arXiv:2602.13919v1 [math.RT] 14 Feb 2026

舒伯特簇的线性退化

GIULIA IEZZI

摘要。我们通过一类特殊的箭图格拉斯曼簇定义舒伯特簇的线性退化。为此，我们将研究范围限制在所研究箭图的表示簇中的一个适当子簇，并描述该子簇上的基变换作用。我们给出该作用的轨道的两种显式参数化，其中一种编码了这些轨道上的偏序关系。

致谢

作者谨向 Ghislain Fourier 和 Martina Lanini 致谢，感谢他们在本项目期间进行的有益讨论并给予指导。此外，作者还要感谢 Xin Fang、Evgeny Feigin 和 Markus Reineke 所提供的深刻见解。本文是德国研究基金会（DFG）资助的 SFB-TRR 195“数学及其应用中的符号工具”项目的一项成果，并基于作者博士论文[17]的第 2 章和第 5 章。

1. 引言

给定一个箭图 Q 、一个 Q-表示 M，箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 是参数化维数向量为 $\mathbf{e}$ 的子表示 $N \subseteq M$ 的射影簇。箭图格拉斯曼簇最早出现在 [9, 29] 中，此后得到了广泛研究，例如作为簇代数理论中的工具 [4] ，或用于研究旗簇的线性退化 [6, 7, 12, 13]。使用箭图研究几何性质问题的一个主要优势在于，可以利用组合工具和代数工具来推导所研究射影簇的几何性质。Cerulli Irelli、Esposito、Franzen、Feigin 和 Reineke 的研究成果中便有一些这样的例子，例如 [8, 19, 18]。然而，正如 Reineke 在 [25] 中证明的，以及 Ringel 在 [26], 中更一般地证明的，每个射影簇都可以作为任意野型无环箭图的箭图格拉斯曼簇出现。

过去十五年间，在这一框架下，人们利用箭图格拉斯曼簇研究旗簇的线性退化；相关研究见 Feigin、Finkelberg、Cerulli Irelli、Reineke、Fang、Fourier 等人发表的多篇论文 [12, 7, 13, 5, 6]。“退化”一词指一种构造，它使我们能够将一个簇视为簇族中的特定元素，或某个态射的指定纤维；上述研究刻画了旗簇线性退化的若干几何与组合性质，例如其定义方程、胞腔分解，以及借助秩元组所研究的平坦性、不可约性和正规性。

舒伯特簇最早出现于 19th 世纪末期，见于舒伯特演算的研究，其目的是确定某些交问题的解的数量；如今，它们已成为人们理解最透彻的复射影簇实例之一。近年来，舒伯特簇与退化旗簇及箭图格拉斯曼簇建立了联系，例如在 [20], 中，作者证明任何 A 型或 C 型退化

代数、几何与计算机代数组，RPTU 凯撒斯劳滕-兰道大学，德国凯撒斯劳滕 67663，戈特利布·戴姆勒街 48号楼电子邮箱：giulia.iezzi@math.rptu.de。2020年 数学主题分类。16G20, 14M15,14N20, 14D06。关键词与短语。舒伯特簇、箭图表示、箭图格拉斯曼簇、线性退化。

旗簇（按 [12] 中的定义）都同构于某个适当部分旗流形中的舒伯特簇；又如后来的 [8], 证明，某些舒伯特簇是特定箭图格拉斯曼簇的不可约分支。在 [16], 中，我们考察了一类箭图格拉斯曼簇；根据维数向量的具体选取，这类簇可实现 A 型光滑舒伯特簇，或 A 型舒伯特簇的 Bott-Samelson 解消。

本文利用 [16] 中得到的结果，通过箭图格拉斯曼簇定义舒伯特簇的线性退化。为此，我们考虑一个特定的带关系箭图（Γ， I），并研究所有（Γ， I）表示构成的簇中的子簇 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$。$R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的每个表示都由 $\prod_{j=1}^{n-1} U_{n+1}$ 中的一组线性映射确定，其中 U_{n+1} 是 Mat_{n+1}（由大小为 $n+1$ 的方阵构成的集合）中上三角矩阵组成的子集。这个子簇的一个显著性质是，其中任意表示的分解都具有一致性。我们定义（Γ， I）的一类不可分解对象，记作 $U^{(h_1,\ldots,h_n)}$，并证明如下结果：

定理 1 (定理 4.10)。 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的所有表示都可以分解为不可分解的（Γ， I）表示的直和 $U^{(h_1,\ldots,h_n)}$。

接下来，我们回答（Γ, I）的表示型问题——也就是说，当我们将范围限制在 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的表示以及某些同构时，（Γ, I）是否只有有限多个不可分解表示的同构类。为此，我们考察 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中由如下作用定义的轨道：

$$h \cdot M^f = (h_2 f^1_{n+1} h_1^{-1}, h_3 f^2_{n+1} h_2^{-1}, \ldots, h_n f^{n-1}_{n+1} h_{n-1}^{-1}),$$

对某个 $h \in \prod_{j=1}^{n-1} B_{n+1}$，其中 B_{n+1} 是一般线性群内由可逆上三角矩阵构成的 Borel子群，且 $M^f \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$。为简化记号，我们将此作用称为 B-作用，并将这类轨道称为 B-轨道，或等价地称为 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的 B-同构类。不过请注意，作用于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的群是乘积 $\prod_{j=1}^{n-1} B_{n+1}$，并通过上述基变换方式作用。在 [1], 中，Abeasis 和 Del Fra 对任意 $\mathbb{A}_n$ 型箭图的表示同构类进行了参数化。我们采用一种类似的参数化，记作 $\mathbf{r}$，并利用先前的结果证明以下结论：

定理 2 (定理 4.24)。 两个表示 M^f, M^g 属于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$，它们处于同一个 B-同构类，当且仅当 $\mathbf{r}^f = \mathbf{r}^g$。

接着，我们为这类 B-同构类提供另一种参数化。我们注意到，我们的 B-作用可视为 Miller 和 Sturmfels 在矩阵舒伯特簇背景下所研究的作用的扩展。在那里，轨道由某些子矩阵的秩来描述，即西北秩。我们通过定义西南数组（记作$\mathbf{s}$），并证明如下结论，将这种参数化用于我们的 B-作用：

定理 3 (定理 4.31)。 两个表示 M^f, M^g 属于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$，它们处于同一个 B-同构类，当且仅当 $\mathbf{s}^f = \mathbf{s}^g$。

最后，我们回顾旗簇的线性退化的构造，遵循 [5]: 给定一个 $\mathbb{A}_n$ 型的等向箭图，Fl_{n+1} 的线性退化记作Fl^f_{n+1}，定义为由以下表示的所有子表示组成的箭图格拉斯曼簇：

$$\overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\bullet} \xrightarrow{f_1} \overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\bullet} \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} \overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\bullet}$$

对应于维数向量 (1，2，.....，n)。对应于 f 的箭图格拉斯曼簇可视为投影 π：$Y \to R$ 在 f 上的纤维，其中R 是簇 Mat_{n+1}^{n-1}，而 Y 是万有箭图格拉斯曼簇，即由相容的映射序列与子空间序列组成的相容对所构成的簇。特别地，我们回顾一个关于 π 的平坦轨迹的结果：它是所有退化到由某个秩元组参数化的轨道的轨道之并。

我们基于第 4.1 节和 [16]中得到的构造与结果，定义舒伯特簇 X_w 的线性退化，记作 X_w^f，它是映射 π: $Y \to R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 在 f 上的纤维，其中 $R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 是第 4 节中所考虑的 (Γ，I)-表示所构成的子簇，而 Y 是万有箭图格拉斯曼簇。首先，我们证明如下结果：

定理 4 (推论 5.10)。在 $G_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 的 B-作用下，M^g 的轨道 $\mathcal{O}_{M^g}^{\iota}$ 位于 M^f 的轨道 $\mathcal{O}_{M^f}^{\iota}$ 的闭包中（相对于 矩阵空间$_{n+1}$ 上的扎里斯基拓扑），当且仅当 $\mathbf{s}^f \leq \mathbf{s}^g$，其中“ 小于或等于 ”关系是针对西南数组逐分量定义的。在这种情况下，我们记作 $\mathcal{O}_{M^g}^{\iota} \subseteq \mathcal{O}_{M^f}^{\iota}$，并称 $\mathcal{O}_{M^f}^{\iota}$ 退化为 $\mathcal{O}_{M^g}^{\iota}$。

为结束关于西南参数化的讨论，我们列出一个非负整数元组成为 $R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 中某个表示的西南数组的充要条件。

最后，我们考虑一个自然的问题：确定投影$\pi : Y \to R_{\mathbf{d}}^{\iota}$的平坦轨迹。我们提出一种潜在的策略，并结合一些动机，给出我们的猜想：

猜想 1 (猜想 6.4)。元组 $f \in R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 属于 $\pi : Y \to R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 的平坦轨迹，当且仅当 $\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = \dim(X_w)$。

本文结构如下：第 2 节回顾箭图表示和箭图格拉斯曼簇的基本事实。第 3 节专门讨论舒伯特簇，并回顾其通过 [16] 中得到的箭图格拉斯曼簇实现和解奇异化。第 4 节包含本文的主要结果：我们考虑表示簇 $R_{\mathbf{d}}^{\iota}$，并证明定理 1、2 和 3。第 5 节定义舒伯特簇的线性退化，并证明定理 4。最后，第 6 节提出猜想 1 并阐述其动机。

2. 箭图表示的背景知识

我们首先汇集一些关于箭图表示和箭图格拉斯曼簇的基本事实。[10, 27]中列出了一些标准参考文献。

定义 2.1. 有限**箭图** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$由有限顶点集 Q_0、有限箭集 Q_1 以及两个映射 s, t：$Q_1 \to Q_0$ 给出，分别将每个箭映射到其源点和终点。

定义 2.2. 箭图 Q 上的**关系**是路径代数 Q 的一个子空间，由源点和终点相同且长度至少为 2 的路径的线性组合张成。给定由关系生成的 $\mathbb{K}Q$ 的一个双边理想 I，则这一对 (Q, I) 构成一个**带关系箭图**，商代数 $\mathbb{K}Q/I$ 是 (Q, I) 的路径代数。

I 的关系系定义为$\cup_{i,j\in Q_0} iIj$ 的子集 R，其中 i 表示顶点 i上的平凡路径，且 R 成立，但 R的任何真子集都不能生成作为双边理想的 I。对于任意两个顶点 i 和 j，我们用 $r(i, j, R)$ 表示集合 $R \cap iIj$ 的基数，该集合包含 R 中那些由从 i 开始并在 j 结束的路径线性组合而成的元素。如果 Q 不包含有向圈，那么数值 $r(i, j, R)$ 与所选关系系无关（例如参见 [2]），因此可以记作 $r(i, j)$。

定义 2.3. 给定一个箭图 Q，代数闭域 $\mathbb{K}$ 上的有限维 Q-表示 M 是有序对 $((M_i)_{i\in Q_0}, (M^\alpha)_{\alpha\in Q_1})$，其中 M_i 是附属于顶点 $i \in Q_0$ 的有限维 $\mathbb{K}$-向量空间，而对于任意 $\alpha \in Q_1$，$M^\alpha : M_{s(\alpha)} \to M_{t(\alpha)}$ 是一个 $\mathbb{K}$-线性映射。M 的维数向量为 $\dim M := (\dim_{\mathbb{K}} M_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|Q_0|}$。$M$ 的子表示记为 $N = ((N_i)_{i\in Q_0}, (M^\alpha \restriction_{N_{s(\alpha)}})_{\alpha\in Q_1})$，它是一个$Q$-表示，满足对于任意 $i \in Q_0$，$N_i \subseteq M_i$，且对于任意$\alpha \in Q_1$，$M^\alpha(N_{s(\alpha)}) \subseteq N_{t(\alpha)}$。

从现在起，我们只考虑 Schiffler 意义下的有界箭图（参见 [27, 定义 5.1]）。Q上的有限维表示构成一个范畴，记为 $\mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$，其中，$\mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ 中 M 与 M' 之间的态射由线性映射ϕ_i给出：$M_i \to M'_i \quad \forall i \in Q_0$，满足 $\phi_{t(\alpha)} \circ M^\alpha = M'^\alpha \circ \phi_{s(\alpha)}$。类似地，范畴 $\mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q, I)$ 由满足 I 中关系的 Q 的有限维表示组成。已知（证明见 [27, 定理 5.4]），$\mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ 等价于 A-模范畴，即路径代数 $A = \mathbb{K}Q$ 上的有限维模的范畴，其中路径代数对应于 Q。此外，$\mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ 是 Krull–Schmidt（[27, 定理 1.2]）且是遗传的（[27, 定理 2.24]）。

定义 2.4。如果函子 $\mathrm{Hom}(P, -)$ 将满射态射映射为满射态射，则称表示 $P \in \mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ 为**投射**。对偶地，如果函子 $\mathrm{Hom}(-, I)$ 将单射态射映射为单射态射，则称 $I \in \mathsf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ 为**内射**。

若 Q 是一个不含有向圈的箭图，则每个顶点 $i \in Q_0$ 恰好对应一个不可分解投射表示，记作 $P(i)$。这类投射表示很容易描述：顶点 k 处向量空间 $P(i)_k$ 的基由所有从顶点 i 到顶点 k 的可能路径组成，而向量空间之间的映射的作用由路径拼接诱导。对偶地，每个顶点 $i \in Q_0$ 都恰好对应一个不可分解内射表示 $I(i)$；对于每个向量空间 $I(i)_k$，其基由所有从顶点 k 到顶点 i 的可能路径组成，且其映射通过路径拼接作用。

以下结果适用于任意加性范畴。

Pr命题 2.5. [27, 命题 2.7] 设 P、P'、I和 I' 是 Q的表示。则 :

(1) $P \oplus P'$ 是投射的，当且仅当 $\iff$ P和 P' 是投射的;

(2) $I \oplus I'$ 是内射的，当且仅当 $\iff$ I 和 I' 是内射的。

更多背景知识和详细信息可参见例如 [2, 第 2 节。2] 或 [11]。为简化记号，当线性映射的赋值可由上下文明确时，我们有时用向量空间的元组 $(M_i)_{i\in Q_0}$ 表示一个 Q-表示 M。

定义 2.6. 考虑一个箭图 Q、一个 Q-表示 M 以及一个维数向量 $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$，使得 $e_i \leq \dim M_i \; \forall i \in Q_0$。箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 参数化了 M 的子表示 N，且对所有 $i \in Q_0$均有 $\dim N_i = e_i$。

与格拉斯曼簇和旗簇类似，非空的箭图格拉斯曼簇可以通过以下闭嵌入实现为格拉斯曼簇乘积的闭子簇

$$\iota : \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M) \to \prod_{i\in Q_0} \mathrm{Gr}(e_i, M_i)$$

该映射将 M 的子表示 N 映射为由 M_i 中的 e_i 维子空间 N_i 组成的集合。

例 2.7（A 型旗簇）。在命题 2.7], 中，作者将（线性退化的）A 型旗簇实现为与某些表示相关联的箭图格拉斯曼簇

这些表示来自类型为 $\mathbb{A}_n$ 的等向箭图。特别地，完全旗簇 Fl_{n+1} 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中可按如下方式实现。

考虑一个箭图，它有 n 个顶点，标记为 1 到 n，以及 $n-1$ 个形如 $i \to i+1$ 的箭。固定维数向量 $\mathbf{e} = (1, 2, \ldots\ldots, n)$，以及表示 M，其中 $M_i = \mathbb{C}^{n+1}$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$，而 $M^\alpha =$ 对所有箭 α 都是恒等映射：

$$\mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\mathrm{id}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{C}^{n+1}.$$

箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}}(M)$ 恰由 M 的子表示 N 组成，满足 $\dim(N_i) = i$，即向量子空间的完全旗。

2.1. -表示的簇。在第 2 节中，我们将箭图表示 $M \in \mathrm{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ 定义为：给 Q_0 的每个顶点指定一个有限维 $\mathbb{K}$-向量空间 M_i，并给其中的每个箭指定一个线性映射 M_α。通过选取基，我们可以将向量空间 M_i 识别为 $\mathbb{K}^{d_i}$，其中 $d_i = \dim M_i$；因此，对于 $\alpha: i \to j$，每个线性映射 M_α 都可以用一个 $d_j \times d_i$ 矩阵表示。这意味着，给定箭图 Q 和维数向量 $\mathbf{d}$，确定一个维数向量为 $\mathbf{d}$ 的 Q-表示，等价于给出线性映射 M_α。

定义 2.8。维数向量$\mathbf{d}$下，箭图 Q 的**表示空间** 为

$$R_{\mathbf{d}} \cong \bigoplus_{\alpha: i \to j} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{d_i}, \mathbb{K}^{d_j}) \cong \bigoplus_{\alpha: i \to j} \mathrm{Mat}_{d_j \times d_i}(\mathbb{K}).$$

根据定义，表示空间 $R_{\mathbf{d}}$ 同构于仿射空间 $\mathbb{A}^r$，其中$r := \sum_{\alpha:\ i \to j} d_i \times d_j$。于是我们考虑群

$$G_{\mathbf{d}} = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{K}),$$

其中 $\mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{K})$ 表示可逆 $d_i \times d_i$ 矩阵构成的群，并定义 $G_{\mathbf{d}}$ 在 $R_{\mathbf{d}}$ 上的作用为

$$g \cdot M = g_{t(\alpha)} M_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1} \tag{2.9}$$

对于某个 $g := (g_i)_{i \in Q_0} \in G_{\mathbf{d}}$ 和 $M \in R_{\mathbf{d}}$。我们将表示M在此作用下的轨道记为 $\mathcal{O}_M$，即 $\mathcal{O}_M = \{g \cdot M | g \in G_{\mathbf{d}}\}$。

例 2.10。 [28, 例 8.1] 考虑箭图 $Q = \overset{1}{\bullet} \overset{\alpha}{\rightarrow} \overset{2}{\bullet}$和维数向量$\mathbf{d} = (d_1, d_2)$。在此情形下，表示空间 $R_{\mathbf{d}}$ 同构于 $\mathrm{Mat}_{d_2 \times d_1}(\mathbb{K})$，$G_{\mathbf{d}}$ 中的元素 $g = (g_1, g_2)$ 是分别由 d_1 和 d_2 阶可逆矩阵组成的有序对，而 2.9 中定义的作用的轨道为 $\mathcal{O}_M = \{g_2 M_\alpha g_1^{-1} | (g_1, g_2) \in G_{\mathbf{d}}\}$。换言之，$\mathcal{O}_M$ 是所有秩与 M_α 的秩相等的矩阵所构成的集合。

引理 2.11. [28, 引理 8.1] 轨道 $\mathcal{O}_M$ 恰好是表示 M的同构类，即

$$\mathcal{O}_M = \{M' \in \mathrm{rep}_{\mathbb{K}}(Q) | M' \cong M\}.$$

类似地，M的稳定子群 $\mathrm{Stab}(M) = \{g \in G_{\mathbf{d}} \mid g \cdot M = M\}$ 与表示 Q-representation M的自同构群 $\mathrm{Aut}(M)$ 同构。

引理 2.12. [28, 引理 8.2] 令 $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$。则

(1) 对于任意维数向量为 $\mathbf{d}$ 的表示 M，簇$\mathcal{O}_M$、$G_{\mathbf{d}}$和 $\mathrm{Aut}(M)$ 的维数满足

$$\dim \mathcal{O}_M = \dim G_{\mathbf{d}} - \dim \mathrm{Aut}(M);$$

(2) 在 $R_{\mathbf{d}}$中存在一个余维零的轨道。

3. 舒伯特簇作为箭图格拉斯曼簇

给定 $\mathbb{C}^{n+1}$中的任意 $v_1,\dots,v_r$，我们用 $\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ 表示它们的 $\mathbb{C}$-线性张成。为了定义Fl_{n+1}中的舒伯特簇，我们首先固定 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个基 $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,\dots,b_{n+1}\}$，并用 $F_\bullet$ 表示标准旗 $\langle b_1\rangle\subseteq\langle b_1,b_2\rangle\subseteq\cdots\subseteq\langle b_1,b_2,\dots,b_{n+1}\rangle$，用 S_{n+1}表示 $n+1$ 个元素上的对称群。关于舒伯特簇的更多事实与细节可参见例如 [14, 第三部分]。

定义 3.1. 对于 $w\in S_{n+1}$，**Schubert胞腔** X_w° 是

$$X_w^\circ=\{V_\bullet\in Fl_{n+1}:\dim(F_p\cap V_q)=\#\{k\le q:w(k)\le p\},\ 1\le p,q\le n+1\}.$$

定义 3.2. 舒伯特簇 X_w 定义为Fl_{n+1} 中胞腔X_w°的闭包，即

$$X_w=\{V_\bullet\in Fl_{n+1}:\dim(F_p\cap V_q)\ge\#\{k\le q:w(k)\le p\},\ 1\le p,q\le n+1\}.$$

我们通过列出置换 w 在 S_n 中的像（按自然顺序排列）来表示它，即其单行记号 $w=[w(1)w(2)\dots w(n)]$。

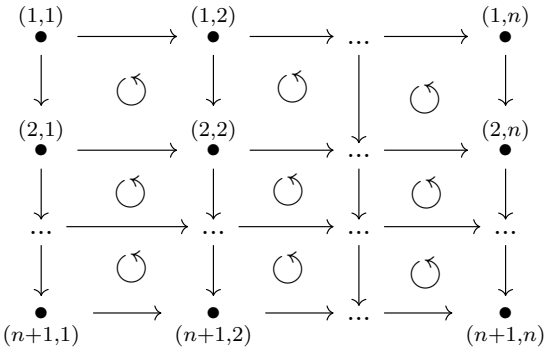
例 3.3. 对于 $e=[1\,2\dots n+1]$和 $w_0=[n+1\,n\dots1]$在 S_{n+1}中，根据定义 3.2 很容易计算出维数分别最小和最大的舒伯特簇 $X_e=\{F_\bullet\}$ 和 $X_{w_0}=Fl_{n+1}$。

光滑Schubert簇的组合刻画见于 [22]: Schubert 簇 X_w 光滑，当且仅当 w 回避模式 [4231]和 [3412]。回顾一下，置换 $w=[w(1)w(2)\dots w(n)]$ 回避模式 π，是指w 不存在一个子序列，其相对次序与 π的各项相同。在 [15, 定理 1.1], 中，作者证明了这一模式回避条件等价于 X_w 由非交叉包含定义：

定义 3.4. ([15, 第 1] 节) 若Schubert 簇 X_w 的定义条件在每个 V_q 上（见定义 3.2）都是形如 $V_q\subseteq F_p$ 和 $V_q\supseteq F_s$的条件的合取，其中 p 和 s为某些值，则称其**由包含映射定义**。若条件对 $V_q\subset F_p$ 和 $F_{p'}\subset V_{q'}$构成**交叉**，则称这对条件为交叉对。如果 X_w 由包含映射定义，且其条件中不含任何交叉对，则称 X_w **由非交叉包含定义**。

在 [16, 第 4], 节中，我们定义了带关系箭图（Γ，I）：

(3.5)



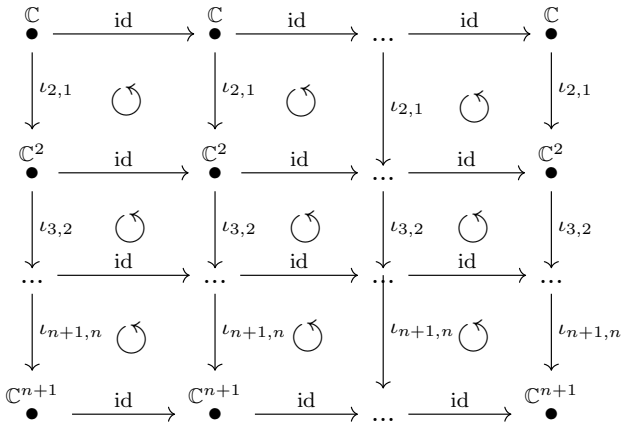
以及其表示 $M=((M_{i,\ j})_{(i,j)\in\Gamma_0},\ (M_\alpha)_{\alpha\in\Gamma_1})$，由下式给出

$$M_{i,j}=\mathbb{C}^i,\quad M_\alpha=\begin{cases}\iota_{i+1,i} & \text{if } s(\alpha)=(i,j),t(\alpha)=(i+1,j)\\ \mathrm{id} & \text{if } s(\alpha)=(i,j),t(\alpha)=(i,j+1)\end{cases}$$

其中 $\iota_{i+1,\ i}$ 表示从 $\mathbb{C}^i$ 到 $\mathbb{C}^{i+1}$的包含映射，关于所选基 $\mathcal{B} = \{ b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \}$ 表示为矩阵

$$\iota_{i+1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

施加于 Γ 的关系显然由表示 M 满足：



在证明与 $(\Gamma,\ I)$-表示M 相关联的每个箭图格拉斯曼簇都是光滑且不可约的射影簇之后，我们为 $(\Gamma,\ I)$ 定义了两个不同且适当的维数向量 $\mathbf{r}^w$ 和 $\mathbf{e}^w$，并证明了以下结果：

定理 3.7（定理 5.19, [16]）。箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{r}^w}(M)$ 同构于任意一个与 X_w 相关联的、由 w 的几何相容分解得到的 *Bott-Samelson* 解消。

定理 3.8（定理 6.4, [16]）。如果 $w \in S_{n+1}$ 避开模式 $[4231]$ 和 $[3412]$,，那么箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M)$ 同构于舒伯特簇 X_w。

在本文第 5.1 节中，我们将利用这些结果来定义舒伯特簇的线性退化。为此，我们将在下一节研究 $(\Gamma,\ I)$ 的表示簇中与此类退化相对应的子簇。

4. The variety $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ of (Γ, I)-representations

本文将关于 (Γ, I) 表示型的问题限定到 $\mathsf{rep}_{\mathbb{C}}(\Gamma, I)$ 中的某些表示，并证明它们可以分解为属于某个有限类的不可分解对象的直和。我们将在第 5.1 节解释作出这一限制的动机，并在该节中使用箭图格拉斯曼簇介绍舒伯特簇线性退化的定义。

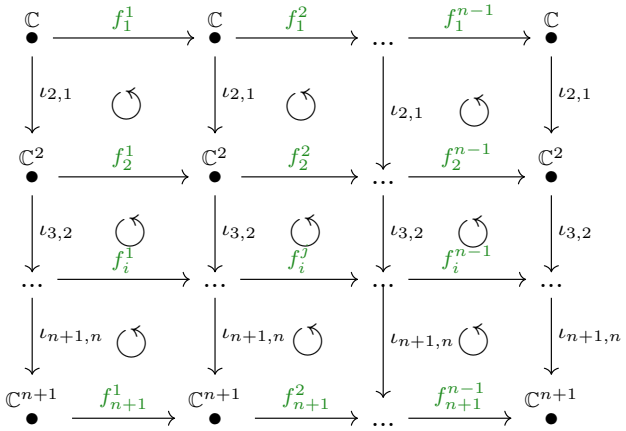
定义 4.1。设 (Γ, I) 为 (3.5) 中定义的箭图，$R_{\mathbf{d}}$ 为相应的表示簇（见定义 2.8）。我们将 $R_{\mathbf{d}}$ 的如下子簇记为 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$

$$R^{\iota}_{\mathbf{d}} = \{M \in R_{\mathbf{d}} | M_\alpha = \iota_{i+1,i}\ \forall \alpha : (i,j) \to (i+1,j), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n\}.$$

换言之，将 (Γ, I) 的所有竖直箭头所对应的线性映射都设为从 $\mathbb{C}^i$ 到 $\mathbb{C}^{i+1}$ 的标准包含映射（定义见 (3.6)），即可得到 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$。

注记 4.2。由于（Γ，I）上的交换关系，（Γ，I）的水平箭头所对应的表示 M in $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的线性映射彼此并不独立。我们用 f^j_i 表示线性映射 M_α 的矩阵表示，

对于满足 $s(\alpha) = (i,\ j)$ 且 $t(\alpha) = (i,\ j+1)$ 的 α，相对于选定的基 $\mathcal{B} = \{ b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \}$。于是表示 M 为



我们将 $f_1^1 = [a]$ 写作某个 $a \in \mathbb{C}$，并在 f_1^1 之后应用 $\iota_{2,\ 1}$，得到 $\iota_{2,\ 1} f_1^1 = \left[\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$。关系 $f_2^1 \iota_{2,\ 1} = \iota_{2,\ 1} f_1^1$ 意味着，对于某个 $b,\ c \in \mathbb{C}$，有 $f_2^1 = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]$。类似地，我们可以看出，对于某个 $d,\ e,\ l \in \mathbb{C}$，f_3^1 必定是 $f_3^1 = \left[\begin{smallmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & l \end{smallmatrix}\right]$；对所有 $i = 1,\ \ldots,\ n+1$ 和 $j = 1,\ \ldots,\ n-1$，依此类推。这意味着，子簇 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的一个 $(\Gamma,\ I)$-表示 M 由选取 $n+1$ 大小的 $n-1$ 个上三角矩阵所决定。我们将这个元组记为

$$f = (f_{n+1}^1, \ldots, f_{n+1}^{n-1}) \in \prod_{j=1}^{n-1} U_{n+1}, \tag{4.3}$$

其中，U_{n+1} 是由上三角矩阵组成的矩阵空间 $_{n+1}$ 子集（不同于由可逆上三角矩阵组成的子群 B_{n+1}）。从现在起，我们将重点研究空间 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的 $(\Gamma,\ I)-$ 表示，尤其是描述它们如何分解为 $(\Gamma,\ I)$ 的不可分解表示，以及如何对它们进行参数化。由于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的表示由 f 的选取决定，我们将它们记作 M^f，并根据语境将 M^f 视为元组 $(f_{n+1}^1,$ $\ldots\ldots,\ f_{n+1}^{n-1})$，因此写作 $M^f = (f_{n+1}^1,\ \ldots\ldots,\ f_{n+1}^{n-1})$。

我们将由 $U^{(h_1,\ldots,h_n)}$ 表示 $(\Gamma,\ I)$ 的不可分解表示，其定义如下：

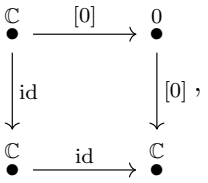
$$U_{i,j}^{(h_1,\ldots,h_n)} := \begin{cases} 0 & \text{if } i \le n+1-h_j \\ \mathbb{C} & \text{if } i > n+1-h_j \end{cases}, \tag{4.4}$$

其中 $1 \le h_j \le n+1$，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n+1$ 和 $1 \le j \le n$，其线性映射为

$$U_{\alpha}^{(h_1,\ldots,h_n)} := \begin{cases} \mathrm{id} & \text{if } U_{s(\alpha),t(\alpha)}^{(h_1,\ldots,h_n)} = \mathbb{C} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{4.5}$$

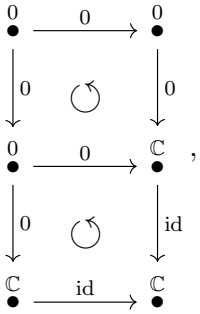
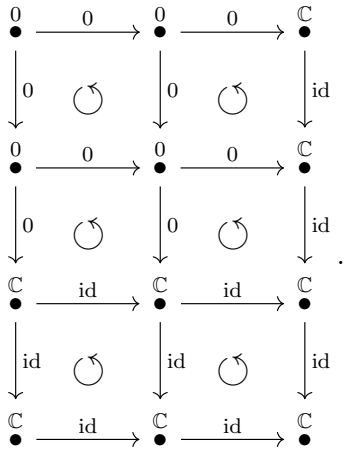
每个指标 h_j 表示 (Γ, I) 中第 j 列首个非零向量空间的“高度”：根据 (4.4) 中给出的定义，该空间及其下方的所有空间都同构于 $\mathbb{C}$。为了满足 (Γ, I) 的交换关系，我们还要求对于任意 $j \le j'$ 和 $h_{j'} > 0$，都有 $h_j \le h_{j'}$。容易验证，若

$h_{j'} > 0$，关系 $h_j > h_{j'}$ 蕴含（Γ, I）中存在如下图表：



它并不交换。如定理 4.10 所示，(4.5) 中给出的 $U^{(h_1,\dots,h_n)}$ 的线性映射的定义保证了 (Γ, I) 的这些表示实际上是不可分解对象。

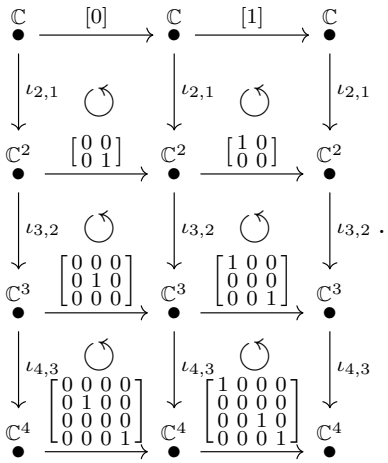
例 4.6. 形如 $U^{(h_1,\dots,h_n)}$的不可分解对象 (Γ, I)-表示的两个例子分别是 $U^{(1,2)}$和 $U_{(2,2,4)}$，分别对应于 $n+1=3$和 $n+1=4$:

$U^{(1,2)} =$ ，$U^{(2,2,4)} =$ .

例 4.7. 对于 $n+1=4$， $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的表示 M^f 由 $f = (f_4^1, f_4^2) \in U_4 \times U_4$确定。为简化记号，在可能的情况下，我们省略行指标，只标明出现线性映射的 (Γ, I) 的“列”。在这种情况下，例如，我们记 $f = (f_1, f_2) \in U_4 \times U_4$。一种可能的选择是:

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

这对应于表示

$M^f =$ .

.....的分解 M^f于是为 $M^f = U^{(4,0,0)} \oplus U_{(3,3,0)} \oplus U_{(2,0,0)} \oplus U_{(1,1,1)} \oplus U_{(0,4,4)} \oplus U^{(0,2,2)} \oplus U_{(0,0,3)}$。

备注 4.8。 我们分别用 $P(i,j)$ $I(i,j)$ 和 $S(i,j)$ 表示 (Γ, I) 的（唯一）投射、内射和简单不可分解表示（见定义 2.4）。其中，形如 $U^{(h_1,\ldots,h_n)}$、其中某个 $h_1,\ldots,h_n$ 的表示分别为 $P(1,j)$ $P(i,1)$ $I(n+1,j)$ 和 $S(n+1,j)$。为简化记号，我们通过几个例子展示它们在特定情形 $n+1=4$ 下的形式：

$$P(1,1) = \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \end{array}, \quad P(1,2) = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \end{array},$$

$$I(4,1) = \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}, \quad I(4,2) = \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array},$$

$$I(4,3) = \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} \end{array}, \quad S(4,2) = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array},$$

也就是说， $P(1,1) = U_{(4,4,4)}$ $P(1,2) = U^{(0,4,4)}$, $I(4,1) = U_{(4,0,0)}$ $I(4,2) = U_{(4,4,0)}$ $I(4,3) = U^{(4,4,4)}$ 以及 $S(4,2) = U_{(0,1,0)}$。以下是一些不属于 $U^{(h_1,h_2,h_3)}$ 这种形式的 (Γ, I) 的内射不可分解对象和简单不可分解对象的例子：

$$I(2,\ 2) = \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}, \quad S(3,\ 2) = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}.$$

例 4.9. 我们在第 3 节回顾了表示 M，它是 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中与选择 $f^1_{n+1} = f^2_{n+1} = \cdots = f^{n-1}_{n+1} = \mathrm{id}$ 对应的元素。其分解为 $M = U_{(n+1,\ \ldots,\ n+1)} \oplus U_{(n,\ \ldots,\ n)} \oplus U_{(n-1,\ \ldots,\ n-1)} \oplus \cdots \oplus U_{(2,\ldots,2)} \oplus U_{(1,\ldots,1)} = P(1,1) \oplus P(2,1) \oplus \cdots \oplus P(n,\ 1) \oplus P(n+1,\ 1)$。由于它是投射（$\Gamma,\ I$）-表示的直和，$M$ 也是投射（$\Gamma,\ I$）-表示。

定理 4.10。 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的所有表示都可以分解为不可分解的 (Γ, I)-表示 $U^{(h_1,\ldots,h_n)}$ 的直和。

证明。首先，我们观察到(Γ, I)-表示 $U^{(h_1,\ldots,h_n)}$是不可分解对象，因为它们是瘦的，并且连接两个一维向量空间的所有线性映射都是恒等映射（一维向量空间的唯一真子空间是零子空间，而零子空间仅作为零映射的定义域或值域）。为证明 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的所有表示都可分解为它们的直和，我们由(4.3)回忆起， $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$中的每个表示 M^f由 $\prod_{j=1}^{n-1} U_{n+1}$中 $f = (f^1_{n+1}, \ldots, f^{n-1}_{n+1})$的选取所决定：对应于$(\Gamma, I)$的水平箭头$(i, j) \to (i, j+1)$的每一个其余线性映射 f^j_i由 f^j_{n+1}的适当子矩阵表示（即，它是 f^j_{n+1}到 $\mathbb{C}^i$的限制），而对应于(Γ, I)的竖直箭头的所有映射都固定为标准包含 $\mathbb{C}^i \hookrightarrow \mathbb{C}^{i+1}$。换言之，出现在 M^f的分解中的任何不可分解对象表示必须是(Γ, I)的一个表示，其与竖直箭头相关联的线性映射要么是零映射，要么是恒等映射，并且满足：若与水平箭头$(i, j) \to (i, j+1)$相关联的线性映射为零，则对于 $k > l$，与形如$(i, k) \to (i, k+1)$的箭相关联的所有线性映射均为零。然后，我们考虑(Γ, I)的那些从$(i, 1)$开始、到(i, n)结束的子箭图，其中 $i = 1, \ldots, n+1$（即，将(Γ, I)的每一行视为一个子箭图）。这些是型为 $\mathbb{A}_n$的等向狄金箭图，其不可分解对象$U_{a,b}$是瘦的，并由带有 $1 \le a \le b \le n$的连通区间$[a, b]$ 给出。于是，将该不可分解对象$U_{a,b}$ 的描述应用于(Γ, I)的所有所考虑的子箭图（从最上面一行向下），即可得到所述结论；将每个 f^i_j定义为 f^j_{n+1}到 $\mathbb{C}^i$的限制，保证了所有由此产生的方形图的交换性。□

我们的目标是找到一种方法来参数化 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中的表示，或者更准确地说，参数化它们的同构类。根据引理 2.11，我们回顾一下，给定箭图的表示的同构类与在簇 $R_{\mathbf{d}}$ 上由 $G_{\mathbf{d}} = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{K})$ 的作用所得到的轨道相一致，该作用定义如下：

$$g \cdot M = g_{t(\alpha)} M_\alpha g^{-1}_{s(\alpha)}$$

其中 $g := (g_i)_{i\in Q_0} \in G_{\mathbf{d}}$。然而，当我们考虑 $R_{\mathbf{d}}$ 的子簇 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 时， $G_{\mathbf{d}}$ 的作用与我们对 $(\Gamma,\ I)$-表示所施加的限制并不相容：对于 $M^f \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$，表示 $g\cdot M^f \in R_{\mathbf{d}}$ 与 M^f 同构，但通常并不属于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$。这是因为与 $g\cdot M^f$ 的竖直箭头相关联的线性映射通常不具有 $\iota_{i+1,i}$ 的形式；后者是从 $\mathbb{C}^i$ 到 $\mathbb{C}^{i+1}$ 的标准包含映射（定义 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的条件见定义 4.1）。因此，我们转而考虑 $G_{\mathbf{d}}$ 的极大子群的作用，该子群与子簇 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的定义相容：

定义 4.11. 给定一个表示 $M^f = (f^1_{n+1},\dots,f^{n-1}_{n+1}) \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$，我们将$\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$记为 M^f 在 $G^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的作用下的轨道：$= \prod_{i=1}^{n} B_{n+1}$，其中 B_{n+1} 是由可逆上三角矩阵组成的群，其大小为 $n+1$，定义如下

$$h\cdot M^f = (h_2 f^1_{n+1} h_1^{-1}, h_3 f^2_{n+1} h_2^{-1}, \dots, h_n f^{n-1}_{n+1} h_{n-1}^{-1})$$

对某个 $h \in G^{\iota}_{\mathbf{d}}$。

现在我们可以重新表述目标：我们希望参数化 $G^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 作用下的轨道 $\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$；或者等价地，我们希望参数化 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$中在 $\prod_{i=1}^{n} B_{n+1}$中存在态射使其同构的表示类。我们将这类同构记为

$$M^f \overset{B}{\cong} M^g, \tag{4.12}$$

并称 f 和 g 属于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$中的同一个 B-同构类，或 B-轨道。

注 4.13。如注 4.2 所示，对于 $i < n+1$，表示 $M^f = (f^1_{n+1},\dots,f^{n-1}_{n+1}) \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的线性映射 f^j_i 是 $\mathbb{C}^i$ 上 f^j_{n+1} 的限制。这意味着，若我们将某个 $h = (h_1,\dots,h_n) \in G^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的映射记为 $M^g := h\cdot M^f$，那么对于 $i < n+1$，M^g 的线性映射 g^j_i 是 $\mathbb{C}^i$ 上 g^j_{n+1} 的限制。换言之，对于固定的 $i < n+1$，h 在 M^f 上对线性映射 $(f^1_i,\dots,f^{n-1}_i)$ 的作用，由固定映射 $(h_1,\dots,h_n)$ 在 $(f^1_i,\dots,f^{n-1}_i)$ 上限制到 $\mathbb{C}^i$ 后所诱导的作用给出。我们通过下面的例子来阐明这一点。

例 4.14。 考虑箭图 $(\Gamma,\ I)$，其中 $n+1=3$ 及其表示 M^f 对应于某个 $f = (f^1_3) = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \in U_3$:

$$M^f:\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{[a]} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}}\ \circlearrowleft & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}} \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}}\ \circlearrowleft & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}} \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}} & \mathbb{C}^3 \end{array} .$$

M^f 在 $G^{\iota}_{\mathbf{d}} = B_3 \times B_3$ 的作用下的轨道是

$$\mathcal{O}^{\iota}_{M^f} = \{h_2 f^1_3 h_1^{-1} | (h_1,h_2) \in B_3 \times B_3\}$$

并且，如果我们将 $h_1 = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{smallmatrix}\right]$ 和 $h_2 = \left[\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_4 & y_5 \\ 0 & 0 & y_6 \end{smallmatrix}\right]$ 记为，那么表示 $M^g := h \cdot M^f$ 是

$$M^g = \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{g_1^1} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}} \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g_2^1} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}} \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{g_3^1} & \mathbb{C}^3 \end{array}$$

其中

$$g_1^1 = \left[\begin{smallmatrix} y_1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x_1 \end{smallmatrix}\right]^{-1}, \quad g_2^1 = \left[\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_4 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{smallmatrix}\right]^{-1},$$
$$g_3^1 = \left[\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_4 & y_5 \\ 0 & 0 & y_6 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & l \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{smallmatrix}\right]^{-1}.$$

注 4.15。 矩阵 $f \in U_{n+1}$ 的行（或列）阶梯形可通过 $h \in B_{n+1} \times B_{n+1}$ 的作用得到；如定义 4.11 所述，该作用由 $h \cdot f = h_2 f h_1^{-1}$ 给出：此作用会将 f 的主元“向上扫”和“向右扫”，从而使我们能够同时将 f 变换为其简化行列阶梯形。于是，我们将此形式视为 f 轨道的标准代表元：它是一个上三角矩阵，除每行和每列至多有一个元素等于 1 外，其余元素均为 0。这样的矩阵（一般而言并非上三角矩阵）称为**部分置换矩阵**，例如在 [21] 和[24]中便使用了这一术语。

例 4.16。 对于 $n+1=3$，在定义 4.11 所给出的作用下，各轨道的标准代表元为以下矩阵：

$$f^1 = \left[\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right], f^2 = \left[\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^3 = \left[\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right], f^4 = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right], f^5 = \left[\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right],$$
$$f^6 = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^7 = \left[\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^8 = \left[\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right], f^9 = \left[\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^{10} = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right],$$
$$f^{11} = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right], f^{12} = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^{13} = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^{14} = \left[\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right], f^{15} = \left[\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right].$$

这些矩阵表示了形如以下形式的 15 个轨道

$$\mathcal{O}^{\iota}_{M^f} = \{h_2 f_3^1 h_1^{-1} | (h_1, h_2) \in B_3 \times B_3\},$$

其中，$f_3^1 \in U_3$ 是定义例 4.14 中表示 M^f 的线性映射。

注 4.17。 由于 $(\Gamma,\ I)$ 的定义（见第 3 节），仅在维数为 $n+1=3$ 时考虑 4.16 中所给形式的轨道才有意义：对于 $n+1=2$，箭图没有定义；而对于 $n+1>3$，$(\Gamma,\ I)$-表示由多于一个线性映射组成。然而，计算一般维数 $n+1$ 下存在多少个这样的轨道是直接的：在维数 $n+1$ 下的轨道数 $\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$（其中 M^f 由一个 $n+1 \times n+1$ 上三角矩阵确定）是第 $n+2$ 个贝尔数，其递归定义为

$$b_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

这个数是通过递归计算秩介于 0 和 $n+1$ 之间的 $n+1 \times n+1$ 上三角矩阵可能具有的主元配置而得到的。

4.1. 表示的两种参数化 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$。 与例 4.16 不同，在一般维数下理解并计数轨道 $\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$ 是一个更复杂的问题：作用所执行的基变换彼此并不独立，因为一个表示中的线性映射 M^f 共享源顶点和目标顶点。

为了证明在定义 4.11 给出的作用下只有有限个轨道$\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$，并为这些轨道参数化，我们回顾 [1] 中提出的关于类型为 $\mathbb{A}_m$ （取任意定向）的 Dynkin 箭图的一个结果。设 Q_m 是类型为 $\mathbb{A}_m$ 的箭图。考虑一个 Q_m-表示 $A=(A_1, \ldots\ldots, A_{m-1})$，以及任意一对指标 u, v，使得$1 \leq u \leq v \leq m$。令 φ^A_{uv} 表示从所有源点对应向量空间的直和映至所有汇点对应向量空间的线性映射，该映射取自 u 与 v（包括 u 和 v）之间，其分量为

$$\begin{aligned} V_{s_{t-1}} \oplus V_{s_{t+1}} &\to V_{s_t} \\ (z, z') &\mapsto (\bar{A}_{t-1,t}(z) - \bar{A}_{t+1,t}(z')) \end{aligned}$$

其中，对于 $p=t-1$, $t+1$, A_{pt} 是所有从源点s_{t-1} 或 s_{t+1} 通往汇点 s_t的映射的复合。

定理 4.18。 [1, 命题 2。7] 在 $G_{\mathbf{d}}=\prod_{i=1}^{m}\mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{K})$ 的作用下， Q_m-表示 A 的轨道由非负整数集合 $N^A=\{N^A_{uv}\}_{1\leq u\leq v\leq m}$ 参数化，定义如下：

$$\begin{cases} N^A_{uv} \coloneqq \operatorname{rk}\varphi^A_{uv} & \text{if } u<v \\ N^A_{uv} \coloneqq \dim V_u & \text{if } u=v \end{cases}.$$

现在让我们回到如何参数化在定义 4.11 中给出的作用下的轨道 $\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$ 这一问题。首先，我们定义以下非负整数序列：

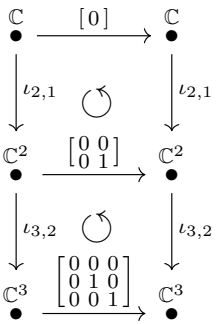
定义 4.19。 给定一个表示 $M^f \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$， M^f的**秩向量** 为 $\mathbf{r}^f\coloneqq((r^f_l,\ s),\ (r^f_{ij_1j_2k}))$，其中 l, $i=1, \ldots, n+1$, $s=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, i+1$ 且 $1\leq j_1\leq j_2\leq n-1$，其中 $r^f_{l,\ s}\coloneqq \dim(M^f_{l\ s})$，并且

$$\begin{cases} r^f_{ij_1j_2k} \coloneqq \dim(\operatorname{Im}(f_i^{j_2}\circ\cdots\circ f_i^{j-1})\cap \operatorname{Im}(\iota_{i,i-1}\circ\cdots\circ\iota_{k,k-1})) \text{ for } k=1,\ldots,i \\ r^f_{ij_1j_2k} \coloneqq \dim(\operatorname{Im}(f_i^{j_2}\circ\cdots\circ f_i^{j-1})\cap \mathbb{C}^k) \text{ for } k=i+1 \end{cases}. \tag{4.20}$$

换句话说，$\mathbf{r}^f$的第一部分是 M^f 的维数向量，而 M^f 秩向量第二部分所编码的信息，则由确定 M^f 的线性映射的像之间所有可能的交的维数构成。当 $k=i+1$ 时，数值 $r^f_{ij_1j_2k}$恰好是 $f_i^{j_2}\circ\cdots\circ f_i^{j-1}$ 的秩。

例 4.21。 与以下 (Γ, I)-表示相关联的秩向量 $\mathbf{r}^f=(\dim(\operatorname{Im}(f_1^1)\cap\mathbb{C}^1),\ \dim(\operatorname{Im}(f_2^1)\cap\mathbb{C}^1),\ \dim(\operatorname{Im}(f_2^1)\cap\mathbb{C}^2),\ \dim(\operatorname{Im}(f_3^1)\cap\mathbb{C}^1),\ \dim(\operatorname{Im}(f_3^1)\cap\mathbb{C}^2),\ \dim(\operatorname{Im}(f_3^1)\cap\mathbb{C}^3))=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2)$.

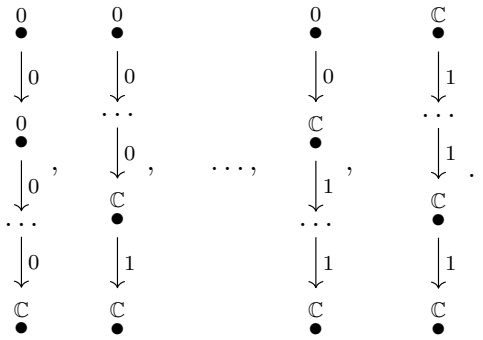
M^f :



为了证明秩向量可以参数化轨道 $\mathcal{O}^{\iota}_{Mf}$，我们需要以下技术引理：

引理 4.22. 形如 $U^{(h_1,\dots,h_n)}$ 的不可分解对象 (Γ, I)-表示，其秩向量作为自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}^N$ 的元素是线性无关的，其中N 表示维数为 $n+1$ 的任意秩向量的分量个数，这些对象定义于(4.4)。

证明. 我们对不可分解对象支撑中的列数进行归纳。对于基础情形，我们注意到，形如 $U^{(h_1,\dots,h_n)}$ 且仅支撑于 (Γ, I) 的一列上的不可分解对象，可以视为以下等向箭图类型 $\mathbb{A}_n$ 的不可分解对象：



这类不可分解对象的维数向量构成了所有不可分解对象 $U^{(h_1,\dots,h_n)}$ 的维数向量的一组基，因此它们的秩向量构成一个线性无关集。对于其他所有不可分解对象——也就是支撑于多列上的对象——为了证明线性无关性，我们还需要考虑秩向量的第二部分。

在归纳步骤中，我们假设当所考虑的不可分解对象 V的支撑中列的数目至多为 $m-1$ （对于某个 $m>1$）时，命题成立，并希望证明：对通过在 V的支撑中添加一列而得到的不可分解对象，命题也成立。将这些不可分解对象记为 V'。我们把 $\hat{}i$ 记作数 $n+1-h_{m-1}$，它是 $m-1$列中 V的维数向量非零的第一行。由于条件 $h_a \le h_b$ 对每个 $a \le b$都成立，而这对形如 $U^{(h_1,\dots,h_n)}$ 的所有不可分解对象都成立，因此我们知道，V' 的维数向量非零的 m列中的第一行至多为 $\hat{}i$。现在，如果这一行恰好是 $\hat{}i$，那么 V' 的秩向量为：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{V'} = (&0,\dots,0,r^V_{\hat{i},1,m-1,\hat{i}},0,\dots,0,r^V_{\hat{i},2,m-1,\hat{i}},0,\dots,0,1,0,\dots,0,r^V_{\hat{i}+1,1,m-1,\hat{i}},\\ &r^V_{\hat{i}+1,1,m-1,\hat{i}+1},\dots,1,0,\dots,r^V_{\hat{i}+2,1,m-1,\hat{i}},r^V_{\hat{i}+2,1,m-1,\hat{i}+1},r^V_{\hat{i}+2,1,m-1,\hat{i}+2},\dots,\\ &1,0,\dots,1,\dots,1)\end{aligned}$$

其中红色的 1 分别对应于 $r^{V'}{}_{\hat{i},m-1,m,\hat{i}}$、$r^{V'}{}_{\hat{i}+1,m-1,m,\hat{i}}$、$r^{V'}{}_{\hat{i}+2,m-1,m,\hat{i}}$，依此类推，直到 $r^{V'}{}_{n+1,m-1,m,\hat{i}}$。根据指标 $\hat{}i$的定义，秩向量 $\mathbf{r}^V$ 中相应的分量（以及支撑小于 V支撑的不可分解对象所对应的秩向量中的相应分量）均为零；这意味着，将 $\mathbf{r}^{V'}$加入后，迄今所考虑的所有不可分解对象的秩向量构成 $\mathbb{Z}^N$ 中的一个线性无关集。同样，我们知道，$\mathbf{r}^{V'}$ 中从 $r^{V'}{}_{n+1,m-1,m,\hat{i}}$到 $r^{V'}{}_{n+1,m-1,m,n+1}$（最后几个分量）的分量均为 1。

反之，若 m 列中 V' 的维数向量不为零的第一行是 $\hat{}i-1$，则秩向量 $\mathbf{r}^{V'}$ 中新增的 1 对应于所有标记为 $\ell, m-1, m, \ell'$ 的项，其中 $\ell \ge \hat{}i$ 且 $\hat{}\, i-1 \le \ell' < \hat{}i$，因此所有秩向量的集合

加上目前考察的不可分解对象的秩向量以及 $\mathbf{r}^{V'}$，构成一个线性无关集。若 m 列中 V' 的维数向量不为零的第一行是 $\hat{}i-2$，我们也可以用类似的方法处理：此时 $\mathbf{r}^{V'}$ 中新增的 1 是标记为 $\ell, m-1, m, \ell'$ 的项，其中 $\ell \geq \hat{}i$ 且 $\hat{}i-2 \leq \ell' < \hat{}i$，依此类推，直到 m 列中 V' 的维数向量不为零的第一行是 (Γ, I) 的第一行。将所有这类秩向量加入已有的秩向量集合，不会改变其在 $\mathbb{Z}^N$ 中的线性无关性。这证明了归纳步骤中的结论，并完成了证明。□

下面的例子展示了引理 4.22 在维数$n+1=3$中的证明思路：

例 4.23. (Γ, I) 中形如 U^{h_1,h_2} 的 12 个不可分解对象的秩向量为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{U^1} &= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), & \mathbf{r}^{U^2} &= (1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0),\\
\mathbf{r}^{U^3} &= (0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0), & \mathbf{r}^{U^4} &= (0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0),\\
\mathbf{r}^{U^5} &= (0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0), & \mathbf{r}^{U^6} &= (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0),\\
\mathbf{r}^{U^7} &= (0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0), & \mathbf{r}^{U^8} &= (0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1),\\
\mathbf{r}^{U^9} &= (0,0,1,1,1,1,0,0,0,1,1,1), & \mathbf{r}^{U^{10}} &= (0,1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,1),\\
\mathbf{r}^{U^{11}} &= (0,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,1), & \mathbf{r}^{U^{12}} &= (0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1).
\end{aligned}$$

其中

$$U^1 = \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{1} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{1} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{1} & \mathbb{C} \end{array},\ U^2 = \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array},\ U^3 = \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} \end{array},\ U^4 = \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

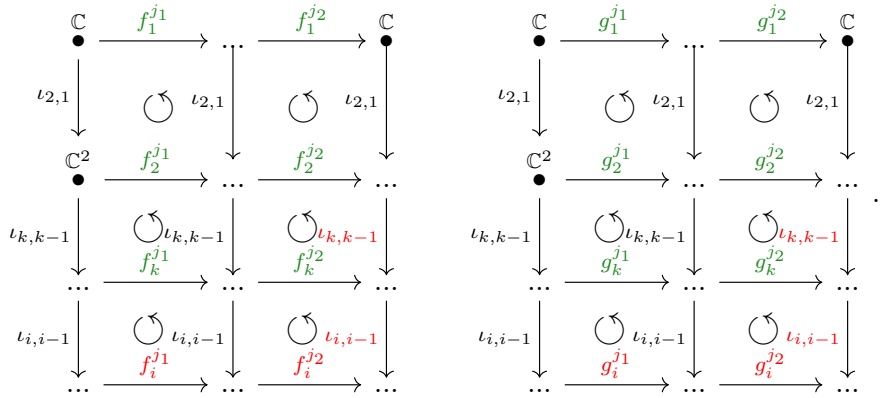
等等。容易验证，这十二个秩向量是线性无关的（因此构成 $\mathbb{Z}^{12}$的一组基）：将它们作为矩阵的行，并使用高斯消元即可。

现在我们可以陈述关于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$中表示的 B-同构类的第一个主要结果。

定理 4.24. 两个表示 M^f, M^g属于 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$，在定义 *4.11* 中给出的 $G^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 作用下处于同一轨道，当且仅当 $\mathbf{r}^f = \mathbf{r}^g$。

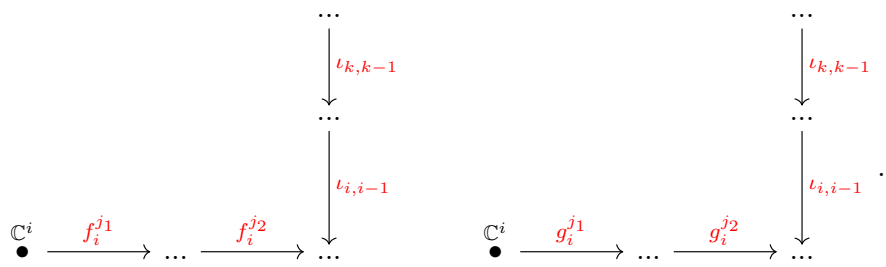
证明。($\Longrightarrow$) 我们假设 M^f和 M^g是 B-同构的，同时存在 i，j_1，j_2，k使得 $r^f_{ij_1j_2k} \neq r^g_{ij_1j_2k}$。如果 $k \neq i+1$，参数 $r^f_{ij_1j_2k}$和 $r^g_{ij_1j_2k}$对应于由红色标出的线性映射的复合的像之交的维数：

标为红色的线性映射：



如果 $k=i+1$，那么 $r^f_{ij_1j_2k} \neq r^g_{ij_1j_2k}$表示 $\mathrm{rk}(f_i^{j_2}\circ\cdots\circ f_i^{j-1}) \neq \mathrm{rk}(g_i^{j_2}\circ\cdots\circ g_i^{j_1})$。

假设 $M^f \overset{B}{\cong} M^g$意味着存在表示 φ在 $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(Q,I)$ 中的一个同构（由一个可逆的上三角矩阵表示），使得$\varphi(M_i^f{}_{,j}) = M_i^g{}_{,j}$对所有 i,j均成立。特别地，φ限制在以下类型的子箭图上时是一个同构 $\mathbb{A}_m$：



我们将命题 2.7 应用于这些子箭图。φ 在 M^f与 M^g 之间的同构于是推出

$$\mathrm{rk}((f_i^{j_2}\circ\cdots\circ f_i^{j_1}) - (\iota_{i,i-1}\circ\cdots\circ\iota_{k,k-1}) = \mathrm{rk}((g_i^{j_2}\circ\cdots\circ g_i^{j_1}) - (\iota_{i,i-1}\circ\cdots\circ\iota_{k,k-1}))$$

and

$$\mathrm{rk}(f_i^{j_2}\circ\cdots\circ f_i^{j_1}) = \mathrm{rk}(g_i^{j_2}\circ\cdots\circ g_i^{j_1}),$$

这与假设 $r^f_{ij_1j_2k} \neq r^g_{ij_1j_2k}$ 矛盾。

($\Longleftarrow$) 我们需要证明，若 $\mathbf{r}^f = \mathbf{r}^g$，则 $M^f \cong M^g$。这等价于证明，对于一个固定的秩向量 $\mathbf{r}^f$，恰好对应一个不可分解对象的分解：$M^f = \bigoplus U_{(h_1,\ldots,h_n)}$。这一对应关系可直接由引理 4.22 得出。□

例 4.25。定理 4.24 为以下事实提供了另一种证明：例 4.16 中表示所有轨道的矩阵实际上定义了彼此不 B-同构的表示。我们省略其秩向量的前六个条目，因为所有 (,)-表示的维数

向量在 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中是固定的（在维数 $n+1=3$ 下）为 (1，1，2，2，3，3):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}^{f^1}=(1,1,2,1,2,3), \quad \mathbf{r}^{f^2}=(1,1,2,1,2,2), \quad \mathbf{r}^{f^3}=(1,1,1,1,1,2),\\
&\mathbf{r}^{f^4}=(0,0,1,0,1,2), \quad \mathbf{r}^{f^5}=(1,1,1,1,2,2), \quad \mathbf{r}^{f^6}=(0,0,1,1,2,2),\\
&\mathbf{r}^{f^7}=(0,1,1,1,2,2), \quad \mathbf{r}^{f^8}=(0,1,1,1,1,2), \quad \mathbf{r}^{f^9}=(1,1,1,1,1,1),\\
&\mathbf{r}^{f^{10}}=(0,0,1,0,1,1), \quad \mathbf{r}^{f^{11}}=(0,0,0,0,0,1), \quad \mathbf{r}^{f^{12}}=(0,0,0,0,1,1),\\
&\mathbf{r}^{f^{13}}=(0,0,0,1,1,1), \quad \mathbf{r}^{f^{14}}=(0,1,1,1,1,1), \quad \mathbf{r}^{f^{15}}=(0,0,0,0,0,0).
\end{aligned}$$

定义 4.26. B-同构类的参数化—— $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 中(Γ, I)-表示的参数化，如定义 4.19 所述，称为 r-**参数化**。

如例 4.25 所述，一旦对所考虑的表示作出某些假设（例如其维数向量）， r-参数化所提供的部分数据便是冗余的。现在，我们为 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$中的(Γ, I)-表示引入另一种更简洁的参数化。首先，回顾矩阵舒伯特簇的定义以及文献 [24]中的一些事实。

定义 4.27. [24, 定义 15.1] 设 $w\in \mathrm{Mat}_{k\times l}$ 是一个部分置换，即 w 是一个 $k\times l$ 矩阵，其每行和每列中除至多一个值为 1 的元素外，其余元素均为 0。$\underline{\mathrm{M}}\mathrm{at}_{k\times l}$ 中的**矩阵舒伯特簇** X_w 是子簇

$$\overline{X}_w=\{Z\in \mathrm{Mat}_{k\times l}\,|\,\mathrm{rk}(Z_{p\times q})\leq \mathrm{rk}(w_{p\times q})\ \forall p,q\}$$

其中 $Z_{p\times q}$ 是 Z 的左上角 $p\times q$ 矩形子矩阵。

我们用 B_k^- 表示 GL_k 中可逆下三角矩阵的 Borel子群。由定义 4.27 可知，矩阵舒伯特簇在 $B_k^-\times B_l$ 作用于 $\mathrm{Mat}_{k\times l}$ 的作用下保持不变，该作用定义为 $(b^-,b)\cdot Z=b^-Zb^{-1}$（此作用的效果是“向下扫过”和“向右扫过”）。下面的命题表明， $B_k^-\times B_l$ 在 $\mathrm{Mat}_{k\times l}$ 中只有有限个轨道。

命题 4.28。 [24, 命题 15。27] 在 $B_k^-\times B_l$ 作用于 $\underline{\mathrm{Mat}_{k\times l}}$ 的每个轨道中，都存在唯一的部分置换 w，且该轨道包含于 X_w 中。

$B_k^-\times B_l$ 作用于 $\mathrm{Mat}_{k\times l}$ 的轨道于是可以用秩数组进行参数化：给定一个部分置换 w， $r(w)$ 是这样一个秩数组，其位于 (p,q) 的项为 $\mathrm{rk}(w_{p\times q})$。由于该数组描述了 w 的左上角子矩阵，我们称这种参数化为**西北参数化**。由命题 4.28 可知，两个矩阵 Z, Z' 属于同一轨道，当且仅当 $r(Z)=r(Z')$。此外， [24, 引理 15。19] 和[24, 定理 15。31] 表明，在 $B_k^-\times B_l$ 的作用下， w' 的轨道包含于 w 的轨道的闭包中（关于 $\mathrm{Mat}_{k\times l}$ 上的扎里斯基拓扑），当且仅当 $r(w')\leq r(w)$，其中“ 小于或等于”关系是对秩数组按分量定义的。

现在让我们回顾定义 4.11 中考虑的群作用。对于矩阵空间 $M\mathrm{in}\,\mathrm{Mat}_{n+1}$ 中的矩阵，该作用定义为 $(h_1,\ h_2)\cdot M=h_2Mh_1^{-1}$，其中 $(h_1,\ h_2)\in B_{n+1}\times B_{n+1}$。正如注 4.15 所指出的，该作用的效果是“向上扫掠”和“向右扫掠”，这意味着 M 的左下矩形子矩阵的秩保持不变。不过，一般而言，定义 4.11 中的群 $G^{\iota}_{\mathbf{d}}=\prod_{i=1}^{n}B_{n+1}$ 作用于一个由 $n-1$ 个矩阵组成的元组（环境维数为 $n+1$）。我们的下一个目标是证明，矩阵舒伯特簇的西北参数化可以调整以适用于我们的情形；也就是说，我们希望用由 $M^f=(f^1_{n+1},\ \ldots,\ f^{n-1}_{n+1})\in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 得到的某些子矩阵的秩来描述轨道 $\mathcal{O}^{\iota}_{M^f}$。

定义 4.29. 给定 $M^f=(f_{n+1}^1,\ \ldots,\ f_{n+1}^{n-1})\in R_{\mathbf{d}}^{\iota}$，我们将 M^f 的**西南数组**定义为

$$\mathbf{s}^f=(\mathbf{s}^{f_{n+1}^{j_2}\circ\cdots\circ f_{n+1}^{j_1}}):=(\mathrm{rk}(f_{n+1}^{j_2}\circ\cdots\circ f_{n+1}^{j_1})_{p\times q})$$

对于 $1\le p\le q\le n+1$和 $1\le j_1\le j_2\le n-1$，其中 $(f_{n+1}^{j_2}\circ\cdots\circ f_{n+1}^{j_1})_{p\times q}$是 $f_{n+1}^{j_2}\circ\cdots\circ f_{n+1}^{j_1}$的左下角 $p\times q$子矩阵。

换言之， M^f 的西南数组包含了定义 M^f 在 $R_{\mathbf{d}}^{\iota}$中的线性映射的所有可能复合的左下角秩。由于所有这些矩阵都是上三角矩阵，我们只考虑在条目 $(p,\ q)$ 处计算的左下角秩，其中 $p\le q$。为了更直观地呈现这些信息，我们也将$\mathbf{s}^f$ 的分量 $(\mathbf{s}^{f_{n+1}^{j_2}\circ\cdots\circ f_{n+1}^{j_1}})$ 写成上三角矩阵，使每个条目都包含相应西南秩的值。

例4.30. 我们再次考虑例4.21中的（Γ, I）-表示，并写出它的西南数组：

$$M^f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \xrightarrow{[0]} & \mathbb{C}\\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}}\ \circlearrowleft & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}}\\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]} & \mathbb{C}^2\\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}}\ \circlearrowleft & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}}\\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]} & \mathbb{C}^3\end{array}.$$

在环境维数为 $n+1=3$ 时，西南数组只包含一个矩阵：

$$\mathbf{s}^f=\left(\begin{bmatrix}0&1&2\\ *&1&2\\ *&*&1\end{bmatrix}\right).$$

定理 4.31. 定义 *4.11* 中给出的作用下， $R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ 中的两个表示 M^f、M^g 属于同一轨道，当且仅当 $\mathbf{s}^f=\mathbf{s}^g$。

证明. （$\Longrightarrow$）若 $\mathcal{O}_{M^g}^{\iota}=\mathcal{O}_{M^f}^{\iota}$，则存在一个元素 $h\in G_{\mathbf{d}}^{\iota}$，使得 $h\cdot M^f=M^g$，即 $h_2f_{n+1}^1h_1^{-1}=g_{n+1}^1,\ h_3f_{n+1}^2h_2^{-1}=g_{n+1}^2$，依此类推。这意味着

$$\mathcal{O}_{M^{g_{n+1}^j}}^{\iota}=\mathcal{O}_{M^{f_{n+1}^j}}^{\iota}$$

对所有 j 均成立，对于所有可能的复合 $f_{n+1}^{j_2}\circ\cdots\circ f_{n+1}^{j_1}$ 和 $g_{n+1}^{j_2}\circ$也同样成立 $\cdots\circ g_{n+1}^{j_1}\circ$ 根据 [24, 命题 15，27], 这意味着 $\mathbf{s}^f=\mathbf{s}^g$。

（$\Longleftarrow$) 当 $\mathbf{s}^f=\mathbf{s}^g$时，声称 M^f和 M^g属于同一个 $G_{\mathbf{d}}^{\iota}$-轨道，是以下事实的直接推论：如果$\mathbf{s}^f=\mathbf{s}^g$，那么 $\mathbf{r}^f=\mathbf{r}^g$ （其中 $\mathbf{r}^f$ 是定义 4.19 中的秩向量）。这是因为，给定一个西南数组，恢复相应秩向量的过程会得到唯一结果。□

注 4.32。 根据定理 4.31，我们可以仿照注 4.17 计算维数为 $n+1$ 的 B-轨道数。将 $n+2$-阶贝尔数相加 $n-1$ 次（次数与定义 M^f 的映射f_{n+1}^1、……、 f_{n+1}^{n-1} 的数量相同），得到

$$(n-1)b_{n+2}=(n-1)\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}b_k.$$

5. 线性退化

本节简要讨论旗簇的线性退化，并回顾一些相关结果，进而介绍我们对 A 型舒伯特簇线性退化的定义。一般而言，退化是指考虑一个定义在 $\mathbb{A}^1$ 上的簇族，使得 $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ 上的所有纤维（即一般纤维）彼此同构，而它们的极限是 0 上的特殊纤维。在 [7, 命题 2.7], 中，作者将线性退化旗簇实现为与 A 型等向箭图的表示相关联的箭图格拉斯曼簇。此簇族随后得到了广泛研究，例如见 [5, 6]。本节主要参考文献为 [5], ，我们尤其关注某个簇态射的平坦性。回顾例 2.7，我们曾描述如何将旗簇 Fl_{n+1} 实现为箭图格拉斯曼簇。这是由以下构造得到的一个特殊情形。

设 V 是一个维数为 $n+1$ 的向量空间，其中 $n \geq 1$，并固定一组基 $\mathcal{B} = \{ b_1, \ldots, b_{n+1} \}$。我们用 $f = (f_1, \ldots\ldots, f_{n-1})$ 表示形如以下形式的线性映射序列

$$V \xrightarrow{f_1} V \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} V \xrightarrow{f_{n-1}} V \ ,$$

它们可视为簇 $R = \mathrm{Hom}(V, \ V)^{n-1}$ 的闭点。按照 (2.9) 中的定义，群 $G = \mathrm{GL}(V)^n$ 作用于 R，作用方式为

$$g \cdot f \coloneqq (g_2 f_1 g_1^{-1}, g_3 f_2 g_2^{-1}, \ldots, g_n f_{n-1} g_{n-1}^{-1}).$$

接下来，我们考虑子空间组 $U = (U_1, \ldots\ldots, U_n)$，它们属于 V，且满足 $\dim(U_i) = i$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$。这些可视为格拉斯曼簇的乘积中的闭点

$$Z = \mathrm{Gr}(1, n+1) \times \mathrm{Gr}(2, n+1) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(n, n+1),$$

群 G 在其上通过平移作用:

$$g \cdot U \coloneqq (g_1 U_1, g_2 U_2, \ldots, g_n U_n).$$

定义 5.1。若 $f_i(U_i) \subseteq U_{i+1}$ 对于 $i = 1$、……、n 成立，则称两个元组 $f \in R$ 和 $U \in Z$ 为**相容**。

定义 5.2。旗簇Fl_{n+1} 的普适线性退化是定义如下的簇:

$$Y = \{(f, U) : f_i(U_i) \subseteq U_{i+1} \text{ for all } i = 1, \ldots, n\},$$

i.即映射序列与子空间序列构成的相容对簇。

现在，由于 G 作用于 R 和 Z，它便逐分量作用于 Y；通过考察投影 $\pi : Y \to R$ 和 $p : Y \to Z$ 的纤维，可以根据其分别在 R 和 Z 上的作用推导出 Y 的一些性质。投影 $p : Y \to Z$ 是 G- 等变的，这意味着它与 G: $g \cdot p((f, U)) = p(g \cdot (f, U))$ 的作用相交换，对所有 $g \in G, f \in R$ 和 $U \in Z$均成立。此外，空间 Z 在G的作用下是齐性空间，即该作用是传递的，因此 Y是以Z为底空间的齐性纤维化。若固定一个元组 $U \in Z$，则可通过投影 p 将其纤维识别为

$$\prod_{i_1}^{n-1} (\mathrm{Hom}(U_i, U_{i+1}) \oplus \mathrm{Hom}(V_i, V)),$$

其中 V_i 是 U_i 在 V中的补集。这些事实表明， Y是 Z上的齐性向量丛，因此它是光滑且不可约的。另一方面，若固定一组线性映射 $f \in R$ ，并通过投影 π考察其纤维，便得到由所有与 f相容的元组 $U \in Z$ 构成的空间。换言之，每个纤维 $\pi^{-1}(f)$都可视为完全旗簇的一个线性退化版本（完全旗簇即 $f = (\mathrm{id}, \mathrm{id} \ldots, \mathrm{id})$上的纤维）。

定义 5.3. [5, 定义 1] 对于固定的 $f \in R$，我们称 $Fl_{n+1}^{f} := \pi^{-1}(f)$ 为 **f-线性退化旗簇**，而映射 $\pi: Y \to R$ 是**普适线性退化**之于 Fl_{n+1}。

在 [5], 中，除其他结果外，作者使用秩元组来刻画 R中 π 平坦的轨迹，以及其平坦且具有不可约纤维的轨迹。我们回顾一下，若簇态射在每个茎上诱导的环映射都是平坦映射，则称该态射是平坦的；此外，若一个态射是平坦的，则其纤维是等维的。然而，对于态射 $\pi: Y \to R$，作者利用了以下平坦性的刻画：

命题 5.4。 [23, 定理 23。1] 设 $f: X \to Y$ 是一个簇态射，其中X 是 *Cohen-Macaulay* 的，而 Y 是正则的。那么， f 平坦当且仅当其纤维是等维的。

我们在本节末回顾 R 中 G轨道的参数化，并报告 [5] 中关于态射 $\pi: Y \to R$的平坦轨迹所得的结果。

考虑一个元组 $f \in R$ 等价于选择一个 $\mathbb{A}_n$ 等向箭图的$\mathbf{d}$维表示，其中$\mathbf{d} = (n+1, \ldots, n+1)$：

$$\overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\bullet} \xrightarrow{f_1} \overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\bullet} \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} \overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\bullet},$$

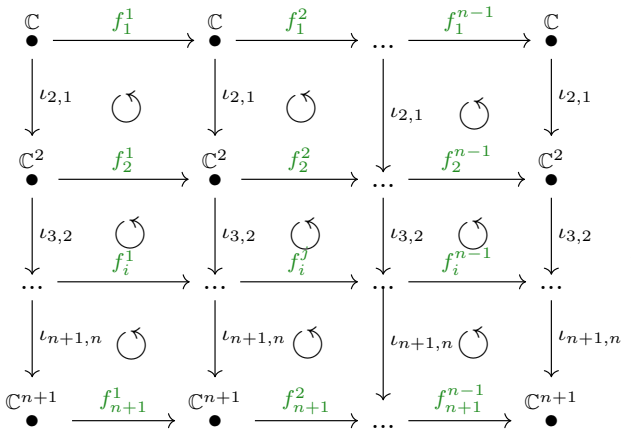
而 f-线性退化旗簇是与该表示相关联的箭图格拉斯曼簇。于是， G 在 R 中的轨道参数化，可以视为 [1, 命题 2.7] 中秩元组参数化的一个特例（见定理 4.18）。在此情形下，与轨道对应的秩元组具有形式$\mathbf{r}^f = (r_{i,j}^f)_{1 \le i \le j \le n-1}$，其中 $r_{i,j} = \mathbf{rk}(f_j \circ \cdots \circ f_i)$：对于 f, g中任意元素，轨道 $\mathcal{O}_f$与 $\mathcal{O}_g$重合，当且仅当$\mathbf{r}^f = \mathbf{r}^g$。此外，正如 [1, 定理 5.2], 所证明的，包含关系 $\mathcal{O}_g \subseteq \mathcal{O}_f$ （扎里斯基闭包）也可以用同样的参数化来描述。这些包含关系在所有 $\overline{G}$-轨道的集合上诱导出一个偏序，而该偏序可以从秩元组中读出：关系 $\mathcal{O}_g \subseteq \mathcal{O}_f$ 成立，当且仅当$\mathbf{r}^g \le \mathbf{r}^f$。在此情形下，我们称 $\mathcal{O}_f$ **退化为** $\mathcal{O}_g$。

例 5.5。 $f = (\mathrm{id}, \mathrm{id} \ldots, \mathrm{id})$的轨道由 $r_{i,\,j} = n+1$ 对所有$i,\ j$参数化，因此它退化为所有其他轨道。彼此同构的箭图表示对应同构的箭图格拉斯曼簇，这意味着带有 $g \in \mathcal{O}_f$ 的 g-线性退化旗簇都同构于完全旗簇 Fl_{n+1}。类似地，（0，0，...，0）的轨道由 $r_{i,\,j} = 0$ 对所有 $i,\ j$参数化，这意味着所有其他轨道都退化为该轨道。

定理 5.6。 [5, 定理 3] π 在 R 中的平坦轨迹，是所有退化为 $\mathbf{r}^2$, 的轨道之并，其中 $r_{i,\,j}^2 = n - j + i$ 对所有 $i < j$均成立。

5.1. 舒伯特簇的线性退化。本节利用舒伯特簇作为箭图格拉斯曼簇的实现——或其解奇异化——来定义舒伯特簇的线性退化，相关描述见 [16]。在第 3 节中，我们回顾了带关系箭图 $(\Gamma,\ I)$ 及其表示 M，随后在第 4 节中考察了子簇$R_{\mathbf{d}}^{\iota}$ ，它位于维数向量为 $\mathbf{d}$ 的所有 $(\Gamma,\ I)$ 表示所构成的簇 $R_{\mathbf{d}}$ 中。如注 4.2 所述，该子簇中的元素可由线性映射元组 $f = (f_{n+1}^1,\ \ldots,\ f_{n+1}^{n-1}) \in \prod_{j=1}^{n-1} U_{n+1}$ 描述，其中 U 是矩阵空间 Mat_{n+1} 的子群，由相对于所选基 $\mathcal{B} = \{ b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \}$ 的上三角矩阵组成。

相应于 f 的表示可以如下直观表示：



其中每个映射 f_i^j都由 f_{n+1}^j的相应子矩阵表示（即，它是 f_{n+1}^j 到 $\mathbb{C}^i$的限制）。

在 [16], 中，我们针对箭图 (Γ, I) 给出了两种不同的维数向量构造。维数向量 $\mathbf{r}^w$ 定义为

$$r_{i,j}^w := \#\{k \le j : w(k) \le i\}, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, n$$

并使我们能够通过箭图格拉斯曼簇 $\mathbf{Gr}_{\mathbf{r}^w}(M)$ 恢复舒伯特簇 X_w 的 Bott-Samelson 解消。第二个维数向量记为 $\mathbf{e}^w$，仅在 X_w 为光滑簇时使用，其定义为

$$\begin{cases} e_{i,j}^w := r_{i,j}^w & \text{if } r_{i,j}^w = \min\{i,j\} \\ & \text{or } r_{i,j}^w = 0 \\ e_{i,j}^w := \max\{e_{i-1,j}^w, e_{i,j-1}^w\} & \text{if } 0 < r_{i,j}^w < \min\{i,j\} \end{cases}$$

并用于找出箭图格拉斯曼簇 $\mathbf{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M)$ 与所考虑的舒伯特簇之间的显式同构。本节旨在介绍舒伯特簇的线性退化；为此，我们将定义（所考虑的舒伯特簇） X_w的普适线性退化，其具体构造取决于固定的置换 w。对于使 X_w 成为奇异簇的置换 w ，我们将采用相应的维数向量$\mathbf{r}^w$。而对于产生光滑舒伯特簇 X_w的置换 w ，构造 X_w 的线性退化时则考虑维数向量 $\mathbf{e}^w$。然而，为了简化整个构造过程中的记号，我们将用 $\mathbf{e}^w$ 表示与固定置换 w对应的维数向量，不再按情形分别使用不同记号。

现在固定一个置换 w 属于 S_{n+1} ，并记 Z 为格拉斯曼簇的乘积

$$Z = \prod_{i,j} \mathrm{Gr}(e_{i,j}^w, \mathbb{C}^i),$$

对于 $i = 1$、…、 $n+1$和 $j = 1$、…、 n，其中$\mathbf{e}^w$是由 w构造的维数向量， $U = (U_{ij})$ 表示 Z中的一个闭点。我们考虑定义 4.11 中给出的群$G_{\mathbf{d}}^\iota := \prod_{i=1}^n B_{n+1}$ 对 $R_{\mathbf{d}}^\iota$ 的作用：

$$h \cdot f = (h_2 f_{n+1}^1 h_1^{-1}, h_3 f_{n+1}^2 h_2^{-1}, \dots, h_n f_{n+1}^{n-1} h_{n-1}^{-1})$$

对于某个 $h \in G_{\mathbf{d}}^\iota$。随后，如注 4.13 所述，这一作用扩展到其他线性映射 f_i^j （ $i < n+1$）：每个 f_i^j 都受映射 $(h_1, \dots, h_n)$ 在 $\mathbb{C}^i$ 上的限制作用。群 $G_{\mathbf{d}}^\iota$ 通过平移作用于 Z：

$$h \cdot U := (h_1 U_{n+11}, h_2 U_{n+12}, \dots, h_n U_{n+1n})$$

对于 $i < n+1$，通过令映射 $(h_1, \ldots\ldots, h_n)$ 在 $\mathbb{C}^i$ 上的限制通过平移作用于 U_{ij}，这一作用扩展到其他子空间 U_{ij}。

定义 5.7. 若对 $(\Gamma, I)_1$ 中的所有箭 α 都有 $f_\alpha(U_{s(\alpha)}) \subseteq U_{t(\alpha)}$，则称对 (f, U) **相容**。

定义 5.8. 舒伯特簇 X_w 的**普适线性退化**是如下定义的簇

$$Y = \{(f, U) : f_\alpha(U_{s(\alpha)}) \subseteq U_{t(\alpha)} \text{ for all } \alpha \in (\Gamma, I)_1\}.$$

于是我们可以考虑两个投影 $\pi: Y \to R^\iota_{\mathbf{d}}$ 与 $p: Y \to Z$。$G^\iota_{\mathbf{d}}$ 在 $R^\iota_{\mathbf{d}}$ 与 Z 上的作用诱导了 $G^\iota_{\mathbf{d}}$ 在 Y 上的作用，且投影 p 是 $G^\iota_{\mathbf{d}}$-等变的，但在此情形下 $G^\iota_{\mathbf{d}}$ 在 Z 上的作用并非可迁。现在，若我们在 $R^\iota_{\mathbf{d}}$ 中固定一组映射 f，并经由投影 π 考虑其纤维，便得到由所有与 f 相容的 $U \in Z$ 所构成的空间。这意味着每个纤维 $\pi^{-1}(f)$ 都可视为固定舒伯特簇 X_w 的一个线性退化版本，而该舒伯特簇本身正是 $f = (\mathrm{id}, \mathrm{id} \ldots, \mathrm{id})$ 上的纤维。

定义 5.9. 对于固定的 $f \in R^\iota_{\mathbf{d}}$，我们称 $X^f_w := \pi^{-1}(f)$ 为 **f-线性退化舒伯特簇**，映射 $\pi: Y \to R^\iota_{\mathbf{d}}$ 则是**其普适线性退化**。X_w。

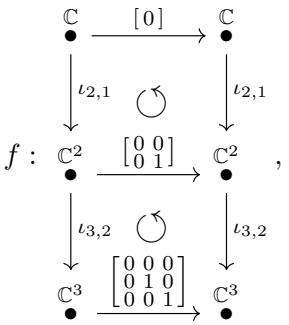
换言之，f-线性退化舒伯特簇定义为箭图 Grassmannian $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$，其中 M^f 是依照第 4 节的定义与 f 相关联的（Γ, I）-表示。通过比较旗簇线性退化的定义与我们对舒伯特簇线性退化的定义，可以看出，我们在第 4 节对所考察的（Γ, I）-表示施加的限制如今显得更加合理。我们将竖直映射固定为标准包含映射，并改变水平映射；这意味着我们退化了定义每个旗的条件，但没有改变决定哪些旗属于 X_w 的组合条件。

在第 4.1 节中，我们为 $R^\iota_{\mathbf{d}}$ 中的 $G^\iota_{\mathbf{d}}$-轨道给出了两种不同的参数化：定义 4.19 中的秩向量，以及定义 4.29 中的西南数组。此外，西南参数化使我们能够描述形如 $\mathcal{O}^\iota_{M^g} \subseteq \mathcal{O}^\iota_{M^f}$ 的包含关系：我们根据 [24, 引理 15.19] 和 [24,定理 15.31] 得出以下推论。

推论 5.10. $\mathcal{O}^\iota_{M^g}$ 在 $G^\iota_{\mathbf{d}}$ 的作用下得到的轨道 M^g 包含于 M^f 的轨道 $\mathcal{O}^\iota_{M^f}$ 的闭包中（相对于矩阵空间 $n+1$ 上的扎里斯基拓扑），当且仅当 $\mathbf{s}^f \leq \mathbf{s}^g$，其中“小于等于”关系是指西南数组上的逐分量关系。在这种情况下，我们记作 $\mathcal{O}^\iota_{M^g} \subseteq \mathcal{O}^\iota_{M^f}$，并称 $\mathcal{O}^\iota_{M^f}$ 退化为 $\mathcal{O}^\iota_{M^g}$。

例5.12. 与例 5.5 类似，$\mathrm{id} = (\mathrm{id}, \mathrm{id}\ldots\ldots, \mathrm{id})$ 的轨道由可能的最大西南秩描述，因此它退化为所有其他轨道。由于同构箭图表示会产生同构的箭图格拉斯曼簇，g-线性退化舒伯特簇（其中 $g \in \mathcal{O}_f$）都同构于舒伯特簇 X_w。“最退化”的轨道是 $0 = (0, 0, \ldots\ldots, 0)$ 的轨道：对所有 i, j，它由 $\mathbf{s}_{i,j} = 0$ 参数化，因此所有其他轨道都退化为该轨道。在这种情况下，(Γ, I) 的水平箭头所对应的线性映射不会对属于不同列的子空间 $U_{i,j}$ 施加任何条件。这意味着，0-线性退化舒伯特簇是 n 个部分旗簇的乘积（(Γ, I) 的每一列对应一个部分旗簇），其中自由子空间的维数由 $\mathbf{e}^w$ 中相应的条目给出。

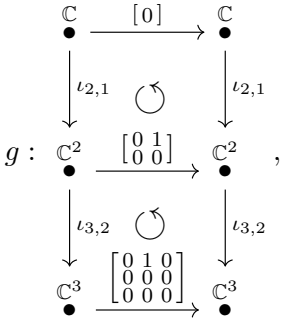
例 5.12. 再次考虑例4.30中的$(\Gamma,\ I)$-表示：



其秩向量和西南数组分别为：

$$\mathbf{r}^f=(0,0,1,0,1,2),\quad \mathbf{s}^f=\left(\begin{bmatrix}0&1&2*&1&2*&*&1\end{bmatrix}\right).$$

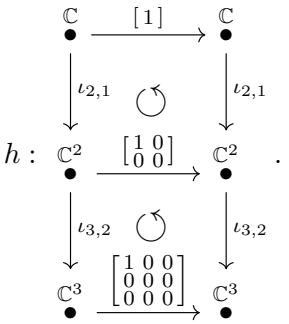
$(\Gamma,\ I)$-表示



显然与 f 不属于同一轨道，因为其秩为 $\mathbf{1}$，而非 2（矩阵的秩与其西南秩相同 $s_{1,\ n+1}$）。其秩向量和西南数组为：

$$\mathbf{r}^g=(0,1,1,1,1,1),\quad \mathbf{s}^g=\left(\begin{bmatrix}0&1&1*&0&0*&*&0\end{bmatrix}\right).$$

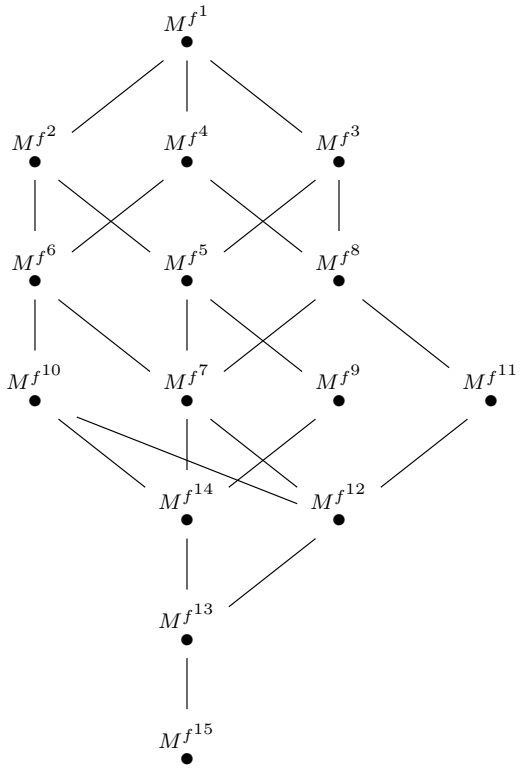
这两个西南数组之间的关系是$\mathbf{s}^g\leq\mathbf{s}^f$，这意味着 $\mathcal{O}^\iota_{M^g}\subseteq\mathcal{O}^\iota_{M^f}$。注意，比较它们的秩向量不会得出相同的结果：事实上，$\mathbf{r}^g$ 和$\mathbf{r}^f$ 不可比较。一个在 $G^\iota_{\mathbf{d}}$-轨道的偏序集中既不高于也不低于 f 的 $(\Gamma,\ I)$-表示的例子是



它的西南数组是$\mathbf{s}^h=\left(\begin{bmatrix}1&1&1*&0&0*&*&0\end{bmatrix}\right)$，与$\mathbf{s}^f$不可比较。这个例子凸显了西南参数化与 G-轨道的参数化之间的差异；对于 $G=\mathrm{GL}(V)^n$，这也意味着它们的偏序集之间存在差异。对于 G-作用，只需比较矩阵（所有复合）的秩，

而比较 $G^\iota_{\mathbf{d}}$-轨道时，我们需要检查矩阵中的哪些项实际上对秩有贡献。

例5.13。 在例 4.16 中，我们列出了维数为 $n+1=3$ 的十五个B-轨道的标准代表元。这些 B-轨道（的闭包）之间的关系由下列偏序集表示：



注 5.14。 $G^\iota_{\mathbf{d}}$-轨道之间包含关系所诱导的序是 G-轨道之间包含关系所诱导的序的细化，意思是，在后一种序下相等的元素，在前一种序下可能并不相等。这意味着， $G^\iota_{\mathbf{d}}$作用所诱导的序比 G作用所诱导的序更强：若在前一种序下 $a \leq b$ 成立，那么在后一种序下也成立。

注 5.15。 在某些特殊情形下，计算箭图格拉斯曼簇 $\mathsf{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$（即 f 线性退化的舒伯特簇）的维数特别容易。若$f=0=(0,\dots,0)$，如例5.11中所述，则 $\mathsf{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$ 是若干部分旗簇的乘积：其维数等于各部分旗簇维数之和。然而，一般而言，所得的簇复杂得多，其维数的计算也一样。我们只能给出其不可约分支维数的下界：对于任意 $f \in R^\iota_{\mathbf{d}}$ 和 $\mathbf{d}=$**维数** M_{id}，$\mathsf{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$ 的所有不可约分支的维数至少为 $\langle \mathbf{e}^w,\ \mathbf{d}-\mathbf{e}^w\rangle$；根据 [16, 推论 4.6]，这正是 $\mathsf{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M_{\mathrm{id}})$ 的维数。

在列举几个线性退化舒伯特簇的例子，并开始讨论态射 $\pi\colon Y \to R^\iota_{\mathbf{d}}$ 的平坦轨迹之前，我们想先完成对西南参数化的描述。我们知道，元组 $f \in R^\iota_{\mathbf{d}}$ 由其西南数组参数化，但哪些非负整数元组可以作为某个元组 $f \in R^\iota_{\mathbf{d}}$的西南数组？这个问题的简单答案直接来自西南数组的定义：如果我们将西南数组 $\mathbf{s}$ 视为 $U \subseteq \mathsf{Mat}_{n+1}$ （一个上三角矩阵）中的矩阵，那么该矩阵由其自身参数化

。换句话说，矩阵 A 的元素 $a_{i,j}$ 是西南秩，当且仅当它的西南秩恰好是 $a_{i,j}$ 。这意味着，要判定一个非负整数元组是否为西南数组，我们可以检查它是否将自身参数化。不过，我们也可以写出判定非负整数元组 ω 是否为环境维数 $n+1$下某个 $f \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$的西南数组所需的条件。将 ω 的元素记为 $w^{i,j}_{a,b}$；施加以下条件，即可推出 $w^{i,j}_{a,b}$ 是由 给出的矩阵在元素 (i,j) 处计算得到的西南秩，其中$1 \le a \le b \le n-1$ 且 $1 \le i \le j \le n+1$:

$$\begin{cases} w^{i,j}_{a,b} \le \min\{j-i+1, j\} \\ w^{i,j}_{a,b} \le \min\{w^{i,n}_{a,a+t}, w^{1,j}_{a+t,b}\} \\ p_{i,j} \le w^{i,j}_{a,b} \le p_{i,j}+1 \end{cases} \tag{5.16}$$

对所有 $a < t < b$，其中$p_{i,j}$是西南 $i \times j$ 子矩阵中的主元个数，并且仅当第 i 行或第 j 列中没有主元时，才允许 $w^{i,j}_{a,b} = p_{i,j}+1$ 。第一个不等式是使 $w^{i,j}_{a,b}$ 成为（上三角）$i \times j$ 子矩阵的秩所必需的，而第二个不等式表示乘积的秩（$w^{i,j}_{a,b}$）不能大于两个因子各自的秩；由于 $w^{i,j}_{a,b}$ 是复合$f_b \circ \cdots \circ f_a$的结果，无论我们如何应用结合律，这一点都必须成立。最后一个条件确保 $w^{i,j}_{a,b}$ 计算 $i \times j$ 子矩阵中的主元个数，并且它在每一行和每一列中的增加不超过一。我们略去关于秩向量的类似讨论，因为它具有技术性，且超出了本文的主要关注范围。

6. 舒伯特簇的线性退化的平坦轨迹

在本节中，我们将探讨态射 $\pi : Y \to R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的平坦轨迹问题。我们希望利用命题 5.4 给出的平坦轨迹刻画；我们知道 $R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 是正则的（它是群 GL^{n}_{n+1} 的光滑子群），但需要证明 Y 是 Cohen–Macaulay 簇。若对于每个点 $x \in X$，都存在 x 的一个仿射开邻域 $U \subset X$，使得正则函数环 $\mathcal{O}_X(U)$ 是诺特且 Cohen-Macaulay 的，则称簇 X 为 Cohen-Macaulay 簇。关于 Cohen-Macaulay 环的更多信息，例如可参见 [3]。然而，为了证明 Y 是 Cohen-Macaulay 的，我们可以应用以下结果:

引理 6.1。 [30, 引理 10.135。3] 设 $\mathbb{K}$ 为一个域。设 S 为有限型 $\mathbb{K}$-代数。若 S 局部完全交，则 S 是 *Cohen-Macaulay* 环。

特别地，我们希望采用一种类似于 [5] 中定理 11 证明所使用的策略：在该证明中，作者们展示了 f-线性退化旗簇（对于满足 $\mathbf{r}^f = \mathbf{r}^2$，（如定理 5.6 中所述）的 f）是局部完全交。为此，我们将箭图格拉斯曼簇实现为适当簇的几何商；我们遵循 [7,第 2 节3]。

令 $\mathbf{e}^w$ 如上，并令 $f \in R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 满足 $\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = \dim(X_w)$（这是平坦性的必要条件）。我们定义向量空间

$$V \coloneqq R_{\mathbf{e}^w} \times \prod_{(p,q)\in(\Gamma,I)_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{e^w_{p,q}}, \mathbb{C}^i),$$

其中，$R_{\mathbf{e}^w}$ 是维数向量为$\mathbf{e}^w$的（Γ，I）的表示簇。我们将 V中的元素记作（（N_α），（$g_{p,\,q}$）），其中 α遍历（Γ，I）中的所有箭，且（p，q）对应于（Γ，I）的一个顶点。接着，我们考虑 $R_{\mathbf{e}^w}$ 中的仿射簇 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w,\ M^f)$

V 由满足以下条件的元组（（N_α），（$g_{p,\ q}$））组成

$$\begin{cases} f_i^j \circ g_{i,j} = g_{i,j+1} \circ N_\alpha \ \text{ for } \alpha : s(\alpha) = (i,j), t(\alpha) = (i,j+1) \\ \iota_{i+1,i} \circ g_{i,j} = g_{i+1,j} \circ N_\alpha \ \text{ for } \alpha : s(\alpha) = (i,j), t(\alpha) = (i+1,j) \end{cases} . \tag{6.2}$$

换言之，我们考虑所有可能的元组 $((N_\alpha),\ (g_{p,\ q}))$，其中 N 是维数向量为 $\mathbf{e}^w$ 的 $(\Gamma,\ I)$-表示，且 $g = (g_{p,\ q})$ 是从 N 到 M^f 的表示态射。对于 $(p,\ q) \in (\Gamma,\ I)_0,$，(6.2) 中的关系施加了使 g 成为表示态射所必需的所有交换关系。图1展示了环境维数为 $n+1=3$ 时的图示：表示 N 和 M^f 满足由 $(\Gamma,\ I)$ 给出的关系，而图中其他所有涉及态射 g 的方块的交换性则由 (6.2) 中的关系保证。

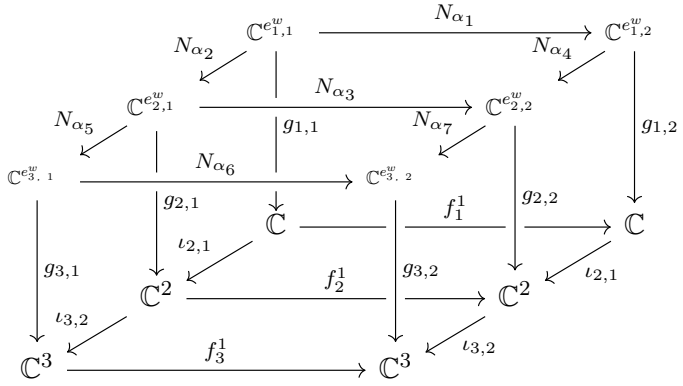


图1. 由 M^f、 N 和 g 形成的图

那么，箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$ 可实现为以下几何商：

$$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f) \cong \mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)/G_{\mathbf{e}^w},$$

其中 $G_{\mathbf{e}^w} = \prod_{(i,j)\in(\Gamma,I)_0} \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{e_i^{w,j}})$，即自然作用于 $N \in R_{\mathbf{e}^w}$ 的向量空间上的一般线性群之积；$\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 是 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w, M^f)$ 中由 $g_{p,\ q}$ 为内射映射定义的开子簇，对所有 $(p,q) \in (\Gamma, I)_0$ 均成立。由于 $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 和 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w, M^f)$ 在 V 中具有相同的余维（因为前者是后者的开子簇），只需证明 $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 是局部完全交。

为此，我们希望利用箭图格拉斯曼簇是几何商这一事实所导出的维数公式，即

$$\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = \dim(\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)) - \dim(G_{\mathbf{e}^w}). \tag{6.3}$$

这样我们就可以推导出 $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w,\ M^f)$ 在 V 中的余维，并将其与定义 V 中 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w,\ M^f)$ 的方程数量进行比较：如果两者相同，那么 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$ 就是局部完全交。在这种情况下，根据引理 6.1，我们便能完整描述 $\pi : Y \to R^\iota_{\mathbf{d}}$ 的平坦轨迹：它恰好由所有满足 $\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = \dim(X_w)$ 的 $f \in R^\iota_{\mathbf{d}}$ 组成。

猜想 6.4. </style}一个元组 f 属于 π:$Y \to R^\iota_{\mathbf{d}}$ 的平坦轨迹，当且仅当 $\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = \dim(X_w)$。

现在我们在环境维数为 $n+1=3$ 的情况下给出一个例子，以此说明我们的猜想。

我们固定置换 $w = [231] \in S_3$ 以及由恒等映射 f 确定的表示:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{[1]} & \mathbb{C} \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \iota_{2,1}} \\
\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]} & \mathbb{C}^2 \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \iota_{3,2}} \\
\mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]} & \mathbb{C}^3
\end{array}
\qquad f:
$$

维数向量$\mathbf{e}^w$ 于是为

$$\mathbf{e}^w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)$ 与舒伯特簇 $X_{[231]}$ 同构：它是一个维数为 $\ell(w) = 2$ 的光滑射影簇。我们特意选择这个表示，因为我们知道它位于 $\pi : Y \to R^{\iota}_{\mathbf{d}}$ 的平坦轨迹中（其纤维是非退化舒伯特簇）。

注记 6.5。若我们选取一个长度严格小于 2 的 S_3 中的置换，则无论表示 f 如何，$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f) = \mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M)$。这可以通过计算相应的维数向量看出

$$\mathbf{e}^{\mathrm{id}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}^{[213]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}^{[132]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

并注意到所有自由子空间都在（Γ，I）的第一列中实现，这意味着第一列与第二列之间的线性映射不会影响箭图格拉斯曼簇。

现在我们考虑几何商

$$\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f) \cong \mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)/G_{\mathbf{e}^w},$$

并希望证明 $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w,\ M^f)$ 是局部完全交。图 2 表示 M^f，以及它与 $R_{\mathbf{e}^w}$ 中的一个表示和 g 中的一个态射共同构成的图表。

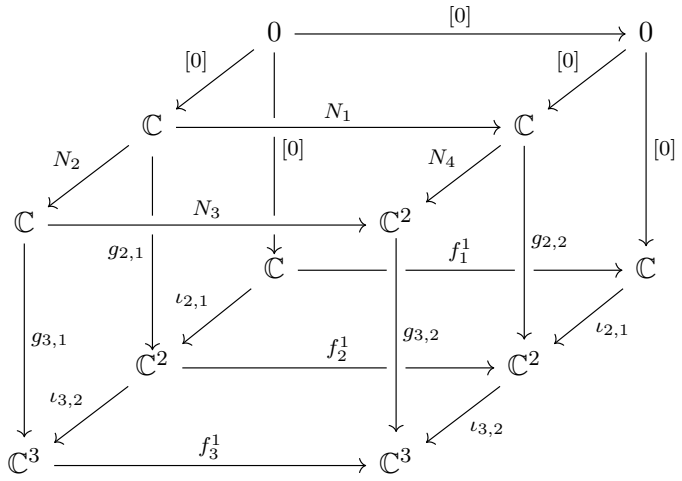


图 2. 例中由 M^f、N 和 g 构成的图

在这种情况下，群 $G_{\mathbf{e}^w}$ 是

$$G_{\mathbf{e}^w} = \prod_{(i,j)\in(\Gamma,I)_0} \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{e^w_{i,j}}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$$

因此维数为 $\dim(G_{\mathbf{e}^w}) = 7$。对于一般的维数向量 $\mathbf{e}^w$，此维数为

$$\dim(G_{\mathbf{e}^w}) = \sum_{(i,j)\in(\Gamma,I)_0} (e^w_{i,j})^2.$$

由于 $\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = 2$，$\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 的维数为

$$\dim(\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)) = \dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) + \dim(G_{\mathbf{e}^w}) = 7 + 2 = 9. \tag{6.6}$$

为了计算 $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 在 V 中的余维，我们首先需要求出 V 的维数，即

$$\dim(V) = \dim(R_{\mathbf{e}^w}) + \dim\Big(\prod_{(p,q)\in(\Gamma,I)_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{e^w_{p,q}}, \mathbb{C}^i)\Big).$$

对于第二个加项，我们有

$$\prod_{(p,q)\in(\Gamma,I)_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{e^w_{p,q}}, \mathbb{C}^i) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$$

因此

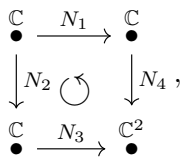
$$\dim\Big(\prod_{(p,q)\in(\Gamma,I)_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{e^w_{p,q}}, \mathbb{C}^i)\Big) = 13. \tag{6.7}$$

为求出$R_{\mathbf{e}^w}$的维数，我们首先注意到，它是满足交换关系的维数向量为$\mathbf{e}^w$ 的（Γ, I）表示的子簇。这意味着

$$R_{\mathbf{e}^w} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2),$$

也就是说，$R_{\mathbf{e}^w}$ 是一个六维表示簇的子簇。

特别地，由于$e^w_{1,1} = e^w_{1,2} = 0$，$R_{\mathbf{e}^w}$ 中的一个表示 N 由以下四个线性映射 N_1, N_2, N_3 和 N_4 确定，其形式如下:



我们可以将表示这些线性映射的矩阵写为

$$N_1 = [x_1], N_2 = [x_2], N_3 = \left[\begin{smallmatrix} x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right], N_4 = \left[\begin{smallmatrix} x_5 \\ x_6 \end{smallmatrix}\right].$$

交换关系意味着，$N \in R_{\mathbf{e}^w}$ 当且仅当满足两个独立关系 $x_3x_2 = x_5x_1$ 和 $x_4x_2 = x_6x_1$ 时成立。因此，$R_{\mathbf{e}^w}$ 的维数为

$$\dim(R_{\mathbf{e}^w}) = 6 - 2 = 4. \tag{6.8}$$

现在，我们将 (6.7) 和 (6.8) 合并，得到 $\dim(V) = 13 + 4 = 17$。由此以及 (6.6) 可知，$\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 在 V 中的余维等于 $\dim(V) - \dim(\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)) = 17 - 9 = 8$。

当 $\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w, M^f)$ 在 V 中的余维等于在 V 中定义 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w, M^f)$ 的方程数时，该空间是局部完全交。点 $((N_\alpha), (g_{p,q}))$

当且仅当满足式 (6.2) 给出的关系时，该点属于 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w,\ M^f)$；在本例中，这些关系为

$$\begin{cases} f_2^1 g_{2,1} = g_{2,2} N_1 \\ \iota_{3,2} g_{2,1} = g_{3,1} N_2 \\ f_3^1 g_{3,1} = g_{3,2} N_3 \\ \iota_{3,2} g_{2,2} = g_{3,2} N_4 \end{cases}. \tag{6.9}$$

我们用以下矩阵表示线性映射 $g_{p,\ q}$：

$$g_{2,1} = \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right], g_{3,1} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}, g_{3,2} = \begin{bmatrix} y_6 & y_7 \\ y_8 & y_9 \\ y_{10} & y_{11} \end{bmatrix}, g_{2,2} = \left[\begin{smallmatrix} y_{12} \\ y_{13} \end{smallmatrix}\right]$$

并将 (6.9) 中的关系明确写出，得到以下 11 个关系：

$$\begin{cases} \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] & = \left[\begin{smallmatrix} y_{12}x_1 \\ y_{13}x_1 \end{smallmatrix}\right] \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_3x_2 \\ y_4x_2 \\ y_5x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_6x_3+y_7x_4 \\ y_8x_3+y_9x_4 \\ y_{10}x_3+y_{11}x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_6x_5+y_7x_6 \\ y_8x_5+y_9x_6 \\ y_{10}x_5+y_{11}x_6 \end{bmatrix} \end{cases}. \tag{6.10}$$

通过施加 $x_3x_2 = x_5x_1$ 和 $x_4x_2 = x_6x_1$（这些关系由 N 是 $(\Gamma,\ I)$ 的一个表示推出），并在 (6.10) 中进行两次代换，我们注意到，这 11 个关系中有 3 个可以由其余 8 个推出。特别地，一组独立的生成关系可以取为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_6x_3+y_7x_4 \\ y_8x_3+y_9x_4 \\ y_{10}x_3+y_{11}x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_6x_5+y_7x_6 \\ y_8x_5+y_9x_6 \\ y_{10}x_5+y_{11}x_6 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] & = \left[\begin{smallmatrix} y_{12}x_1 \\ y_{13}x_1 \end{smallmatrix}\right] \end{cases}$$

或者取为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_6x_3+y_7x_4 \\ y_8x_3+y_9x_4 \\ y_{10}x_3+y_{11}x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_6x_5+y_7x_6 \\ y_8x_5+y_9x_6 \\ y_{10}x_5+y_{11}x_6 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] & = \left[\begin{smallmatrix} y_3x_2 \\ y_4x_2 \end{smallmatrix}\right] \end{cases}.$$

我们发现，正如预期，$\mathrm{Hom}^0(\mathbf{e}^w,\ M^f)$ 在 V中的余维，等于定义 V中 $\mathrm{Hom}(\mathbf{e}^w,\ M^f)$ 的方程个数。猜想 6.4 的依据在于，此处采用的策略和方法并不依赖于 f的具体选择。因此，我们可以预期，对于任何满足 $\dim(\mathrm{Gr}_{\mathbf{e}^w}(M^f)) = \dim(X_w)$ 且环境维数为一般值 $n+1$的 f，它们都会给出相同的结果。

参考文献

[1] Silvana Abeasis 和 Alberto Del Fra，*A_m* 型箭图表示的退化，《代数学杂志》**93**（1985），第 2 期，376–412。[2] Klaus Bongartz，代数与二次型，《伦敦数学会杂志》**2**（1983），第 3 期，461–469。[3] Winfried Bruns 和 H Jürgen Herzog，*Cohen–Macaulay* 环，第 39 卷，剑桥大学出版社，1998。[4] Philippe Caldero 和 Frédéric Chapoton，簇代数作为箭图表示的 *Hall* 代数，《瑞士数学评论》**81**（2006），第 3 期，595–616。[5] Giovanni Cerulli Irelli、Xin Fang、Evgeny Feigin、Ghislain Fourier 和 Markus Reineke，旗簇的线性退化，《数学杂志》**287**（2017），615–654。

[6] ——，旗簇的线性退化：部分旗、定义方程与群作用，《数学杂志》296（2020年），第 1–2 期，453–477。MR 4140749[7] Giovanni Cerulli Irelli、Evgeny Feigin 和 Markus Reineke，箭图格拉斯曼簇与退化旗簇，《代数与数论》 **6** 2012 1, 165 194 2950163 （），第 – 期。MR 舒[8] ——，伯特箭图格拉斯曼簇，《代数与表示论》20（2017），147–161。[9] W. W. Crawley-Boevey，零关系代数表示之间的映射，《代数学杂志》126（ 1989 2, 259 263 1024991 ），第 – 期。MR [10] William Crawley-Boevey，箭图表示论讲义，1992。[11] Harm Derksen 和 Jerzy Weyman，带关系箭图的半不变量，《代数学杂志》258（2002），第 1 期，216–227。[12] Evgeny Feigin，$\mathbb{G}_a^M$旗簇的退化，《精选数学》（新系列）18（2012），第 3 期，513–537。MR 2960025[13] Evgeny Feigin 和 Michael Finkelberg，A 型退化旗簇：弗罗贝尼乌斯分裂与 BW定理，《数学杂志》 **275** 2013 1 2, 55 77 3101796 （），第 - – 期。MR [14] William Fulton，《杨表：及其在表示论与几何中的应用》，第 35 卷，剑桥大学出版社，1997。[15] Veselin Gasharov 和 Victor Reiner，部分旗流形中光滑舒伯特簇的上同调，《伦敦数学会杂志》66（2002），第 3 期，550–562。[16] Giulia Iezzi，A 型舒伯特簇 Bott-Samelson 解消的箭图格拉斯曼簇：G. Iezzi，《代数与表示论》（2025），1–20。[17] Giulia Iezzi，《箭图格拉斯曼簇：舒伯特簇、线性退化与热带几何》，博士论文，亚琛工业大学/罗马第二大学，2025，https://publications.rwth-aachen.de/record/1018850/files/1018850.pdf?version=1。[18] G Cerulli Irelli、Evgeny Feigin 和 Markus Reineke，Dynkin 箭图箭图格拉斯曼簇的奇点消解，《数学进展》245（2013），182–207。[19] Giovanni Cerulli Irelli、Francesco Esposito、Hans Franzen 和 Markus Reineke，箭图格拉斯曼簇的胞腔分解与上同调的代数性，《数学进展》379（2021），107544。[20] Giovanni Cerulli Irelli 和 Martina Lanini，A 型与 C 型退化旗簇是舒伯特簇，arXiv 预印本 arXiv:1403.2889（2014）。[21] Allen Knutson 和 Ezra Miller，舒伯特多项式的格罗布纳几何，《数学年刊》（2005），1245–1318。[22] Venkatramani Lakshmibai 和 Bhaskhar Sandhya，SL (n)/B 中舒伯特簇光滑性的判据，《印度科学院院刊：数学科学》，第 100 卷，施普林格，1990，第 45–52 页。[23] Hideyuki Matsumura，《交换环论》，第 8 卷，剑桥大学出版社，1989。[24] Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels，矩阵舒伯特簇，《组合交换代数》（2005），289–310。[25] Markus Reineke，每个投射簇都是箭图格拉斯曼簇，《代数与表示论》16（2013），第 5 期，1313–1314。MR 3102955[26] Claus Michael Ringel，野无圈箭图的箭图格拉斯曼簇，《美国数学会会刊》146（2018），第 5 期，1873–1877。[27] Ralf Schiffler，《箭图表示》，第 1 卷，施普林格，2014。[28] ，《箭图表示》，第 1 卷，施普林格，2014。[29] Aidan Schofield，箭图的一般表示，《伦敦数学会会刊》（3 1，46 65 1992 64 1162487 ）（），第 – 期。MR [30] Stacks项目，交换代数，局部完全交叉，https://stacks.math.columbia.edu/tag/00S8，访问日期：30/03/2025。