科恩泛型扩张，因为$g \restriction \alpha$ 是$\mathbf{C}(\alpha)$-泛型滤子，且 α 是可数的。还要注意，对于任意序数 $\alpha < \omega_1$ 和基数为 $\aleph_1$ 的集合X，偏序 $\mathbf{C}(\alpha)$、$\mathbf{C}(\omega_1 \setminus \alpha)$ 和$\mathbf{C}(X)$之间，以及$\mathbf{C}(\omega_1)$与这些偏序集之间，都存在同构。

我们还记录一个用强迫等价刻画科恩强迫的有用结果：当且仅当两个偏序的布尔完备化同构时，它们才强迫等价。

定理 2.6.

a. 若 P 是可数无原子强迫概念，则 P 与 $\mathbf{C}$ *[8,*第 *4* 节定理 *15]* 等价。

b. 科恩强迫概念的可数积与 $\mathbf{C}$ 等价。

c. 设 g 是 V 上的 $\mathbf{C}$-泛滤子，且 $r \in {}^{\omega}\omega \cap V[g]$, 。从 V 到 $V[r]$，以及从 $V[r]$ 到 $V[g]$ 的每个延伸，要么是平凡的，要么是科恩扩张。

d. 设 g 是 V 上的 $\mathbf{C}(\omega_1)$-泛滤子，且 $r \in {}^{\omega}\omega \cap V[g]$, $V[$ 是 $V[r]$ 的 $\mathbf{C}(\omega_1)$-泛型扩张，而 $V[r]$ 是 V 的平凡扩张或科恩扩张。

2.4 几何集合论

该几何集合论由 Larson 和 Zapletal [15] 提出，提供了一系列在 Solovay 模型中进行强迫的技巧W，并将在第4节中应用。Solovay 模型的重要性在于，它是一个满足+依赖选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论模型，其中所有实数集都具有几乎所有在数学上有意义的正则性性质。特别是，在W 中，所有实数集都是勒贝格可测的，并且具有贝尔性质、完美集性质和 Ramsey 性质 [22, 17]。请注意，构造 Solovay 模型需要存在一个不可达基数，因此，使用

Solovay 模型的一致性证明并非相对于 ZFC 的一致性证明。为明确起见，我们固定一个不可达基数 λ，并定义W为 $\mathrm{HOD}_{\mathbb{R}\cup V}^{V[g]}$，其中$g$是 Coll$(\omega,\lambda)$-泛型，且相对于$V$，并且 $\mathbb{R}$ 在$V[g]$中取值。文献中还采用了许多其他定义，但它们都给出初等等价模型 [4]。

2.4.1 Suslin 强迫与虚拟条件

为了利用几何集合论的工具，尤其是平衡强迫及其变体，必须在泛型扩张中处理力迫条件。要使这有意义，强迫偏序集必须具有足够的可定义性；Suslin 强迫的概念足以满足几何集合论 [15]及其应用的需要。

定义 2.7。偏序集 $\langle P,\leq\rangle$ 是*Suslin* 的，当且仅当存在一个波兰空间X，使得P、$\leq$和$\perp$都是解析集。

解析性假设的作用在于，Mostowski 绝对性 [11, 定理 25.20]适用，因此解析集在存在它们的任意策梅洛-弗兰克尔集合论 + 依赖选择公理模型中都有有意义的解释。关于 Suslin 偏序集的绝对性性质的更多细节，以及这类偏序集的诸多例子，可参见 [15]及其参考文献。

虚拟条件直观地说，是存在于 V 中的对象，它们描述 Suslin 强迫的条件，而这些条件在强迫扩张之间都能保证一致。为了将其形式化，我们先定义 V中的对象，称为 P-对，它们确定了 P-条件在 V的泛型扩张中的情形。实际上，我们将让 P-对确定 P中的解析条件集，为此我们在 P的解析子集上定义一个序；最好将其理解为按这些集合在可定义完备化中的上确界排序[2]。

定义 2.8（[15, 定义 5.1.4]）。设 A、B 是 Suslin 强迫 P 的解析子集。若且唯若 A 中某个元素以下的每个条件都能加强为 B 中某个元素以下的条件，A 的上确界小于 B 的上确界，记作 $\sum A \leq \sum B$。若 $\sum A \leq \sum B$ 且 $\sum B \leq \sum A$，则记作 $\sum A = \sum B$。

定义 2.9 ([15, 定义 5.1.6])。对于 Suslin 强迫 P，一个*P-pair* 是一个对 $\langle Q,\ \dot{A}\rangle$，其中 $Q\in V$ 是一个强迫偏序集，且$Q\Vdash$“$\dot{A}$ 是P的解析子集”。

P-pair 中所命名的解析集，在不同泛型扩张中的特征未必稳定，而P-钉这一概念正是为了解决这个问题。

定义 2.10 ([15, 定义 5.1.6])。对于 Suslin 强迫P，P-钉 是指$Q\times Q\Vdash \sum \dot{A}_{\triangleleft} = \sum \dot{A}_{\triangleright}$，其中

$$\dot{A}_{\triangleleft} = \{\langle \sigma_{\triangleleft}, \langle p,q\rangle\rangle : \langle \sigma,p\rangle\in\tau, q\in P\}$$

是将 τ 投影名称提升到$Q\times Q$-泛滤子的左因子所得的名称；$\dot{A}_{\triangleright}$亦然。正如 [15], 所述，不妨将它们视为名称 $\dot{A}$的左、右副本。

[2]也就是说，一个极小 包含所有上述上确界的序 P 的延伸 解析子集 P。

定义 2.11。 对于 P-针 $\langle P、\ \dot{A}\rangle$、$\langle Q、\ \dot{B}\rangle$，定义虚拟等价关系 *virtual equivalence*：$\langle P、\ \dot{A}\rangle \equiv \langle Q、\ \dot{B}\rangle$ 当且仅当 $P \times Q \Vdash \sum \dot{A} = \sum \dot{B}$。虚拟条件是该关系的等价类。

这 $\equiv$ 确实是一个等价关系，这一点由 [15, 命题 5.1。8]虚拟条件背后的直观是，它们以一种不依赖于所考察的V的特定泛型扩张的方式，描述条件（解析集的上确界）。注意，对于任意偏序集P 和解析子集$A \subseteq P$，有序对$\langle 1, \check{A}\rangle$（其中 1 是平凡单元素偏序集）确定一个虚拟条件，因此特别地，P 自然嵌入其虚拟条件集之中（注意，不同的单元素集 $\{p\}, \{q\}$，其中$p,q \in P$ 确定不同的虚拟条件）。

2.4.2 平稳、平衡与 (3,2)-平衡强迫

为定义平衡强迫及相关概念并进行研究，我们在P-对上使用一个等价关系。

定义 2.12 ([15, 定义 5.2.5])。P-对 $\langle \mathrm{Q}, \dot{\mathrm{A}}\rangle, \langle \mathrm{R}, \dot{\mathrm{B}}\rangle$ 称为平衡等价，记作 $\langle \mathrm{Q}, \dot{\mathrm{A}}\rangle \equiv_b \langle \mathrm{R}, \dot{\mathrm{B}}\rangle$，当且仅当对所有的对 $\langle \mathrm{Q}', \dot{\mathrm{A}}'\rangle \le \langle \mathrm{Q}, \dot{\mathrm{A}}\rangle, \langle \mathrm{R}', \dot{\mathrm{B}}'\rangle \le \langle \mathrm{R}, \dot{\mathrm{B}}\rangle$，

$$Q' \times R' \Vdash \exists q \in \dot{A}'\ \exists r \in \dot{B}'\ \exists p\ p \le q, r.$$

命题 2.13 ([15, 命题 5.2。6])。 关系 $\equiv_b$ 确实是一个等价关系；并且如果 $\langle Q, \dot{A}\rangle \le \langle R, \dot{B}\rangle$，那么 $\langle Q, \dot{A}\rangle \equiv_b \langle R, \dot{B}\rangle$。

平衡等价的一个重要性质是，每个平衡等价类都包含一个虚拟条件；事实上，该条件在虚拟条件的等价意义下是唯一的。因此，在考虑模平衡等价的P-对时，只需考虑虚拟条件。

命题 2.14 ([15, 定理 5.2。8])。 对于任意 *Suslin* 强迫 P，P-对的每个平衡等价类都包含一个虚拟条件，并且该条件在虚拟条件的等价意义下是唯一的。

定义 2.15（[15, 定义 9.3。1]）。设 P 是一个 Suslin 强迫。当且仅当对于所有满足 $\overline{\mathrm{V}}[\mathrm{g}], \mathrm{V}[\mathrm{h}]$ 的泛型扩张，以及满足 $\mathrm{V}[\mathrm{g}] \cap \mathrm{V}[\mathrm{h}] = \mathrm{V}$ 的所有情形（所有相互泛型扩张对 $\mathrm{V}[\mathrm{g}], \mathrm{V}[\mathrm{h}]$），对于所有满足 $\mathrm{q} \in \mathrm{V}[\mathrm{g}], \mathrm{q}' \in \mathrm{V}[\mathrm{h}]$，且 $\mathrm{q}, \mathrm{q}' \le \mathrm{p}$ 的条件 q，q' 都相容时，P 的虚拟条件 p 是平稳的（平衡的）。当且仅当对于 P 中每个条件 $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$，都存在一个平稳的（平衡的）虚拟条件 $\mathrm{p} \le \mathrm{p}$ 时，P 是平稳的（平衡的）。当 P-pin 的虚拟等价类是平衡的或平稳的虚拟条件时，称该 P-pin 为平衡的或平稳的；当 P-对与一个平衡的或平稳的 P-pin 平衡等价时，称该 P-对为平衡的或平稳的。

正如我们将在本文的主要证明过程中看到的，平衡对和平稳对在证明特定陈述受到强迫时非常有用，因为如果某个陈述未被平衡对 $\langle Q、\ \dot{A}\rangle$ 判定，通常可以利用这一事实构造出低于 $\langle Q、\ \dot{A}\rangle$ 的不相容对。特别是在 Solovay 模型W的语境下，强迫P的一个平衡对能够决定关于P的泛型对象的一切，具体如下：

定理 2.16 ([15, 命题 5.2.4])。 设 P 是一个 *Suslin* 偏序集，且 $\langle Q, \tau\rangle$ 是 P 的一个平衡对。那么，对于任意公式 ϕ 和参数 $z \in V$，以下情况之一在 V 中成立：

- $Q \Vdash \mathit{Coll}(\aleph_0, < \lambda) \Vdash \tau \Vdash_P W[\dot{g}] \models \phi(\dot{g}, \check{z})$;
- $Q \Vdash \mathit{Coll}(\aleph_0, < \lambda) \Vdash \tau \Vdash_P W[\dot{g}] \models \neg\phi(\dot{g}, \check{z})$，

其中 $\dot{g} = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}$ 表示一个 P-泛滤子的典范 P-名称。

定义 2.17（[15, 定义 13.1.1]）。Suslin 强迫 P 的虚拟条件 p 是 (3, 2)-平衡的，当且仅当对于任意三个滤子 g_0, g_1, g_2，它们分别属于偏序集 Q_0, Q_1, Q_2，且在 V 上两两相互泛（也就是说，对于 $i \neq j$，$g_i \times g_j$ 是 $Q_i \times Q_j$-泛型），以及任意分别属于泛型扩张 $V[g_0], V[g_1], V[g_2]$，、延伸 p 的条件 p_0, p_1, p_2，如果 p_0, p_1, p_2 两两相容，那么它们就有一个公共下界。

命题 2.18 ([15, 定理 13.2 的推论。1])。 如果 P 是一个(3,2)-平衡 *Suslin* 强迫，且 g 是 W 上的 P-泛型，那么在 $W[g]$中不存在自然数集 $\mathbb{N}$上的非主超滤子。

我们将证明，对于某些预序 $\sqsubseteq$，存在一个与之关联的自然的 (3,2)-平衡强迫。因此，可以将 Solovay 模型W扩展为一个包含 $\sqsubseteq$ 的预线性化、同时保留 $\neg\mathsf{Uf}(\omega)$ 的模型。

3 索道预序

定义 3.1。 波兰空间 X 上的可定义预序 $\sqsubseteq$ 称为函子性的，当且仅当对于每个$g \times h$，若其对于积强迫 $P \times Q$ 是泛型的，并且对于每个$x \in V[g]$ 以及$y \in V[h]$，满足$x \sqsubseteq y$，都存在$z \in V$，满足$x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$。在本节中，“可定义”将表示 Borel。

也可以将函子性的定义相对化到一个强迫类。对于强迫类 $\mathcal{P}$，称波兰空间 X 上的可定义预序 $\sqsubseteq$ $\mathcal{P}$-函子性的，当且仅当对于每一对强迫 P、$Q \in \mathcal{P}$，以及每一对分别是 $P \times$、$Q \times$ 的泛滤子 $g \in$、h[，若 x] 、$y \in$ 分别属于 V[g] 、$V \sqsubseteq$ h[，并且在 $V \times g], h \in$ 中满足 $x \sqsubseteq y \sqsubseteq$，那么就存在 $z \in V$，使得 xzy。这个相对化对于实现去掉不可达基数这一目标十分重要，见定义 5.7。

引理 3.2. 以下波兰空间上的博雷尔预序具有函子性：

1. $(\mathbb{R}^\omega, \leq)$，其中比较 $\leq$ 按逐坐标方式进行。*2.* $(\omega^\omega, \leq)$。*3.* $(\mathbb{R}^\omega, \leq^*)$，其中 $\leq^*$ 是模 ω 的有限子集理想的支配。*4.* $(\omega^\omega, \leq^*)$。*5.* $(2^\omega, \leq_T)$，其中 $\leq_T$ 是图灵可归约性。

6. 对最后一项进行推广，任意 *Borel* 预序 $(X, \leq)$ 都具有如下性质：如果 $x, y \in X$ 且 $x \leq y$，那么要么 $x \in OD_y$，要么 $y \in OD_x$，且这一结论可由一个向上绝对的公式得到。

证明。显然，所有这些预序都是 Borel 的。令X为所考虑的解析预序 $\sqsubseteq$ 的定义域，并固定强迫偏序集P和Q、一个对$P \times Q$泛型的滤子$g \times h$，以及元素$x \in X^{V[g]}$和$y \in X^{V[h]}$，其中$x \sqsubseteq y$。

(1) 固定名称 $\dot{x}$（其中 x 属于 V[g]）和 $\dot{y}$（其中 y 属于 V[h],），以及一个条件 $(p, q) \in P \times Q$，使得 $(p, q) \Vdash \dot{x} \leq \dot{y}$。对于 $n \in \omega$，定义

$$A_n = \{s \in \mathbb{Q} : \exists p' \leq p\ (p', q) \Vdash \check{s} > \dot{x}(n)\},$$

$$B_n = \{s \in \mathbb{Q} : \exists q' \leq q\ (p, q') \Vdash \check{s} < \dot{y}(n)\}.$$

注意，$\sup A_n \leq \inf B_n$，因为 $(p, q) \Vdash \dot{x}(n) \leq \dot{y}(n)$，所以存在$z_n \in \mathbb{R}^V$使得 $\sup A_n \leq z_n \leq \inf B_n$。定义$z(n)^V$为$z(n)$ z，并注意到 $(p,q) \Vdash \dot{x} \check{\leq} \dot{z} \check{\leq} \dot{y}$。因此$x \leq z \leq y$。

(2) 设 $x,y \in \omega^\omega$ 来自 V 的相互泛型扩张，由（1）可知，存在 $z \in (\mathbb{R}^\omega)^V$使得 $x \leq z \leq y$。现在只需注意到 $\lfloor z \rfloor \in (\omega^\omega)^V$ 满足 $x \leq \lfloor z \rfloor \leq y$。

(3)—（4）忽略有限多个坐标（即 V 中存在的坐标集合）后，这分别变成与（1）和（2）相同的问题。

(5) 若 $x \leq_T y$，那么 $x \in V$，因为存在一个函数 f，它在y 中递归定义，并具有如下性质：$f(y) = x$，因此 x 和 y 不可能相对于任何非平凡强迫成为相互泛型。

（6）设 $x \leq y$。不失一般性（在另一种情形下使用对称论证），我们有 $x \in OD_y$，且由一个向上绝对的定义公式定义。因此，任何包含 y 的集合论模型也包含 x，所以不可能找到非平凡的相互泛型扩张 V[g] 和 V[h]，使得 $x \in V[g]$ 且 $y \in V[h]$。因此，$\leq$ 是平凡地函子性的。

□

前述定理的第（1）项实际上蕴含关系 $\leq_{\mathrm{AP}}$的缆性；该关系定义如下：对于 $x, y \in \mathbb{R}^\omega$，$x \leq_{\mathrm{AP}} y$ 当且仅当存在一个有限置换 π 作用于 ω，使得$x \circ \pi \leq y$逐坐标成立。这对社会福利序理论十分重要：预线性化 $\leq_{\mathrm{AP}}$ 的关系称为匿名帕累托社会福利序。作者在姊妹论文[6]中考察了纤维预序的强迫理论在经济学中的应用。

预序 $\leq$ 的宁静性比缆性要求更强：若$x \leq y$，$x \in V[g], y \in V[h]$, 且$V[g] \cap V[H] = V$，则存在$z \in V$，使得$x \leq z \leq y$。第二作者曾在 [20] 中利用这一性质构造一个集合论模型，其中包含某个在社会选择理论中具有重要意义的预序的预线性化，但自然数集 ω上不存在非主超滤子。然而，同样的论证不适用于经济学上更有趣的 AP序情形，因为事实证明，相关预序（它扩张了自然数集 $\mathbb{R}^\omega$上的 $\leq$逐坐标关系）并不具有宁静性。

命题 *3.3. </style}*在 $\mathbb{R}^\omega$ 上逐坐标解释的关系 $\leq$ 并不平静。

证明。 考虑偏序集

$$P = \{(p,q) \in \bigcup_{n<\omega} (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n) : \forall k < n.p(k) < q(k)\},$$

在两个坐标上都按末端延拓排序。这显然是一个无原子、可数的偏序集，因此根据定理 2.6，它与科恩强迫等价。固定一个在 V 上泛型的滤子 h，并令 $\gamma = \bigcup_{(p,q)\in g} p$ 且 $\gamma' = \bigcup_{(p,q)\in g} q$。令 g 和 g' 分别为由 γ 和 γ' 的初始段生成的滤子。显然 $\gamma \le \gamma'$；我们将证明 $V[\gamma] \cap V[\gamma'] = V$，且不存在 $z \in V$ 使得 $\gamma \le z \le \gamma'$。

对于后一结论，只需要证明 γ 和 γ' 是 $\mathbb{Z}^{<\omega}$-泛型的，且基于 V，因为科恩实数是无界的 [9, 引理 22。1]。但这显而易见，因为对于任意稠密集 $D \subseteq \mathbb{Z}^{<\omega}$，显然 $(D \times \mathbb{Z}^{<\omega}) \cap P$ 和 $(\mathbb{Z}^{<\omega} \times D) \cap P$ 在 P 中都是稠密的。

现在只需验证 $V[\gamma] \cap V[\gamma'] = V$。将条件 $p \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 零延拓到某个长度 $l > |p|$，指的是函数 $p' : l \to \mathbb{Z}$，其定义为：当 $k < |p|$ 时，$p'(k) = p(k)$；否则 $p'(k) = 0$。取 $\dot{g}$、$\dot{g}'$ 为 h 的左投影和右投影的规范名称。令 $x \in V[\gamma] \cap V[\gamma']$，并固定其名称 $\dot{x}$、$\dot{y}$，以及满足 $(p,q) \Vdash \dot{x}_{\dot{g}} = \dot{y}_{\dot{g}'}$ 的条件 $(p,q) \in h$。由 $\in$归纳法，我们可以假设 $\mathbb{Z}^{<\omega} \Vdash \dot{x}, \dot{y} \subseteq V$。因此，反设 $x \notin V$，则存在 $z \in V$ 以及长度相同的条件 p'、$p'' \le p$，使得 $p' \Vdash \check{z} \in \dot{x}_{\dot{g}}$，而 $p'' \Vdash \check{z} \notin \dot{x}_{\dot{g}}$；否则 p 会判定 $\dot{x}_{\dot{g}}$ 的所有元素，因而 x 就属于 V。现在，若 q 能判定 $\check{z} \in \dot{y}$，例如判定 $\check{z} \notin \dot{y}$，那么就会产生矛盾：取 q_0 为 q 的延伸，使其长度等于 p'和 p''的共同长度，并且对每个 k 都满足 $q_0(k) < p'(k)$、$p''(k)$，则条件 (p', q_0) 强制 $\check{z} \in \dot{x}_{\dot{g}}$，而 (p'', q_0) 强制相反的结论；这与 $(p,q) \Vdash \dot{x}_{\dot{g}} = \dot{y}_{\dot{g}'}$矛盾，因为 (p', q_0)、$(p'', q_0) \le (p,q)$。因此，存在长度相同的 q'、$q'' \le q$，使得 $q' \Vdash \check{z} \in \dot{y}_{\dot{g}'}$，而 $q'' \Vdash \check{z} \notin \dot{y}_{\dot{g}'}$。必要时延伸后，我们可以假设$|p'| = |p''| = |q'| = |q''|$。现在又出现了新的矛盾，因为

$$(p', q'') \Vdash \check{z} \in \dot{x}_{\dot{g}} \setminus \dot{y}_{\dot{g}'},$$

然而 $(p', q'') \le (p,q)$ 且 $(p, q) \Vdash \dot{x}_{\dot{g}} = \dot{y}_{\dot{g}'}$。 □

Jonathan Schilhan 向我们提出了一个非函子性的博雷尔预序的例子。考虑 $[0]$ 和 $[1]$ 这两个 $2^{\mathbb{N}}$ 的既开又闭子集，它们分别由以 0 开头和以 1 开头的序列组成。按$x \lesssim y$ 排序，当且仅当$x = y$ 或$x \in [0]$且$y \in [1]$。这个关系显然是博雷尔的，但它不具缆性，因为如果g、g' 是相互泛型的科恩实数，且$g(0) = 0$且$g'(0) = 1$，那么g 和g' 就见证了缆性失效。

4 Solovay 模型上的强迫预线性化

定义 4.1。对于 $\sqsubseteq$ 苏斯林空间 X 上的解析预序，强迫 $\mathbf{P}(\sqsubseteq)$ 由可数的$R \subseteq X \times X$ 关系的枚举组成，并满足$R \restriction \mathrm{dom}(R)$ 是 $\sqsubseteq \restriction \mathrm{dom}(R)$ 的预线性化；其序由所枚举关系的反向端延拓给出。

引理 4.2。对于波兰空间 X 上的 $\sqsubsetneq$ 博雷尔预序，$\mathbf{P}(\sqsubsetneq)$ 是苏斯林 σ-闭强迫。

证明。 由于X 是波兰空间，因此$(X \times X)^\omega$也是波兰空间，且$\mathbf{P}(\sqsubsetneq) \subseteq (X \times X)^\omega$。在证明余下部分中，我们用$\mathbf{P}$ 表示$\mathbf{P}(\sqsubsetneq)$。条件$R \in \mathbf{P}$ 是预线性的，这显然是一个 Borel 条件，因为R 是可数的，且预线性序的定义是一阶的。对给定$R \in \mathbf{P}$ 的枚举应用一个 Borel 函数，得到 $\mathrm{dom}(R)$ 的枚举 $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$；例如，按照$R \cap \Delta$ 的相同顺序枚举 $\mathrm{dom}(R)$，其中 $\Delta \subseteq X \times X$ 是对角线。预线性化条件要求

$$\forall i, j\ (x_i \sqsubsetneq x_j \wedge x_j \not\sqsubsetneq x_i) \Rightarrow (x_i R x_j \wedge \neg x_j R x_i),$$

这一点是 Borel 的，因为 Borel 集的补集仍是 Borel 集。（注意，若 $\sqsubsetneq$ 可以是任意解析预序，这个论证就会失效。）枚举的反向包含显然是一个 Borel 关系，因此$\mathbf{P}$ 是一个 Suslin 强迫。

现在设 $\langle \mathrm{R}_n \rangle_{n<\omega}$ 是 P 中条件的一个末端扩张递增序列，并令 R 按每一对出现的顺序枚举 $\bigcup \mathrm{n}_{<\omega} \mathrm{R}_n$。显然，R 枚举了一个预线性序。现在设 x、y $\in \mathrm{dom}(\mathrm{R})$，$\mathrm{x} \sqsubsetneq \mathrm{y}$，且 $\mathrm{y} \not\sqsubsetneq \mathrm{x}$。选取 n，使得 x、y $\in \mathrm{R}_n$。那么由于 $\mathrm{R}_n \in \mathrm{P}$，xRy 且 ¬(y R x)。由于 $\mathrm{R} \in \mathrm{P}$，并且对每个 n，R 末端延拓 R_n，我们得出 P 是 σ-闭的。□

注意，在 ZF+依赖选择公理的模型上，σ-闭强迫保持依赖选择公理，这是一个民间已知结果。

引理 4.3。 设 $\sqsubsetneq$ 是波兰空间 X 上的一个纤维型博雷尔预序。

1. 对于 V 中 $\lesssim$ 的一个预线性化，$\langle P, \check{\lesssim} \rangle$ 是一个(3，2)-平衡的虚拟条件，其中 $P = Coll(\omega, X)$。*2.* 如果 $\langle Q, \dot{R} \rangle$ 是一个(3，2)-平衡的虚拟条件，那么在 V 中存在一个 $\lesssim$ 的完全预线性化，使得 $\sqsubsetneq$ $\langle Q, \dot{R} \rangle$ 与 $\langle P, \check{\lesssim} \rangle$平衡等价。*3.* 偏序集$\mathbf{P}(\sqsubsetneq)$ 是(3，2)-平衡的。

证明。(1) 在 V 中工作，设 $\lesssim$ 为 $\sqsubsetneq$ 的一个预线性化，其存在性由引理 4.2 保证。固定两两相互泛型的滤子 $\{\mathrm{g}_k : \mathrm{k} < 3\}$ 以及条件 $\mathrm{R}_k \in \mathrm{V}[\mathrm{g}_k]$，其中每个 $\mathrm{R}_k \in \mathrm{P}(\sqsubsetneq)^{V[g_k]}$（这是有意义的，因为 $\mathrm{P}(\sqsubsetneq)$ 是苏斯林的），并且 $\lesssim \subseteq \mathrm{R}_k$。设 $\mathrm{V}[\mathrm{K}]$ 为一个泛型扩张，其中对 $\mathrm{k} < 3$ 有 $\mathrm{g}_k \in \mathrm{V}[\mathrm{K}]$，现在在 $\mathrm{V}[\mathrm{K}]$ 中工作。若条件 $\{\mathrm{R}_k : \mathrm{k} < 3\}$ 没有公共下界，则在关系 $\check{\mathrm{R}}^s_0 \cup \mathrm{R}^s_1 \cup \mathrm{R}^s_2 \cup \sqsubset$ 中存在一个有向圈，其中对 $\mathrm{k} < 3$ $\mathrm{R}^s\,\mathrm{k} = \mathrm{R}^s\,\mathrm{k} \cap \neg \mathrm{R}^s\,\mathrm{k}$ 是 R_k 的严格形式，且 $\sqsubset$ 是 $\sqsubsetneq$ 的严格形式。注意，由各分量关系的传递性，我们可以假设该有向圈中没有两条相继的边满足 $\{\mathrm{R}^s_0、\mathrm{R}^s_1、\mathrm{R}^s_2、\sqsubset\}$ 中的同一关系。

我们对环中关系 $\sqsubset$ 的出现次数进行归纳法证明。若 $\sqsubset$ 不出现在环中，那么由于$R^s{}_k$之间的同一关系不会连续出现两次，环中的每个顶点都属于形如 $V[g_k]$ 的两个不同模型的交集，因此根据互相泛型性，它属于 V。但每个严格预线性化 $R^s{}_k$ 都在 V 的所有元素对上与 $<$ 一致，所以在 $<$（即 $\lesssim$ 的严格版本）中存在一个环，这是不可能的。现在假设不存在含有 n 次 $\sqsubset$ 出现的环，并设我们有一个环 C，其中有 $n+1$ 次 $\sqsubset$ 出现。

设 $x \sqsubset y$ 是 $\sqsubset$ 在 C 中的一次出现。由于 $\sqsubseteq$ 是函子性的，存在 $z \in V$，使得 $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$。假设 $x \in V[g_k]$ 且 $y \in V[g_i]$；那么 xR_kzR_iy，并且其中至少有一个关系是严格的。若其中一个关系是非严格的，我们可以从环中移除不属于 z 的那个点。无论哪种情况，我们都得到一个含有 n 次 $\sqsubset$ 出现的环；根据归纳法，存在一个所有边都属于 $<$ 的环，这是不可能的。

(2) 假设 $\langle Q, \dot{R}\rangle$ 是 (3, 2)-平衡的。那么对于每一对 $x, y \in X$，要么 $Q \Vdash \check{x}\ \dot{R}\ \check{y}$，要么 $Q \Vdash \check{y}\ \dot{R}\ \check{x}$；否则，在实现 $\dot{R}$ 的相互泛型扩张中就会存在不相容的条件。令 $\lesssim$ 为由 $\dot{R}$ 确定的 X^V 上的关系，并注意到它在 V 中是 $\sqsubseteq$ 的预线性化。由于 Q 强迫 $\dot{R} \in P(\sqsubseteq)$ 是可数的，$\langle \mathrm{Coll}(\omega, X), \lesssim\rangle \leq \langle Q, \dot{R}\rangle$，因此根据引理 2.13，它们是平衡等价的。

(3) 剩下要证明的是，对于每个 $p \in \mathbf{P}(\sqsubseteq)$ 都存在一个 (3,2)-平衡的虚拟条件 $p \leq p$。固定 p，由引理 4.2 可知存在一个完全的预线性化 $\lesssim$ 延伸p，于是 $\langle \mathrm{Coll}(\omega, X), \lesssim\rangle \leq p$ 是 (3, 2)-平衡的。□

推论 4.4. 设 $\sqsubseteq$ 是一个 *Borel* 函子性预序。若策梅洛-弗兰克尔集合论加上存在一个不可达基数这一假设是相容的，那么以下理论也是相容的

ZF + "there is a prelinearization of $\sqsubseteq$*" + "all ultrafilters over* ω *are principal".*

证明。固定一个不可达基数 κ，令 V 为通过强迫 $\mathrm{Coll}(\aleph_0, < \kappa)$ 得到的 V 的泛型扩张，并令 $W \subseteq V$ 为由 κ 导出的 Solovay 模型。考虑模型 $W[g]$，其中 g 是相对于 V（因而也相对于 W）而言关于 $P = P(\sqsubseteq)$ 的泛型。显然，$W[g] \models$ 满足策梅洛-弗兰克尔集合论，因为 $W \models$ 满足策梅洛-弗兰克尔集合论。直接的泛型性论证表明，在 W[g] 中，$\cup g$ 是 $\sqsubseteq$ 的预线性化。在 W[g] 中，ω 上的所有超滤子都是主超滤子；这一事实可由前述引理与命题 2.18 推出。前述引理证明了 P 是 (3, 2)-平衡的，而命题 2.18 指出，在 W 的 (3, 2)-平衡泛型扩张中，ω 上的所有超滤子都是主超滤子。□

5 消除不可达基数

本节的目标是在不同的背景下重现前几节中的论证——在这种背景下，不需要不可达基数。几何集合论方法的优点在于，我们可以使用已经构建好的工具，而本节的论述会更具临时性，同时致力于获得更强的结果。

本节中的模型将是$V[g][h]$ 的内模型，其中g 是$\mathbf{Q}$上的V-泛型滤子，而h是$\mathbf{P}$上的$V[g]$-泛型滤子。本节中，$\mathbf{Q}$表示$\mathbf{C}(\omega_1)$，而g 表示$\mathbf{Q}$上的泛型滤子，它是相对于 Gödel 的可构造宇宙L而言的。大多数情况下，$\mathbf{P}$ 将是一个逼近所考虑的预线性化的强迫概念，我们将其记作$\mathbf{P}_{\sqsubset^*}$。

5.1 自由超滤子与(m,n)-融合。

定义 5.1. 设$\mathbf{P}$ 是$L[g]$ 中的一个强迫偏序集，其形式为

$$p \in \mathbf{P} \iff \exists x \in \mathbb{R}\ L[x] \models \text{“}p \subseteq \mathbb{R} \text{ and } \psi(p)\text{”},$$

按反向包含排序，并且对于每个p，若x 是满足其为条件的实数见证，则它可由p的有限个元素定义。于是称**P** 为局部强迫。

请注意，可定义性条件意味着“$p \in \mathbf{P}$”在内模型之间是绝对的，而不仅仅是向上绝对的。还要记住，对于每个实数 x 属于 $L[g]$，都存在一个 $\gamma < \omega_1$ 使得 $x \in L[g \restriction \gamma]$（见引理 2.5）；并且对于每个 $\gamma < \omega_1$，都存在一个实数 x 使得 $L[x] = L[g \restriction \gamma]$。

定义 5.2。设 **P** 是 $L[g]$ 中的一个局部强迫，且n、$m \in \omega$ 满足$n \geq m > 0$。我们称**P** 满足（n，m）-融合，当且仅当对所有 $\beta < \omega_1$，都存在$p \in \mathbf{P}$ 的一个稠密集，使得

i. 存在某个 γ，满足 $\beta \leq \gamma < \omega_1$，使得 $L[g \restriction \gamma] \models p \subseteq \mathbb{R}$ 且 ψ（p），并且

ii. 对所有$g_0, \ldots, g_{n-1}$ **Q**-泛型滤子，它们位于$L[g \restriction \gamma]$ 之上，且其中任意m 个都相互泛，并且 $\bigcap_{i\in n} L[g_i] = L[g \restriction \gamma]$；并且对于任意一组条件$\{p_i\}_{i\in n}$，它们扩张$p$ 且满足$p_i \in \mathbf{P}^{L[g_i]}$ 对每个$i \in n$都成立，条件 $\{p_i\}_{i<n}$ 在$V[g]$中相容。

注意，当 $m > 1$ 时，条件 $\bigcap_{i\in n} L[g_i] = L[g \restriction \gamma]$ 是多余的，因为它可由m-互相泛型性推出。

注意，(n, m)-合并与前几节介绍的概念有相似之处：对于 $\mathrm{n} = \mathrm{m} = 2$，它类似于平衡；对于 $\mathrm{n} = 3$、$\mathrm{m} = 2$，它类似于 (3, 2)-平衡；对于 $\mathrm{n} = 2$、$\mathrm{m} = 1$，则类似于平稳。此外，这里定义的 (2, 2)-合并大致对应的一种融合版本，也在 [5,定义 3.10 和定理 3.11] 中有所探讨，它是保证延伸不会添加实数的任何良序的一个充分判据。融合对我们的用处在于保证模型不含自然数集上的非主超滤子；见定理 5.3。

注意，(n, m)-合并蕴含当 $n \geq m' \geq m$ 时，(n,m')-合并。

定理 5.3. 设**P** 是 $L[g]$ 中的一个局部强迫偏序集，满足某个 $n > 1$所对应的$(n,n-1)$-融合，并且是 σ-闭的。设 h 是 $L[g]$上的**P**-泛滤子，且 $\mathcal{P} = \cup h$。则

$$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]} \models \mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \neg\, \mathsf{Uf}(\omega).$$

证明。注意，由于**P** 是 σ-闭的，$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]} \models$ 满足策梅洛-弗兰克尔集合论 和依赖选择公理 + 。我们只需证明$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{V[g,h]} \models \neg$满足$\mathsf{Uf}(\omega)$。

第一步： 反设不然。则存在某个公式 $\phi(\cdot, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})$，其中 $\vec{x} \subseteq \mathbb{R}^{V[g,h]}$ 且 $\vec{\alpha} \subseteq \mathrm{OR}$，使得

$$L[g,h] \models \phi(\cdot, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \text{ defines a non principal ultrafilter on } \omega. \tag{1}$$

由于 **P** 是 σ-闭的，$\mathbb{R}^{L[g,h]} = \mathbb{R}^{L[g]}$。回想一下，$\mathrm{L}[g]$ 中的任何实数都属于 g 的某个初始段 g（见引理2.5），也就是说，存在$\beta < \omega_1$ 使得 $\vec{x} \in \mathbb{R}^{L[g\restriction\beta]}$，并且我们可以假设$\beta > \max \vec{\alpha}$。

存在一个条件 p 强迫命题 (1)，即

$$p \Big\Vdash_{L[g]}^{\mathbf{P}} \phi\left(\cdot, \check{\vec{x}}, \check{\vec{\alpha}}, \dot{\mathcal{P}}\right) \text{ defines a non principal ultrafilter on } \omega, \tag{2}$$

其中 $\dot{\mathcal{P}}$ 是 $\{\langle \check{x}$ 的可定义名称，$p\rangle \mid x \in p$ 并且 $p \in \mathbf{P}\}$。今后每当我们写下 $\mathbf{P}$ 时，指的都是定义它作为局部强迫的显式公式。正如已经指出的，该公式具有这样的性质：属于 $\mathbf{P}$ 这一点在内模型之间是绝对的。

根据假设，我们可以假定p 具有定义$(n+1,n)$-融合中所述的性质；特别是，$p \in L[g \restriction \gamma]$，其中某个 $\gamma > \beta$。考虑强迫$\mathbf{Q}$，它添加 ω_1 个从 ω 到 2 的科恩函数。

现在考虑由g 定义的 γ^{th} 个科恩实数，并将其记为r。注意，$r\colon\ \omega \to 2$，因此

$$r^{-1}(0) \dot{\cup} r^{-1}(1) = \omega.$$

因此，在$L[g$ 中，$h]$ 这些集合中必有一个属于由 ϕ 定义的超滤子，将其记为 $\bar{r}$。不失一般性，假定 $\bar{r} = r^{-1}(0)$。选取 $\bar{p} \leq p$，使得 $\bar{p}$ 强迫$r \subseteq \omega$ 属于该超滤子，也就是说，

$$\bar{p} \Big\Vdash_{\frac{\mathbf{P}}{L[g]}} \phi\left(\check{\bar{r}}, \check{\vec{x}}, \check{\vec{\alpha}}, \dot{\mathcal{P}}\right). \tag{3}$$

根据强迫的可定义性，存在一个公式可以表达3中所述的强迫关系，该关系位于$L[g]$中。现在将$\mathbf{Q}$ 写作$\mathbf{C}(\gamma) \times \mathbf{C}(\omega_1 \setminus \gamma)$，并将$g$ 视为

$$g = (g \restriction \gamma) \times g \restriction (\omega_1 \setminus \gamma).$$

那么存在一个条件$q \in \mathbf{C}(\omega_1 \setminus \gamma)$，使得

$$q \Big\Vdash_{\frac{\mathbf{C}(\omega_1\setminus\gamma)}{L[g\restriction\gamma]}} \text{“}\dot{\bar{p}} \leq_P \check{p} \text{ and } \dot{\bar{p}} \Big\Vdash_{\frac{\mathbf{P}}{L[g\restriction\gamma, \dot{g}\restriction(\omega_1\setminus\gamma)]}} \phi\left(\check{\check{\bar{r}}}, \check{\check{\vec{x}}}, \check{\check{\vec{\alpha}}}, \dot{\mathcal{P}}\right).\text{”} \tag{4}$$

其中 $\check{p}$ 是 $\bar{p}$ 的一个$\mathbf{C}(\omega_1\setminus\gamma)$-名称，而 $\check{\bar{r}}$ 是 $\check{r}$的如下$\mathbf{C}(\omega_1\setminus\gamma)$-名称：

$$\check{\bar{r}} = \left\{\left\langle\left\langle \check{k}, \mathbb{1}_{\mathbf{P}}\right\rangle^{\vee}, t\right\rangle \mid t \in \mathbf{C}(\omega_1\setminus\gamma), \langle k, 0\rangle \in t(\gamma)\right\}. \tag{5}$$

注意，$\gamma > \beta$ 蕴含 $\vec{\alpha}, \vec{x} \in L[g \restriction \beta] \subseteq L[g \restriction \gamma]$，并回想一下，$p \in L[g \restriction \gamma]$。

第二步： 我们希望从（4）导出矛盾。思路是以不同的（但仍可合并的）方式延伸 $L[g \restriction \gamma]$，从而得到个属于相应超滤子的集合，但它们的交集是有限的，这就产生了矛盾。这一步需要仔细构造这样的延伸。

令s 为$q(\gamma) \in 2^{<\omega}$。考虑由以下方式给出的 $\mathbf{C}_s$（位于$L[g \restriction \gamma]$中）：

$$\begin{aligned}(a_0 \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}_s \iff & a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C} \text{ with } a_0, \ldots, a_{n-1} \supseteq s,\\ & \mathrm{lh}(a_0) = \cdots = \mathrm{lh}(a_{n-1}); \text{ and}\\ & \{l \geq \mathrm{lh}(s) \mid a_0(l) = \cdots = a_{n-1}(l) = 0\} = \emptyset,\end{aligned}$$

在每个坐标上按反向包含排序。

断言。 以下结论成立：

i. $\mathbf{C}_s$ 的定义是绝对的。

ii. $\mathbf{C}_s \cong \mathbf{C}$.

iii. 若g_s 是某个传递模型 M 上的$\mathbf{C}_s$-泛型滤子，则对$i \in n$，考虑g_s 在i^{th} 坐标上的投影j_i。那么，j_i 是 M 上的$\mathbf{C}$-泛型，且对每个$i \in n$，$g_s]$是$M[j_i]$ 的$\mathbf{C}$-延伸。

iv. $\{j_i\}_{i\in n}$ 的每个大小为$n-1$ 的子集都是在M上的一组相互泛滤子。

v. $\bigcap_{i\in n} M[j_i] = M$。

vi. 若r_i 是由j_i 对每个$i \in n$定义的科恩实数，那么 $\{l \mid r_0(l) = \cdots = r_{n-1}(l) = 0\}$是有限的。

证明：

i. 显然。

ii. 因为$\mathbf{C}_s$ 是可数且无原子的，$\mathbf{C}_s \cong \mathbf{C}$。

iii. 对每个 $i \in \{1,2\}$，$j_i \subseteq M$ 和 $j_i \in M[g_s]$，因此根据 Solovay 基定理 [8,定理 2 第 2 节。14] 我们得到 $M[j_i]$ 是 M 的强迫扩张，且$M[g_s]$ 是 $M[j_i]$的强迫扩张。

此外，考虑 $\mathrm{r}_i = \cup \mathrm{j}_i$ 对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{n}$。注意，$\mathrm{r}_i$ 是一个实数，且 $\mathrm{M}[\mathrm{r}_i] = \mathrm{M}[\mathrm{j}_i]$。我们还知道 $\mathrm{C}_s \cong \mathrm{C}$，因此可以将 $\mathrm{M}[\mathrm{g}_s]$视为 M 的科恩扩张。于是 r_i 是科恩扩张中的一个实数，这意味着 $\mathrm{M}[\mathrm{r}_i]$ 本身是 M 的科恩扩张，并且与 j_0 和 j_1 相对应的强迫都必须与 C 强迫等价（见定理 2.6 c）。

iv. 由于坐标的对称性，只需证明 $\{j_i\}_{i\in n-1}$ 是 M 上的相互泛滤子。换言之，我们需要证明 $j_0 \times \cdots \times j_{n-2}$ 与每个稠密集 D在$\mathbf{C}^n$中都有交集。固定这样一个 D，并如下定义 $D' \subseteq \mathbf{C}_s$。

$$D' = \{(a_i)_{i\in n} \in \mathbf{C}_s \mid (a_i)_{i\in n-1} \in D\}.$$

我们声称，D' 在 C_s中稠密。取定 $\vec{\mathrm{b}} \in \mathrm{C}_s$，并将 $\vec{\mathrm{b}} \restriction (\mathrm{n}-1)$ 记为 $\vec{\mathrm{b}}^*$。由 D 的稠密性，存在 $\vec{\mathrm{a}} \supseteq \vec{\mathrm{b}}^*$ 使得 $\vec{\mathrm{a}} \in \mathrm{D}$，并且我们可以假设 a 中所有坐标的长度都相同，记为 l。现在，令 $\mathrm{p} \supseteq \mathrm{b}_{n-1}$ 是 C 中一个长度为 l 的条件，满足：对于所有使 $\mathrm{lh(s)} \leq \mathrm{j} < \mathrm{l}$ 的 j，若 $\mathrm{a}_0(\mathrm{j}) = \cdots = \mathrm{a}_{n-2}(\mathrm{j}) = 0$，则 $\mathrm{p}(\mathrm{j}) = 1$。那么显然 $(\vec{\mathrm{a}}, \mathrm{p}) \in \mathrm{C}_s$，并且 $(\vec{\mathrm{a}}, \mathrm{p}) \in \mathrm{D}'$。

由于 D' 是稠密的，存在 $\vec{c} \in g_s$ 使得 $\vec{c} \in g_s \cap D'$。根据D'的定义，$\vec{c}^* \in (j_0 \times \cdots \times j_{n-2}) \cap D$，正如我们所要证明的。

v. 对于 $\mathrm{n} > 2$，由于第 iv 项中所示的 $(\mathrm{n}-1)$-互相泛型性，这一点是清楚的。如果 $\mathrm{n} = 2$，则我们需要证明 $\mathrm{M}[\mathrm{j}_0] \cap \mathrm{M}[\mathrm{j}_1] = \mathrm{M}$。假设 $\mathrm{y} \in \mathrm{M}[\mathrm{j}_0] \cap \mathrm{M}[\mathrm{j}_1]$。则存在 C-名称 σ和 τ，使得 $\mathrm{y} = \sigma \mathrm{j}_0 = \tau_{j_1}$。我们通过 $\in$-归纳法假设 $\mathrm{y} \subseteq \mathrm{M}$。由于 $\mathrm{y} \in \mathrm{M}[\mathrm{g}_s]$，存在一个条件 $(\mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathrm{C}_s$，使得

$$(b,c) \Big\|\!\!\Big|_{M}^{\mathbf{C}_s} \tilde{\sigma} = \tilde{\tau} \text{ and } \tilde{\sigma} \subseteq M,$$

其中 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\tau}$是分别类似于 σ 和 τ 的 $\mathbf{C}_s$-名称，但每个名称分别在第二个坐标和第一个坐标中包含每一个条件。我们将精确地描述 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\tau}$ 如下。

给定一个名称 $\sigma \in M^{\mathbf{C}}$，我们在 σ^* 和 ${}^*\sigma$ 上递归地定义 $M^{\mathbf{C}_s}$：

$$\sigma^* = \{(\pi^*, (a_0, a_1)) \mid (a_0, a_1) \in \mathbf{C}_s \text{ and } (\pi, a_0) \in \sigma\}$$
$${}^*\sigma = \{({}^*\pi, (a_0, a_1)) \mid (a_0, a_1) \in \mathbf{C}_s \text{ and } (\pi, a_1) \in \sigma\}$$

设定 $\tilde{\sigma} = \sigma^*$ 和 $\tilde{\tau} = {}^*\tau$。

我们断言，对于每个 $z \in M$，b 决定“$\check{z} \in \sigma$”。如果此断言成立，那么 $y = \sigma_{j_1} \in M$。

假设断言不成立。那么存在某个 $z \in M$，使得 b 无法决定 $\check{z}$ 是否属于 σ。选取 $b_0, b_1 \in \mathbf{C}$，使其延伸 b，满足

$$b_0 \Big\|\!\!\frac{\mathbf{C}}{M} \check{z} \notin \sigma, \text{ and}$$
$$b_1 \Big\|\!\!\frac{\mathbf{C}}{M} \check{z} \in \sigma.$$

令 c' 为 c 延伸至长度 $\max\{\mathrm{lh}(\mathrm{b}_0), \mathrm{lh}(\mathrm{b}_1)\}$ 的结果，使得 $\mathrm{c}' = \mathrm{c}^\frown \vec{1}$。将 c' 延伸为 c''，使得 c' 决定“$\check{\mathrm{z}} \in \tau$”。不妨设 $\mathrm{c}'' \Vdash \check{\mathrm{z}} \notin \tau$。然后令 b' 为 b_1 延伸至长度 $\mathrm{lh}(\mathrm{c}'')$ 的结果，使得 $\mathrm{b}' = \mathrm{b}_1{}^\frown \vec{1}$，如图 1 所示。如果 $\mathrm{c}'' \Vdash \check{\mathrm{z}} \in \tau$，我们本应取 $\mathrm{b}' = \mathrm{b}_0{}^\frown \vec{1}$。根据构造，$(\mathrm{b}', \mathrm{c}'') \in \mathbb{C}_s$ 且 $(\mathrm{b}', \mathrm{c}'') \Vdash \check{\mathrm{z}} \in \tilde{\sigma} \wedge \check{\mathrm{z}} \notin \tilde{\tau}$。

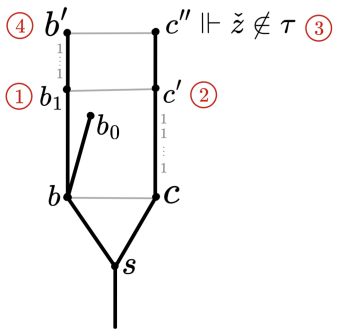


图1：$(b', c'') \in \mathbf{C}_s$，但 $b' \Vdash \check{z} \in \sigma$ 和 $c'' \Vdash \check{z} \notin \tau$。

这是一个矛盾，因为 $(b', c'') \leq (b, c)$。

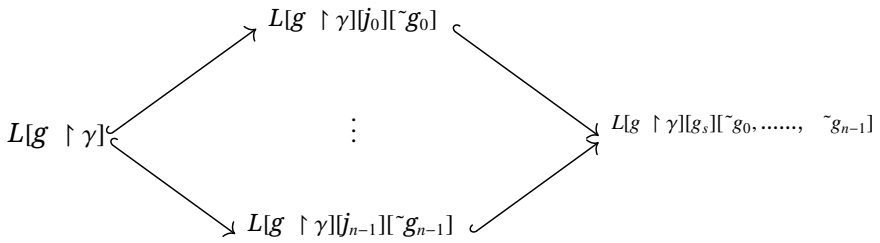
vi. 令 r_i 为每个 $i \in n$ 所对应的、由 j_i 添加的实数。于是 $\{n \mid r_0(l) = \cdots = r_{n-1}(l) = 0\} = \{l \mid s(l) = 0\}$，这是有限的。

■

第三步： 设 g_s 是 $\mathbf{C}_s$ 上的一个 $L[g \restriction \gamma]$-泛型滤子，并设 $\tilde{g}_0, \ldots, \tilde{g}_{n-1}$ 是 $n\mathbf{C}(\omega_1 \setminus (\gamma + 1))$ 上的互相泛滤子，它们定义在 $L[g \restriction \gamma, g_s]$ 上，且每个都包含 $q \restriction (\omega_1 \setminus (\gamma +$

1)). 可以做到使得 $L[g \restriction \gamma, g_s, \check{g}_0, \ldots, \check{g}_{n-1}] \subseteq L[g]$。对于每个 $i \in n$，我们有 $\check{g}_i$ 在 $L[g \restriction \gamma, j_i]$ 上也是 $C(\omega_1 \backslash (\gamma+1))$-泛型的。换言之，$j_i \times \check{g}_i$ 在 $L[g \restriction \gamma]$ 上是 $C(\omega_1 \backslash \gamma)$-泛型的，并且对于所有 $i \in n$，都有 $q \in j_i \times \check{g}_i$。

现在我们有了 n 条不同（但可以合并的）路径：



对于 $i \in n$，令 g_i 为 $(g \restriction \gamma) \times j_i \times \check{g}_i$。

现在，回忆一下（4）：

$$q \Vdash_{L[g\restriction\gamma]}^{\mathbf{C}(\omega_1\backslash\gamma)} \text{“}\dot{\check{p}} \leq_P \check{p} \text{ and } \dot{p} \Vdash_{L[g\restriction\gamma,\cdot]}^{\mathbf{P}} \phi\left(\check{\check{r}}, \check{\check{x}}, \check{\check{\alpha}}, \dot{\mathcal{P}}\right)\text{.”}$$

这里的 $\dot{\check{r}}$ 与（5）中的相同。令 $p_i = (\dot{\check{p}})_{j_i \times \check{g}_i}$ 对所有 $i \in n$ 成立。根据 $\dot{\check{r}}$ 的定义并计算 $(\dot{\check{r}})_{g_i}$，我们知道 $(\dot{\check{r}})_{j_i \times \check{g}_i}$ 正是实数 r_i 在 $L[g_i] = L[g \restriction \gamma, j_i, \check{g}_i]$ 中的零点原像的确认名。于是记 $\check{r}_i = (\dot{\check{r}})_{j_i \times \check{g}_i}$。那么我们得到 $p_i \leq_{\mathbf{P}} p$ 属于 $L[g]$（也属于任何其他以 p 和 p_i 为元素的模型，因为此关系是绝对的）。此外，对每个 $i \in n$

$$p_i \Vdash_{L[g_i]}^{\mathbf{P}} \phi\left(\check{\check{r}}_i, \check{\check{x}}, \check{\check{\alpha}}, \dot{\mathcal{P}}\right). \tag{6}$$

注意，$\bigcap_{i\in n} L[g_i] = L[g \restriction \gamma]$ 使用v 这一主张的内容以及 $\{\check{g}_i\}_{i\in n}$。现在，$(n, n-1)$-融合的假设意味着这些条件 $\{p_i\}_{i\in n}$ 彼此相容。

固定 $i \in n$。由于 $p_i \in P^{L[g_i]}$，存在 $x_i \in \mathbb{R}^{L[g_i]}$ 使得 $p_i \in L[x_i]$。由于 g_i 是 L 上的 Q-泛型，因此存在 $\delta < \omega_1$ 使得 $\delta > \gamma$ 且 $x_i \in L[g_i \restriction \delta]$。于是 $p_i \in L[g_i \restriction \delta]$。由公式（6）和 Q 的齐次性，我们得到

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}} \Vdash_{L[g_i\restriction\delta]}^{\mathbf{C}(\omega_1\backslash\delta)} \check{p}_i \Vdash_{L[g_i\restriction\delta,\cdot]}^{\mathbf{P}} \phi\left(\check{\check{r}}_i, \check{\check{x}}, \check{\check{\alpha}}, \dot{\mathcal{P}}\right). \tag{7}$$

现在，考虑$g_i \restriction \delta$作为一个实数。于是我们可以将$L[g]$ 视为一个$\mathbf{Q}$-延伸$L[g_i \restriction \delta]$（参见定理2.6 d）。由于$\mathbf{Q} \cong \mathbf{C}(\omega_1 \backslash \delta)$，且$i$ 是任意的，因此对每个$i \in n$，

$$p_i \Vdash_{L[g]}^{\mathbf{P}} \phi\left(\check{\check{r}}_i, \check{\check{x}}, \check{\check{\alpha}}, \dot{\mathcal{P}}\right). \tag{8}$$

请记住，每个p_i 都扩展$p \in L[g \restriction \gamma]$，其中$i \in n$。现在我们已经满足了$(n, n-1)$-融合定义中的假设ii，而在$L[g]$ 中，条件$\{p_i\}_{i\in n}$ 是相容的。然而，这些条件却强迫出相互矛盾的陈述：p_i 强迫 $\check{r}_i$ 属于由 ϕ给出的超滤子。这导致矛盾，因为$\bigcap_{i\in n} \check{r}_i$ 是有限的。

□

5.2 不含不可达基数的缆索序

我们的目标是证明，对于任意固定的索道预序$\trianglelefteq$，都存在一个集合论模型，其中有 $\trianglelefteq$ 的预线性化，但在 ω上没有非主超滤子。定理5.3给出了一族模型，其中 ω上不存在非主超滤子；但我们需要选择一个恰当的强迫$\mathbf{P}$ ，使其满足该定理的假设，并添加相应的预线性化 $\mathcal{P}$，该预线性化由形如$L[x]$的模型中的预线性化逼近组成。证明 $\mathcal{P}$具有我们所需性质，是下面引理的任务。

引理 5.4. 设 $\mathbf{P}$ 是 $L[g]$ 中的局部强迫偏序集，且 $\psi(p)$ 具有如下形式

$$\forall r \in \mathbb{R} \forall s \in p^{<\omega} \exists t \in p^{<\omega} \Psi(r, s, t),$$

其中 Ψ 在传递模型之间是绝对的，并且 $\mathbf{P}$ 是 σ-闭的，且满足 (i) 项所述的 (n,m)-融合。设 h 是 $L[g]$ 上的一个 $\mathcal{P} = \cup h$ 泛滤子。那么

$$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]} \models \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R} \text{ and } \psi(\mathcal{P}).$$

证明。 这实质上是 [5, 定理 311], 证明的第二部分；注意到，(n, m, m)-融合定义中的条件 i 在该论文中起到可扩展性的作用。不过，为了完整起见，并且由于我们稍微扩展了公式的形式，我们在此给出证明 ψ。

令 W 为模型 $L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]}$。那么显然 $\mathbb{R}^W = \mathbb{R}^{L[g,h]}$。由于 $\mathbf{P}$ 是σ-闭的， $\mathbb{R}^{L[g,h]} = \mathbb{R}^{L[g]}$。

注意，假设中的公式 ψ对于在 $\mathbb{R}$ 上一致且包含 $\mathcal{P}$ 作为元素的传递模型而言是绝对的。由于这对模型$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]}$和 $L[g, h]$, 成立，我们只需证明 $L[g,h]$ 满足 $\psi(\mathcal{P})$。

在$L[g,h]$中进行。由于$h \subseteq \mathbf{P}$，因此对所有$p \in h$ ，都存在某个$x_p \in \mathbb{R}$使得

$$L[x_p] \models p \subseteq \mathbb{R} \text{ and } \forall r \in \mathbb{R} \forall s \in p^{<\omega} \exists t \in p^{<\omega} \Psi(r, s, t).$$

由此以及实数这一性质是绝对的这一事实，我们得到 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$。现在，固定$r \in \mathbb{R}$ 和 $s \in \mathcal{P}^{<\omega}$。首先，我们声称该集合

$$D_r = \{\bar{p} \in \mathbf{P} \mid r \in L[x_{\bar{p}}]\}$$

是稠密的，证明如下。固定 $p \in P$。存在某个 $\beta < \omega_1$ ，使得 $r \in L[g \restriction \beta]$。根据 $(n, n+1)$-融合的定义中的条目 (i)，存在某个$\gamma > \beta$ 和 $\bar{p} \leq_{\mathbf{P}} p$，使得 $L[g \restriction \gamma] \models$ “$\bar{p} \subseteq \mathbb{R}$ 和 $\psi(\bar{p})$”。注意，$r \in L[g \restriction \gamma]$，且 $L[x_{\bar{p}}] = L[g \restriction \gamma]$（根据局部强迫定义中 $x_{\bar{p}}$ 可由 $\bar{p}$ 定义这一点）。因此 D_r 是稠密的。其次，设 $s = \{s_0, \ldots, s_{l-1}\}$，其中 $l \in \omega$。那么 h 中存在有限个条件 $p_0, \ldots, p_{l-1}$，使得对所有 $i \in l$，都有 $s_i \in p_i$。由于 h 是一个滤子，存在 $p \in h$，使得对所有 $i \in l$，都有 $p \leq_{\mathbf{P}} p_i$。特别地，对所有 $i \in l$，都有 $p_i \subseteq p$，且 $s \subseteq p$。由于 h 是一个泛滤子，$p \in h$，且 D_r 是稠密的，因此存在 $\bar{p} \leq_{\mathbf{P}} p$，使得 $\bar{p} \in D_r$。由于 $s \in \bar{p}^{<\omega}$ 且 $r \in L[x_{\bar{p}}]$，我们得到

$$L[x_{\bar{p}}] \models \exists t \in \bar{p}^{<\omega} \Psi(r, s, t).$$

根据 Ψ 的绝对性，并注意到 $t \in \bar{p}^{<\omega} \subseteq \mathcal{P}^{<\omega}$，我们得到：在$L[g、h]$中，$\exists t \in \mathcal{P}^{<\omega}\Psi(r、s、t)$ 成立。由于r和s是任意的，我们得到

$$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{V[g,h]} \models \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R} \text{ and } \psi(\mathcal{P}),$$

正如我们想要证明的那样。 □

注。 注意，形如 $\exists r \in \mathbb{R}\exists s \in p^{<\omega}\Psi(r,s)$ 的公式在证明中也适用。不过，实际应用的形式为

$$\forall r \in \mathbb{R}(\forall s\ \psi_1(r, s) \text{ and } \exists t\ \psi_2(r, t))$$

这等价于一个符合引理5.4中假设形式的公式。

定义 5.5。 若 X 是 ω^ω、2^ω、$[0, 1]$ 或 $\mathbb{R}$ 的可数积，我们就称 X 为一个 标准波兰空间 。注意，它们都可以用实数以一种自然的方式编码。

定义 5.6。 令 $\mathbf{Q}$ 为 ω_1 个 Cohen 强迫的有限支撑积，令 g 为 $\mathbf{Q}$ 上在 L 上的一个泛滤子。令 $\sqsubseteq$ 为标准波兰空间 X 上的一个博雷尔预序。令 $\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$ 为 $L[g]$ 中由下式给出的局部强迫偏序集

$$p \in \mathbf{P}_{\sqsubseteq} \iff \exists x \in \mathbb{R}\ L[x] \models \text{“}p \subseteq X \times X \text{ and } p \text{ is a prelinearization of } \sqsubseteq\text{,”}$$

按反向包含排序。

注意，这是一个局部强迫，这意味着对于每个p，作为条件的实数见证x 都可由p定义。这是因为p 是一个完全关系，并且我们可以假设$X = \mathbb{R}$，因为它是一个标准波兰空间。

此外，若我们用 $\psi(p)$表示描述p 是$\sqsubseteq$的预线性化的自然公式，那么 $\psi(p)$（等价于一个公式）具有引理5.4假设的形式。更具体地说，由于

$$\begin{gathered} p \text{ is a prelinearization of } \sqsubseteq \\ \iff \\ \sqsubseteq \subseteq p, p \text{ is a prelinear order and } \forall x, y \in X(x \sqsubseteq y \wedge \neg(y \sqsubseteq x)) \to (y, x) \notin p, \end{gathered} \tag{9}$$

我们可以将 $\psi(p)$ 写成

$$\forall r_0, r_1 \in X\,(\exists t \in p\ \psi_0(r_0, r_1, t) \wedge \forall s \in p\ \psi_1(r_0, r_1, s) \wedge \psi_2)$$

其中

$$\begin{gathered} \psi_0(r_0, r_1, t) \text{ denotes “}r_0 \sqsubseteq r_1 \to (r_0, r_1) = t\text{,” and} \\ \psi_1(r_0, r_1, s) : \text{ denotes “}(r_0 \sqsubseteq r_1 \wedge \neg(r_1 \sqsubseteq r_0)) \to (r_0, r_1) \neq s\text{,” and} \\ \psi_2(p) \text{ denotes “}p \text{ is a total preorder.”} \end{gathered}$$

定义5.7。 波兰空间 X 上的博雷尔预线性序 $\sqsubseteq$ 是科恩-索状 于V，当且仅当对于任意 g、h，若它们在 V 上相互$\mathbf{C}$-泛型，且对于任意 $x \in V[g]$ 和$y \in V[h]$，若 $x \sqsubseteq y$，则存在 $z \in V$，使得 $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$。

注意，按照定义 3.1 所述具有函子性的博雷尔预线性序是科恩-索状的。因此，引理3.2 中的所有预序也都是科恩-索状的。

推论5.8 （定理的推论5.3）。 设 **Q** 是 ω_1 个科恩强迫的有限支撑积，设 g 是 L 上的 **Q**-泛型滤子。设 $\sqsubseteq$ 是一个 *Borel* 科恩-索状预序，并考虑局部强迫 $\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$。设 h 是 $\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$-泛型滤子，取自 $L[g]$和 $\mathcal{P} = \cup h$。则

$$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]} \models \mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \neg\,\mathsf{Uf}(\omega) + \mathcal{P} \textit{ is a prelinearization of } \sqsubseteq .$$

证明。 自然地，我们希望将定理 5.3 和引理 5.4 应用于强迫 $\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$。我们已经证明 $\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$ 是一个局部强迫偏序集。我们声称它是 σ-闭的。设$\{\lesssim_n\}_{n\in\omega}$ 是$\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$ 中的一个递减条件序列，并设 x_n 是一个实数见证，证明 $\lesssim_n$ 对每个 $n \in \omega$都是条件。因此，在 $L[x_n]$中， $\lesssim_n$ 是$\sqsubseteq$的预线性化。取$\lesssim^* = \bigcup_{n\in\omega} p_n$ 和 $x = \bigoplus_{n\in\omega} x_n$。显然，

$$L[x] \models \text{“}\sqsubseteq \subseteq \lesssim^* \subseteq X \times X \text{ and } \lesssim^* \text{ is a preorder.”}$$

此外，固定 x、y $\in\lesssim^*$，使得 x $\sqsubsetneq$ y 且 y $\not\lesssim$ x。存在 n $\in \omega$，使得对于所有 m $\geq$ n，都有 (x, y) $\in\lesssim_m$。由于 $\lesssim_m$ 是相应模型中 $\sqsubseteq$ 的预线性化，特别是对于所有 m $\geq$ n，都有 (y, x) $\notin\lesssim_m$。因此，(y, x) $\notin\lesssim^*$。总之， $\lesssim^*$ 是一个扩展 $\sqsubseteq$ 的预序，并且满足 $\sqsubset \subseteq <^*$。根据引理2.2，在 L[x] 中， $\lesssim^*$ 可以扩展为一个预线性序 $\lesssim$，它是 $\sqsubseteq$ 的预线性化。因此， $\lesssim\in$ P$_{\sqsubseteq}$，且 P$_{\sqsubseteq}$ 是 σ-闭的。

此外，P$_{\sqsubseteq}$ 满足 (3, 2)-融合。对于第一项，注意，对于任意局部性由实数 x 见证的条件 p $=\lesssim$ 以及任意 $\beta < \omega_1$，都存在$\gamma \geq \beta$ 使得 x $\in$ L[g $\restriction \gamma$]。在 L[g $\restriction \gamma$]中，$\lesssim$ 是一个扩张了 $\sqsubseteq$ 且满足$\sqsubset \subseteq <$的预序。因此，根据引理2.2， $\lesssim$可以在 L[g $\restriction \gamma$] 中扩张为$\sqsubseteq$的预线性化。对于第二项，证明与引理 4.3 中第 (1) 项证明里的论证类似。

应用定理 5.3，我们得到

$$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]} \models \mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \neg\,\mathsf{Uf}(\omega). \tag{10}$$

此外，回想一下，我们可以按照符合引理 $\mathbf{P}_{\sqsubseteq}$ 假设中的形式来定义强迫 $\psi(p)$，如前所述。随后我们可以应用引理 5.4 ，并结合（5.4 ），得到（10）：

$$L(\mathbb{R}, \mathcal{P})^{L[g,h]} \models \mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \neg\,\mathsf{Uf}(\omega) + \psi(\mathcal{P}).$$

□

6 展望

本文仅仅开启了对博雷尔预序的预线性化存在性之强度作为选择原理的研究，自然还有许多尚待解答的问题。

问题 1. 设 X 是一个波兰空间。对于哪些解析预序 $\sqsubseteq$，预线性化的存在意味着自然数集 ω 上存在非主超滤子？或者意味着 $\mathbb{Q}$ 上存在一个以 $\mathbb{R}$ 为底域的哈梅尔基？在什么情况下，传递扩张 M *of* W 中存在预线性化意味着 M 中存在一个序数集 $\backslash W$?

问题 2. 是否存在一种关于预序的组合性质，能够刻画函子性？

问题 3. 对于哪些定义在 ω 上的博雷尔理想 I，$\leq_I$ 在 $\mathbb{R}^\omega$ 上的预序（对 $x,y \in \mathbb{R}^\omega$ 定义为

$$x \leq_I y \Leftrightarrow \{n < \omega : x(n) > y(n)\} \in I,$$

是函子性的？这在社会选择理论中颇具意义，因为这类序自然出现在分析帕累托效率条件的强化形式时。

致谢。 第二作者衷心感谢其导师 Justin Moore 和 Paul Larson 在开展本研究及撰写本文过程中给予的帮助。

本文没有相关数据。为实现开放获取，作者已将 CC-BY许可协议应用于由本次投稿产生的任何作者接受稿版本。

参考文献

[1] M. Beriashvili 和 R. Schindler，没有实数良序的马祖尔凯维奇集，Georgian Mathematical Journal，29 (2022)。[2] N. Bowler、C. Delhomm´e、C. Di Prisco 和 A. Mathias，*Flutters* 与变色龙，预印本，(2017)。[3] J. Brendle、F. Castiblanco、R. Schindler、L. Wu 和 L. Yu，一个除实数良序外无所不有的模型，2018。arXiv:1809.10420。[4] C. A. Di Prisco 和 S. Todorcevic，L 中的完满集性质(**实数**)[U]，Adv. Math.，139 (1998)，第 240–259 页。[5] A. Fatalini，将 $\mathbb{R}^3$ 划分为单位圆且不存在实数良序，即将在 Transactions of the American Mathematical Society 发表，(2026)。[6] A. Fatalini 和 L. Serafin，公平社会福利序可以存在，但公平投票系统不存在（准备中）。[7] S. Gao，不变描述集合论，Pure and Applied Mathematics (Boca Raton) 第 293 卷，CRC Press，Boca Raton，FL，2009。[8] S. Grigorieff，集合论中的中间子模型与泛型扩张，Annals of Mathematics，101 (1975)，第 447–490 页。[9] L. J. Halbeisen，组合集合论——强迫入门，数学专著，Springer，Cham，第 3 版，[2025] ©2025。[10] B. Hansson，选择结构与偏好关系，Synthese，18 (1968)，第 443–458 页。[11] T. Jech，集合论：第三个千年版，修订扩充版，数学专著，Springer-Verlag，Berlin，2003。[12] T. J. Jech，选择公理，逻辑与数学基础研究，第 75 卷，North-Holland Publishing Co.，Amsterdam-London；American Elsevier Publishing Co., Inc.，New York，1973。

[13] A. S. Kechris，经典描述集合论，数学研究生教材第 156 卷，Springer-Verlag，New York，1995。[14] K. Kunen，集合论：独立性证明导论，逻辑与数学基础研究第 102 卷，North-Holland Publishing Co.，Amsterdam-New York，1980。[15] P. B. Larson 和 J. Zapletal，几何集合论，数学调查与专著第 248 卷，美国数学学会，Providence，RI， [2020] ©2020。[16] D. A. Martin 和 J. R. Steel，射影决定性的一个证明，J. Amer. Math. Soc.，2 (1989)，第 71–125 页。[17] A. R. D. Mathias，快乐族，Ann. Math. Logic，12 (1977)，第 59–111 页。[18] A. Panagiotopoulos 和 A. Shani，有界代数维数伯努利移位的强遍历性现象，Ann. Pure Appl. Logic，175 103412，19 2024( )，第 论文编号 .。[19] J. Schilhan，无选择的极大集，Annals of Pure and Applied Logic，177 (2026)，第 103694 页。[20] L. Serafin，关于无选择公理的强公平社会福利序，2025。[21] S. Shelah，能否去掉 *Solovay* 的不可达基数？，Israel J. Math.，48 (1984)，第 1–47 页。[22] R. M. Solovay，一个每个实数集均为勒贝格可测的集合论模型，Ann. of Math. (2)，92 (1970)，第 1–56 页。[23] E. Szpilrajn，关于偏序的延伸，Fundamenta mathematicae，16 (1930)，第 386–389 页。[24] J. r. Zapletal，序列拓扑与戴德金有限集，MLQ Math. Log. Q.，68 (2022)，第 107–109 页。[25] , 距离图的着色，Eur. J. Math.，9 (2023)，第 论文编号 66，16 页。[26] , 三角形与矩形的着色，Comment. Math. Univ. Carolin.，64 (2023)，第 83–96 页。[27] , 集合论中的 *Krull* 维数，Ann. Pure Appl. Logic，174 (2023)，第 论文编号 103299，16 页。[28] ，闭诺特图的着色，J. Math. Log.，24 (2024)，第 论文编号 2350010，21 页。[29] ,三角形与 *Vitali* 集，Combinatorica，45 (2025)，第 论文编号 54，19 页。[30] Y. Zhou，无选择集合论中等腰三角形的着色，J. Symb. Log.，90 (2025)，第 105–134 页。