arXiv:2602.13914v1 [cs.LO] 14 Feb 2026

共同知识，永远如此

Martín Diéguez昂热大学
martin.dieguezlodeiro@univ-angers.fr

David Férnandez-Duque哲学系，巴塞罗那大学fernandez-duque@ub.edu

摘要

近年来，人们对认知逻辑的拓扑语义日益关注；事实证明，这种语义有助于建模证据、信念度和自指等问题。我们引入一种能够表达共同知识及其各种推广形式的多拓扑命题动态逻辑，并证明它在闭包空间上具有有限模型性质，但在康托尔导出空间上不具有有限模型性质。后一个结论通过嵌入一种带有“过去”算子的线性时序逻辑版本来证明；该逻辑不具有有限模型性质。

1 引言

毫不夸张地说，Andreas Herzig 深刻影响了许多年轻研究者的职业生涯，作者也不例外；我们在图卢兹期间，深受他的影响。他堪称真正意义上的导师，不仅在技术问题上给予指导，也分享了关于人生和职业选择的宝贵见解。在那里度过的两年里，我们有幸围绕广泛的科学主题进行深入交流，并建立了长久的友谊。

本研究部分由项目 PID2023-149556NB-I00（西班牙科学与创新部）和项目 CTASP（法国卢瓦尔河地区的 étoiles montantes）资助。

因此，值此他 65岁生日之际，能为这本文集撰稿，我们深感荣幸。将共同知识 [19] 和命题动态逻辑 [1], 这两个与 Andreas 兴趣密切相关的主题，与作者及合作者在动态逻辑的拓扑解释 [10]方面的最新进展结合起来，也顺理成章。

事实上，拓扑语义比 Kripke 语义出现得更早，可以追溯到 McKinsey 和 Tarski [20]。将模态 $\Diamond$ 解释为拓扑闭包、将模态 $\Box$解释为拓扑内部，就可以得到模态逻辑 S4 及其扩展的语义，从而推广了基于传递且自反框架的 Kripke 语义。该语义下所有拓扑空间的逻辑都是 S4； [8] 提供了一个很好的概述。

McKinsey 和 Tarski 还提出了第二种拓扑语义，即将模态 $\Diamond$ 解释为康托尔导数；回想一下，集合 A 的导数 $d(A)$由 A的所有极限点组成。Esakia[13, 14] 证明，所有拓扑空间的导集逻辑都是模态逻辑 wK4 $=$ K $+ (\Diamond\Diamond p \to \Diamond p \vee p)$。这同时也是所有弱传递框架的模态逻辑，也就是说，这些框架的可及关系的自反闭包是传递的。众所周知，传递框架的模态逻辑是 K4 [9, 11], ，此外它对应于一类自然的拓扑空间，记作 T_D。

有人提出，拓扑是对认知态度进行建模的自然框架 [2, 6, 7, 5]。本文提出了这一框架的多主体扩展，并引入 PDL 式算子，以形成协作知识运算，包括但不限于共同知识。我们证明，在这一框架中那些理解得更为透彻的变体下，所得逻辑是可判定的；但当将多个智能体与康托尔导数结合起来时，情况可能会变得棘手。

布局 在第2节中，我们介绍导数空间的定义。在第3节中，我们介绍拓扑 PDL 的句法和语义。在第4节中，我们证明，对于两类特定的导数空间——拓扑闭包类和拓扑导数空间类——拓扑 PDL 的有效性问题是可判定的。在第5节中，我们证明一般情况下，拓扑 PDL 不具备有限模型性质（FMP）。为此，我们证明

可以将带过去时的 LTL（它不具备有限模型性质）嵌入拓扑 PDL。最后，我们以一些总结性评论结束本文。

2 导数空间

尽管本文主要关注拓扑空间上的 PDL，但出于技术原因，考虑一类稍微更一般的结构是有益的，这将使我们能够统一拓扑语义学和克里普克语义学。

定义 2.1。 一个导数空间 是一个二元组$(X、 d)$，其中 X 是一个由“点”组成的集合，而 d： $2^X \to 2^X$ 是定义在 X的子集上的算子，并且对所有 $A、 B \subseteq X$ 满足以下性质：

- $d(\varnothing) = \varnothing$;
- $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$;
- $d(d(A)) \subseteq A \cup d(A)$。

  上述前两个条件的合取称为正规性，而第三个条件称为弱幂等性。

导数空间的概念是更抽象的导数代数概念在具体集合论中的体现，该概念由 Esakia [14] 提出（推广了 McKinsey 和 Tarski [20]提出的同名概念）。

导数空间的主要例子来自拓扑空间，即形如 $(X，\mathcal{T})$ 的二元组，其中$\mathcal{T}$是 X 的一个子集族，称为开集，满足 $\varnothing，\ X \in \mathcal{T}$，且$\mathcal{T}$对任意并和有限交封闭。若 $x \in U \in \mathcal{T}$，则称 U 是 x的一个邻域，并将 x 的邻域集合记作$\mathcal{N}(x)$。开集的补集称为闭集。通常，拓扑$\mathcal{T}$用基来描述；基是由开集组成的集合$\mathcal{B}$，满足：每当 U 是 x的一个邻域时，就存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得$x \in B \subseteq U$。

例 2.2 (拓扑闭包空间)。 导数空间的一种特殊情形是闭包空间：它们是满足以下条件的导数空间(X, c) ：

此外还满足 $A \subseteq c(A)$ （并且，当然， $c(c(A)) \subseteq c(A)$），对每个$A \subseteq X$都成立。这些强化条件称为库拉托夫斯基公理，它们用闭包算子来定义拓扑空间。

给定一个闭包空间，当 $A \subseteq X$ 是闭集时， $A = c(A)$，当其补集为闭集时，则称其为开集。由此便得到上文定义的拓扑空间。反过来， X 上的每个拓扑 T 都会导出一个算子 c_T，其中 $c_T(A)$ 是由所有满足以下条件的 $x \in X$ 组成的集合：对于 x的每个邻域 U， $A \cap U \neq \varnothing$。这两个运算互为逆运算，因此闭包空间与拓扑空间实际上是同一种概念。

将拓扑空间视为导数空间的一个特例，其中 $d(A){:=}c(A)$ 由拓扑闭包给出时，拓扑空间称为拓扑闭包空间。

例 2.3 (拓扑导数空间**)**。 导数空间的典型例子是结构(X, d)，它以底层拓扑空间(X,T)为基础，但其导出算子由所谓的康托尔导数给出，即令 $d(A)$ 为 A的极限点集：

$$\begin{aligned} d_T(A) &:= \{y \in X : y \in c_T(A - \{y\})\} \\ &= \{y \in X : \forall U \in \mathcal{N}(y)\ A \cap (U - \{y\}) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

不难证明，(X, d_T) 是一个导数空间，我们将其称为拓扑导数空间。闭包算子可以恢复为 $c_T(A) = A \cup d_T(A)$。

根据上下文可以明确时，我们可以省略下标T，将 c,d 写作 c_T, d_T。然而，并非每个导数空间都具有这种形式；另一大类例子来自克里普克框架。

例 2.4 （弱传递克里普克框架）。 弱传递框架（或 *wK4* 框架）是一种克里普克结构（$W, \sqsubset$），由一组“状态”（或“可能世界”） W以及二元关系 $\sqsubset \subseteq W \times W$ （称为“可达”或“转移”关系）组成，并假设该关系弱传递：也就是说，对于所有状态 $w, s, t \in W$，如果 $w \sqsubset s \sqsubset t$ 那么 $w \sqsubset t$。给定 $A \subseteq W$，令 $A{\downarrow} := \{w \in W : \ \exists s\, w \sqsubset s \in A\}$，并令 $A{\Downarrow} := \{w \in W : \ \exists s\, w \sqsubseteq s \in A\}$。

如果 $w \sqsubseteq v \sqsubseteq w$，我们记作 $w \sim v$。容易看出，每个弱传递框架都会产生一个导数空间（$W, d_{\sqsubset}$），其导数 $d_{\sqsubset}$ 取为通常的模态“菱形”算子：

$$d_{\sqsubset}(A) := A{\downarrow} = \{w \in W : \exists s\, w \sqsubset s \in A\}.$$

此外，诱导闭包 $c_{\sqsubset}(A)$（如上在任意导数空间中所定义）由 $c_{\sqsubset}(A) = A \cup d_{\sqsubset}(A)$给出。

一般而言，弱传递框架并非拓扑导数空间。但这两类的交集具有独立的研究价值，如下面两个例子所示：

例2.5（Alexandroff闭包空间作为S4 克里普克框架）。拓扑空间$X = (X, T)$ 是 Alexandroff 的，若其闭包算子对任意并可分配：$c(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i c(A_i)$。给定 x、$y \in X$，若 $x \in c\{y\}$则定义$x \sqsubset y$。于是，$\sqsubset$ 是自反且传递的，并且可以验证：若X是*Alexandroff*的，则此时关系导数与拓扑闭包重合：$d_{\sqsubset} = c$。众所周知，反之亦然：每个S4 框架$(X, \sqsubset)$ 都通过令 $c_{\sqsubset}(A) := A{\downarrow} = A{\Downarrow}$ 为闭包/导出算子而给出一个*Alexandroff*闭包空间。因此，*Alexandroff*闭包空间可等同于S4 克里普克框架。

例 2.6（Alexandroff 导数空间作为非自反 wK4 框架）。将 *Alexandroff* 空间（X、T）转换为关系结构的另一种方法是：对所有 x、$y \in X$，定义 $x \sqsubset y$ 当且仅当 $x \in d\{y\} = c\{y\} - \{y\}$。于是，$\sqsubset$ 是弱传递且非自反的，并且在此情形下，关系导数$d_{\sqsubset}$ 与由 T 诱导的康托尔导数重合。反过来，每个非自反 wK4 框架（X、$\sqsubset$）都会产生一个 *Alexandroff* 导数空间（X、$d_{\sqsubset}$）。因此，*Alexandroff* 拓扑导数空间本质上等同于非自反wK4 框架。

并非每个弱传递框架都是非自反的，但众所周知，每个弱传递框架都是某个非自反弱传递框架的 p-态射像，而后者至多拥有其两倍数量的点（参见例如 [3]）。

在这里，我们可以问：作为认识逻辑传统基础的 S5，是否也可以视为一种拓扑逻辑。事实上确实如此，不过我们必须考虑一类受限的空间。

例 2.7 (单子空间)。 如果 x 是 *Alexandroff* 空间中的一个点，那么 x 有一个最小邻域 U （即其所有邻域的交集），但 U 本身可能包含更小的非空开集，尽管这些开集不包含 x。如果情况并非如此，即如果 $U \neq \varnothing$ ，且不存在开集 $U\prime$使得 $\varnothing \subsetneq U' \subsetneq U$，我们就称 U 为一个原子开集。大多数拓扑空间（包括许多 *Alexandroff* 空间）都不含原子开集，但**单子空间**是一类特殊的 *Alexandroff* 空间，其基由原子开集构成。或者说，这类空间也可以用如下性质来刻画：每个开集都是闭集。不过，通过它们的关系表示来理解会更为直观；在这种表示中， $\sqsubset$ 是一个等价关系，因此我们也可以将其写作 $\sim$；换句话说，单子空间基本上就是 S5 框架。和其他空间一样，这些空间也可以配备闭包算子或康托尔导出算子，从而得到两个导数空间。

3 句法与语义

我们的目标是考察拓扑模态逻辑的多主体扩展。为了刻画共同知识等概念，我们采用类似 PDL 的句法，其语言如下$\mathcal{L}^*$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi, \psi & := & p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle\alpha\rangle\varphi \\ \alpha, \beta & := & a \mid \alpha;\beta \mid \alpha \cup \beta \mid \alpha^* \end{array}$$

这里， p取自集合 $\mathbb{P}$ 中的原子命题，而 a取自集合 $\mathbb{A}$中的“智能体”。运算 $\alpha;\beta$ 表示复合， $\alpha \cup \beta$ 表示并，$\cdot^*$表示迭代。请注意，我们仅将原子程序视为智能体；复杂程序可以看作通信任务或知识的聚合概念。共同知识就是一个经典例子，它可以定义为 $C_{a_1 \ldots a_n}\varphi = [(a_1 \cup \ldots \cup a_n)^*]\varphi$。

对于语义，每个智能体 a都在某个集合 X上赋予一个导出算子 d_a 。结构 $(X, (d_a)_{a\in\mathbb{A}})$ 是一个多导出空间，我们沿用单智能体情形中的术语，例如，多拓扑闭包空间指每个 d_a 都是某个拓扑$\mathcal{T}_a$ 在 X 上的闭包算子的空间（此时，我们可以写作 c_a 而非 d_a）。如果算子 d_a 是某个拓扑$\mathcal{T}_a$的闭包算子或导出算子，我们就称后者中的元素为 a-开集。

然后，我们通过归纳法为每个程序指定一个算子 $[\![\alpha]\!]\colon 2^X \to 2^X$，如下所示：

- $[\![a]\!](Y) = d_a(Y)$
- $[\![\alpha;\beta]\!](Y) = [\![\alpha]\!]([\![\beta]\!](Y))$
- $[\![\alpha \cup \beta]\!](Y) = [\![\alpha]\!](Y) \cup [\![\beta]\!](Y)$
- $[\![\alpha^*]\!](Y) = \bigcap\{Z\colon [\![\alpha]\!](Z) \cup Y \subseteq Z\}$.

一个多导数模型 是一个结构$\mathcal{M} = (X,(d_a)_{a\in\mathbb{A}},[\![\cdot]\!])$，由一个配备赋值 $[\![\cdot]\!]\colon \mathbb{P} \to 2^X$的多导出空间构成。公式 φ的真值集 $[\![\varphi]\!]$ 随后按通常方式定义，其中$[\![\langle\alpha\rangle\varphi]\!] = [\![\alpha]\!]([\![\varphi]\!])$。照例，若 $x \in [\![\varphi]\!]$，我们记作$(\mathcal{M}, x) \models \varphi$。

注意，$[\![\alpha^*]\!](Y)$ 是 Y 的最小超集，且在 $[\![\alpha]\!]$ 下是不动点。在关系结构中，这将得到通常的传递闭包；但在拓扑集合的情形下，这些算子可能更为复杂。特别地，$x \in [\![C_{a_1\ldots a_n}\varphi]\!]$ 当且仅当存在一个在所有拓扑 $\mathcal{T}^{a_i}$ 中都开且满足 $x \in U$ [21]的 $U \subseteq [\![\varphi]\!]$。

4 可判定性结果

只要我们将注意力限制在“行为良好”的导数空间上，拓扑 PDL 就可以嵌入标准 PDL，因此也继承了它的一些良好性质。回想一下，如果存在一个可计算函数 f，使得任意可满足公式 φ 都能在大小至多为 $f(|\varphi|)$ 的模型中得到满足，那么一种逻辑就具有有效有限模型性质；其中 $|\varphi|$ 是 φ 的长度。只要模型检验问题是可判定的，这就意味着有效性问题也是可判定的，因为只需搜索一个大小至多为 $f(|\neg\varphi|)$、满足 $\neg\varphi$ 的模型即可。

定理 4.1. *L^* 在闭包空间类上具有有效有限模型性质，因此该类的有效性问题是可判定的。*

证明思路。我们采用一个众所周知的技巧，将 S4 嵌入 PDL（例如参见 [16]）。给定一个公式 φ，通过将每个原子程序 a 替换为 a^*，定义 φ^*。例如，若 $\varphi = \langle(a \cup b)^*\rangle q$，则 $\varphi^* = \langle(a^* \cup b^*)^*\rangle q$。于是，对于一个 Kripke 模型 $\mathcal{M} = (W, (R_a)_{a\in\mathbb{A}}, [\![\cdot]\!])$

以及 $w \in W$，很容易验证，$(\mathcal{M}\ w) \models \varphi^*$ 当且仅当 $(\mathcal{M}^*,\ w) \models \varphi$，其中 $\mathcal{M}^* = (W,\ (R_a^*)_{a\in\mathbb{A}},\ [\![\cdot]\!]$；也就是说，所有可及关系都替换为其传递自反闭包。此外，我们还可以验证，对于任意多拓扑闭包模型 $\mathcal{X} = (X,\ (c_a)_{a\in\mathbb{A}},\ [\![\cdot]\!]$ 以及 $x \in X$，$(\mathcal{X}\ x) \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathcal{X}\ x) \models \varphi^*$，基本上是因为 $c_a = c_a c_a$ 在任意闭包空间上都成立，因此在 $c_a^* = c_a$ 上也成立。

现在，假设 φ 在某个多拓扑闭包模型 $\mathcal{X}$ 上成立。那么 φ^* 也同样成立。通过检视 PDL 的任一标准公理化（参见例如 [17, 第 10]章），我们看到所有公理和规则对于多拓扑空间类都是可靠的，因此 φ^* 是一致的。由 PDL 的 Kripke 完备性和有限模型性质，φ^* 在某个有限模型 $\mathcal{M}$ 上成立，从而 φ 在 $\mathcal{M}^*$ 上成立，正如所需。 □

逻辑 wK4 不能以这种方式处理，因为弱传递闭包在 PDL 中不可定义。不过，我们可以处理 T_D 空间的康托尔导数，但需注意我们不再得到真正的有限模型性质。回想一下，T_D 空间是那些使 $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ 有效的空间，即那些使 K4 有效的空间。

定理 4.2。L^* 在 T_D 拓扑导数空间类上的有效性问题是可判定的。

证明概要。我们沿用上述方法，但改用 φ^+，它将 a 替换为其传递（但非自反）闭包 a^+，从而证明：φ 可满足，当且仅当它在一个有效有界的 K4 多关系 Kripke 模型 $\mathcal{M} = (W, (\sqsubset_a)_{a\in\mathbb{A}}, [\![\cdot]\!])$ 上得到满足。

注意，$\mathcal{M}$可能不是非自反的，因此不对应某个拓扑导数空间；不过，通过标准的树展开（例如参见 [11]），我们可以得到一个与之双模拟的自反非循环框架。具体而言，我们得到一个新模型 $\mathcal{M}^+ = (W^+, (\sqsubset_a^+)_{a\in\mathbb{A}}, [\![\cdot]\!]^+)$，其中 W^+是由 W中的元素构成的非空序列集合，$\ell(\vec{w})$表示 $\vec{w}$的最后一个元素。我们规定，$\vec{w} \sqsubset_a^+ \vec{v}$ 当且仅当 $\vec{w}$ 是 $\vec{v}$的真初始片段；$\vec{w} \in [\![p]\!]^+$ 当且仅当$\ell(\vec{w}) \in [\![p]\!]$。容易验证，对所有 a，$\sqsubset_a^+$都是传递且非自反的，因此在 W^+上生成一个 T_D拓扑，并且 $\ell\colon W^+ \to W$是一个满射 p-态射。

□

5 嵌入线性时序逻辑

我们的逻辑在拓扑空间上不具有有限模型性质，这并不令人意外，因为单智能体 K4 已经如此；甚至公式 $\Diamond\top \wedge \Box\Diamond\top$ 也没有有限的 T_D 拓扑导数模型。不过，我们可以通过允许传递 Kripke 模型来解决这个问题；这类模型具有有限模型性质，并且能导出相同的逻辑。从某种意义上说，对于所有拓扑导数空间组成的类，情况甚至更简单：它们的逻辑 wK4 也具有有限模型性质；又因为每个有限弱传递框架都与某个有限、非自反、弱传递框架双模拟，所以对于“真正的”拓扑导数空间这一类，有限模型性质同样成立。此外，完整的 μ-演算在这一类上也具有有限模型性质 [3]。因此，自然会问：这对我们的多拓扑命题动态逻辑是否仍然成立?

答案是否定的。为了证明拓扑导数 PDL 一般不具有有限模型性质，我们展示了带过去时的 LTL（PLTL）的一个版本的嵌入，而该版本不具有有限模型性质。我们首先介绍这个版本 PLTL 的句法和语义。其语言 $\mathcal{L}^{\mathsf{PLTL}}$ 由以下 BNF 文法给出

$$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \mathsf{X}\varphi \mid \mathsf{Y}\varphi \mid \mathsf{F}\varphi \mid \mathsf{P}\varphi,$$

其中，p 属于命题变量集合 $\mathbb{P}$。这里，X 读作“下一个”，Y 读作“昨天”，$\mathsf{F}\varphi$ 读作“未来”，$\mathsf{P}\varphi$ 读作“过去”。

我们特别关注过去与未来均无界且线性的结构，这迫使转移关系成为双射函数。因此，双射框架 是结构 $\mathcal{F} = (X, S)$，其中 $S : X \to X$ 为双射。我们用 S^{-1} 表示 S 的逆 函数。按标准方式，给定 $w \in X$，我们定义 $S^0(w) = w$，并且对所有 $k \geq 0$，$S^{k+1}(w) = S(S^k(w))$（相应地，$S^{-(k+1)}(w) = S^{-1}(S^{-k}(w))$）。PLTL 模型是元组 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}\ V\rangle$，其中 $\mathcal{F}$ 是双射框架，且 $[\![\cdot]\!] : \mathbb{P} \to 2^X$ 是赋值。时态公式 φ 在 $w \in X$ 处的满足 递归定义如下

1. $(\mathcal{M}, w) \models p$ iff $w \in [\![p]\!]$;
2. $(\mathcal{M}, w) \models \neg\varphi$ iff $(\mathcal{M}, w) \not\models \varphi$;

3. $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ 且 $(\mathfrak{M}, w) \models \psi$；4. $(\mathfrak{M}, w) \models \mathsf{X}\varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}, S(w)) \models \varphi$；5. $(\mathfrak{M}, w) \models \mathsf{Y}\varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}, S^{-1}(w)) \models \varphi$；6. $(\mathfrak{M}, w) \models \mathsf{F}\varphi$ 当且仅当存在 $k \geq 0$ 使得 $(\mathfrak{M}, S^{k}(w)) \models \varphi$；7. $(\mathfrak{M}, w) \models \mathsf{P}\varphi$ 当且仅当存在 $k \geq 0$ 使得 $(\mathfrak{M}, S^{-k}(w)) \models \varphi$。

我们也可以写作 $w \in [\![\varphi]\!]$ if $(\mathcal{M}, w) \models \varphi$。双射框架是解释 $\mathcal{L}^{\mathsf{PLTL}}$ 的一种自然结构类别，因为其逻辑就是 $\mathbb{Z}$ （例如在 [12] 中有研究）。要使逻辑在交换“过去”和“未来”时保持不变，就需要双射，因为在这种情况下， S 和S^{-1} 都是函数。然而，对于这一类框架，$\mathcal{L}^{\mathsf{PLTL}}$ 不具有有限模型性质。

引理 5.1. L^{PLTL} 在双射框架类中不具有有限模型性质。

证明。 考虑公式 $\varphi = \mathsf{F}q \wedge \neg \mathsf{P}q$。我们将证明，$\varphi$ 在一个无限（双射）模型中可满足，但在有限双射模型类中不可满足。

为考察满足性，我们考虑一个模型 $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, S, [\![\cdot]\!])$，其中 $S(x) = x + 1$ 且 $[\![q]\!] = \{1\}$。于是很容易看出 $(\mathcal{M}, 0) \models \mathsf{F}q \wedge \neg \mathsf{P}q$。

现在，假设$\mathcal{M} = (X, S, [\![\cdot]\!])$是一个有限双射模型，并固定 $x_0 \in X$。由于 S 是一个双射且 X 是有限的，必定存在 $n > 0$使得 $S^n(x_0) = x_0$。如果 x_0 满足 φ，那么（$\mathcal{M}, x_0$） $\models \mathsf{F}q$，这意味着存在某个 k使得（$\mathcal{M}, S^k(x_0)$) $\models \mathsf{F}q$；我们可以取 $k < n$，否则就可以用 $k - n$ 替换 k。但是，（$\mathcal{M}, S^{k-n}(x_0)$) $\models q$和$k - n < 0$，这证明了（$\mathcal{M}, x_0$） $\models \mathsf{P}q$：矛盾。 □

设 a, b 为智能体（爱丽丝和鲍勃），并设 $\mathtt{whole}$ 为一个指定原子。对于 $\iota \in \{a, b\}$，定义一个公式

$$\begin{aligned} \mathtt{Two}_\iota \quad := \quad & ((\mathtt{whole} \to ([\iota]\neg\mathtt{whole} \wedge \langle\iota\rangle\neg\mathtt{whole})) \\ & \wedge(\neg\mathtt{whole} \to ([\iota]\mathtt{whole} \wedge \langle\iota\rangle\mathtt{whole}))). \end{aligned}$$

接着令 $\mathtt{Two} := \mathtt{Two}_a \wedge \mathtt{Two}_b$。

给定公式 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^*$，假设 $\varphi \wedge C_{ab}\psi$ 在某个点 $x_0 \in X$ 上被满足，其中 φ 是一个公式，且其中仅出现主体 a 和

b可以出现。然后，根据共同知识的拓扑刻画，$[\![C_{ab}\psi]\!]$既是 a-开集又是 b-开集，因此若令$\mathcal{M}' = (X', d'_a, d'_b, [\![\cdot]\!]')$为$\mathcal{M}$ 到 $[\![C_{ab}\psi]\!]$的限制，其意义是$X' = [\![C_{ab}\psi]\!]$，$d'_\iota(Y) = d_\iota(Y \cap X') \cap X'$ 且 $[\![p]\!]' = [\![p]\!] \cap X'$。我们还看到 $(\mathcal{M}', x_0) \models \varphi$，并且$\mathcal{M}' \models \psi$；此处我们使用了一个众所周知的事实，即将模型限制到一个开子集会保持公式的真值 [15]。换言之，$\varphi \wedge C_{ab}\psi$ 的可满足性等价于在验证 ψ的模型类上 φ 的可满足性。

我们的归约将针对形如 $\varphi \wedge C_{ab}\texttt{Two}$ 的公式，因此我们可以在验证 $\texttt{Two}$ 的模型上进行研究。接下来，我们固定一个双拓扑模型 $\mathcal{M} = (X, d_a, d_b, [\![\cdot]\!])$，使得 $\mathcal{M} \models \texttt{Two}$；模型中也可以包含其他智能体，但我们将研究仅涉及 a 和 b 的公式，而其他智能体的导出算子不会影响这些公式。不过，我们的结果确实要求至少有两个智能体。对于$\iota \in \{a, b\}$，若 x, y 对 T_ι 而言无法区分，即二者对于 ι 恰好属于相同的开集，则我们定义 $x \sim_\iota y$。

引理 5.2. *对于 $\iota \in \{a, b\}$ 和 $x \in X$，存在唯一的 $y := S_\iota(x)$，使得 $y \neq x$，且 $\{x, y\}$ 是一个原子 ι-邻域。*

证明。 固定 $x \in X$ 和 $\iota \in \{a, b\}$。注意，这样的 y的唯一性显然成立，因为 $\{x, y\}$ 和 $\{x, y'\}$ 都是原子的，这意味着 $y = y'$，因此只需证明其存在。

假设 $x \in [\![\texttt{whole}]\!]$；$x \notin [\![\texttt{whole}]\!]$ 的情形是对称的。那么，x满足 $[\iota]\neg\texttt{whole} \wedge \langle\iota\rangle\neg\texttt{whole}$，因此 x有一个 ι-邻域U，其中除 x 外的每个点都满足 $\neg\texttt{whole}$；此外，U 至少包含一个满足 $\neg\texttt{whole}$的点 y。

由于 y 也满足 $\texttt{Two}_\iota$，y 也必定有一个邻域 U'，其中除 y外的每个点都满足 $\texttt{whole}$。现在考虑 $U'' = U \cap U\iota$；U''是 y的一个邻域，因此至少有一个点满足 $\texttt{whole}$，但它是 U的子集，所以唯一可用的这样的点是 x，因此 $x \in U''$。由于 U''中除 x外没有点满足 $\texttt{whole}$，且 U''中除 y外没有点满足 $\neg\texttt{whole}$，所以必有 $U'' = \{x, y\}$。最后注意，U'' 没有非空真开子集，因为这会导致 $\langle\iota\rangle\texttt{whole}$ 或 $\langle\iota\rangle\neg\texttt{whole}$ 分别在相应的点处不成立。因此 y 具备所有所需性质。

□

注意，S_ι^2是恒等映射，因为这些条件关于 x 是对称的

且 y，所以 S_ι 是双射。由此我们得到以下结论。

引理 5.3. 函数 S_a、S_b：$X \to X$ 是双射，$S := S_b \circ S_a$ 也是双射。

据此，我们可以如下定义翻译 $\cdot^{\mathrm{top}}$：$\mathcal{L}^{\mathsf{PLTL}} \to \mathcal{L}^*$：

- $(\mathsf{X}\varphi)^{\text{真}} = \langle a;b\rangle \varphi^{\text{真}}$
- $(\mathsf{Y}\varphi)^{\text{真}} = \langle b;a\rangle \varphi^{\text{真}}$
- $(\mathsf{F}\varphi)^{\text{真}} = \langle (a;b)^*\rangle \varphi^{\text{真}}$
- $(\mathsf{P}\varphi)^{\text{顶部}} = \langle (b;a)^*\rangle \varphi^{\text{顶部}}$

并令 $\cdot^{\mathrm{top}}$ 固定原子命题，并与布尔运算交换。

引理 5.4. 设 $M = (X, d_a, d_b, [\![\cdot]\!])$ 是一个导数模型，且 $M \models \mathtt{Two}$。令 $S := S_b \circ S_a$，并定义 $M^{\mathsf{PLTL}} := (X, S, [\![\cdot]\!])$。
Then, for any $x \in X$, $(\mathcal{M}, x) \models \varphi^{\mathrm{top}}$ *iff* $(\mathcal{M}^{\mathsf{PLTL}}, x) \models \varphi$.

证明。对 φ 进行归纳，检查每种情况下语义子句是否与其翻译一致。 □

引理 5.5. 若 φ 在双射模型 M 上可满足，则 φ^{top} 在某个双拓扑导数模型 M^{top} 上成立，且 $M^{\mathrm{top}} \models \mathtt{Two}$。此外，可选取 M^{top}，使得 T_a 和 T_b 均为单子的。

证明。运用标准的展开技巧不难看出，每个在双射模型上成立的 PLTL 公式，也在形式为 $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, S, [\![\cdot]\!])$ 的模型上的 0 处成立，其中 S 是后继函数。此外，我们还可以假设变量 `whole` 是新变量，且未出现在 PLTL 公式中。

考虑定义在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 上的双拓扑模型（即所有 $1/2$ 的倍数），其中 $[\![\mathtt{whole}]\!] = \mathbb{Z}$（其他变量的 $[\![p]\!]$ 保持不变）。令 $\mathcal{T}_a$ 为由基 $\{\{n, n + 1/2\} : n \in \mathbb{Z}\}$ 生成的拓扑，令 $\mathcal{T}_b$ 为由基 $\{\{n - 1/2, n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ 生成的拓扑（见图1）。容易验证，该空间对于$\mathcal{T}_a$ 和 $\mathcal{T}_b$ 都是单子的。然后，设$\mathcal{M}^{\mathrm{top}} := (\frac{1}{2}\mathbb{Z}, d_a, d_b, [\![\cdot]\!])$。

容易验证 $\mathcal{M}^{\mathrm{top}} \models \mathtt{Two}$，此外，若 $n \in \mathbb{Z}$，则$S(n) = S_bS_a(n)$（注意，$S_bS_a(n + 1/2) = n - 1/2$，但这无关紧要，因为这样的点不在 0 的轨道中）。由引理 5.4 可知，$(\mathcal{M}^{\mathrm{top}}, 0) \models \varphi^{\mathrm{top}}$，正如所需。 □

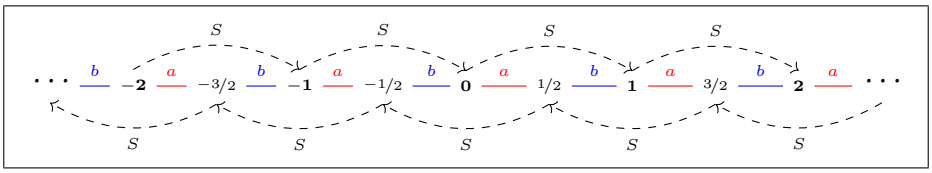

图1：双射框架的双拓扑表示。粗体数字表示变量 whole 成立的点。虚线箭头表示后继函数，红线和蓝线分别表示与主体 a 和 b相关的等价关系。

由此，我们可以证明拓扑 PDL 不具有有限模型性质。

定理 5.6。设 a、b 是 $\mathbb{A}$ 中两个不同的元素。设 $\mathcal{C}$ 是由形如 $(X,(d_a)_{a\in\mathbb{A}})$ 的多导数空间构成的类，其中 d_a 和 d_b 是单子的。那么，对于基于 $\mathcal{C}$ 的康托导数空间类，L^* 不具有有限模型性质。

证明。只需任取一个可满足但不可有限可满足的 LTL 公式 φ；例如，前面提到的 $\varphi := \mathrm{F}q \wedge \neg \mathrm{P}q$。根据引理 5.5，$\psi := \varphi^{\mathrm{top}} \wedge C_{ab}\mathtt{Two}$ 在 $\mathcal{C}$ 上可满足，因此只需验证 ψ 在任何有限拓扑模型中均不可满足。

但是，如果$\mathcal{M}$ 是满足 ψ 的一个模型，那么通过限制到 $[\![C_{ab}\mathtt{Two}]\!]$，我们可以得到一个模型$\mathcal{M}_0$，其中$\mathcal{M}_0 \models \mathtt{Two}$，且$\mathcal{M}_0$ 满足 φ^{top}。根据引理 5.4，$\mathcal{M}_0^{\mathsf{PLTL}}$满足 φ，因此$\mathcal{M}_0^{\mathsf{PLTL}}$是无限的；然而，$\mathcal{M}_0^{\mathsf{PLTL}}$与$\mathcal{M}_0$,具有相同的论域，而后者是$\mathcal{M}$的子模型，因此后者必定是无限的。□

注 5.7. 由于单子空间只是S5模型的非自反部分，因此对于标准S5多智能体认知模型，如果逻辑中加入每个智能体的知识模态的非自反版本，则有限模型性质不成立。

6 总结性评论

我们介绍了 PDL 的多拓扑版本，并证明其中一些变体具有有限模型性质，但更一般的版

本不具有有限模型性质。我们通过嵌入 LTL 证明了这一点，由此还得到了多项式空间复杂度下界，尽管这并不太令人意外，因为该逻辑已扩展 wK4（它也是多项式空间完全的），而带共同知识的 S5 认知逻辑则是指数时间完全的 [18]。然而，缺乏有限模型性质绝不意味着它不可判定，双射命题线性时序逻辑本身就是一个可判定但不具有有限模型性质的逻辑。我们猜想多拓扑命题动态逻辑确实是可判定的，但将此留待未来研究。

值得注意的是，任何形式为 α^* 的算子都类似于一个新的拓扑闭包算子；不过，鉴于智能体都配备了导数算子，考虑 α的弱传递闭包（记作 $\alpha^\sharp$）或许更自然。特别是，这将通过 $(\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n)^\sharp$ 得到共同知识的一个“康托尔导数”版本，它的表达能力应强于标准版本，并有助于确定主体联盟何时能够获得关于当前世界的共同知识。这里的一个特殊挑战在于，弱传递闭包不能用 μ-演算定义，因此无法使用第4节的技术获得有限模型性质和可判定性结果。

同样，我们也可以考虑这些拓扑的并，从而得到一种分布式知识的拓扑概念（例如参见 [4]），它本身也有“闭包”和“导数”两种变体。将可判定性和有限模型性质（或其缺失）推广到包含此类算子的逻辑扩展中，在何种程度上成立，仍是一个值得探讨的开放问题。

7 致谢

我们谨再次感谢 Andreas 的支持与指导，并感谢匿名审稿人提供的宝贵报告。

David Fernández-Duque 获得了西班牙科学与创新部资助，项目编号为 PID2023-149556NB-I00。

参考资料

[1] Philippe Balbiani、Andreas Herzig 和 Nicolas Troquard。《命题赋值动态逻辑：一种行为良好的 PDL 变体》。载于第*28*届

*ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会年会，*LICS 2013*，美国路易斯安那州新奥尔良，*2013*年*6*月*25*日至*28*日，第143–152页。IEEE计算机学会，2013年。[2] A. Baltag、N. Bezhanishvili 和 D. Fernández-Duque。《惊奇拓扑》。载于 G. Kern-Isberner、G. Lakemeyer 和 T. Meyer（编），第*19*届知识表示与推理原理国际会议论文集，*KR 2022*，以色列海法，*2022*年*7*月*31*日至*8*月*5*日，2022年。[3]Alexandru Baltag、Nick Bezhanishvili 和 David Fernández-Duque。《拓扑μ演算：完全性与可判定性》。《*ACM*学报》，70(5):33:1–33:38，2023年。[4]Alexandru Baltag、Nick Bezhanishvili 和 Saúl Fernández González。《拓扑证据逻辑：多智能体设置》。载于 Aybüke Özgün 和 Yulia Zinova（编），语言、逻辑与计算——第*13*届第比利斯国际研讨会，*TbiLLC 2019*，格鲁吉亚巴统，*2019*年*9*月*16*日至*20*日，修订精选论文，《计算机科学讲义》第13206卷，第237–257页。施普林格，2019年。[5] Alexandru Baltag、Nick Bezhanishvili、Aybüke Özgün 和 Sonja Smets。《有理由的信念与证据拓扑》。载于 Jouko A. Väänänen、Åsa Hirvonen 和 Ruy J. G. B. de Queiroz（编），逻辑、语言、信息与计算——第*23*届国际研讨会，*WoLLIC 2016*，墨西哥普埃布拉，*2016*年*8*月*16*日至*19*日。论文集，《计算机科学讲义》第9803卷，第83–103页。施普林格，2016年。[6] Alexandru Baltag、Nick Bezhanishvili、Aybüke Özgün 和 Sonja Smets。《完全信念与弱信念的拓扑》。载于 Helle Hvid Hansen、Sarah E. Murray、Mehrnoosh Sadrzadeh 和 Henk Zeevat（编），逻辑、语言与计算，第205–228页，柏林、海德堡，2017年。施普林格柏林海德堡出版社。[7] Alexandru Baltag、Nina Gierasimczuk 和 Sonja Smets。《归纳问题的可解性：认知拓扑研究》。载于 R. Ramanujam（编），第*15*届理性与知识理论方面会议论文集，*TARK 2015*，卡内基梅隆大学，美国匹兹堡，*2015*年*6*月*4*日至*6*日，《EPTCS》第215卷，第81–98页，2015年。[8] J. van Benthem 和 G. Bezhanishvili。《空间模态逻辑》。载于《空间逻辑手册》，第217–298页。施普林格，多德雷赫特，2007年。[9] P. Blackburn、M. de Rijke 和 Y. Venema。《模态逻辑》。剑桥大学出版社，2001年。[10] Joseph Boudou、Martín Diéguez 和 David Fernández-Duque。《拓扑动力系统的完备直觉主义时态逻辑》。《符号逻辑杂志》，

87(3):995–1022, 2022.[11] A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev。模态逻辑。克拉伦登出版社，纽约，1997 年。[12] S. Demri、V. Goranko 和 M. Lange。计算机科学中的时序逻辑：有限状态系统。剑桥理论计算机科学丛书。剑桥大学出版社，2016 年。[13] L. Esakia。弱传递性——一种补救。在逻辑研究，第 *8* 期（俄文）（莫斯科，*2001*），第 244–255 页。“科学出版社”，莫斯科，2001 年。[14] L. Esakia。直觉主义逻辑与通过拓扑实现的模态。纯粹逻辑与应用逻辑年刊，127(1-3):155–170，2004 年。由此确定的逻辑范围。[15] D. Gabelaia。拓扑中的模态可定义性。硕士论文，阿姆斯特丹大学 ILLC，2001 年。[16] R. Goldblatt 和 I. Hodkinson。缠结闭包算子的空间逻辑与模态μ演算。纯粹逻辑与应用逻辑年刊，168(5):1032–1090，2017 年。[17] Robert Goldblatt。时间与计算逻辑。语言与信息研究中心，美国，1987 年。[18] Joseph Y. Halpern 和 Yoram Moses。知识与信念模态逻辑的完全性与复杂性指南。人工智能，54(3):319–379，1992 年。[19] Andreas Herzig 和 Elise Perrotin。关于共同知识的公理化。在 Nicola Olivetti、Rineke Verbrugge、Sara Negri 和 Gabriel Sandu 编，第 *13* 届模态逻辑进展会议，*AiML 2020*，赫尔辛基，芬兰，*2020* 年 *8* 月 *24–28* 日，第 309–328 页。College Publications，2020 年。[20] J. C. C. McKinsey 和 A. Tarski。拓扑代数。数学年刊，45:141–191，1944 年。[21] Johan van Benthem 和 Darko Sarenac。知识几何。预出版系列（*PP Series*），(PP-2004-20)，2004 年。