arXiv:2602.13908v1 [math.LO] 14 Feb 2026

一阶蕴涵空间语义

Ulf Hlobil

2026年2月17日

摘要

本文将蕴涵空间语义扩展至涵盖一阶量化。蕴涵空间语义近来被提出，作为一种推理主义形式语义，能够刻画非单调且非传递的实质推理。然而，现有版本仅涵盖命题逻辑。本文扩展这一框架，使其能够复现经典一阶逻辑。本文旨在构建一种理论：其中的后承关系可以是非单调且超经典的，同时遵循演绎—脱离定理和析取消去；此外，该理论还纳入了作为前提时呈乘法行为的合取，以及对通常量词规则的反例。本文阐释了这些约束，并展示如何同时满足它们。由此得到的一阶版本蕴涵空间语义，具备推理主义者和推理表达主义者所称赞的命题蕴涵空间语义的全部优点。

关键词：蕴涵空间语义；推理主义；次结构逻辑；可废止推理；实质推理；逻辑表达主义

1 引言

近年来，蕴涵空间语义作为一种新型的推理主义形式语义得到了发展（Kaplan，2022年；Hlobil 和 Brandom，2024年）。它受到 Girard（1987）的线性逻辑相空间语义的启发，并且在某些方面与之相似。然而，与 Girard 的相空间语义不同，蕴涵空间语义能够对非传递、非单调的实质推理进行建模。Brandom 称蕴涵空间语义为“当前推理主义语义领域的前沿”（Hlobil 和 Brandom，2024年，第18页）。Peregrin 则运用这种语义的一个版本，论证推理角色具有组合性（Peregrin，2025年）。蕴涵空间语义能够还原经典命题逻辑，也能够还原 Priest 的悖论逻辑（LP）、强 Kleene 逻辑（K3）、严格／宽容逻辑（ST）的命题片段，以及经过一些调整后的乘法-加法线性逻辑（MALL）。然而，目前尚无关于蕴涵空间语义中量化的现存论述。本文旨在填补这一空白。

本文结构如下：在第 2 节中，我将介绍一些背景并说明我的目标。这个目标是构建一种语义，使其能够验证我称为 MOF、SCL、DDT、DS 和 LC 的约束，同时不必支持我将在下文陈述的通常量词规则 $\forall R$ 和 $\forall L$。在第 3 节中，我将构建一阶蕴涵空间语义。我将证明，这一版本的蕴涵空间语义能够验证 MOF、DDT、DS 和 LC，且不必支持规则 $\forall R$ 和 $\forall L$。本文其余部分的目标是证明 SCL 也能得到满足，从而能够在蕴涵空间语义中恢复经典一阶逻辑。这是第 4 节的任务：我将先介绍塔斯基模型论，然后将其映射到蕴涵空间语义中，从而说明如何确保所得的后承关系是超经典的。第 5 节为结论。

2 背景与目标

由于蕴涵空间语义对大多数读者而言可能并不熟悉，我将在本节开篇说明其中的一些目标与挑战。由此将得出一阶蕴涵空间语义应当满足的七项约束。

蕴涵空间语义旨在说明我们在可废止的、实质性的（即非逻辑有效的）推理中所运用的那类蕴涵。这类蕴涵不仅常见于日常推理，也常见于医学诊断和法律推理等高度专业化的语境，以下这些（诚然过于简单化的）例子便说明了这一点。

Inf-1：NN 是一名中年男性，胸痛并放射至左臂。因此，NN 可能心脏病发作。Inf-2：NN 是一名中年男性，胸痛并放射至左臂。NN 的心电图和心肌酶检查结果正常，且疼痛在吸气和活动时加重。因此，NN 可能心脏病发作。Inf-3：存在一份已签合同，据此 NN 必须向 MM 支付 1000 美元。因此，NN 必须向 MM 支付 1000 美元。Inf-4：存在一份已签合同，据此 NN 必须向 MM 支付 1000 美元。这份合同是 NN 在胁迫下签署的。因此，NN 必须向 MM 支付 1000 美元。

可以合理地认为，Inf-1 是一种良好推理，而 Inf-2 则不是。Inf-3 是一种良好推理，而 Inf-4 则不是。因此，Inf-1 和 Inf-3 是可撤销的、实质上良好的推理。这里所说的“良好推理”，是指结论以某种适当宽泛的方式从前提中推出，而这并不总是逻辑形式的问题。这种蕴涵关系不是经典逻辑后承，而且是非单调的。类似的例子

很容易大量列举出来，并且它们几乎出现在所有话语领域中，数学等少数领域除外。Brandom（1994；2000年；2008年）等推理主义者认为，这类蕴涵中至少有一些是内容决定性的。因此，推理主义形式语义必须能够捕捉这类蕴涵。这就是蕴涵空间语义的目标。

当然，Inf-1 和 Inf-3 是否良好，分别是医学问题和法律问题，无法由任何形式理论决定。蕴涵空间语义的目标并非判定这类实质蕴涵是否成立，而只是提供一个形式框架，使这类蕴涵能够（通过约定）被纳入其中，同时对逻辑词汇作出说明。由此形成的理论应当通过为表达式赋予内容，系统地说明逻辑表达式和非逻辑表达式如何组合成良蕴涵；这里的内容被视为这些表达式在此类蕴涵关系中所扮演的角色。

这一目标促使我们对蕴涵空间语义提出第一项约束：它必须是非单调的。我将把相关类型的蕴涵视为句子集之间的一种关系，[1] 并用“$\sim$”表示它，其中大写希腊字母表示（图式化的）句子集，小写希腊字母表示 |(图式化的）句子。因此，我们可以将第一项约束表述如下：

- 单调性失效 (MOF)：可能出现$\Gamma \sim \Delta$ 但不出现$\Gamma, \phi \sim |\Delta$。
  |

在命题蕴涵空间语义中，验证所有在经典命题逻辑中有效的推理很容易。我将把它视为

[1]有人认为，推理主义者应当将结论视为单个句子，而非集合（Steinberger，2011年）。我对此持不同意见，但此处不打算讨论这一问题，原因有二：（i）蕴涵空间语义的倡导者能够接受多结论框架；（ii）我们可以把由此产生的后承关系中仅有一个结论的片段视为“真正的”后承关系，因为我在这里关心的是后承关系的扩展，而不是可能生成该关系的任何规则。

我的蕴涵空间语义版本同样能够验证经典一阶逻辑，这是第二个约束。

- 超经典性 (SCL)：如果 $\Gamma \vdash \Delta$ 在经典逻辑中成立，那么 $\Gamma \sim \Delta$。

除了这两项约束之外，蕴涵空间语义的拥护者通常还会在推理主义之外主张逻辑表达主义（Brandom，2000年；Hlobil 和 Brandom，2024年）。具体而言，他们认为，条件句使从什么可以推出什么这一点明晰化，因此，“如果 ϕ，那么 ψ”被某些前提 Γ 蕴涵，当且仅当 Γ 与 ϕ 一起蕴涵 ψ。同样，他们认为，如果某个结论可以从一个析取式推出，那么它必定也可以分别从各个析取支推出；而将合取项用作前提，等同于将这些合取项分别用作前提。这为我们提供了另外三项约束：[2]

- 演绎脱离定理 (DDT)：$\Gamma \sim \phi \to \psi$，$\Delta$ 当且仅当 Γ，$\phi \sim \psi$，Δ。
- 析取消去 (DS)：如果 Γ，$\phi \vee \psi \sim \Delta$，那么 Γ，$\phi \sim \Delta$ 且 Π，$\psi \sim \Delta$。
- 左合取 (左合取)：Γ，$\phi \wedge \psi \sim \Delta$ 当且仅当 Γ，ϕ，$\psi \sim \Delta$。

这些约束在直觉上有一定的合理性。以析取简化（DS）为例，如果你从“今天不是星期二就是星期三”推理到“邮局开门”，那么回答“不是，邮局星期三关门”似乎是恰当的。至于左合取（LC），如果一方面认为“推特是企鹅”足以推翻从“推特是鸟”到“推特会飞”的推理，另一方面又认为“推特是鸟，也是企鹅；所以推特会飞”是良好推理，那就不太合理了。不过，我

[2]作为推理主义者，蕴涵空间语义的倡导者通常也对条件句作为前提时的推理角色，以及析取和合取作为结论时的角色持有具体看法。由于我将在下文定义的联结词也会满足这些其他要求，而且这里的约束有助于说明我的目标并非微不足道，因此我在此不予讨论。

的目的并非为这些约束辩护；我只是在这里将它们陈述并接受为我项目中的约束。

这些约束至少带来三个重要后果。首先，SCL 表明，蕴涵空间语义旨在捕捉的单调性失效，并不是相关逻辑或类似逻辑中出现的那种单调性失效。它们更类似于默认逻辑和优先逻辑旨在捕捉的单调性失效。其次，MOF、SCL 和 DDT 共同表明，乘法切割规则在蕴涵空间语义中失效。假设根据 MOF，$\Gamma \sim \psi$、Δ 并非 Γ、$\phi \sim \psi$、Δ。现在，SCL 蕴涵 $\psi \sim \phi \rightarrow \psi$。根据乘法切割规则，$\Gamma \sim \phi \rightarrow \psi$、$\Delta$。随后，DDT 得出 Γ、$\phi \sim \psi$、Δ，这与我们的假设相矛盾（Arieli 和 Avron，2000年）。因此，蕴涵空间语义必须能够容纳非传递后承关系。第三，MOF、LC 和 DS 共同表明，蕴涵空间语义是超内涵的（Fine，1975年）。假设根据 MOF，Γ、$\psi \sim \Delta$ 并非 Γ、ψ、$\phi \sim \Delta$。现在，ψ 在经典意义上等价于 $\psi \wedge (\phi \vee \neg\phi)$；因此，在非超内涵的框架下，这些句子可以相互替换，而不影响蕴涵。于是，Γ、$\psi \wedge (\phi \vee \neg\phi) \sim \Delta$。但是，根据 LC，$\Gamma$、$\psi$、$(\phi \vee \neg\phi) \sim \Delta$；而 DS 随后得出 Γ、ψ、$\phi \sim \Delta$，这与我们的假设相矛盾。

这意味着，像标准可能世界语义这样的纯内涵理论无法满足我们的约束。我们也不能转而采用相关逻辑或线性逻辑等次经典逻辑来允许单调性失效。通常，默认逻辑或优先逻辑中最熟悉的那些版本属于超经典的非单调逻辑：首先，它们具有传递性，因此不满足 DDT；其次，它们不是超内涵的，因此不满足析取简化或左合取。最后，最著名的非传递逻辑，即严格／宽容逻辑（ST），是单调的（Cobreros 等人，2012年）。[3] 因此，要说明满足上述五项约束的后承关系，

[3]我并不是说这些逻辑中有些无法调整以满足上述约束，而只是说这样做需要进行大量且并非轻而易举的调整。而蕴涵空间语义可以被视为一种调整

并非易事。现有的蕴涵空间语义版本满足命题逻辑中的这些约束（Kaplan，2022年；Hlobil 和 Brandom，2024年）。然而，能否将量词加入蕴涵空间语义，并同时满足上述约束，仍是一个开放问题；即便可以，具体该如何实现也尚无定论。

将蕴涵空间语义扩展到一阶语言并非易事。要了解原因，请注意，一旦允许可撤销的实质推理，量词的通常证明规则就显得不合理。下面是全称量词这些通常规则的序列演算版本，[4]其中要求y 不在这些规则的下方序列中自由出现，并且 $[y/x]\phi$ 表示这样一个句子：它与 ϕ 相同，只是所有自由出现的x 都替换成了y 。

$$\frac{\Gamma, [t/x]\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\phi \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow [y/x]\phi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\phi, \Delta}\,\forall\mathrm{R}$$

规则 $\forall R$ 的一个问题是，它包含开放公式，因为y 是自由出现的。[5]然而，我们在自然语言中并不使用开放公式。因此，这条规则无法以任何直接的方式应用于蕴涵空间语义所针对的日常语言推理。调整这条规则的一种方法是，用一个不在下方序列中出现的名称代替变量y。我们来考察这样调整后的 $\forall R$版本。

如果我们允许存在可废止推理，即某些推理无需明确包含陈述背景假设的前提也可能是良好的，那么 Inf-5 很可能是良好的；然而，Inf-6 并不好。

严格／宽容逻辑、真值制造者语义或相空间语义。我在此不探讨这些问题。[4]本文中，我将把存在量词视为全称量词的对偶定义。因此，我讨论的问题对于存在量词也有对偶版本。[5]当然，除非这条规则用于一种退化情形：下方序列中的量词约束了一个在其辖域内并未出现的变量。

Inf-5：罗密欧与朱丽叶是英国文学中最伟大的作品之一。因此，莎士比亚是一位重要的英国作家。Inf-6：罗密欧与朱丽叶 是英国文学中最伟大的作品之一。因此，每个人都是重要的英国作家。

当然，如果我们将“莎士比亚是罗密欧与朱丽叶的作者”作为一个前提加入，那么从 Inf-5 到 Inf-6 的推导就违反了这一约束：我们要对其位置进行量化的名称，不得出现在调整后版本的 $\forall R$ 的底部序列中。然而，如果我们要求将这个前提加入 Inf-5，使其成为一个真正的良好推理，那么这就引出了一个问题：以这种方式添加前提的一般要求是什么？如果我们希望允许可废止推理也可能是良好推理，那么就不能要求前提使推理在逻辑上有效。因此，我们不清楚如何修正这条规则，使其能够以非特设的方式适用于可撤销的实质推理。

规则 $\forall L$ 会引发另一个问题。由于空啤酒瓶通常不会放在冰箱里，Inf-7 很可能是一个良好推理；但 Inf-8 并不是良好推理

Inf-7：冰箱里有两个啤酒瓶，分别是瓶子-1和Bottle-2。如果瓶子-1是冰箱里的一个瓶子，那么瓶子-1就是空的。所以，冰箱里仍然有啤酒。
Inf-8：冰箱里有两个啤酒瓶，分别是瓶子-1和Bottle-2。对于所有事物，如果它是冰箱里的一个瓶子，那么它就是空的。所以，冰箱里仍然有啤酒。

这个例子表明，与 $\forall L$ 相反，在我们通常的实质推理和可废止推理中，全称概括的一个实例可以推出一个结论，而全称概括本身却不能推出该结论。解释很清楚：全称概括所断言的情况多于特定实例，而眼下的推理

可能会被全称概括所肯定的某种情况推翻。在我们的例子中，$\forall L$ 使我们能够达到与在 Inf-2 中加入“Bottle-2 是空的”这一断言相同的效果；但这个附加前提会推翻该推理。

总而言之，将蕴涵空间语义扩展到涵盖量词，必须提供一个满足上述五项约束的系统，并且不能使用为诸如 $\forall R$ 和 $\forall L$这类规则提供依据的全称量词语义子句，这样按照该系统，Inf-5 和 Inf-7 可以被判定为良好，而 Inf-6 和 Inf-8 则不能。本文旨在提供这样一个系统。

当然，有些读者可能会认为，逻辑本就不适用于上述这类自然语言推理片段。然而请注意，促成蕴涵空间语义发展的推论主义理论，显然力图涵盖此类可废止的自然语言推理。我不会为这一目标辩护，也不会论证上述约束。我的目标是在刚才提出的约束范围内解决这个问题，无论这些约束最终是否是哲学上正确的施加约束。

因此，本文旨在构建一种语义，使其满足 MOF、SCL、DDT、析取简化和左合取这些约束，同时也容许 $\forall R$ 和 $\forall L$的反例。下一节中，我将构建这样一种理论，并证明它能够满足 MOF、DDT、析取简化和左合取，同时也容许 $\forall R$ 和 $\forall L$的反例。本文余下部分将致力于证明该理论也能够满足 SCL。

3 一阶蕴涵空间语义

本节将介绍一种适用于一阶语言的蕴涵空间语义。在第一小节中，我将阐释蕴涵框架，并在第二小节中用它来定义模型以及模型集合中的后承。在第三小节中，我将说明这种

蕴涵空间语义与现有适用于命题语言的蕴涵空间语义一样，满足 MOF、DDT、析取简化和左合取这些约束。此外，它并不支持 $\forall R$和 $\forall L$。

3.1 一阶蕴涵空间

如同命题蕴涵空间语义（Hlobil 和 Brandom，2024年）中所做的那样，我们从蕴涵角色的承载者（简称“承载者”）入手，然后从中抽象出这些蕴涵角色。然而，与命题蕴涵空间语义不同，这些承载者是复合体。我们将其视为由属性和对象（的序列）构成。[6] 因此，我们从以下内容开始:

- 一个属性集合 $\mathbb{P}$，其中 $\mathbb{P}_n$ 是n元属性的集合，
- 一个对象集合 $\mathbb{O}$，其中 $\mathbb{O}_n$ 是所有长度为n的序列的集合 .

定义 1（承载者， $\mathbb{B}$）。 承载者集合 $\mathbb{B}$是由所有对 $\langle \mathrm{P}、 \vec{\mathrm{o}} \rangle$构成的集合，也写作 $\mathrm{P}\vec{\mathrm{o}}$，其中 $\mathrm{P} \in \mathbb{P}^n$ 和 $\vec{\mathrm{o}} \in \mathbb{O}^n$。

由于蕴涵空间语义受到推理主义的启发，而推理主义有时被视为排斥诉诸语言所表征内容的观点，因此反对者可能会担心，我的出发点与蕴涵空间语义背后的推理主义动机相矛盾。此处我暂且搁置这些哲学问题，[7] 转而专注于构建一种蕴涵空间语义，使其满足引言中提出的约束。

[6]与塔斯基模型论不同，即使对象集合为空的蕴涵空间模型，也可能是某个推理的反例。[7]请注意，我们可以将属性视为谓词，将对象视为名称。这样，承载者集合就将是由这些谓词和名称形成的原子句集合。推理主义者随后可以将这些承载者之间的蕴涵关系视为由社会规范确立的。我所说的一切都不排除这种处理方式。不过，这些哲学问题与我在本文中的目标无关。

一旦有了蕴涵角色的承载者，我们就可以沿用命题蕴涵空间语义（Hlobil 和 Brandom，2024年）中的做法，直到需要为全称量词给出语义子句为止。蕴涵空间是一个集合，其中包含蕴涵角色承载者的各个集合之间所有候选蕴涵。

定义 2 (蕴涵空间，$\mathbb{S}$**)**。 $\mathbb{S} = \mathcal{P}(\mathbb{B}) \times \mathcal{P}(\mathbb{B})$。

一个蕴涵框架由一对承担者以及这些承担者的集合之间的蕴涵关系构成。直观地说，这个集合中的蕴涵就是良蕴涵。[8]

定义 3 (蕴涵与蕴涵框架，$\langle \mathbb{B}, \mathbb{I} \rangle$**)**。 蕴涵是承担者集合之间的一种关系，$\mathbb{I} \subseteq \mathbb{S}$。一个蕴涵空间是一对 $\langle \mathbb{B}, \mathbb{I} \rangle$承担者集合，$\mathbb{B}$，以及它们的集合之间的一种蕴涵关系。

从哲学角度看，良蕴涵可以有不同的理解方式。一种看法是，将承担者视为类似于事态，并认为这对中的第一个元素里的承担者成立或实际发生，而第二个元素里的承担者不成立或未能实际发生。这样，如果不可能出现第一组中的所有事态都发生、同时第二组中的所有事态都不发生的情况，那么一个蕴涵就是良好的。另一种看法是从规范实用主义术语来理解蕴涵，并将承担者视为句子。在这种情况下，可以采取双边主义观念：当且仅当断言第一组中的所有承担者并否定第二组中的所有承担者在规范上都不被允许时，蕴涵才成立（见 Restall，2005）。这里我暂且搁置这些哲学问题。

记号约定 4。为避免繁杂，我们采用以下记号约定：

[8]将所有候选蕴涵划分为好与坏两类，其作用大体类似于在经典框架中为原子句赋予真值。在蕴涵空间语义中，蕴涵框架的作用相当于 Girard（1987）相空间语义中的相空间。

- 承载者及其集合（无衬线体）：$\mathsf{a, b, c, ...A, B, C, D, ..., G, ...}$
- 候选蕴涵集合（无衬线字体）：H、I、J、...
- 角色、内容及其集合（打字机字体）：$\mathtt{a, b, c, ...A, B, C, ..., G, D, ...}$
- 句子及其集合（希腊字母）：$\phi, \psi, ...\ \Gamma, \Delta, ...$

一组候选蕴涵的反事实稳健性范围，是这样一组候选蕴涵：其中每个候选蕴涵与该集合中的任意蕴涵两两并集后，都会得到一个良好蕴涵。

定义 5（反事实稳健性范围，$\mathrm{RSR}(\cdot)$）。若 $\mathsf{H} \subseteq \mathbb{S}$，则 $\mathrm{RSR}(\mathsf{H}) = \{\langle x、y\rangle \mid \forall \langle \mathsf{G}、\mathsf{D}\rangle \in \mathsf{H}\ (\langle \mathsf{G} \cup x、\mathsf{D} \cup y\rangle \in \mathbb{I})\}$。

现在，我们根据反事实稳健性范围来定义蕴涵角色。承载者、候选蕴涵及其集合，当且仅当它们具有相同的反事实稳健性范围时，才具有相同的蕴涵角色。因此，蕴涵角色是等价类，其等价关系由反事实稳健性范围相同这一条件确定。

定义 6（蕴涵角色，$\mathcal{R}(\cdot)$）。承担者、候选蕴涵及其集合具有以下蕴涵角色，记作 $\mathcal{R}(\cdot)$：

(1) 若 $\mathsf{H} \subseteq \mathbb{S}$，则 $\mathcal{R}(\mathsf{H}) = \{\mathsf{x} \mid \mathrm{RSR}(\mathsf{H}) = \mathrm{RSR}(\mathsf{x})\}$。(2) 若 $\mathsf{A} \in \mathbb{S}$，则 $\mathcal{R}(\mathsf{A}) = \mathcal{R}(\{\mathsf{A}\})$。(3) 若 $\mathsf{a} \in \mathbb{B}$，则 $\mathcal{R}(\mathsf{a}) = \langle \mathcal{R}^{+}(\mathsf{a}), \mathcal{R}^{-}(\mathsf{a})\rangle$，其中 $\mathcal{R}^{+}(\mathsf{a}) = \mathcal{R}\langle\{\mathsf{a}\}, \varnothing\rangle$ 是 a 的前提角色，而 $\mathcal{R}^{-}(\mathsf{a}) = \mathcal{R}\langle\varnothing, \{\mathsf{a}\}\rangle$ 是 a 的结论作用。

根据上述记号约定，我们用打字机字体表示角色；因此：$\mathtt{P}\overrightarrow{\mathtt{o}} = \mathcal{R}(\mathsf{P}\overrightarrow{\mathsf{o}})$，$\mathtt{P}\overrightarrow{\mathtt{o}}^{+} = \mathcal{R}^{+}(\mathsf{P}\overrightarrow{\mathsf{o}})$，$\mathtt{P}\overrightarrow{\mathtt{o}}^{-} = \mathcal{R}^{-}(\mathsf{P}\overrightarrow{\mathsf{o}})$，$\mathtt{H} = \mathcal{R}(\mathsf{H})$，等等。

注意，对任意 H，$\bigcup \mathcal{R}(\mathsf{H}) \in \mathcal{R}(\mathsf{H})$。这是因为，所有 $\mathsf{J} \in \mathcal{R}(\mathsf{H})$ 都具有相同的反事实稳健性值域，即 $\mathrm{RSR}(\mathsf{J}) = \mathrm{RSR}(\mathsf{H})$；这意味着

这些集合的并集也具有这一反事实稳健性值域：$\mathrm{RSR}(\mathrm{J}) = \mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{H}))$。因此，我们可以将某个角色的各个元素的并集视为该角色的规范代表。这样一来，无论何时需要，我们都能得到该角色的一个代表成员，即使没有明确给出这个等价类的任何代表成员。

下文我将通过为句子分配一对蕴涵角色来解释句子：一个角色作为前提（前提角色），另一个角色作为结论（结论作用）。我将这样的角色对称为概念内容。对于概念内容是什么，我采取最大限度宽泛的立场，因此任意一对蕴涵角色都算作一个概念内容。

定义 7（概念内容）。如果有两个蕴涵角色$\mathtt{a}^+ = \mathcal{R}(\mathrm{H})$和$\mathtt{a}^- = \mathcal{R}(\mathrm{G})$（其中 H 和 G 是候选蕴涵的某些集合），那么它们组成的一对就是一个概念内容，$\mathtt{a}$。也就是说，$\mathtt{a} = \langle \mathtt{a}^+, \mathtt{a}^- \rangle$，其中$\mathtt{a}^+$是该内容的前提角色，$\mathtt{a}^-$是其结论作用。所有内容的集合称为$\mathbb{C}$。

之后我将根据复合句各组成部分的内容，为复合句赋予概念内容。为此，我现在定义角色上的一些运算，即伴随、对称合取和幂对称合取。

定义 8（伴随，$\sqcup$）。设$\mathrm{H}、\mathrm{J} \subseteq \mathbb{S}$，则：$\mathcal{R}(\mathrm{H}) \sqcup \mathcal{R}(\mathrm{J}) = \mathcal{R}(\{\langle \mathrm{A} \cup \mathrm{C}, \mathrm{B} \cup \mathrm{D} \rangle \mid \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle \in \mathrm{H}, \langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle \in \mathrm{J}\})$。如果$\mathtt{R}$是一个角色集合，那么我们将$\bigsqcup \mathtt{R}$记作其中各角色的伴随。

定义 9（对称合取，$\sqcap$）。设$\mathrm{H}、\mathrm{J} \subseteq \mathbb{S}$，则：$\mathcal{R}(\mathrm{H}) \sqcap \mathcal{R}(\mathrm{J}) = \mathcal{R}(\mathrm{H} \cup \mathrm{J})$。如果$\mathtt{R}$是一个角色集合，那么我们将$\bigsqcap \mathtt{R}$记作其中各角色的伴随。

定义 10（幂对称合取，∇）。若$\mathtt{R}$是一个角色集合，则$\mathtt{R}$中各角色的幂对称合取，记作$\nabla \mathtt{R}$，是对$\mathtt{R}$的每个非空子集取其伴随后所得的对称合取，即：$\nabla \mathtt{R} = \bigsqcap \{\bigsqcup x \mid x \subseteq \mathtt{R}, x \neq \varnothing\}$。

下面我将根据蕴涵框架来定义模型。然而，由于我不会在蕴涵空间语义中使用模型中的真这一概念，因此不能说蕴涵空间模型是某个推理的反例，当且仅当在该模型中所有前提都为真且所有结论都不为真。相反，我现在要定义内容之间的蕴涵关系这一概念，之后我会说，某个模型是某个推理的反例，当且仅当该模型赋予前提的内容集合并不蕴涵该模型赋予结论的内容集合。

以下蕴涵定义背后的想法是：一组内容 $\mathtt{G}$ 蕴涵另一组内容 $\mathtt{D}$，当且仅当 $\mathtt{G}$ 的所有前提角色与 $\mathtt{D}$ 的所有结论角色的伴随所构成的角色只包含良蕴涵。也就是说，任何能够将第一组内容全部作为前提、第二组内容全部作为结论加以组合的事物，总会导出一个良蕴涵。

定义 11（蕴涵框架中的内容蕴涵，$\sim$）。给定一个蕴涵框架 $\Vdash\langle \mathbb{B}, \mathbb{I}\rangle$，设 $\mathtt{G}$，$\mathtt{D} \subseteq \mathbb{C}$ 和 $\mathtt{G} = \{\mathtt{g}_0, \ldots, \mathtt{g}_n\}$ 和 $\mathtt{D} = \{\mathtt{d}_0, \ldots, \mathtt{d}_m\}$，那么 $\mathtt{G} \sim \mathtt{D}$ 在该蕴涵框架中成立$\Vdash$ 当且仅当 $\bigcup (\bigsqcup_{i=0}^{n} \mathtt{g}^{+}{}_{i} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{m} \mathtt{d}^{-}{}_{j}) \subseteq \mathbb{I}$。

请注意，这种蕴涵关系既不成立于句子之间，也不成立于蕴涵角色的承载者之间，而是成立于内容之间。不过，毫不意外的是，两组承载者 $\mathtt{G} \sim \mathtt{D}$ 的内容之间存在蕴涵，当且仅当这两组承载者在框架 $\langle \mathbf{G}, \mathbf{D}\rangle \in \mathbb{I}$ 中构$\Vdash$成一个良蕴涵。从这个意义上说，每个蕴涵框架都诠释自身。

命题 12. 令 $\mathtt{G} \cup \mathtt{D} \subseteq \mathbb{B}$ 且 $\mathtt{G} = \{\mathcal{R}(\mathtt{g}) \mid \mathtt{g} \in \mathtt{G}\} = \{\mathtt{g}_0, \ldots, \mathtt{g}_n\}$ 且 $\mathtt{D} = \{\mathcal{R}(\mathtt{d}) \mid \mathtt{d} \in \mathtt{D}\} = \{\mathtt{d}_0, \ldots, \mathtt{d}_n\}$，则：$\langle \mathtt{G}, \mathtt{D}\rangle \in \mathbb{I}$ 当且仅当 $\mathtt{G} \sim \Vdash\mathbb{b}$。

证明。 $\langle \mathbf{G}, \mathbf{D}\rangle \in \mathbb{I}$ 当且仅当，对每个 $x \in \mathcal{R}(\langle \mathbf{G}, \mathbf{D}\rangle)$，$\langle \varnothing, \varnothing\rangle \in \mathrm{RSR}(x)$。这当且仅当对于所有候选蕴涵 $y \in x$，$y \in \mathbb{I}$ 都成立。这意味着 $x \subseteq \mathbb{I}$，因此角色中各元素的并也是一个

子集 $\mathbb{I}$。因此，$\langle G,D\rangle \in \mathbb{I}$ 当且仅当 $\bigcup \mathcal{R}(\langle G, D\rangle) \subseteq \mathbb{I}$。但 $\mathcal{R}(\langle G, D\rangle)$ 恰好是 $\bigsqcup_{i=0}^{n} g^{+}{}_{i} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{m} d^{-}{}_{j}$。因此，$\langle G, D\rangle \in \mathbb{I}$ 当且仅当 $\bigcup(\bigsqcup_{i=0}^{n} g^{+}{}_{i} \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{m} d^{-}{}_{j}) \subseteq \mathbb{I}$，这意味着，按照定义，$G \sim D$。■

除了从属性与对象的复合体（以及幂对称合取的定义）出发之外，到目前为止，我只是照搬了命题蕴涵空间语义。不过，下面定义蕴涵角色承载者中的对象替换概念会很有用，因为这有助于利用承载者的内部结构来表述全称量词的语义子句。

定义 13（对象替换，$[\cdot/\cdot]\cdot$）。对于任意承载者 $P\overrightarrow{o}$ 以及对象 o_j 和 o_k，$[o_j/o_k]P\overrightarrow{o}$ 是与 $P\overrightarrow{o}$ 相同的承载者，只是其中的 o_k 在 $\overrightarrow{o}$ 中各处都被替换为 o_j。对于承载者集合 A，$[o_j/o_k]A$ 是所有满足 $P\overrightarrow{o} \in A$ 的 $[o_j/o_k]P\overrightarrow{o}$ 构成的集合。我们可以用 $[o_j/o_k]\mathcal{R}(A)$ 表示 $\mathcal{R}([o_j/o_k]A)$。

举例来说，$[d/c]Pabc = Pabd$。请注意，可能出现这样的情况：$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$，但 $\mathcal{R}([o_j/o_k]A) \neq \mathcal{R}([o_j/o_k]B)$。例如，当 A 中的承担者包含对象 o_k，而 B 中的承担者不包含该对象时，就可能出现这种情况。因此，当我们写作 $[o_j/o_k]\mathcal{R}(A)$ 时，不能把 $\mathcal{R}(A)$ 看作一个由 $[o_j/o_k]$作用其上的角色。对象替换是为承担者而非角色定义的。尽管如此，使用这种记法通常很方便，例如将 $\nabla\{\mathcal{R}([o_j/o_k]A), \mathcal{R}([o_j/o_k]B)\}$ 写作 $[o_j/o_k]\nabla\{\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B)\}$，或者将$\bigsqcup\{\mathcal{R}([o_j/o_k]A), \mathcal{R}([o_j/o_k]B)\}$ 写作 $[o_j/o_k]\bigsqcup\{\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B)\}$。

我们现在已经了解了什么是蕴涵框架，如何从这些框架中抽象出角色，以及如何将内容定义为此类角色的有序对。此外，我还定义了此类角色上的三种运算。我们可以利用如此定义的内容来解释一种语言：为每个句子指定一个从给定蕴涵框架中抽象出来的内容。

3.2 一阶语言的解释

在本小节中，我将使用上一小节定义的蕴涵框架和内容，来解释标准一阶语言的表达式。我将讨论既不包含同一性，也不包含函子或原子句的一阶语言。下面明确说明所讨论的语言是什么样的。

语言 $\mathcal{L}$:

- 谓词$_n$：$F1$、$F2$、……是一个可数的谓词集合，每个谓词都有给定且固定的元数n。
- 项：– 名称：$a1$、$a2$、……是一个可数的名称集合。– 变量：$x1$ 、 $x2$ 、 …… 是一个可数的变量集合。

- 在Sent中：任意n元谓词后接n 个名称，即为原子句，除此之外没有别的原子句。
- 在：任意n元谓词后接n 个项，即为原子公式，除此之外没有别的原子公式。
- 形式：原子公式是公式。如果 ϕ 和 ψ 是公式，且x_i 是变量，那么 $\neg\phi$、 $\phi \wedge \psi$和 $\forall x_i\phi$都是公式。析取、条件句和存在概括均视为定义项：$\phi \vee \psi =_{df}$。 $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$，$\phi \rightarrow \psi =_{df}$。 $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$，以及 $\exists x_i\phi =_{df}$。$\neg\forall x_i\neg\phi$。

- 句子：句子是不含自由变量的公式。

为了说明量化，我们必须运用公式中以其他项替换项这一熟悉概念，具体如下。

定义 14（项的替换，$[\cdot/\cdot]\cdot$）。项：$[t/a](a) = t$，且若 $b \neq a$，则 $[t/a](b) = b$。原子句：$[t/a](Ft_k....t_m) =$

$F[t/a](t_k)....[t/a](t_m)$。复合句：若 $\circ$ 是某个句子联结词，则 $[t/a](\phi \circ \psi) = [t/a]\phi \circ [t/a]\psi$。此外，$[t/x](\forall x\phi) = \forall x\phi$。并且，若 $a \neq x$，则 $[t/a](\forall x\phi) = \forall x[t/a]\phi$。

语言既已确立，我们便可以转向模型。一个蕴涵空间模型由蕴涵框架（我们据此如上所述抽象出内容）和一个将句子映射到这些内容的解释函数构成。

定义 15（蕴涵空间模型）。一个蕴涵空间模型，$\mathcal{M}$，是一个二元组 $\left\langle \langle \mathbb{B}, \mathbb{I} \rangle, [\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}} \right\rangle$，由蕴涵框架 $\langle \mathbb{B}, \mathbb{I} \rangle$ 和解释函数 $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}}$ 构成；该函数将给定语言 $\mathcal{L}$ 的所有句子映射到由 $\langle \mathbb{B}, \mathbb{I} \rangle$ 定义的 $\mathbb{C}$ 中的内容。

对于一阶语言，我们还必须进一步说明模型的解释函数是什么样的。这就需要为逻辑词汇提供语义子句。对于否定和合取，我将采用命题蕴涵空间语义中的子句（Hlobil 和 Brandom，2024年）。新意在于全称量词的子句。名称由对象解释，谓词由属性解释，而原子句的内容就是相应承载者的角色。

定义 16（解释函数，$[\![\cdot]\!]$）。解释函数 $[\![\cdot]\!]$ 将语言 $\mathcal{L}$ 的表达式映射为蕴涵框架中的概念内容 $\mathbb{C}$、对象 $\mathbb{O}$ 和属性 $\mathbb{P}$，如下所示：$\forall$ 一个 $\in$ 名称($[\![a]\!] \in \mathbb{O}$) 和 $\forall F \in \text{Perd}^n([\![F]\!] \in \mathbb{P}^n)$。如果 $Fa_1,..., a_i$ 是一个原子句，且 $P = [\![F]\!]$ 并且 $\vec{}o = \langle [\![a_1]\!], ..., [\![a_i]\!] \rangle$，那么 $[\![Fa_1,..., a_i]\!] =_d f . \mathcal{R}(P\vec{}o)$。复合句的解释为：

- $[\![\neg\phi]\!] =_{df}$。 $\left\langle [\![\phi]\!]^-, [\![\phi]\!]^+ \right\rangle$,
- $[\![\phi \wedge \psi]\!] =_{d f.} \left\langle \bigsqcup\{[\![\phi]\!]^+, [\![\psi]\!]^+\}, \bigtriangledown\{[\![\phi]\!]^-, [\![\psi]\!]^-\} \right\rangle$

- $[\![\forall x[x/a]\phi]\!] =_{df} \left\langle \bigsqcup\{[\circ/[\![a]\!]]\,[\![\phi]\!]^{+} \mid \circ \in \mathbb{O}\}, \bigtriangledown\{[\circ/[\![a]\!]]\,[\![\phi]\!]^{-} \mid \circ \in \mathbb{O}\} \right\rangle$

句子集的解释是这些句子的解释项所构成的集合，即 $[\![\Gamma]\!] = \{[\![\gamma]\!] \mid \gamma \in \Gamma\}$。

从检视合取与全称量化的子句即可明显看出，其想法是将全称量词大致视为一种“广义合取”。也就是说，倘若我们拥有所有对象的名称，则一个全称概括的前提角色将是其全部实例之合取的前提角色，而其结论作用将是其全部实例之合取的结论作用。

如果我们应用条件句、析取和存在概括的定义，并推演上述语义子句，便可得到如下子句：

- $[\![\phi \to \psi]\!] = \left\langle \bigtriangledown\{[\![\phi]\!]^{-}, [\![\psi]\!]^{+}\}, \bigsqcup\{[\![\phi]\!]^{+}, [\![\psi]\!]^{-}\} \right\rangle$
- $[\![\phi \vee \psi]\!] = \left\langle \bigtriangledown\{[\![\phi]\!]^{+}, [\![\psi]\!]^{+}\}, \bigsqcup\{[\![\phi]\!]^{-}, [\![\psi]\!]^{-}\} \right\rangle$
- $[\![\exists x[x/a]\phi]\!] = \left\langle \bigtriangledown\{[\circ/[\![a]\!]]\,[\![\phi]\!]^{+} \mid \circ \in \mathbb{O}\}, \bigsqcup\{[\circ/[\![a]\!]]\,[\![\phi]\!]^{-} \mid \circ \in \mathbb{O}\} \right\rangle$

不出所料，按照这种观点，存在量词是一种“广义析取”，其意义与全称量词是一种“广义合取”相同。

由于我不使用模型中的真这一概念，因此无法说：相对于一组蕴涵空间模型，某个推理有效，当且仅当在所有前提都为真的每个模型中，至少有一个结论为真。因此，我们需要另一种方式来定义相对于一组模型的后承或蕴涵——我将采用这种说法。

$_m$定义17 （m模型中的蕴涵，$\sim$）。给定某种语言下所有蕴涵空间模型的一个子集m，我们称$_m$句子集 Γ 在m中蕴涵句子集 Δ，记作 $\Gamma \sim \Delta$，当且仅当对于所有 $\mathcal{M} \in m$，$[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$ 都在 $\mathcal{M}$的蕴涵框架中。

‖

现在我们可以提出这样的问题：是否存在一个蕴涵空间模型类m，使得m $\Gamma \nsim \Delta$ 当且仅当 $\Gamma \models_{FOL} \Delta$，也就是说，当且仅当 Γ 在经典一阶逻辑中蕴涵 Δ？此外，如果存在，这个模型类能否以一种简明且富有启发性的方式加以刻画？这两个问题的答案都是“是”。不过，要证明这一点还需要做一些工作；下一节的任务就是完成这项工作。在此之前，我们应当考虑一下，刚刚介绍的蕴涵空间语义版本是否满足引言中的其他要求。

3.3 这些期望达成了吗?

回想一下，我的目标是构造一种蕴涵空间语义，使其满足 MOF、SCL、DDT、DS、LC 这些约束，同时不支持规则 $\forall R$ 和 $\forall L$。MOF、DDT、DS 和 LC 成立的理由，与命题蕴涵空间语义中的理由相同。

m ***m*命题18**。 可能出现这样的情况：$\Gamma \sim \Delta$ 成立，但 $\Gamma, \phi \sim \Delta$不成立。

证明。 存在一个蕴涵框架，其中 $\langle \{a\}, \{b\} \rangle \in \mathbb{I}$ 成立，但$\langle \{a,d\}, \{b\} \rangle \in \mathbb{I}$不成立。根据命题 12，可知在该蕴涵框架中，$\{a\} \mid\sim \{b\}$ 成立，但$\{a,d\} \mid\sim \{b\}$ 不成立。又如果令 $[\![\phi]\!] = a, [\![\psi]\!] = b, m[\![\chi]\!] = d$，且 m 是这样一个模型的单元素集合，那么 $\phi \sim \psi$ 成立，但$m\phi,\chi \mid\sim \psi$不成立。■ |

命题 19。 *DDT*、析取简化和左合取在所有蕴涵空间模型集合 m 中均成立：*(DDT)* $\Gamma, \phi \sim \psi, \Delta$ 当且仅当 $\Gamma \nsim \phi \to \psi, \Delta$；*(DS)* 若 $\Gamma, \phi \vee \psi \sim \Delta$，则 $m\, m \mid m\, m\Gamma, \phi \sim \Delta$且 $\Gamma, \psi \sim \Delta$；*(LC)* $\Gamma, \phi \wedge \psi \sim \Delta$ 当且仅当 $\Gamma, \phi, \psi \sim \Delta$。

证明。 我们从左合取开始。根据合取的语义子句，$[\![\phi \wedge \psi]\!]^+ = \bigsqcup\{[\![\phi]\!]^+, [\![\psi]\!]^+\}$，也就是 $[\![\phi]\!]^+ \sqcup [\![\psi]\!]^+$。因此，可以在图式 $\bigcup({}_{n_i}\bigsqcup_{=0} g^+{}_i \sqcup X \sqcup {}_{m_j}\bigsqcup_{=0} d^-{}_j) \subseteq \mathbb{I}$中，将它们替换到$X$ 的位置，而不改变真值。因此，对于任意集合，$G \cup \{[\![\phi \wedge \psi]\!]\} \sim D$ 当且仅当 $G \cup \{[\![\phi]\!], [\![\psi]\!]\} \sim D$,

$_m$内容 G 和 D，在所有蕴涵空间模型中。因此，在所有蕴涵空间模型集合中，$\Gamma, \phi, \psi \sim \Delta$ 当且仅当$_m\Gamma, \phi \wedge \psi \sim \Delta$ $_m$。

对于 DDT 和析取简化，我将使用上文推导出的语义子句。对于 DDT，注意到 $[\![\phi \to \psi]\!]^-$ 是 $\bigsqcup\{[\![\phi]\!]^+, [\![\psi]\!]^-\}$。因此，在上文的图式中，它们可以互相替换到$X$ 的位置。所以，$\mathrm{G} \sim \{[\![\phi \to \psi]\!]\} \cup \mathrm{D}$ 当且仅当 $\mathrm{G} \cup \{[\![\phi]\!]\} \sim \{[\![\psi]\!]\} \cup \mathrm{D}$。因此，在所有蕴涵空间模型集合$_m$中，$\Gamma \overset{m}{\sim} \phi \to \psi, \Delta$ 当且仅当 $\Gamma, \phi \overset{m}{\sim} \psi, \Delta$。

关于析取简化，请注意，$[\![\phi \vee \psi]\!]^+$ 是 $[\![\phi]\!]^+ \sqcap [\![\psi]\!]^+ \sqcap ([\![\phi]\!]^+ \sqcup [\![\psi]\!]^+)$。因此，若令 $[\![\phi]\!]^+ = \mathcal{R}(\mathrm{H})$ 且 $[\![\psi]\!]^+ = \mathcal{R}(\mathrm{J})$ 且 $[\![\phi]\!]^+ \sqcup [\![\psi]\!]^+ = \mathcal{R}(\mathrm{K})$，那么$[\![\phi \vee \psi]\!]^+ = \mathcal{R}(\mathrm{H} \cup \mathrm{J} \cup \mathrm{K})$。现在，$\mathcal{R}(\mathrm{H} \cup \mathrm{J} \cup \mathrm{K})$的每个元素共同具有的反事实稳健性值域，是 H、J 和 K 的反事实稳健性值域的交集。因此，$\mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{H} \cup \mathrm{J} \cup \mathrm{K})) \subseteq \mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{H}))$，且 $\mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{H} \cup \mathrm{J} \cup \mathrm{K})) \subseteq \mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{J}))$。现在，对于所有 X 和 Y，若 $\mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{X})) \subseteq \mathrm{RSR}(\bigcup \mathcal{R}(\mathrm{Y}))$，则对于每个 G 和 D，$\mathrm{G} \cup \{\mathcal{R}(\mathrm{X})\} \sim \mathrm{D}$ 蕴涵$\mathrm{G} \cup \{\mathcal{R}(\mathrm{Y})\} \sim \mathrm{D}$。因此，若 $\mathrm{G} \cup \{\mathcal{R}(\mathrm{H} \cup \mathrm{J} \cup \mathrm{K})\} \sim \mathrm{D}$，那么$\mathrm{G} \cup \{\mathcal{R}(\mathrm{H})\} \sim \mathrm{D}$ 且 $\mathrm{G} \cup \{\mathcal{R}(\mathrm{J})\} \sim \mathrm{D}$。所以，若 $\Gamma, \phi \Downarrow \psi \overset{m}{\sim} \Delta$，则在所有模型集合 m 中，$\mathrm{m}\Gamma, \phi \sim \Delta$。■

命题 20. 存在一些蕴涵空间模型，它们是 $_m\forall R$ 和 $\forall L$ 的反例；也就是说，可能出现这种情况：$\Gamma \sim Fa, \Delta$，其中 a 没有出现在 Γ 或 Δ 中的任何 $_m$ 句子里，但并非 $\Gamma \sim \forall xFx, \Delta$；也可能出现 $\Gamma, Fa \sim \Delta$，但并非 $_m\Gamma, \forall xFx \sim \Delta$。

证明. 为了说明 $\forall R$ 的调整版本可能不成立，考虑一个只有两个对象 o_1 和 o_2、且只有一个性质 F 的模型，使得 $\langle \varnothing, \{\mathrm{Fo}_1\}\rangle \in \mathbb{I}$，但并非 $\langle \varnothing, \{\mathrm{Fo}_2\}\rangle \in \mathbb{I}$。根据命题 12，在这样的模型中，$\sim \mathrm{Fo}_1$，但并非 $\sim \mathrm{Fo}_2$。因此，$\mathrm{not} \sim \mathrm{Fo}_1 \sqcap \mathrm{Fo}_2 \sqcap (\mathrm{Fo}_1 \sqcup \mathrm{Fo}_2)$。令 m 为该模型的 m 单元素集合，并令 $[\![Fo_1]\!] = \mathrm{Fo}_1$，则得到 $\sim Fo_1$，但并非 $\sim \forall xFx$。

关于 $\forall L$，注意存在一个模型，其中有 $\langle \{\mathrm{Fo}_1\}, \mathrm{D}\rangle \in \mathbb{I}$ 但没有 $\langle \{\mathrm{Fo}_1, \mathrm{Fo}_2\}, \mathrm{D}\rangle \in \mathbb{I}$。通过类似于证明 $\forall R$ 时的推理，令 m 为该模型的单元素集，其中包含 $[\![\Delta]\!] = \mathrm{D}$以及 $[\![Fo_1]\!] = \mathrm{Fo}_1$，我们知道$_m$ $_mFo_1 \sim \Delta$，但没有 $\forall xFx \sim \Delta$。■

对于引言中除超经典性（SCL）之外的所有要求，我们现在已经看到，上述一阶蕴涵空间语义都能够满足这些要求。然而，引言中证明这些要求难以同时满足的论证，关键依赖于 SCL。因此，证明 SCL 也能够得到满足十分重要。

4 重建经典一阶逻辑

本节的目标是说明，如何在我上一节提出的蕴涵空间语义中重建一阶逻辑。为此，我将定义一个映射，把标准塔斯基模型论中的模型映射到蕴涵空间语义的模型。随后，我将说明，这一映射保留了各模型作为哪些推理之反例这一性质。接下来，我将刻画与标准塔斯基模型论中的模型相对应的蕴涵空间模型类。要完成这些工作，我首先需要介绍标准塔斯基模型论，并确立一些关于它的事实。

4.1 在塔斯基模型中重新阐释真理

塔斯基模型是一种模型，它可以由与我们的蕴涵空间模型相同的基本构件——对象和属性——构造而成。不过，n元属性被视为对象的n元组的集合，也就是满足该属性的那些元组所组成的集合。

定义 21（塔斯基模型）。 $\mathcal{M}_T = \left\langle \mathbb{O}, [\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}_T} \right\rangle$，即塔斯基模型是由一组对象 $\mathbb{O}$ 和一个解释函数 $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}_T}$ 组成的有序对，该函数将一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的表达式映射为基于 $\mathbb{O}$ 构造的解释项。对于任意非零整数 n，我们有 $\mathbb{O}$ 中所有对象的 n 元组构成的集合，记作 $\mathbb{P}^n$。解释是这样的

即 $\forall a \in \mathrm{A}(\llbracket a \rrbracket \in \mathbb{O})$，且 $\forall F \in \mathrm{P}^n(\llbracket F \rrbracket \in \mathbb{P}^n)$。一个集合的解释就是其元素的解释所构成的集合。

为了表述标准塔斯基模型论的一种版本，我们引入变量赋值，它是从变量到对象的函数，$\mathfrak{V} : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{O}$。变量赋值 $[x/\mathrm{o}]\mathfrak{v}$与变量赋值 $\mathfrak{v}$ 类似，区别在于它将对象 $\mathrm{o} \in \mathbb{O}$ 赋给变量$x \in \mathrm{X}$。我们用 $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathfrak{v}}$ 表示解释函数与变量赋值的组合。带有变量赋值的模型满足公式 ϕ 当且仅当$\llbracket \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$。并且 $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 0$ 当且仅当 $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} \neq 1$。语义子句如下：

- $\llbracket a \rrbracket^{\mathfrak{v}} = \llbracket a \rrbracket$、$\llbracket F \rrbracket^{\mathfrak{v}} = \llbracket F \rrbracket$，以及 $\llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}(x)$。
- $\forall F \nu_1, ..., \nu_i \in$ 在 $\llbracket F \nu_1, ..., \nu_i \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$ 当且仅当 $\langle \llbracket \nu_1 \rrbracket^{\mathfrak{v}}, ..., \llbracket \nu_i \rrbracket^{\mathfrak{v}} \rangle \in \llbracket F \rrbracket^{\mathfrak{v}}$。
- $\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$ 当且仅当 $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$ 并且 $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$。
- $\llbracket \neg \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$当且仅当 $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 0$。
- $\llbracket \forall x_i \phi \rrbracket^{\mathfrak{v}} = 1$ 当且仅当对每个 $\mathrm{o} \in \mathbb{O}$ $\llbracket \phi \rrbracket^{[x_i/\mathrm{o}]\mathfrak{v}} = 1$。

如果一个句子是在某个模型中为真的，那么它就是一个闭公式，且该公式在该模型与空变量赋值的共同作用下得到满足。当然，这一表述属于经典一阶逻辑（不包含同一性或函子，并将条件句、析取和存在量词视为定义项）：$\Gamma \models_{FOL} \Delta$ 当且仅当，在每个使 Γ 中的每个句子都为真的塔斯基模型中，Δ 中的至少一个句子为真。

以一种不太熟悉的方式刻画模型中的真，将有助于实现我们的目的。为此，我引入塔斯基模型中状态这一概念。[9]

[9]可以把这看作一种使我们对塔斯基模型论的表述更接近真值制造者理论的方式；这很有用，因为蕴涵空间语义与真值制造者理论之间已知存在联系。由于篇幅有限，我在此不对这些内在联系作明确说明。

定义 22（状态）。原子状态：对于所有 $P \in \mathbb{P}^n$ 和 $\vec{o} \in \mathbb{O}^n$，有序对$\langle P, \vec{o} \rangle$是一个原子状态。复合状态：如果 Φ 和 Ψ 是状态，那么 $\sim \Phi$、$\Phi \curlywedge \Psi$和 $\prod(o_i)\Phi$也都是状态。

因此，塔斯基模型的原子状态就是基于相同对象和属性构建的蕴涵空间的承担者。我不具体说明复合状态属于哪类对象。如下文所见，这类状态唯一重要之处在于，它们可以按某种方式划分；至于它们属于哪类对象，则无关紧要。

我们可以在状态中用对象互相替换。对于原子状态，对象替换与承担者的替换相同。对于复合状态，替换会“穿透”状态的组合，具体如下。

定义 23（状态中的对象替换，$[\cdot/\cdot]\cdot$）。对于任意原子状态 $P\vec{o}$ 和对象 o_j 与 o_k，$[o_j/o_k]P\vec{o}$ 是这样一种状态：它与 $P\vec{o}$ 相同，只是 o_k 在 $\vec{o}$ 中的所有位置都被o_j 替换。

如果 Φ 是复合状态，那么 (i) $[o_j/o_k](\sim \Phi) = \sim [o_j/o_k]\Phi$，(ii) $[o_j/o_k](\Phi \curlywedge \Psi) = [o_j/o_k]\Phi \curlywedge [o_j/o_k]\Psi$，以及 (iii) $[o_j/o_k](\prod(o_i)\Phi) = \prod(o_i)([o_j/o_k]\Phi)$，若 $k \neq i$；而 $[o_j/o_k](\prod(o_i)\Phi) = (\prod(o_i)\Phi)$，若 $k = i$。

对于一个状态集 A，$[o_j/o_k]A$ 是对所有 $\Phi \in A$ 而言的 $[o_j/o_k]\Phi$ 集合。

现在我们可以递归地将这些状态划分为两个集合，我将其称为 $\hat{}T$ 和 $\hat{}F$。直观地说，$\hat{}T$ 是模型中为真的句子集合，而 $\hat{}F$ 是模型中为假的句子集合。

定义 24（状态的划分、$\langle \hat{}T、\hat{}F \rangle$及其原子基 $\langle \hat{}T_0, \hat{}F_0 \rangle$）。原子基划分：对于原子状态，若 $\vec{o} \in P$，则 $\langle P, \vec{o} \rangle \in \hat{}T_0$。若$\vec{o} \notin P$，则 $\langle P, \vec{o} \rangle \in \hat{}F_0$。对于复合状态，$\hat{}T_0 \subset \hat{}T$，$\hat{}F_0 \subset \hat{}F$，且：(i)$\sim \Phi \in \hat{}T$ 若 $\Phi \in \hat{}F$；而 $\sim \Phi \in \hat{}F$ 若 $\Phi \in \hat{}T$。(ii) $\Phi \curlywedge \Psi \in \hat{}T$ 当且仅当 $\Phi \in \hat{}T$且 $\Psi \in \hat{}T$；而 $\Phi \curlywedge \Psi \in \hat{}F$当且仅当 $\Phi \in \hat{}F$或 $\Psi \in \hat{}F$。(iii) $\prod(o_i)\Phi \in \hat{}T$，若$\forall o \in \mathbb{O}([o/o_i]\Phi \in \hat{}T)$；而 $\prod(o_i)\Phi \in \hat{}F$，若 $\exists o \in \mathbb{O}([o/o_i]\Phi \in \hat{}F)$。

我们可以将解释函数（不包含变量赋值）扩展到复合句子，如下所示：

- $\forall Fa1, ..., a_i \in$ 在句子 $[\![Fa1, ..., a_i]\!] = \langle [\![F]\!], \langle [\![a_1]\!], ..., [\![a_i]\!] \rangle \rangle$。
- $[\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!] \curlywedge [\![\psi]\!]$。
- $[\![\neg \phi]\!] = \sim [\![\phi]\!]$。
- $[\![\forall x_i [x_i/a] \phi]\!] = \prod([\![a]\!])[\![\phi]\!]$.

这使我们能够如下刻画塔斯基模型中的真：

引理25。 χ 在塔斯基模型中为真，$\mathcal{M}_T$，当且仅当在该模型中 $[\![\chi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T$。

证明。只需证明，空变量赋值满足 χ 当且仅当$[\![\chi]\!] \in \hat{}T$，否则满足 $[\![\chi]\!] \in \hat{}F$。我们对 χ 的复杂度进行归纳。χ 是原子句子的基础情形是显然的。

如果 χ 是 $\neg\phi$，那么 $\sim [\![\phi]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$ 当且仅当 $[\![\phi]\!] \in \hat{}\mathrm{F}$。根据归纳假设，这意味着 $[\![\phi]\!]^{\varnothing} = 0$，因此 $[\![\neg\phi]\!]^{\varnothing} = 1$。如果 χ 是 $\phi \wedge \psi$，那么 $[\![\phi \wedge \psi]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$ 当且仅当 $[\![\phi]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$ 且 $[\![\psi]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$。根据归纳假设，这当且仅当 $[\![\phi]\!]^{\varnothing} = 1$ 且 $[\![\psi]\!]^{\varnothing} = 1$，而这当且仅当 $[\![\phi \wedge \psi]\!]^{\varnothing} = 1$。如果 χ 是 $\forall \mathrm{x}_i \phi$，取一个名称 a_j，使其不出现在 χ 中。那么 $[\mathrm{a}_j/\mathrm{x}_i]\phi =_d \mathrm{f}$。$\bar{\phi}$ 与 ϕ 类似，不同之处在于，它是一个句子，其中 ϕ 中所有未绑定的 x_i 都已替换为名称 a_j。我们必须证明 $[\![\forall \mathrm{x}_i \phi]\!]^{\varnothing} = 1$ 当且仅当 $[\![\forall \mathrm{x}_i [\mathrm{x}_i/\mathrm{a}_j] \bar{\phi}]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$。现在，$[\![\forall \mathrm{x}_i \phi]\!]^{\varnothing} = 1$ 当且仅当对每个 $\mathrm{o}, \in \mathcal{O}\, [\![\phi]\!]^{[x_i/\mathrm{o}]\mathfrak{v}} = 1$。根据归纳假设，这当且仅当 $\forall \mathrm{o} \in \mathcal{O}([\circ/\, [\![\mathrm{a}_j]\!]\,][\![\bar{\phi}]\!] \in \hat{}\mathrm{T})$，也就是当且仅当 $\prod([\![\mathrm{a}_j]\!])[\![\bar{\phi}]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$，而这当且仅当 $[\![\forall \mathrm{x}_i [\mathrm{x}_i/\mathrm{a}_j] \bar{\phi}]\!] \in \hat{}\mathrm{T}$。■

这种刻画模型中的真的方式或许显得不必要地复杂。不过，在将塔斯基模型映射到蕴涵空间模型时，这种方式将证明很有用；我将在下一小节进行这种映射。

4.2 将塔斯基模型映射到蕴涵空间模型

本节中，我将介绍一种将塔斯基模型映射到蕴涵空间模型的方法，该方法保留了一个模型会成为哪些推理的反例。通过这种方式，每个塔斯基模型都会被映射为一个蕴涵空间模型，我将其称为该模型的“替代塔斯基模型”。

回顾一下，塔斯基模型和蕴涵空间模型都由一组对象、n元属性（在塔斯基模型中，属性被视为由对象组成的n元组集合）以及一个解释函数构成。我们可以利用这一共同点，将替代塔斯基模型定义如下：

定义 26（替代塔斯基模型）。给定一个塔斯基模型 $\mathcal{M}_T$，其替代塔斯基蕴涵空间模型 $\mathcal{M}_I$ 是满足以下条件的蕴涵空间模型：(i) 两个模型共享相同的对象 $\mathbb{O}$ 和属性 $\mathbb{P}^n$（对所有 n 均如此）；(ii) $\mathbb{I} = \{\langle x, y\rangle \mid x \not\sqsubseteq \hat{}T_0 \vee y \not\sqsubseteq \hat{}F_0\}$；(iii) 两者的解释是平行的，也就是说，对于所有原子句 ϕ，$[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I} = \mathcal{R}([\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T})$。

下面的引理将会派上用场。这个引理背后的直观思想是：真句子在左侧构成反例，假句子在右侧构成反例。

引理27。设 $\mathcal{M}$ 是塔斯基模型 $\mathcal{M}_T$的替代塔斯基蕴涵空间模型，则：若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T$，则 $[\![\Gamma \cup \{\phi\}]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$ 当且仅当 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$；若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F$，则 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta \cup \{\phi\}]\!]^{\mathcal{M}}$ 当且仅当 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$。

证明。由于 $\mathbb{I} = \{\langle x, y\rangle \mid x \not\sqsubseteq \hat{}T_0 \vee y \not\sqsubseteq \hat{}F_0\}$，替代塔斯基模型是单调的。因此，如果 $[\![\Gamma \cup \{\phi\}]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$ 或 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta \cup \{\phi\}]\!]^{\mathcal{M}}$，那么 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$。由此，只需证明：若 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$，则 (i) 若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T$，则 $[\![\Gamma \cup \{\phi\}]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$ 以及 (ii) 若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F$，则 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta \cup \{\phi\}]\!]^{\mathcal{M}}$。因此，假设 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$，即，

$\bigcup(\mathrm{n}_{i=0}^{\bigsqcup}\ \mathrm{g}^{+}\mathrm{i}\ \sqcup\mathrm{m}_{j=0}^{\bigsqcup}\ \mathrm{d}^{-}\mathrm{j})\ \not\subseteq\ \mathbb{I}$ 其中 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}}=\mathbb{G}=\{\mathrm{g}_0,\ldots,\ \mathrm{g}_n\}$ 以及 $[\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}=\mathbb{D}=\{\mathrm{d}_0,\ldots\mathrm{d}_m\}$。由于 $\mathbb{I}=\{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle\mid \mathrm{x}\ \not\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0\vee \mathrm{y}\ \not\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0\}$，我们知道，对于所有 $\langle \mathrm{A}_i、\ \mathrm{B}_i\rangle\in\bigcup(\mathrm{n}_{i=0}^{\bigsqcup}\ \mathrm{g}^{+}\mathrm{i}\ \sqcup\mathrm{m}_{j=0}^{\bigsqcup}\ \mathrm{d}^{-}\mathrm{j})$，都有 $\mathrm{A}_i\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$且 $\mathrm{B}_i\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$，。

回想一下，我们可以用一个角色的并集作为该角色的规范代表。因此，只需证明对于所有 $\langle \mathrm{A}_i,\ \mathrm{B}_i\rangle\in\bigcup(\mathrm{n}_{i=0}^{\bigsqcup}\ \mathrm{g}^{+}\mathrm{i}\ \sqcup\mathrm{m}_{j=0}^{\bigsqcup}\ \mathrm{d}^{-}\mathrm{j})$，(i) 若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}\mathrm{T}$，则 $\{\langle \mathrm{A}_i\cup\mathrm{C},\ \mathrm{B}_i\cup\mathrm{D}\rangle\mid\langle \mathrm{C},\ \mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}\}\not\subseteq\mathbb{I}$；以及 (ii) 若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}\mathrm{F}$，则 $\{\langle \mathrm{A}_i\cup\mathrm{C},\ \mathrm{B}_i\cup\mathrm{D}\rangle\mid\langle \mathrm{C},\ \mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I-}\}\not\subseteq\mathbb{I}$。由于 $\mathbb{I}=\{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle\mid \mathrm{x}\ \not\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0\vee \mathrm{y}\ \not\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0\}$，这意味着：(i) 每当 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}\mathrm{T}$ 时，都存在某些 $\langle \mathrm{C},\mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得 $\mathrm{C}\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$，且 $\mathrm{D}\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$；以及 (ii) 每当 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}\mathrm{F}$ 时，都存在某些$\langle \mathrm{C},\mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得 $\mathrm{C}\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$，且 $\mathrm{D}\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$。现在我们通过对 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}$ 的复杂度作归纳法来论证这一点。请注意，这不是句子的复杂度，而是状态的复杂度；不过还要注意，根据我们现在理解塔斯基模型中真理的新方式，句子的复杂度等于解释该句子的状态的复杂度。

基础情形：我们知道，对于所有原子状态 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}$，以及因此对于原子句 ϕ，有 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I}=\mathcal{R}([\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T})$，从而 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}=\mathcal{R}\left\langle\{[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\}、\ \varnothing\right\rangle$ 和 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I-}=\mathcal{R}\left\langle\varnothing、\ \{[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\}\right\rangle$。由于 $\left\langle\{[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\}、\ \varnothing\right\rangle\in\mathcal{R}\left\langle\{[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\}、\ \varnothing\right\rangle$，我们知道，如果 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}\mathrm{T}$，那么存在 $\exists\langle \mathrm{C}、\mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得 $\mathrm{C}\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$，且 $\mathrm{D}\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$。毕竟，$\{[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\}\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$，且 $\varnothing\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$。类似地，如果 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}\mathrm{F}$，那么存在 $\exists\langle \mathrm{C}、\mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得 $\mathrm{C}\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$，且 $\mathrm{D}\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$。毕竟，$\varnothing\subseteq\hat{}\mathrm{T}_0$，且 $\{[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\}\subseteq\hat{}\mathrm{F}_0$。

归纳步骤：我们的状态 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}$ 可以是 $\sim[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}$、$[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}\curlywedge[\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_T}$ 或 $\prod(\mathrm{o})[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}$ 这种形式。

状态否定：若 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}=\sim[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}$，则存在句子 $\phi=\neg\eta$。于是 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}T$ 当且仅当 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}F$。根据归纳假设，$\exists\langle \mathrm{C},\mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得只要 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}\in\hat{}T$，就有 $\mathrm{C}\subseteq\hat{}T_0$ 且 $\mathrm{D}\subseteq\hat{}F_0$；并且 $\exists\langle \mathrm{C},\mathrm{D}\rangle\in\bigcup[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得只要 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}\in$

$\hat{}F$。但是 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+} = [\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I-}$ 和 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} = [\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}$。因此，$\exists\langle$C, D$\rangle \in \bigcup [\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得只要 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F$，就有 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$；并且$\exists\langle$C, D$\rangle \in \bigcup [\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得只要 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T$，就有 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$。

状态合取：如果 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} = [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \curlywedge [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_T}$，则存在句子$\phi = \eta \wedge \theta$。那么，$[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T 当且仅当 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T 且 $[\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T，否则 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F。根据归纳假设，$\exists\langle$C、D$\rangle \in \bigcup [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得只要 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T，就有 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$；并且 (ii) $\exists\langle$C、D$\rangle \in \bigcup [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得只要 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F，就有 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$；相应的结论对于 θ 也成立。现在，$[\![\eta \wedge \theta]\!]^{\mathcal{M}_I+} = [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+} \sqcup [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$且 $[\![\eta \wedge \theta]\!]^{\mathcal{M}_I-} = [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \sqcap [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \sqcap ($ $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \sqcup [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$)。注意，根据对称合取的定义，$\bigcup [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \subseteq \bigcup [\![\eta \wedge \theta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$。情况 (i)：假设 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T。那么 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T 且 $[\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T。因此，存在一对 $\langle$C、D$\rangle \in \bigcup [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$；并且存在一对 $\langle$ E、F$\rangle \in \bigcup [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得 E $\subseteq \hat{}T_0$ 且 F $\subseteq \hat{}F_0$。由此可得，存在一对 $\langle$C $\cup$ E、D $\cup$F$\rangle \in \bigcup([\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+} \sqcup [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_I+}) = \bigcup [\![\eta \wedge \theta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得 C $\cup$E $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\cup$F $\subseteq \hat{}F_0$。情况 (ii)：假设 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F。那么，要么 $[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F，要么 $[\![\theta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F。不失一般性，假设$[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F。根据归纳假设，$\exists\langle$C、D $\rangle \in \bigcup [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$。由于 $\bigcup [\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \subseteq \bigcup [\![\eta \wedge \theta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，可得$\exists\langle$C、D$\rangle \in \bigcup [\![\eta \wedge \theta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得 C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$。

状态全称概括：如果 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} = \prod(o)[\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}$，则存在句子 ϕ 和 η，使得 $\phi = \forall x_i[x_i/a]\eta$。那么，$[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T 当且仅当 $\forall o \in O([o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T)；而 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F 当且仅当 $\exists o \in O([o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F)。根据归纳假设，对于所有 $[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T}$，我们有 (i)$\exists\langle$C, D$\rangle \in \bigcup[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T+}$，使得只要$[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$T，C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$；以及 (ii) $\exists\langle$C, D$\rangle \in \bigcup[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T-}$，使得只要 $[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}$F，C $\subseteq \hat{}T_0$ 且 D $\subseteq \hat{}F_0$。此外，$[\![\forall x_i[x_i/a]\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+}$ 是 $\bigsqcup\{[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+} \mid o \in O\}$；而 $[\![\forall x_i[x_i/a]\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$ 是$\bigtriangledown\{[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \mid o \in O\}$。

情形（i）：假设 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T$。则 $\forall o \in O([o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T)$。因此，对于每个相应的角色，$\exists\langle$C, D$\rangle \in \bigcup[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T+}$

使得 $C \subseteq \hat{}T_0$ 且 $D \subseteq \hat{}F_0$。将此称为 $[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T+}$ 的反例对，即 $\langle C_o, D_o\rangle$。现在，$\bigcup\bigsqcup\{[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I+} \mid o \in \mathbb{O}\}$包含一对 $\langle C*, D*\rangle = \langle\bigcup\{C_o \mid o \in \mathbb{O}\}, \bigcup\{D_o \mid o \in \mathbb{O}\}\rangle$，也就是说，存在一对，使得对于每个对象，$C*$ 是 $[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T+}$ 的反例对中所有第一元素的并集，而 $D*$ 是 $[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T+}$ 的反例对中所有第二元素的并集。由此可得 $C* \subseteq \hat{}T_0$ 且 $D* \subseteq \hat{}F_0$。因此，存在 $\exists\langle C, D\rangle \in \bigcup[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_I+}$，使得 $C \subseteq \hat{}T_0$ 且 $D \subseteq \hat{}F_0$。

情形（ii）：假设 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F$。那么 $\exists o \in \mathbb{O}([o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F)$。不失一般性，假设 $[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F$。根据归纳假设，存在 $\exists\langle C, D\rangle \in \bigcup[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得 $C \subseteq \hat{}T_0$ 且 $D \subseteq \hat{}F_0$。由于 $\bigcup[o/[\![a]\!]^{\mathcal{M}_T}][\![\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-} \subseteq \bigcup[\![\forall x_i[x_i/a]\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，因此存在 $\exists\langle C, D\rangle \in \bigcup[\![\forall x_i[x_i/a]\eta]\!]^{\mathcal{M}_I-}$，使得 $C \subseteq \hat{}T_0$ 且 $D \subseteq \hat{}F_0$。■

命题28。每个塔斯基模型 $\mathcal{M}_T$ 及其替代塔斯基蕴涵空间模型 $\mathcal{M}_I$，都是同一组推理的反例。

证明。 $\mathcal{M}_T$ 是 $\Gamma \vdash \Delta$ 的反例，当且仅当 Γ 中的每个句子在 $\mathcal{M}_T$ 中都为真，且 Δ 中的每个句子在 $\mathcal{M}_T$中都不为真。根据 $\Gamma \vdash \Delta$中句子的数量进行归纳，由引理25和27可知，$\mathcal{M}_T$ 和 $\mathcal{M}_I$都是推理 $\Gamma \vdash \Delta$ 的反例，当且仅当 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}T$ 且$[\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}_T} \in \hat{}F$。■

这意味着，将每个标准塔斯基模型映射到其替代塔斯基模型，会保留模型集所反驳的推理集。因此，如果我们取所有标准塔斯基模型对应的替代塔斯基模型，就会得到一组蕴涵空间模型；这组模型恰好包含经典一阶逻辑中所有无效推理的反例。

定理29。一个推理在经典一阶逻辑中有效，当且仅当该蕴涵在每个替代塔斯基蕴涵空间模型中都成立。

证明。 替代塔斯基蕴涵空间模型的集合，恰好是满足以下条件的所有模型：存在一个塔斯基模型，恰好反例化同样的推理。■

因此，我们可以在蕴涵空间语义中恢复经典一阶逻辑，方法是让我们据以定义蕴涵的那些模型成为替代塔斯基模型。然而，人们可能会问，我们能否在不诉诸塔斯基模型理论的情况下刻画这组模型。

事实证明，替代塔斯基模型所反驳的推理，恰好是那些同样被在其框架的蕴涵关系中遵守根岑结构规则的模型所反驳的推理；我们可以把这些模型称为结构模型。我们可以这样定义这些模型：

定义 30（结构模型）。一个蕴涵空间模型是结构性的，当且仅当

- （CO，包含／自反性 [带语境]）对所有 $G、D \subseteq \mathbb{B}$，若 $G \cap D \neq \emptyset$，则 $\langle G,D\rangle \in \mathbb{I}$ 且
- （MO，单调性）对所有 $G、D、E、F \subseteq \mathbb{B}$，若 $\langle G, D\rangle \in \mathbb{I}$，则 $\langle G \cup E, D \cup F\rangle \in \mathbb{I}$ 且
- (CUT，传递性) 对所有 $G、D \subseteq \mathbb{B}$ 和 $a \in \mathbb{B}$，若 $\langle G、D\rangle \notin \mathbb{I}$，则 $\langle G \cup \{a\}、D\rangle \notin \mathbb{I}$ 或 $\langle G、D \cup \{a\}\rangle \notin \mathbb{I}$。

现在我将证明，如果m 是所有结构蕴涵空间m模型的集合，那么 $\Gamma \sim \Delta$ 当且仅当 $\Gamma \models_{FOL} \Delta$。只需证明：(a) 每个结构模型在提供反例的能力上等价于一组替代塔斯基模型；并且 (b) 所有替代塔斯基模型都是结构模型。第二部分很容易证明。

引理 31。 所有替代塔斯基蕴涵空间模型都是结构模型。

证明。 根据定义，替代塔斯基模型满足 $\mathbb{I} = \{\langle x,y\rangle \mid x \not\subseteq \hat{}T \vee y \not\subseteq \hat{}F\}$。等价地，$\langle x,y\rangle \notin \mathbb{I}$ 当且仅当 $x \subseteq \hat{}T$ 且 $y \subseteq \hat{}F$。在每个塔斯基模型中，$\hat{}T$ 和 $\hat{}F$ 划分事态。

CO：如果 $G \cap D \neq \emptyset$，那么不可能 $G \subseteq \hat{}T$ 且 $D \subseteq \hat{}F$，因为 $\hat{}T$和 $\hat{}F$ 互不相交。因此 $\langle G,D\rangle \in \mathbb{I}$。

MO：如果 $\langle G, D\rangle \in \mathbb{I}$，那么 $G \not\subseteq \hat{}T$ 或 $D \not\subseteq \hat{}F$。但这样一来，$G \cup E \not\subseteq \hat{}T$ 或 $D \cup F \not\subseteq \hat{}F$。因此，$\langle G \cup E, D \cup F\rangle \in \mathbb{I}$。

CUT：如果 $\langle G, D\rangle \notin \mathbb{I}$，那么 $G \subseteq \hat{}T$ 且 $D \subseteq \hat{}F$。由于 $\hat{}T$ 和 $\hat{}F$ 划分了事态，并且 $a \in \mathbb{B}$（即，a 是一种事态），所以 $a \in \hat{}T$ 或 $a \in \hat{}F$。因此，$G \cup \{a\} \subseteq \hat{}T$ 或 $D \cup \{a\} \subseteq \hat{}F$。于是，$\langle G \cup \{a\}, D\rangle \notin \mathbb{I}$ 或$\langle G, D \cup \{a\}\rangle \notin \mathbb{I}$。■

要建立反方向上的联系，需要做更多工作，因为某些结构模型对应的不是一个，而是一整组替代塔斯基模型。对于熟悉证明论的读者，若要理解以下证明背后的思路，不妨注意：当我们基于序列演算中的根优先证明搜索，为无效推理构造塔斯基反模型时，会找到“可能的”证明树中的一个无效叶节点，其中只包含原子句；我们还会确保左侧的所有原子句在所构造的模型中为真，而右侧的所有原子句为假。随后，CUT 确保我们能够将这一真值赋值扩展到所有原子句。这样，塔斯基模型便对应于不可导序列的“可能的”证明树中的一个叶节点。在蕴涵空间语义中，我们不必从这些叶节点中选出一个；相反，我们可以构造一个模型，同时成为所有这些叶节点的反例。下文构造中的划分树，实际上反映了含有无效叶节点的“可能的”证明树的分支结构。

引理 32. 对于每个结构蕴涵空间模型，都存在一组替代塔斯基模型，使得该蕴涵空间模型恰好是这组模型中某个替代塔斯基模型所反驳的那些推理的反例。

证明. 我们必须证明，对于每个结构蕴涵空间模型$\mathcal{M}$，都存在一组将 $\mathbb{B}$划分为两个集合的划分，$\hat{}T_k$ 和$\hat{}F_k$，使得$\langle x,y\rangle \notin \mathbb{I}$ 当且仅当对于某个替代塔斯基蕴涵空间模型 $\mathcal{M}_k$，$x \subseteq \hat{}T_k$ 且$y \subseteq \hat{}F_k$。（如果我们想纳入一个平凡模型，其中 $\langle\varnothing, \varnothing\rangle \in \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$，那么根据 MO，每个候选蕴涵都是好的。因此，我们可以将所有承载者都放入$\hat{}T$（或全部放入$\hat{}F$），这样就能得到所需的划分。）

划分的构造：我们对所有承载者进行排序（因此使用选择公理），并令所有此类排序的集合为 $\mathfrak{U}$。对于每一种此类排序 $\mathfrak{U}_i$，我们构造一组划分 $\mathfrak{P}_i$，将 $\mathbb{B}$划分为所需的形式，这些划分按以下方式构成一棵树。由于我们知道 $\langle\varnothing,\varnothing\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$，这就是我们在第 0 阶段的起点 $\mathfrak{P}_i = \{\langle\varnothing,\varnothing\rangle\}$。我们依次遍历所有承载者（每次取 $\mathfrak{U}_i$ 中尚未加入划分的承载者里最小的元素）。在第 n 阶段，对于所有 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle \in \mathfrak{P}_i$，我们有 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$。对于下一个承载者 $\mathfrak{b}_{n+1}$，在 $\mathfrak{U}_i$中，我们从 CUT 得知，对于所有 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle \in \mathfrak{P}_i$，以下情形至少有一种成立：$\langle \{\mathfrak{b}_{n+1}\} \cup \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$；或者 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \{\mathfrak{b}_{n+1}\} \cup \hat{}\mathrm{F}_j\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$。在第一种情形下，第 n 阶段的 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle$ 为 $+1$ $\langle \{\mathfrak{b}_{n+1}\} \cup \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle$；在第二种情形下，则为 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \{\mathfrak{b}_{n+1}\} \cup \hat{}\mathrm{F}_j\rangle$。在第三种情形下，$\langle \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle$ 分裂为两对，而第 n 阶段的 $\mathfrak{P}_i$ 包含 $\langle \{\mathfrak{b}_{n+1}\} \cup \hat{}\mathrm{T}j, \hat{}\mathrm{F}_j\rangle$，也包含 $\langle \hat{}\mathrm{T}j, \{\mathfrak{b}_{n+1}\} \cup \hat{}\mathrm{F}_j\rangle$。按照该排序 $\mathfrak{U}_i$ 遍历所有承载者后，这一构造的结果就是划分集合 $\mathfrak{P}_i$。所有排序 $\mathfrak{U}$对应的这些划分集合的并集为 $\mathfrak{P}$。

从划分到替代塔斯基模型：对于所有 $\langle \hat{}\mathrm{T}_k、\hat{}\mathrm{F}_k\rangle \in \mathfrak{P}$，由于我们曾在某个时刻将每个承载者都加入$\hat{}\mathrm{T}_k$ 或$\hat{}\mathrm{F}_k$，因此我们知道这些集合合起来穷尽了 $\mathbb{B}$。并且，由于我们的构造确保了$\langle \hat{}\mathrm{T}_k、\hat{}\mathrm{F}_k\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$，CO 蕴涵$\hat{}\mathrm{T}_k \cap \hat{}\mathrm{F}_k = \varnothing$。所以，我们知道每个$\langle \hat{}\mathrm{T}_k、\hat{}\mathrm{F}_k\rangle \in \mathfrak{P}$ 都是 $\mathbb{B}$的一个划分。与 $\mathcal{M}$ 相似、但满足$\mathbb{I}^{\mathcal{M}_k} = \{\langle \mathrm{x}、\mathrm{y}\rangle \mid \mathrm{x} \not\subseteq \hat{}\mathrm{T}_k \vee \mathrm{y} \not\subseteq \hat{}\mathrm{F}_k\}$ 的模型，是一个替代塔斯基模型，其中$\hat{}\mathrm{T}_k$是在该模型中为真的原子状态，而$\hat{}\mathrm{F}_k$ 是在该模型中不为真的原子状态。因此，对于每个 $\langle \hat{}\mathrm{T}_k、\hat{}\mathrm{F}_k\rangle \in \mathfrak{P}$，我们都有一个替代塔斯基模型 $\mathcal{M}_k$。

注意，$\langle x、y\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$ 当且仅当存在某个 $\langle \hat{}T_k、\hat{}F_k\rangle \in \mathfrak{P}$，使得$x \subseteq \hat{}T_k$且$y \subseteq \hat{}F_k$。毕竟，如果 $\langle x、y\rangle \notin \mathbb{I}^{\mathcal{M}}$，那么我们的构造会在某个时刻将$x$ 和y 的所有元素加入 $\mathfrak{P}$ 中的某一对。因此，如果我们的模型 $\mathcal{M}$ 是某个蕴涵 $\langle x、y\rangle$的反例，那么某个替代塔斯基模型 $\mathcal{M}_k$ 也会是 $\langle x、y\rangle$的反例。由此可知，$\mathcal{M}$ 是某个推理的反例，当且仅当我们的构造中存在一个模型 $\mathcal{M}_k$，它是该推理的反例。■

将这两个引理结合起来，我们可以看到，在所有结构模型中都成立的推理，恰好就是在一阶逻辑中有效的推理。

定理 33. 一个推理在经典一阶逻辑中有效，当且仅当不存在以该推理为反例的结构蕴涵空间模型。换言之，设 m 为所有结构蕴涵空间模型的集合，则 $m\Gamma \sim \Delta$ *iff* $\Gamma \models_{FOL} \Delta$。

证明。根据定理29，一个推理在经典一阶逻辑中有效，当且仅当不存在以该推理为反例的替代塔斯基蕴涵空间模型。根据引理 31，如果存在一个替代塔斯基模型以该推理为反例，那么就存在一个结构模型以该推理为反例。因此，如果该推理在经典逻辑中无效，那么就存在一个结构反例。反过来，根据引理 32，如果存在一个结构模型以该推理为反例，那么就存在一个替代塔斯基模型以该推理为反例。因此，如果存在一个结构反例，那么该推理在经典逻辑中无效。■

这使我们能够刻画那些产生一阶经典逻辑的蕴涵空间模型，而无须诉诸塔斯基模型论中的模型。结构模型集合足以完成这一任务。由于这些模型为所有实质推理提供反例，我们必须将范围限制在这些结构模型的一个子集中，才能使任何实质推理都有效。此外，我们还必须纳入一些模型

这些模型并非结构模型，而且其中的单调性不成立，以使可撤销的实质推理有效。因此，问题随之而来：我们如何使那些能够满足 MOF 及上述其他期望的推理有效，同时又保持后承关系为超经典的?

对这个问题的一般回答，首先要指出，一组蕴涵空间模型的后承关系，是其中所有模型（即这些模型的单元素集合）的后承关系的交集。因此，一组模型的后承关系是超经典的，当且仅当其中每个模型的后承关系都是超经典的。除了所有经典有效的推理之外，一个模型还可能使其他推理有效；对于这些额外的推理，单调性和传递性可能不成立。

在塔斯基模型论中，不会出现类似的情况，因为不存在一个塔斯基模型，能成为所有经典无效推理的反例。然而，在蕴涵空间语义中，确实存在这样的模型。

4.3 一个模型足以处理一阶逻辑

对于给定的语言，存在一个蕴涵空间模型，它能反驳且仅反驳那些在经典一阶逻辑中无效的推理。我称之为典范一阶逻辑模型。

定义34 （典范一阶逻辑蕴涵空间模型，$\mathcal{M}_C$）。对于语言 $\mathfrak{L}$，其典范蕴涵空间模型是这样的蕴涵空间模型： $\mathbb{O}$ 是按字母顺序分配给名称的自然数，$\mathbb{P}$ 是按字母顺序分配给 n 元谓词的自然数 n 元组集合（因此原子句被映射到个体承载者的角色），并且 $\langle \mathrm{G},\mathrm{D}\rangle \in \mathbb{I}$ 当且仅当 $\mathrm{G} \cap \mathrm{D} \neq \emptyset$。

定理35。 $\Gamma \models_{FOL} \Delta$ 当且仅当 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}_C} \mid\!\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}_C}$。

证明。 根据定理 33，我们知道， $\Gamma \not\models_{FOL} \Delta$ 当且仅当存在一个反驳该推理的结构蕴涵空间模型。因此，它

只需证明，$[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}_C} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}_C}$当且仅当存在一个结构蕴涵空间模型 $\mathcal{M}$，使得 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$。 ‖

从右向左：只需证明典范模型是结构模型。(CO) 由典范模型的定义可立即得出：对于所有 $G、D \subseteq \mathbb{B}$，如果 $G \cap D \neq \emptyset$，那么 $\langle G, D\rangle \in \mathbb{I}$。对于 (MO)，注意，对于所有 $G、D、E、F \subseteq \mathbb{B}$，如果 $G \cap D \neq \emptyset$，$(G \cup E) \cap (D \cup F) \neq \emptyset$。对于 (CUT)，注意，对于所有 $G、D \subseteq \mathbb{B}$ 和一个 $a \in \mathbb{B}$，如果 $G \cap D = \emptyset$，那么 $(G \cup \{a\}) \cap D = \emptyset$ 或 $G \cap (D \cup \{a\}) = \emptyset$。

从左向右：设存在一个结构蕴涵空间模型 $\mathcal{M}$，它将所有原子句映射到个体承载者的角色，并且满足 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}}$。令 $\mathcal{M}'$ 与 $\mathcal{M}$ 相同，只是对象为自然数，属性为自然数的 n 元组，并且满足：对于 $\mathfrak{L}$ 中的每个名称，$[\![a]\!]^{\mathcal{M}'} = [\![a]\!]^{\mathcal{M}_C}$；对于 $\mathfrak{L}$ 中的每个谓词，$[\![P]\!]^{\mathcal{M}'} = [\![P]\!]^{\mathcal{M}_C}$。由于 $\mathbb{I}$ 在对元素进行“重新标记”后保持不变，$\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{M}$ 反例见证了完全相同的推理。根据定义，$[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}'} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}'}$ 意味着，在 $\mathcal{M}'$ 中有 $\bigcup(n \bigsqcup_{i=0} g^+ i \sqcup m \bigsqcup_{j=0} d^- j) \not\subseteq \mathbb{I}$，其中 Γ 的元素对应的前提角色为 $g^+ i$，而 Δ 的元素对应的前提角色为 $d^- j$。令 $\langle A, B\rangle \notin \mathbb{I}$ 为 $\mathcal{M}'$ 中 $\bigcup(n \bigsqcup_{i=0} g^+ i \sqcup m \bigsqcup_{j=0} d^- j) \not\subseteq \mathbb{I}$ 的见证。根据结构模型的 (CO)，我们知道，在 $\mathcal{M}'$ 中，对于所有 $G、D \subseteq \mathbb{B}$，如果 $G \cap D \neq \emptyset$，那么 $\langle G, D\rangle \in \mathbb{I}$。因此 $A \cap B = \emptyset$。由于两个模型中所有承载者都满足 $[\![p]\!]^{\mathcal{M}'} = [\![p]\!]^{\mathcal{M}_C}$，$A \cap B = \emptyset$ 在 $\mathcal{M}_C$ 中也成立。因此，$\langle A, B\rangle \notin \mathbb{I}$ 在 $\mathcal{M}_C$ 中成立。此外，由于两个模型中复合句的解释都是由相同的原子句解释以相同方式组合而成，我们知道 $\langle A, B\rangle \in \bigcup(n \bigsqcup_{i=0} g^+ i \sqcup m \bigsqcup_{j=0} d^- j)$ 在 $\mathcal{M}_C$ 中成立。因此，$\bigcup(n \bigsqcup_{i=0} g^+ i \sqcup m \bigsqcup_{j=0} d^- j) \not\subseteq \mathbb{I}$ 在 $\mathcal{M}_C$ 中成立。因此，$[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{M}_C} \not\sim [\![\Delta]\!]^{\mathcal{M}_C}$。■

‖

这意味着，如果我们用来定义后承的所有模型都具有包含典范一阶逻辑模型之蕴涵关系的蕴涵关系，那么我们的后承关系就是超经典的。请注意，我们可以向典范一阶逻辑模型的蕴涵关系中任意添加更多蕴涵

关系。可以按照上述方式选择这些额外的蕴涵，以确保我们的理论遵守 MOF、DDT、析取简化、左合取这些约束，同时不支持规则 $\forall R$ 和$\forall L$。

m定理 36。 存在一组蕴涵空间模型 m，使得 $\sim$ 满足所有约束：*MOF*、*SCL*、*DDT*、*DS*、*LC*，且它为 $\forall R$ 和 $\forall L$ 提供反例。

证明。 考虑一个与 $\mathcal{M}_C$ 类似的模型，但我们在其蕴涵框架的蕴涵关系中添加有序对 $\langle\{\mathrm{Fa}\},\{\mathrm{Gb}\}\rangle \in \mathbb{I}$，其中 a、b、c、d 是互不相同的对象，F、G 是互不相同的属性。具体来说，我们不添加其他任何内容；特别是，既不添加 $\langle\{\mathrm{Fa},\mathrm{Fc}\},\{\mathrm{Gb}\}\rangle$，也不添加$\langle\{\mathrm{Fa}\},\{\mathrm{Gd}\}\rangle$。令 $[\![Fa]\!] = \mathtt{Fa} = \mathcal{R}$(Fa)，Fc、Gb、Gd 也类似。令$m$ 为该模型构成的单元素集合。

根据命题 12，$\mathtt{Fa} \sim \mathtt{Gb}$，但 Fa 和 $\mathtt{Fc} \not\sim \mathtt{Gb}$ 均不成立，也不成立 $\mathtt{Fa} \not\sim \mathtt{Gd}$。因此，$Fa \sim Gb$ 成立，但 Fa、$Fc \sim Gb$ 均不成立，$Fa \sim Gd$也不成立。因此，m 中的蕴涵是非单调的，故 MOF 成立。由于我们只是增加了 $\mathbb{I}$ 的外延，如果我们的模型是某个推理的反例，那么典范一阶逻辑蕴涵空间模型也是该推理的反例。因此，根据定理35，如果 $\Gamma \models_{FOL} \Delta$，$m$，那么 $\Gamma \sim \Delta$。所以，m 中的蕴涵是超经典的，故 SCL 成立。根据命题 19，DDT、析取简化和左合取在所有蕴涵空间模型中均成立。

m m如上文命题 20 所示，由Fa、$Fc \not\sim Gb$ 可推出 $\forall xFx \not\sim_m Gb$。因此，我们得到了 $\forall L$ 的一个反例。同样，由$Fa \not\sim Gd$ 可$_m$推出$Fa \not\sim \forall xGx$。因此，我们得到了 $\forall R$ 的一个反例。■

我们现在已经看到，上文所阐述的蕴涵空间语义能够满足我们的所有预期要求。因此，我们得到了这样一种推理主义语义理论：它既能验证经典一阶逻辑中所有有效的推理，也涵盖实质性推理和可废止推理。这正是本文的目标。

5 结论

本文阐明了如何扩展蕴涵空间语义，使其纳入一阶全称量词。在这一框架下，我们可以对满足以下条件的后承关系进行建模：非单调（MOF）、超经典（SCL）、遵循演绎脱离定理（DDT）和析取消去（DS），且合取在左侧以乘法方式起作用（LC）。由于这样的理论满足 MOF、SCL 和 DDT，乘法切割规则必定在其中失效。又由于它满足 MOF、DS 和 LC，它必定是超内涵的。我所阐述的蕴涵空间语义版本具备所有这些属性（前提是适当选择模型集合）。

据我所知，现存的理论中没有一种具备这一组属性；而蕴涵空间语义的倡导者基于哲学理由要求具备的，正是这些属性。我没有探讨蕴涵空间语义的倡导者接受那些要求语义理论具备这一组属性的哲学观点是否正确。相反，我提出了一种具备这些属性的语义理论，并希望它能帮助我们更清楚地理解和评估其背后的哲学动机。

参考文献

Arieli, O. 和 Avron, A.（2000年）。非单调推理的一般模式：从基本蕴涵到合理关系。*IGPL*逻辑期刊，8(2):119–148。Brandom, R. B.（1994）。《使之明确：推理、表征与话语承诺》。哈佛大学出版社，马萨诸塞州剑桥。Brandom, R. B.（2000）。《阐明理由：推论主义导论》。哈佛大学出版社，马萨诸塞州剑桥。

Brandom, R. B.（2008）。《言说与行动之间：走向分析实用主义》。牛津大学出版社，牛津。Cobreros, P.、Egré, P.、Ripley, D. 和 van Rooij, R.（2012年）。宽容、经典、严格。《哲学逻辑杂志》，41(2):347–385。Fine, K.（1975年）。对 Lewis《反事实》的书评。《心灵》，84(335):451–458。Girard, J.-Y.（1987）。线性逻辑。《理论计算机科学》，50(1):1–101。Hlobil, U. 和 Brandom, R.（2024年）。《逻辑的理由，理由的逻辑：语用学、语义学与概念角色》。劳特利奇出版社，纽约。Kaplan, D.（2022年）。《子结构内容》。博士论文，匹兹堡大学，美国。匹兹堡大学，美国；在线地址：http://d- scholarship.pitt.edu/42065/。Peregrin, J.（2025年）。逻辑常项的组合性与推理角色。《*Topoi*》。Restall, G.（2005）。多重结论。载于 Hájek, P.、Valdés-Villanueva, L. 和 Westerstaahl, D. 编，《逻辑、方法论与科学哲学》。College Publications。Steinberger, F.（2011年）。为什么结论应保持单一。《哲学逻辑杂志》，40(3):333–355。