arXiv:2602.13966v1 [math.RT] 15 Feb 2026

德马祖尔模的约化规则

MARC BESSON、SAM JERALDS 和 JOSHUA KIERS

Abstract. 对于 G 一个复约化群及其 $B \subseteq G$ 一个 Borel 子群，我们为 Demazure 模 V_λ^w 中的某些权重重数提供一条约化规则：给定相关权多胞体 P_λ^w某个面上的权 μ，我们将权空间 $V_\lambda^w(\mu)$ 维数的计算，化简为一个类似问题，即计算 G的 Levi 子群的 Demazure 模的权空间维数。

1. Introduction

1.1. 约化规则。对于 G 一个复约化代数群及 $G' \subseteq G$ 一个复约化子群，分支问题旨在理解 G 的表示如何限制为 G'的表示。经典例子包括表示的特征研究（在 $G' = T$ 为极大环面的情形下），以及不可约最高权表示的张量积分解（在 $G = G' \times G'$的情形下）。分支问题的各种表述一直是表示论的核心关注点，人们也发展了大量代数、组合和几何工具，以理解这些限制的性质。

本文聚焦于一类特殊的分支问题，称为约化规则。约化规则是分支问题中的等式——将针对 G 表示的某个量（维数、重数等）的计算，化为针对相关的 aG' 表示的量的计算。要建立约化规则，通常需要两个关键洞见：首先，如何根据 G 的数据识别哪些特定量应满足约化规则；其次，它们应对应于哪些量（根据 G'）。

文献中有许多约化规则的例子，其中重要的启发性例子包括科斯塔数和权重重数的规则 [1], Littlewood–Richardson 系数 [8, 9], 张量积重数 [13]（以及更一般的分支重数 [12]），以及共形块的维数 [14]。尽管这些结果的证明各不相同，但约化规则本身有许多共同之处：首先，每种约化都化为一个 可预测的较小秩群（通常是 G 的 Levi 子群）的相似量；其次，尽管不总是用这种表述方式，每个适用于约化规则的量都对应于群 的极值数据 G；这些数据通常与丰沛锥的面相关。

1.2. 充足锥与约化规则。 设 X 为一个带有G作用的射影簇， $\mathcal{L}$ 为 X上的一个 G-线性化线丛。对于这些数据，可以关联到 X 中相对于 $\mathcal{L}$、 $X^{ss}(\mathcal{L})$的半稳定点开子集，其定义为

$$X^{ss}(\mathcal{L}) := \{x \in X | \exists N \geqslant 1 \ \exists \sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes N}) : \sigma(x) \neq 0\}.$$

通过希尔伯特–穆福德判据，半稳定点的存在性可由一组不等式刻画，这些不等式来自 G 的余特征以及 $\mathcal{L}$ 上的 G-线性化。

这将半稳定点的判定重新诠释为一个凸几何问题；通过在有理丰沛线丛中改变线丛 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^G(X)^+_{\mathbb{Q}}$，我们得到 G-丰沛锥

$$\mathcal{AC}^G(X) := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^G(X)^+_{\mathbb{Q}} | X^{ss}(\mathcal{L}) \neq \varnothing\},$$

它是一个尖有理凸锥。

对于上述约化规则，其中 X 是一个旗簇（或相关簇），充足锥 $\mathcal{AC}^G(X)$ 的面对应于 G的 Levi子群，而约化则对应于位于充足锥的面上的那些 $\mathcal{L}$ 。随后，可借助 Borel–Weil定理及其推广等经典结果，将其转译回表示论。

1.3. **Demazure 模的约化规则**。 受这些例子的启发，我们现在介绍本文的重点：为 Demazure 模中的权多重度 V_λ^w引入一条约化规则，相关内容将在第 2 节回顾。最终目标是为满足 dim $(\lambda,\ \mu)$ 的权对$V_\lambda^w(\mu) \neq 0$ 给出一个条件，使其能导出如下形式的等式：dim $V_\lambda^w(\mu) = \dim V_{\lambda_L}^{w_L}(\mu)$，其中 Demazure 模 $V_{\lambda_L}^{w_L}$对应于 Borel 子群 $B_L \subseteq B$，而该子群对应于 Levi子群 $L \subseteq G$。

对于第一个任务，我们利用先前关于 Demazure 模的权多胞体及其面 $\mathcal{F}(v$的研究 $\eta)$，其中这些对象取决于支配余权 η和最短长度代表元 $v \in W^\eta$ （见第 3 节）。在 [3], [4], 中，我们运用 GIT技术确定了支配 T的舒伯特簇的丰沛锥所满足的不等式 X_w；固定一个支配的最高权λ，便可得到一个紧致凸多面体 P_λ^w，即 ***Demazure*** 权多胞体。与本文的论述一致，这些多面体的面本身也是 Levi子群的 Demazure 权多胞体。权 μ 在 P_λ^w 中相对于这些面的所在位置，为我们提供了所需的约化条件。

对于第二个任务，我们分两个阶段推导固定 Demazure 权多胞体 μ 中位于指定面上的权$\mathcal{F}(v$的约化规则 $\eta)$。首先，我们采用代数几何技术，改编 Roth 对 Littlewood–Richardson 系数约化规则的证明 [13], ，从而得到 Levi 子群的 Demazure 模与一个“中间”Demazure 模的权重重数相等 V_λ^q。随后，我们运用凸几何论证，并结合 Demazure算子和特征标公式的经典性质，证明中间 Demazure 模 V_λ^q 与 V_λ^w的权重重数相等。综合这两项结果，便得到所需的约化规则（参见正文中的定理 3.8 ）：

定理 1.1. 设 μ 是 ***Demazure*** 模 V_λ^w的一个权，且 μ 位于相关多面体 P_λ^w的面 $\mathcal{F}(v, \eta)$上。那么

$$\dim V_\lambda^w(\mu) = \dim V_{\lambda_L}^{w_L}(\mu),$$

其中 $L := \dot{v} L_\eta \dot{v}^{-1}$是由 η, $w_L := v\pi_\eta(w^{-1} * v)^{-1} v^{-1}$,$\lambda_L := v\pi^\eta(w^{-1} * v)\lambda$确定的 ***Levi*** 子群 L_η的共轭，而 $V_{\lambda_L}^{w_L}$是 ***Borel*** 子群 $B_L \subseteq L$对应的 ***Demazure*** 模。

1.4. **论文概述**。 第 2 节中，我们介绍代数群、旗簇、舒伯特簇和表示的基本记号与约定。我们仅作简要概述，并请读者参阅 [11] ，以获取更全面的论述和参考文献。第 3 节中，我们遵循 [3, 4], 回顾 Demazure 模的权多胞体及其不等式，并精确陈述本文的主要结果，即定理 3.8。第 4 节和第 5 节合起来构成了该结果的证明。

1.5. **致谢**。 我们感谢 Rekha Biswal，她对 [5]以及 Demazure 模可能扩展方向的兴趣，引出了本文所探讨的核心问题。

2. Notations and preliminaries on Demazure modules

2.1. 约化群的记号。我们令 G 表示定义在 $\mathbb{C}$上的连通约化代数群，并选取极大环面 T 与 Borel 子群 B ，使得我们有 $T \subset B \subset G$。我们有权格与余权格 $X^*(T)$ 和 $X_*(T)$，以及相应的配对 $\langle , \rangle$: $X^*(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z}$。我们用 Φ 和 $\Phi^\vee$ 表示与 $T \subset G$相关联的根系与余根系，因此 $(\Phi, X^*(T), \Phi^\vee, X_*(T))$ 是 G的一个根数据。Borel 子群的选取决定了正根 Φ^+ 以及一组基 $\Delta \subset \Phi^+$；我们记 $\Delta = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$，其中 α_i 是由 B决定的单根。我们还有由 B 决定的 $(\Phi^\vee)^+$ ，其基为 $(\Delta^\vee) = \{\alpha_1^\vee, \dots \alpha_n^\vee\}$，而系数 $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$给出与半单群 (G, G)相关联的Cartan矩阵。

本文中我们经常会用到多面体，因此在 $\mathbb{Q}$ 或$\mathbb{R}$ 上工作会比在整数环上工作更为方便。因此，我们考虑有理权格和余权格$X^*(T)_\mathbb{Q} = X^*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$和 $X_*(T)_\mathbb{Q} = X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$。配对 $\langle , \rangle$通过线性延拓到这些 $\mathbb{Q}$向量空间上，因此有 $\langle , \rangle_\mathbb{Q}$: $X^*(T)_\mathbb{Q} \times X_*(T)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$。我们将用到基本权 $\omega_i \in X^*(T)^+_\mathbb{Q}$以及基本余权 $x_i \in X_*(T)^+_\mathbb{Q}$；它们由以下条件确定

$$\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle_\mathbb{Q} = \delta_{i,j}$$

and

$$\langle \alpha_i, x_j \rangle_\mathbb{Q} = \delta_{i,j}$$

分别。

动力　　学方法将一个抛物子群与任意支配余权 η 对应起来

$$P_\eta := \{g \in G | \lim_{t \to 0} \eta(t) g \eta(t)^{-1} \text{ exists}\}$$

以及一个 Levi 子群

$$L_\eta := \{g \in G | \forall t, \eta(t) g \eta(t)^{-1} = g\}.$$

根　　属于 P_η 的 ts 和 L_η 的根系很容易描述；我们有　　e

$$\Phi(P_\eta, T) = \{\alpha \in \Phi_G | \langle \alpha, \eta \rangle \geqslant 0\}$$

and

$$\Phi_\eta := \Phi(L_\eta, T) = \{\alpha \in \Phi_G | \langle \alpha, \eta \rangle = 0\}.$$

2.2. 韦伊群组合学。与 G相关联的韦伊群为

$$W = W_G = N_G(T)/T$$

其 Bruhat 序为 $\leqslant$。给定 $w \in W$，我们将 $\dot{w}$ 记作 $N_G(T)$ 中的一个元素，使得$w = \dot{w}T$。我们对 B 的选择，从而对单根$\alpha_i \in \Delta$的选择，给出了一个简单反射系统 $S = \{s_i\} \subset W$，它们在通常的考克斯特关系下生成 W。照例，我们有一个长度函数 ℓ： $W \to \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ ，满足 $\ell(s_i) = 1$。韦伊群 W 作用于根系上，我们记

$$R(w) := \{\alpha \in \Phi^+ | w.\alpha \in -\Phi^+\};$$

这是 w 的逆序集。

对于支配余权 η，我们将由满足 $\alpha_i \in \Phi_\eta$ 的反射 $\{s_i\}$ 生成的 W 的抛物子群记作 W_η。长度函数 ℓ 和 Bruhat 序会下降为 W_η 上的长度函数和 Bruhat 序。我们记

$$W^\eta := W/W_\eta$$

对于陪集集合。每个陪集 vW_η 都有一个指定的代表元，称为最短长度代表元。这些代表元可用以下方式刻画： $v \in W$ 是 vW_η 的最短长度代表元，当且仅当

$$v(\Phi_\eta^+) \subset \Phi_G^+.$$

给定 $w \in W$ 和抛物魏尔子群 W_η，我们将 $\pi^\eta(w)$记为 wW_η 的最短长度代表元。存在唯一的元素 u 属于 W_η，使得 $w = \pi^\eta(w) \cdot u$ 且$\ell(\pi^\eta(w)) + \ell(u) = \ell(w)$。我们记作 $\pi_\eta(w) := u$。因此，给定 W_η 和 $w \in W$，我们总可以写成

$$w = \pi^\eta(w) \cdot \pi_\eta(w)$$

使得

$$\ell(w) = \ell(\pi^\eta(w)) + \ell(\pi_\eta(w)).$$

最后，我们回顾 Demazure 乘积。给定 v， $w \in W$，元素$\{xq|x \leqslant v, \ q \leqslant w\}$ 的集合中存在一个关于 Bruhat 序极大的元素。我们将此元素记为 $v * w$。这个元素也可等价地刻画为左平移区间 $v[e, \ w]$ 中的最大元素，或右平移区间 $[e, \ v]w$中的最大元素。对于简单反射 s_i，这些等价定义给出

$$s_i * w = \begin{cases} s_i w, & \ell(s_i w) = \ell(w) + 1 \\ w, & \ell(s_i w) = \ell(w) - 1 \end{cases}$$

以及 Demazure 乘积的等价归纳构造如下：若 $v = v' s_i$满足 $v' < v$，则

$$v * w = v' * (s_i * w).$$

2.3. 旗簇几何。 我们用 X 表示旗簇；由于我们对 B 的选择，可以写作 $X = G/B$。从现在起，我们假设 G 是单连通的。我们可以将$Pic(X) = X^*(T)$视为 $\mathscr{L}$； X 上的所有线丛都同构于某个 $\mathscr{L}_\lambda$，即 $G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$的截面层。这里， $\mathbb{C}_{-\lambda}$ 是 B 的一维表示，其中 T 通过 λ作用，而 U 平凡作用； $G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$ 是伴随丛构造。由于我们假设 G 是单连通的，因此每个 $\mathscr{L}_\lambda$上都有唯一的 G-线性化；换言之， $Pic^G(X) \simeq X^*(T)$。本文通常考虑 T-线性化；我们有短正合列

$$0 \to X^*(T) \to Pic^T(X) \to Pic(X) \to 0.$$

换言之，可以通过附加一个特征 $\mu \in X^*(T)$ 来指定 $\mathscr{L}_\lambda$ 上的 T-线性化。 $\mathscr{L}_\lambda$ 上的 μ-线性化可明确描述为

$$t.[x, z] = [tx, \mu(t)z]$$

对于 $[x, \ z]$ 中的一点。根据 Borel-Weil 定理，并使用 $\mathscr{L}_\lambda$ 上的 G-线性化，我们有

$$H^0(X, \mathscr{L}_\lambda)^* \simeq V_\lambda$$

作为 G-表示，其中 V_λ 表示 G 的具有最高权 λ 的不可约代数表示。我们将 μ-权空间记作 $V_\lambda(\mu)$ V_λ。对 $\mathscr{L}_\lambda$ 上的 T-线性化进行扭曲，会使 V_λ 上的 T-权发生平移；若 $\mathbb{L} = \mathscr{L}_\lambda \otimes \mathbb{C}_\mu$，则我们有

$$(H^0(X, \mathbb{L})^*)^T \simeq V_\lambda(\mu).$$

通过扭曲 T-线性化，我们可以将任意一个权空间 $V_\lambda(\mu)$ 视为 T不变元空间来研究。

2.4. **舒伯特几何与 Demazure 模**。Bruhat 分解

$$G = \bigcup_{w \in W} B\dot{w}B$$

给出旗簇的一个分层

$$X = \bigcup_{w \in W} B\dot{w}B/B$$

由 B 轨道构成，这些轨道也是仿射空间： $B\dot{w}B/B \simeq \mathbb{A}^{l(w)}$。我们将此 B 轨道记为 $\mathring{X}_w$，称为舒伯特胞腔。舒伯特胞腔之间的闭包关系恰由Bruhat 序给出，我们用 X_w 表示 X_w 的闭包，这些闭包就是舒伯特簇。虽然它们通常并不光滑，但已知 X_w 是正规、Cohen-Macaulay 的，并具有有理奇点。我们记

$$i_w : X_w \to X$$

表示该闭嵌入。

Demazure 模是 B 模，可以构造为线丛限制的截面空间。设 $\lambda \in X^*(T)^+$，我们有与 (λ, w)相关联的 Demazure 模：

$$V_\lambda^w := H^0(X_w, i_w^* \mathscr{L}_\lambda)^*.$$

这些模的特征可以通过 Demazure 特征标公式直接计算。设表示环为 $R(T) = \mathbb{Z}[X^*(T)]$，对于每个简单反射 s_i，我们有一个线性自同态

$$D_i(x) = \frac{x - e^{-\alpha_i} s_i(x)}{1 - e^{-\alpha_i}}$$

对于 $x \in R(T)$。Demazure 特征标公式断言，对于 w的任意约化词$\mathfrak{w} = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ 以及 $\lambda \in X^*(T)^+$，我们有

$$\mathrm{ch}(V_\lambda^w) = D_{i_1} \circ D_{i_2} \circ \cdots \circ D_{i_k}(e^\lambda).$$

事实上， $s_i \mapsto D_i$ 是 Demazure 幺半群 $(W, *)$的一个表示，其中乘法为 Demazure 乘积。特别地，若 $\ell(s_i w) = \ell(w) - 1$，则 $s_i * w = w$ 并且

$$D_i\left(\mathrm{ch}(V_\lambda^w)\right) = \mathrm{ch}(V_\lambda^w).$$

V_λ^w还有一种泛包络代数描述。若 $V_\lambda(w\lambda)$ 中的 $v_{w\lambda}$ 是非零的极端权向量，那么我们可以将 V_λ^w 描述为由 $v_{w\lambda}$ 生成的 $U(\mathfrak{b})$-子模，其中 $\mathfrak{b}$ 是 B 的李代数：

$$V_\lambda^w = U(\mathfrak{b}).v_{w\lambda} \subset V_\lambda.$$

上述 Demazure 乘积的性质可以表述如下。令$\mathfrak{sl}_{2,\alpha_i}$表示从 $\mathfrak{sl}_2$ 到 $\mathfrak{g}$ 的嵌入，使得 $e_i \mapsto e_{\alpha_i}$、 $h_i \mapsto h_{\alpha_i}$ 等。对于 w 的一个约化词 $s_{i_1} \dots s_{i_k}$，满足 $s_i * w = w$,

$$\mathrm{ch}(V_\lambda^w) \in R(T)$$

属于.....的像

$$Rep^{fd}(\mathfrak{sl}_{2,\alpha_i}) \to R^{fd}(\mathfrak{sl}_{2,\alpha_i}) \to R(T).$$

不那么迂腐地说，$\mathrm{ch}(V_\lambda^w)$ 是$\mathfrak{sl}_{2,\alpha_i}$的一个真正的（而非虚拟的）特征。

3. Weight polytopes for Demazure modules

本节回顾在沿用既有记号的前提下，与 *Demazure* 模 V_λ^w相关联的 Demazure 权多胞体 P_λ^w的构造及其性质。对于一般的T-模 M，若 T是一个半单作用的环面，理解其权的集合

$$\mathrm{wt}(M) := \{\mu \in X^*(T) : M(\mu) \neq 0\}$$

是表示论和特征标理论中的基础问题。由于该集合是格子 $X^*(T)$中的某些点，因此可以通过取 M的相应权多胞体，对这些数据作粗略近似；该多胞体是凸包 $\mathrm{conv}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{wt}(M))$，（就本文而言，我们将其视为 $X^*(T)_{\mathbb{Q}}$中的紧致凸多面体）。将此应用于 Demazure 模，可得以下几个具有核心意义的对象：

定义 3.1。设 V_λ^w是一个 *Demazure* 模。*Demazure* 权多胞体 P_λ^w定义为 P_λ^w：$=$凸包$_{\mathbb{Q}}$(权(V_λ^w))。

最初，人们关注 Demazure 权多胞体，是想知道它们在多大程度上能对 Demazure 模的特征数据进行“粗略近似” V_λ^w；这一问题以*Demazure* 特征的饱和性的形式提出，见 [3]，，其猜想中的等价关系为

$$V_\lambda^w(\mu) \neq 0 \iff \mu \in P_\lambda^w \cap (\lambda + Q).$$

对于不可约最高权 G-模（对应于 $w = w_0$ 情形），这一等价关系是经典的教科书结论。对于一般的 Demazure 模，我们证明了这一等价关系对经典型 G以及例外型 F_4 或 G_2 [3, 成立（定理 1.1],）；第三作者已验证这一等价关系对类型 E_6也成立。类型 E_7 和 E_8，以及更统一的证明，仍有待解决。

3.1. 的面与不等式。

现在我们回顾 [3] 和 [4] 中与组合和凸几何相关的特征，这些特征将用于定理 3.8 的归约规则。

紧凸多面体既可以通过其顶点来定义，也可以通过其不等式来定义。要初步了解 P_λ^w的组合结构，可参考以下引理；该引理见于 [3, 定理 4.7]，但 Dabrowski[7, 第 119] 页的工作也隐含了这一结论。

引理 3.2. 对于任意 $\lambda \in X^*(T)^+$ 和 $w \in W$，我们有

$$P_\lambda^w = \mathrm{conv}_{\mathbb{Q}}\left(\{x\lambda | x \leqslant w\}\right).$$

引理 3.2 给出了多面体 P_λ^w 的顶点由下列极值权的一个子集决定： $x\lambda \in X^*(T)$。这一描述将 Demazure 权多胞体与文献中若干值得关注的对象联系起来，包括伪 Weyl 多面体、广义 Coxeter 排列多面体以及 Bruhat 区间多面体。与后者的关系尤为值得注意，因为 Demazure 权多胞体的面的结构与对称群中更为熟悉的 Bruhat 区间多面体具有若干关键性质。

引理 3.2 的一个直接推论如下。

推论 3.3. 设 $s \in W$ 是一个简单反射，且 $sw < w$。则 P_λ^w在 s的作用下保持不变：$s(P_\lambda^w) = P_\lambda^w$。

证明。 注意，根据 Bruhat 序的所谓“Z 性质”或“菱形引理”[2, 引理 2.5], 若 $sw < w$，则 $s(\{x : x \leqslant w\}) = \{x : x \leqslant w\}$，因此下 Bruhat 区间$[e, w]$ 在左乘 s下保持不变。于是显然

$$s(P_\lambda^w) = \mathrm{conv}_{\mathbb{Q}}(\{sx\lambda : x \leqslant w\}) = P_\lambda^w.$$

□

或者，这也可由以下事实推出：若 $s = s_i$ 是与简单根 α_i对应的简单反射，则 V_λ^w是一个 $\mathfrak{sl}_{2,\,\alpha_i}$-模。

另一方面， P_λ^w 的不等式描述见 [3]，其中运用了几何不变理论（GIT）的方法，通过半稳定性的 Hilbert–Mumford 判据。简言之，给定任意支配的余特征 $\eta \in X_*(T)^+$ 以及 $v \in W^\eta$一个最小长度陪集代表元，Hilbert–Mumford 判据给出了一个数值条件，用于检验舒伯特簇中一点 $x \in X_w$ 的半稳定性。由此可得 V_λ^w可能权的一组不等式：

$$\mu \in P_\lambda^w \text{ if and only if } \langle \lambda, (w^{-1} * v)\eta\rangle \leqslant \langle \mu, v\eta\rangle$$

对于上述 η 和 v 的所有取法。自然地，我们可以将这组不等式缩减为刻画面片的不等式，方法是将问题归结为基本余权的情形[3,定理 6.9]。

定理 3.4. 设 λ为支配权，且 $w \in W$。那么 $\mu \in P_\lambda^w$当且仅当对于与基本余权 x_i和 $v \in W^P$相对应的每个极大抛物子群 $P = P_i$，以下不等式

$$\langle \lambda, (w^{-1} * v)x_i\rangle \leqslant \langle \mu, vx_i\rangle$$

成立。

注意，在定理 3.4的陈述及前面的讨论中，我们也可以不作任何改变，将不等式中的 $(w^{-1} * v)$ 替换为最短长度代表元 $\pi^\eta(w^{-1} * v) \in W^\eta$ 和$\pi^P(w^{-1} * v) \in W^P$。这一改动虽不影响不等式，却有助于理解 P_λ^w的面的结构。为此，我们用 v 和 η 来标记任意的面（而不仅仅是面片），它们决定了这些不等式。

定义 3.5. 设 $\eta \in X_*(T)^+$ 为支配余权， $v \in W^\eta$为最短长度陪集代表。我们将 $\mathcal{F}(v, \eta)$ 表示为由下式给出的P_λ^w的面：

$$\mathcal{F}(v, \eta) := \{\mu \in P_\lambda^w | \langle \lambda, \pi^\eta(w^{-1} * v)\eta\rangle = \langle \mu, v\eta\rangle\}.$$

面 $\mathcal{F}(v、\ \eta)$ 具有丰富的组合结构，可将它们识别为抛物子群中下区间对应轨道的凸包 $W_\eta \subseteq W$ [3, 命题 7。4], [4, 定理 10。8]；此外，正如它们与 Tsukerman 和 Williams 的 Bruhat 区间多面体相似所预期的那样，这也 [16], 体现了这样一种观点：Bruhat 区间多面体的面本身也是 Bruhat 区间多面体。

在表示论层面上，可以将组合学上的对应关系进一步提升，从而将这些面 $\mathcal{F}(v,\eta)$ 解释为 Demazure 权多胞体本身。令 $L_\eta \subseteq G$ 为由支配余权 η 确定的标准 Levi 子群，并令 $B_\eta := B \cap L_\eta \subseteq B$ 为其 Borel 子群。我们令 $L := \dot{v} L_\eta \dot{v}^{-1}$ 为 Levi 子群在 $v \in W^\eta$下的共轭，并注意到其 Borel 子群 $B_L = \dot{v} B_\eta \dot{v}^{-1} \subseteq B$ 为 $v \in W^\eta$。于是，V_λ^w自然成为一个 B_L-模。下面的命题至关重要，它使我们能够比较关于 B_L 的 Demazure 模与关于 B 的 Demazure 模 V_λ^w，从而揭示面 $\mathcal{F}(v,\eta)$ 与多面体P_λ^w之间的关系。为方便读者，我们概述 [3] 中给出的证明。

命题 3.6。 [3,命题 7。9]

设 $w_L := v\,(\pi_\eta(w^{-1} * v))^{-1} v^{-1}$, $\lambda_L := v\,(\pi^\eta(w^{-1} * v))^{-1}\lambda$，并设 $q \in [e, w]$ 是 *Weyl* 群中满足 $w^{-1} * v = q^{-1}v$ 的唯一元素。那么，下列交换图中的每个映射都是一个 B_L-等变嵌入：

$$\begin{array}{ccccc} V_{\lambda_L}^{w_L} & \longrightarrow & V_\lambda^q & \longrightarrow & V_\lambda^w \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ V_{\lambda_L} & & \longrightarrow & & V_\lambda \end{array}$$

特别地，我们分别将 $V_{\lambda_L}^{w_L}$ 和 V_{λ_L} 视为 B_L 和 L 的 *Demazure* 模与不可约最高权模。

证明。 容易验证， λ_L 是（可能可约的） L-模 V_λ 的一个最高权，因为 B_L 稳定由 $v\,(\pi^\eta(w^{-1} * v))^{-1} v_\lambda$ 张成的直线。因此， V_λ 中存在一个与 V_{λ_L} 同构的不可约 L-子模；它必定是唯一的此类子模，因为

$$\dim V_\lambda(v\left(\pi^\eta(w^{-1} * v)\right)^{-1}\lambda) = 1$$

且 L 包含全环面。

然后在 $V_{\lambda_L} \subseteq V_\lambda$ 内构造 B_L Demazure 模 $V_{\lambda_L}^{w_L}$；注意

$$\begin{aligned} w_L\lambda_L &= v\left(\pi_\eta(w^{-1} * v)\right)^{-1} v^{-1} v\left(\pi^\eta(w^{-1} * v)\right)^{-1}\lambda \\ &= v(w^{-1} * v)^{-1}\lambda \\ &= q\lambda \end{aligned}$$

由 $q \leqslant w$ 的选择以及 $q^{-1}v = w^{-1} * v$可知。于是 $V_{\lambda_L}^{w_L}$是包含$q\lambda$的最小 B_L-子模，因此也是包含 $q\lambda$的 V_λ 的最小 B_L-子模，所以自然包含在 V_λ^q 这个 B-子模中。最后，由于 $q \leqslant w$， $V_\lambda^q \subseteq V_\lambda^w$。□

从前面的证明中可以得到一个关键结论： B_L Demazure 模$V_{\lambda_L}^{w_L}$的最低权恰好是 $q\lambda$, 也是 P_λ^w在面 $\mathcal{F}(v,\ \eta)$上的最低权。由此可立即推出以下等同关系。

推论 3.7。 [3, 推论 7。7] 令 $P_{\lambda_L}^{w_L}$ 为 B_L-模 $V_{\lambda_L}^{w_L}$的 *Demazure* 权多胞体。那么，我们有以下凸多胞体等式

$$P_{\lambda_L}^{w_L} = \mathcal{F}(v,\eta).$$

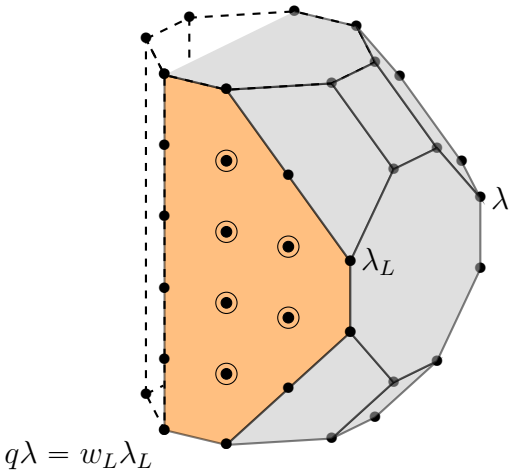


FIGURE 1. 类型为 B_3、最高权为 $\lambda = \rho = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 的 Demazure 多面体。阴影区域对应 $q = s_3s_2s_3s_1s_2s_3$；线框延伸至 $w = s_1s_3s_2s_3s_1s_2s_3$ 对应的多面体。面 $\mathcal{F}(s_1,\ x_1)$ 对应于$\eta = x_1,\ v = s_1$，它是两个多面体的公共面，并已突出显示。该面上的权空间已加以强调，其中单个 $\bullet$ 表示重数为一，而每个同心环都表示重数在此基础上增加。

有了这些准备，现在我们可以提出所需的 Demazure 权重数约化规则。固定 $\lambda \in X^*(T)^+$和 $w \in W$，令 $\mu \in X^*(T)$ 满足 $V_\lambda^w(\mu) \neq 0$，从而 $\mu \in P_\lambda^w$。进一步假设，对于某个支配余权 $\eta \in X_*(T)^+$，有 $\mu \in \mathcal{F}(v,\ \eta)$ 且$v \in W^\eta$；特别地，$\mu \in P_{\lambda_L}^{w_L}$。我们的主要结果分两个阶段比较 μ 在V_λ^w中的权重数以及 $V_{\lambda_L}^{w_L}$，如下所示。

定理 3.8。保留命题 *3.6*中的所有记号，并令 μ 为 V_λ^w的一个权，且$\mu \in \mathcal{F}(v,\ \eta)$。则

(1) 维数 $V_{\lambda_L}^{w_L}(\mu)$ = 维数$V_\lambda^q(\mu)$，其中将 $V_{\lambda_L}^{w_L}$视为 B_L 的 *Demazure* 模，将 V_λ^q 视为 B 的 *Demazure* 子模。*(2)* 维数 $V_\lambda^q(\mu)$ = 维数 $V_\lambda^w(\mu)$，将二者都视为 B的 *Demazure* 模。

我们随后构 造这两个命题的证明，并在接下来的两节中分别给出 .

例 1. 在开始证明之前，我们先给出一个有助于理解定理 3.8 的例子。设 G 是类型为 B_3（= Spin(7)）的单连通群，且 $\lambda = \rho = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$。我们在 Weyl 群中取 $w = s_1s_3s_2s_3s_1s_2s_3$，并考虑 P_λ^w 的面 $\mathcal{F}(s_1, x_1)$，其中 x_1 是第一个基本余权。可以验证 $q = s_3s_2s_3s_1s_2s_3$。图 1 展示了多面体 P_λ^q 和 P_λ^w，并突出显示了它们的公共面 $\mathcal{F}(s_1, x_1)$。图 2 单独展示了这个面，即 Levi 子群 L 的 Demazure 权多胞体 $P_{\lambda_L}^{w_L}$，其中半单部分的类型为 B_2。相对于这个 Levi 子群，最高权 λ_L 和 Weyl 群元素 w_L 分别对应于 $2\omega_1^L + \omega_2^L$ 和 $t_2t_1t_2$，其中 $t_1 = s_1s_2s_1$ 和 $t_2 = s_3$ 是 L 的 Weyl 群中的简单反射。

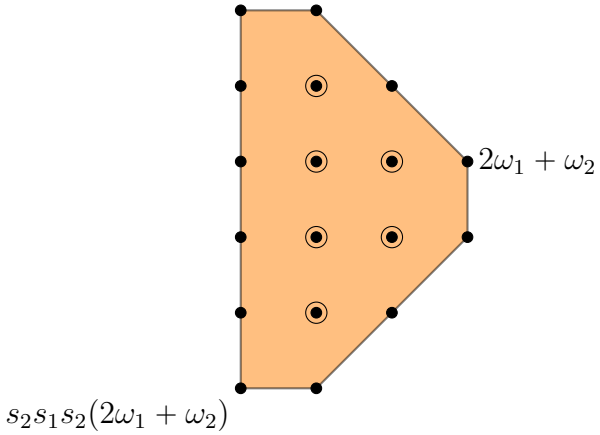


FIGURE 2. 类型为 B_2、最高权为 $2\omega_1 + \omega_2$、对应 Weyl 群元素为 $s_2s_1s_2$ 的 Demazure 模。

4. PROOF OF THEOREM 3.8(1)

本节给出的定理 3.8(1) 的证明深受 Roth [13], 的影响，这一点任何熟悉相关内容的读者都能看出来。我们尽可能以比所需更一般的形式陈述中间结果；这在一定程度上是为了减轻记号负担，并且我们会明确说明如何将其联系回当前所讨论的情形。

4.1. 舒伯特簇的嵌入。 设 P 是 G 中一个抛物子群（不一定是标准抛物子群），其 Levi 子群为 L，并且我们固定的极大环面 $T \subset G$ 是 L 的极大环面。于是有一个包含关系

$$W_L \hookrightarrow W$$

使得 W_L 成为 W 的一个反射子群。我们有旗簇 L/B_L,，对于每个元素 $y \in W_L$，都有 L-舒伯特簇 X_y^L 和 L-舒伯特胞腔 $\mathring{X}_y^L$。

我们首先研究一族闭浸入

$$i_{L,z} : L/B_L \to G/B$$

与某些元素 $z \in W$ 相关联。

引理 4.1. 设 L/B_L 如上。考虑满足以下条件的 $z \in W$：对于任意提升 $\dot{z} \in L \subseteq G$，都有 $\dot{z}^{-1}B_L\dot{z} \subseteq B$。那么映射

$$i_{L,z} : L/B_L \to G/B$$

定义为

$$lB_L \mapsto lzB$$

是一个闭浸入，它将 L–舒伯特胞腔 $\mathring{X}_y^L$ 映至 $\mathring{X}_{yz} = \mathring{X}_{yz}^G$ 的闭线性子概形。事实上，$i_{L,\,z}$ 诱导一个同构 $\mathring{X}_y^L \cong B_LyzB/B =: \mathring{Y}_{yz}^L$。

证明。由 $l \mapsto lz$ 给出的代数映射 $L \to G$ 诱导一个映射 $L/B_L \to G/B$：确实，若对 $b \in B_L$ 有 $l' = lb$，则 $l'z = lbz = lzz^{-1}bz$，且根据假设有 $z^{-1}bz \in B$。

该映射在每个舒伯特胞腔 B_LyB_L/B_L 上的限制诱导出闭浸入$B_LyB_L/B_L \to B_LyzB/B$，其像互不相交（单射性由如下事实得出：若 $\gamma \in R(y^{-1})$，则由对 z的假设可得 $\gamma \in R(z^{-1}y^{-1})$）。

因此$i_{L,z}$ 诱导出 B_LyB_L/B_L 到 B_LyzB/B上的同构。 □

由此立即得到以下推论:

推论4.2. 设 x 是 W 中的任意元素，并设 L、 B_L 如上。考虑 *Zariski* 闭包

$$Y_x^L := \overline{B_LxB/B}$$

穿过 xB/B的 B_L 轨道。则存在一个 L-舒伯特簇 X_y^L和一个 $z \in W$ ，使得

$$Y_x^L = i_{L,z}(X_y^L) \simeq X_y^L.$$

证明. 记 $x^{-1} = \pi^L(x^{-1})\pi_L(x^{-1}) \in W^L \cdot W_L$，并令 $y := (\pi_L(x^{-1}))^{-1} \in W_L$ 和 $z := (\pi^L(x^{-1}))^{-1} \in W$。那么 z^{-1} 确实满足 $\dot{z}^{-1}B_L\dot{z} \subseteq B$，且 $yz = x$ 如所求。□

4.2. **Picard 群上的作用**。 映射 $i_{L,z} : L/B_L \to G/B$ 在 Picard 群上诱导出映射 $i_{L,z}^*$ 。我们希望确定像 $i_{L,z}^*(\mathscr{L}_\lambda)$，从 G/B上的 $\mathscr{L}_\lambda$ 开始。

回忆一下 $\mathscr{L}_\lambda$ 的全空间的纤维丛构造:

$$G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$$

其中，对于所有 $b \in B$， $(g,\ t) \sim (gb,\ \lambda(b)t)$。

命题 4.3. 我们可以如下识别线丛的拉回: $i_{L,\ z}^*(\mathscr{L}_\lambda) = \mathscr{L}_{z\lambda}^L$。

证明。 定义一个映射

$$L \times_{B_L} \mathbb{C}_{-z\lambda} \to G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$$

在陪集代表元上定义为

$$(l, t) \mapsto (lz, t).$$

Th由于 $(lb,\ (z\lambda)(b)t) \mapsto (lbz,\ (z\lambda)(b)t)$，后者等于，因此该映射定义良好

$$(lzz^{-1}bz, (z\lambda)(b)t) = (lz, \lambda(z^{-1}bz)^{-1}(z\lambda)(b)t) = (lz, t).$$

这就将拉回的全空间识别为 $L \times_{B_L} \mathbb{C}_{-z\lambda}$。 □

令 $\mathscr{I}_{L,\ z}$ 表示 $i_{L,\ z}(L/B_L)$ 在 G/B 中的理想层。与 $\mathscr{L}_\lambda$ 张量后，我们得到 G/B 上层的标准短正合列:

$$0 \to \mathscr{I}_{L,z} \otimes \mathscr{L}_\lambda \to \mathscr{L}_\lambda \to (i_{L,z})_*\mathscr{O}_{L/B_L} \otimes \mathscr{L}_\lambda \to 0.$$

取上同调后，我们得到如下结果

命题 4.4. 我们有一个短正合列

$$0 \to H^0(G/B, \mathscr{I}_{L,z} \otimes \mathscr{L}_\lambda) \to H^0(G/B, \mathscr{L}_\lambda) \to H^0(L/B_L, i_{L,z}^*\mathscr{L}_\lambda) \to 0.$$

证明。 首先注意， $z\lambda$ 是相对于 B_L 的 L 的支配权，因为对于任意 $b \in B_L$， λ 相对于 B 是 G 的支配权，且根据关于 z 的假设， $(z\lambda)(b) = \lambda(z^{-1}bz)$ 和 $z^{-1}bz \in B$ 。因此 $H^0(L/B_L, i_{L,z}^*\mathscr{L}_\lambda) \neq 0$。

唯一还需要论证的一点是满射性。由于 $\mathscr{L}_\lambda$ 和 $i_{L,\ z}^*\mathscr{L}_\lambda$ 具有相容的 L-等变结构，我们可以将态射 $H^0(G/B, \mathscr{L}_\lambda) \to H^0(L/B_L, i_{L,z}^*\mathscr{L}_\lambda)$ 视为 L-模之间的态射。由于 $H^0(L/B_L, i_{L,z}^*\mathscr{L}_\lambda)$ 的极值权（例如最低权）属于限制映射的像，因此我们得到一个非零的 L-模映射。此外，根据 Borel-Weil 定理， $H^0(L/B_L, i_{L,z}^*\mathscr{L}_\lambda)$ 是一个不可约的L-模，因此限制映射必为满射。□

因此我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^0(G/B, \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & H^0(L/B_L, i_{L,z}^* \mathscr{L}_\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_{yz}, \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & H^0(X_y^L, i_{L,z}^* \mathscr{L}_\lambda). \end{array}$$

推论 4.5. 上述交换图中的所有映射都是满射。

证明。 垂直箭头为满射是关于舒伯特簇的一个经典结果。根据前一个引理，顶部箭头是满射，因此底部箭头也必为满射。□

4.3. T-等变对象的同构。 设 M 是 T 的一个表示。我们用 M^T 表示 T 不变量。更一般地，对于 T 的一个特征 ξ，我们用 $M^{T,\xi}$ 表示 M 的 ξ-等型分量。下面的引理是初等的。

引理 4.6. 在有理 T-模范畴中，函子 $M \mapsto M^T$ 对 M 是正合的。对于任意特征 ξ，函子 $M \mapsto M^{T,\xi}$ 也是正合的；取等型分量在有理 T- 模范畴上也保持正合。

为了比较 $H^0(X_{yz}$ 的权空间与 $\mathscr{L}_\lambda)$ 中的权空间， $H^0(X_y^L$、$i_{L,\ z}^*\mathscr{L}_\lambda)$，我们使用引理 4.6 以及推论 4.5 中的满射，并针对精心选取的 ξ考虑短正合列

$$0 \to H^0(X_{yz}, \mathscr{I}(Y_{yz}^L, X_{yz}) \otimes \mathscr{L}_\lambda)^{T,\xi} \to H^0(X_{yz}, \mathscr{L}_\lambda)^{T,\xi} \to H^0(X_y^L, i_{L,z}^* \mathscr{L}_\lambda)^{T,\xi} \to 0$$

其中 $\mathscr{I}(Y_{yz}^L,\ X_{yz})$ 是 $i_{L,\ z}(X_y^L) = Y_{yz}^L$ 在 X_{yz}中的理想层。作为初步步骤，我们进一步将这些整体截面限制到相应舒伯特簇的稠密开胞腔上，以便更容易描述其中出现的 T-权。我们汇集以下标准引理；出于稍后将会明了的原因，在本小节余下部分中，我们记 $q := yz \in W$。

引理 4.7。 我们有 T-等变同构 $BqB/B \simeq$ 谱$\mathbb{C}[x_{-\beta_1} \dots x_{-\beta_{\ell(q)}}]$，其中$\beta_i \in \Phi^+$ 满足 $q^{-1}.\beta_i \in \Phi^-$，例如 $\beta_i \in R(q^{-1})$.

证明。 由 [15, 引理 8.3.6] 可知 $BqB/B \simeq \mathbb{A}^{\ell(q)}$；剩下的只是考察 T-权。此外，由 [15, 引理 8.3.5] 可知，我们有一个 T-等变同构$BqB/B \simeq \Pi_{\alpha \in R(q^{-1})} U_\alpha$。我们有一个 T-等变同构 $U_\alpha \simeq$ 谱$\mathbb{C}[x_{-\alpha}]$，因此得到

$$\begin{aligned} BqB/B &\simeq \Pi_{\beta \in R(q^{-1})} U_\beta \\ &\simeq \Pi_{\beta \in R(q^{-1})} \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x_{-\beta}] \\ &\simeq \mathrm{Spec}\Big(\bigotimes_{\beta \in R(q^{-1})} \mathbb{C}[x_{-\beta}]\Big) \\ &\simeq \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x_{-\beta_1}, \dots x_{-\beta_{l(q)}}]_{\beta_i \in R(q^{-1})}. \end{aligned}$$

□

引理 4.8。 设 $S:=\{\beta\in R(q^{-1})|\beta\notin\Phi_L^+\}$。通过同构 $BqB/B\simeq$ 谱$\mathbb{C}[x_{-\beta_1}\dots x_{\beta_{\ell(q)}}]$，理想

$$I=I(B_LqB/B,BqB/B)$$

其零点集为 B_LqB/B，由 $\beta\in S$ 的 $x_{-\beta}$ 生成。

证明。 与前一个引理相同的考量使我们得到 T-等变同构 $B_LqB/B\simeq\prod_{\beta\in R(q^{-1})\cap\Phi_L^+}U_\beta$。这是 $\mathbb{A}^{\ell(q)}$ 的一个仿射子空间，其理想由满足 $\beta\notin R(q^{-1})\cap\Phi_L^+$ 的 $x_{-\beta}$ 生成，也就是说， $\beta\in S$。 □

引理 4.9。 我们有一个 T-等变同构

$$H^0(BqB/B,\mathscr{L}_\lambda)\simeq\mathbb{C}[x_{-\beta_1},\dots x_{-\beta_{\ell(q)}}]\otimes\mathbb{C}_{-q\lambda}.$$

证明。由于 $Pic(\mathbb{A}^n)=0,\mathscr{L}_\lambda|_{BqB/B}$ 与 $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{\ell(q)}}$ 同构，剩下的就是追踪 T-权。由于我们已经在引理 4.7 中描述了 T-模 $H^0(BqB/B,\mathscr{O}_{BqB/B})$，只需理解 $1\in H^0(BqB/B,\mathscr{L}_\lambda)$ 的 T-权。回想一下，$\mathscr{L}_\lambda=Sections(G\times_B\mathbb{C}_{-\lambda})$。由 [6, 6.1.11] 可知，我们有 $p:\ G\to G/B$；对于 G/B, 的一个开子簇 U，截面 $s\in H^0(U,\mathscr{L}_\lambda)$ 是一个正则的 $\mathbb{C}$ 值函数 $\tilde{s}$，定义在 $p^{-1}(U)$ 上，使得

$$\tilde{s}(gb)=\lambda(b)\cdot\tilde{s}(g).$$

˜令 ${}^qU$ 表示 ${}^qB$的幺幂根，因此 ${}^qUqB$ 在 G中稠密。令 $\mathbf{1}$ 为拉回$p^*(1)$，这是 ${}^qUqB$ 上满足以下条件的唯一函数（相差一个常数）：

$$\tilde{\mathbf{1}}(uqb)=\lambda(b)\tilde{\mathbf{1}}(q).$$

对于 $u\in{}^qU$。与 [6, 引理 6.1.15] 中的计算几乎完全相同的计算给出

$$(t\cdot\tilde{\mathbf{1}})(uq)=\tilde{\mathbf{1}}(t^{-1}uq)=\tilde{\mathbf{1}}(t^{-1}q)=\lambda(q^{-1}t^{-1}q)\tilde{\mathbf{1}}(q)=-(q.\lambda)(t)\cdot\tilde{\mathbf{1}}(uq).$$

因此，$1\in H^0({}^qUqB/B,\mathscr{L}_\lambda)$的 T-权为 $-q\lambda$。由此可得，$1\in H^0(BqB/B,\mathscr{L}_\lambda)$ 的权为 $-q\lambda$; 这正是将函数限制到仿射子概形上。□

引理 4.10。 我们有 T-等变包含

$$0\to H^0(X_q,\mathscr{L}_\lambda)\to H^0(BqB/B,\mathscr{L}_\lambda),$$

$$0\to H^0(Y_q^L,\mathscr{L}_\lambda)\to H^0(B_LqB/B,\mathscr{L}_\lambda),$$

and

$$0\to H^0(X_q,\mathscr{I}(Y_q^L,X_q)\otimes\mathscr{L}_\lambda)\to H^0(BqB/B,I\otimes\mathscr{L}_\lambda)$$

证明。 我们有 X_q 的一个由闭子概形 X_v、 $v\leqslant q$构成的滤过，舒伯特胞腔 BvB/B是仿射的，且包含 $i_v:\ BvB/B\to X_q$ 是仿射态射。这些条件保证全局 Grothendieck-Cousin 复形 $\text{Cousin}^\bullet_{\{X_v\}}(\mathscr{F})$ 的上同调同构于 $H^*(X_q,\mathscr{F})$，其中 $\mathscr{F}\in Coh(X_q)$，例如参见 [10] 或 [11]的附录。特别地，我们有

$$0\to H^0(X_q,\mathscr{L}_\lambda)\to\text{Cousin}^0_{\{X_v\}}(\mathscr{L}_\lambda)=H^0(BqB/B,\mathscr{L}_\lambda).$$

必要变更后， $H^0(Y_q^L,\ \mathscr{L}_\lambda),H^0(X_q,\ \mathscr{I}(Y_q^L,\ X_q)\otimes\mathscr{L}_\lambda)$。 □

我们用以下有理T-表示的交换图总结上述讨论。为便于展示，我们写作 $A = \mathbb{C}[x_{-\beta_1}, \dots x_{-\beta_{l(q)}}]$，其中 $\beta_i \in R(q^{-1})$。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(X_{\boldsymbol{\varphi}}, \mathscr{I}(Y_q^L, X_q) \otimes \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & H^0(X_{\boldsymbol{\varphi}}, \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & H^0(Y_q^L, \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(BqB/B, I \otimes \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & H^0(BqB/B, \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & H^0(B_LqB/B, \mathscr{L}_\lambda) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & (\{x_{-\beta}\}_{\beta\in S}) \otimes \mathbb{C}_{-q\lambda} & \longrightarrow & A \otimes \mathbb{C}_{-q\lambda} & \longrightarrow & A/(\{x_\beta\}_{\beta\in S}) \otimes \mathbb{C}_{-q\lambda} & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{4.10}$$

4.4. **定理 3.8 的特化。** 最后，我们将本节的结果特化，以应用于证明定理 3.8**(1)**。我们的 Levi 子群 L 与之前相同 $L = \dot{v}L_\eta\dot{v}^{-1}$，对应于 L_η 与支配余权 η 相关联的标准抛物子群的 Levi 子群 $v \in W^\eta$。沿用命题 3.6中的记号，我们作如下对应：

$$z = v(\pi^\eta(w^{-1} * v))^{-1}, \quad y = w_L = v(\pi_\eta(w^{-1} * v))^{-1}v^{-1}.$$

此 z 满足 $\dot{z}^{-1}B_L\dot{z} \subseteq B$，因为

$$\dot{z}^{-1}B_L\dot{z} = \pi^\eta(w^{-1} * v)v^{-1}\left(vB_\eta v^{-1}\right)v(\pi^\eta(w^{-1} * v))^{-1} = \pi^\eta(w^{-1} * v)B_\eta\pi^\eta(w^{-1} * v)^{-1} \subseteq B$$

因为 $\pi^\eta(w^{-1} * v) \in W^\eta$。此外，

$$yz = v(\pi_\eta(w^{-1} * v))^{-1}v^{-1} \cdot v(\pi^\eta(w^{-1} * v))^{-1} = v(w^{-1} * v)^{-1} = v(v^{-1}q) = q$$

其中与此前一样，$q \leqslant w$ 是满足 $w^{-1} * v = q^{-1}v$ 的唯一元素。因此，我们可以将本节的全部结果应用于这一固定包含

$$i : X_{w_L}^L \hookrightarrow X_q.$$

最后，由命题 4.3 可知 $i^*\mathscr{L}_\lambda \cong \mathscr{L}_{z\lambda} = \mathscr{L}_{\lambda_L}$。据此，我们旨在证明以下定理，它是将定理 3.8 （1）改用本节语言重新表述的结果。

定理 4.11. 设 μ 为 V_λ^w的一个权，且位于 *Demazure* 权多胞体 P_λ^w 的面 $\mathcal{F}(v, \eta)$ 上。则

$$H^0(X_{w_L}^L, \mathscr{L}_{\lambda_L})^{T,-\mu} \cong H^0(X_q, \mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu}.$$

在证明该定理之前，我们给出与这一具体设定相关的最后一个预备技术引理。

引理 4.12. 假设 $\beta \in R(q^{-1})$。则 $v^{-1}\beta > 0$。

证明。 首先，注意到 $q^{-1} * v = q^{-1}v$，因为根据定义 $q^{-1} * v = \max\{uv | u \leqslant q^{-1}\}$，并且我们知道 $w^{-1} * v = q^{-1}v$和 $q \leqslant w$。由于根据假设 $\beta \in R(q^{-1})$，我们有 $q^{-1}s_\beta \leqslant q^{-1}$。因此，根据 Demazure 乘积的定义，必然

$$q^{-1}s_\beta v \leqslant q^{-1}v.$$

我们将其改写为

$$q^{-1}v(v^{-1}s_\beta v) \leqslant q^{-1}v.$$

但这意味着根 $q^{-1}v\,(v^{-1}\beta)$ 与根 $v^{-1}\beta$ 的符号相反。由于$q^{-1}\beta \prec 0$，结论得证。□

引理 4.13. 设 $\nu \in \mathbb{Z}\Phi_L$。于是我们有 $((\{x_{-\beta}\}_{\beta\in S})\otimes\mathbb{C}_{-q\lambda})^{T,\ -q\lambda+\mathbb{Z}\Phi_L} = 0$。因此我们有权空间的同构

$$H^0(BqB, \mathscr{L}_\lambda)^{T,-q\lambda+\mathbb{Z}\Phi_L} \simeq H^0(B_LqB/B, \mathscr{L}_\lambda)^{T,-q\lambda+\mathbb{Z}\Phi_L}.$$

证明。 $(\{x_{-\beta}\}_{\beta\in S})\otimes\mathbb{C}_{-q\lambda})$ 中的一个非零权向量的权为 $-q\lambda-\sum_{\beta\in R(q^{-1})}a_\beta\beta$，其中 $a_\beta \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ ，使得至少有某个 $\beta \in S$ 满足 $a_\beta \neq 0$。因此我们必须证明，满足 $a_\beta \neq 0$ （其中某个 $\beta \in S$）的权 $-\sum_{\beta\in R(q^{-1})}a_\beta\beta$ 不属于 $\mathbb{Z}\Phi_L$。经 v^{-1}作用后，Φ_L 变为标准 Levi 子群 L_η的根系。根据 4.12，经 v^{-1} 作用会将$\beta \in S$ 变为正根；根据定义，它们不是标准 Levi 子群 L_η 的根。因此，特别地，只要某个 $\beta \in S$满足 $a_\beta > 0$，我们就有 $\langle\eta、 v^{-1}\sum_{\beta\in R(q^{-1})}a_\beta\beta\rangle > 0$；而$\langle\eta、\ \mathbb{Z}\Phi_{L_\eta}\rangle = 0$。□

定理 *4.11* 的证明。 考虑短正合列

$$0 \to H^0(X_q, \mathscr{I}(Y_q^L, X_q)\otimes\mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu} \to H^0(X_q, \mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu} \to H^0(X_{w_L}^L, \mathscr{L}_{\lambda_L})^{T,-\mu} \to 0$$

如引理 4.6 之后的讨论所述。我们将证明

$$H^0(X_q, \mathscr{I}(Y_q^L, X_q)\otimes\mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu} = 0.$$

由引理 4.10，我们有一个单射

$$0 \to H^0(X_q, \mathscr{I}(Y_q^L, X_q)\otimes\mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu} \to H^0(BqB/B, I\otimes\mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu}.$$

由于 $-\mu \in -q\lambda+\mathbb{Z}\Phi_L$，由引理 4.13，所需的消失性随即成立，因此

$$H^0(X_{w_L}^L, \mathscr{L}_{\lambda_L})^{T,-\mu} \cong H^0(X_q, \mathscr{L}_\lambda)^{T,-\mu}.$$

□

5. Proof of Theorem 3.8(2)

现在我们构造定理 3.8 第二部分的证明，以比较重数$V_\lambda^w(\mu)$和 $V_\lambda^q(\mu)$ 对于 $\mu \in \mathcal{F}(v, \eta)$ 以及所构造的特定 $q \leqslant w$。注意，在许多情况下，我们有 $q = w$ ，此时第二个等式便不再必要。一个值得关注的特殊情形是 $v = e \in W^\eta$，此时 $w^{-1} * v = w^{-1}$。因此，在本节余下部分中，我们假设 $e \neq v \in W^\eta$，从而 $l(v) \geqslant 1$。

为此，在本节余下部分固定 s_i 一个简单反射，使得 $s_iv \leqslant v$；特别地， $v^{-1}\alpha_i \prec 0$。我们记录几个预备引理。

引理 5.1。 $\langle v^{-1}\alpha_i,\ \eta\rangle < 0$。

证明。由于 $v^{-1}\alpha_i \prec 0$ 且 η 是支配的，我们必有 $\langle v^{-1}\alpha_i,\ \eta\rangle \leqslant 0$。

若等号成立，那么令 $\gamma := v^{-1}\alpha_i$ ，便可得出 γ 属于由与 η正交的根构成的子根系 Φ_η 。但是，根 γ 是负根，因此 $v(-\gamma)$将是正根，因为 $v \in W^\eta$。但显然 $v(-\gamma) = -\alpha_i$ 不是正根。□

引理5.2。 如果 $\mu + k\alpha_i$ 属于 P_λ^w，那么 $k \leqslant 0$。

证明。 如果 $\mu + k\alpha_i \in P_\lambda^w$，那么我们必有 $\langle \lambda,\ (w^{-1} * v)\eta\rangle \leqslant \langle \mu + k\alpha,\ v\eta\rangle$。由于 $\mu \in \mathcal{F}(v,$ $\eta)$,$\langle \lambda,\ (w^{-1} * v)\eta\rangle = \langle \mu,\ v\eta\rangle$，因此

$$0 \leqslant k\langle v^{-1}\alpha_i, \eta\rangle.$$

引理5.1 由此得到结论。 □

对于同一个 k，我们还有以下下界，它由 [3, 引理 4.5]和 [3,推论4.6]推出。

引理 5.3。如果 $\mu + k\alpha_i \in P_\lambda^w$，那么 $k \geqslant -\langle \mu,\ \alpha_i^\vee\rangle$。

证明。 首先我们证明 $\langle \mu,\ \alpha_i^\vee\rangle \geqslant 0$。事实上，根据 [3, 引理 4.5] ，我们可以写成

$$\mu = \sum_{\substack{u \leqslant w \\ u^{-1}\alpha_i > 0}} b_u u\lambda,$$

其中每个 $b_u \geqslant 0$。那么我们有

$$\langle b_u u\lambda, \alpha_i^\vee\rangle \geqslant 0$$

由于 $u^{-1}\alpha_i^\vee$ 的正性、 λ 的支配性以及 $b_u \geqslant 0$。因此， $\langle \mu,\ \alpha_i^\vee\rangle \geqslant 0$。

现在只需证明 $s_i\mu \leq \mu + k\alpha_i \leq \mu$ 在支配序中。若 $s_i P_\lambda^w = P_\lambda^w$，则显然成立，因为包含在多面体中的经过 μ 的 α_i-串在 s_i 下保持不变，而 $s_i\mu \in P_\lambda^w$ 必须是该串与 μ 相对的“另一端”。

否则，我们令 μ'' 为该串的另一端——也就是说， $\mu'' = \mu + k''\alpha_i$ ，其中 k'' 取满足 $\mu'' \in P_\lambda^w$ 的最小值。那么在这种情况下，我们有 $P_\lambda^w \subseteq P_\lambda^{s_i w}$；并且由 [3, 推论 4.6] μ 仍是 $P_\lambda^{s_i w}$ 内 α_i-串的最大端点可知，我们有 $s_i\mu \in P_\lambda^{s_i w}$，因此由前一种情况可得 $s_i\mu \leq \mu'' \leq \mu$ 。□

命题 5.4. μ 在特征(V_λ^w) 中的重数，与 $s_i\mu$ 在D_i (特征(V_λ^w)) = 特征$(V_\lambda^{s_i * w})$中的重数相同。

证明。 *</style}*若 ，则这是显然的，因为 *chch*，而 *chch*，由,$_{\alpha_i}$ 模结构可知。

否则，我们有 $w < s_i w$。记 $\mathsf{ch}(V_\lambda^w) = \sum c_\nu e^\nu$。如引理 5.3的证明中所述，注意到 $\langle \mu,$ $\alpha_i^\vee\rangle \geqslant 0$。根据定义，Demazure 算子 D_i 对项 e^ν的作用为

$$D_i(e^\nu) = \frac{1 - e^{-\alpha_i} s_i}{1 - e^{-\alpha_i}} e^\nu = \begin{cases} e^\nu + e^{\nu-\alpha_i} \cdots + e^{s_i\nu}, & \text{for } \langle \nu, \alpha_i^\vee\rangle \geqslant 0, \\ 0, & \text{for } \langle \nu, \alpha_i^\vee\rangle = -1, \\ -(e^{\nu+\alpha_i} + \cdots + e^{s_i\nu-\alpha_i}), & \text{for } \langle \nu, \alpha_i^\vee\rangle < -1. \end{cases}$$

考虑字符串 $\mathcal{S} = (\mu + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap P_\lambda^w$。根据引理 5.2和 5.3，其极大元为 μ，其极小元为 $\mu - k_0\alpha_i$，其中 $k_0 \geqslant -\langle \mu, \alpha_i^\vee\rangle$。令 $\mathcal{T} = (\mu + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap P_\lambda^{s_i w}$。注意到 $\mathcal{T}$是集合 $\{s_i\mu,$ $s_i\mu + \alpha_i, \ldots, \mu - \alpha_i, \mu\}$。容易验证，如上所述， D_i 作用于特征中支撑在 $\mathcal{S}$ 上的部分，其结果满足：只有 $D_i(e^\mu)$ 能够产生形如 $e^{s_i\mu}$ 的项，且没有进一步的消去。

由此可见，$\mathsf{ch}(V_\lambda^{s_i w})$ 中 $s_i\mu$ （以及仍然是 μ）的系数为 c_μ，正如所需。□

引理 5.5. 在 $P_\lambda^{s_i * w}$ 中， $s_i\mu$ 位于面 $\mathcal{F}(s_i v、\ \eta)$ 上。

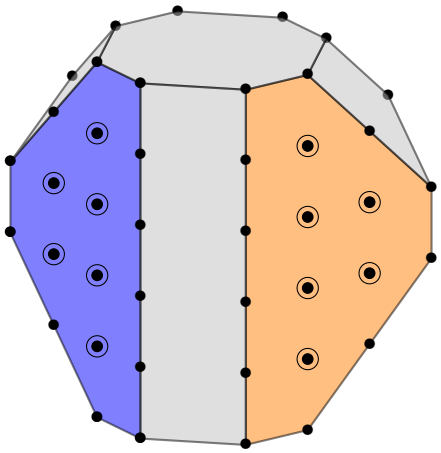


FIGURE 3. 类型 B_3、最高权 $\lambda = \rho = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 与 $w = s_1s_3s_2s_3s_1s_2s_3$ 的 Demazure 多胞体。注意 $s_1 * w = w_\circ$ 与 $\eta = x_1, v = s_1$ 对应的面以橙色突出显示，而与$\eta = x_1, v = e$ 对应的面以蓝色突出显示。这两个面及其权空间通过 s_1一一对应。

证明。 我们只需验证

$$\langle \lambda, ((s_i * w)^{-1} * (s_i v))\eta \rangle = \langle s_i\mu, (s_i v)\eta \rangle$$

左侧的 Weyl 群元素可化简为 $w^{-1} * s_i * (s_i v) = w^{-1} * v_\circ$ 右侧化简为 $\langle \mu, v\eta \rangle$；这正是关于 $\mu \in \mathcal{F}(v, \eta)$ 的原等式，由假设成立。□

定理 5.6. 设 $\mu \in \mathcal{F}(v、\ \eta)$ 属于 P_λ^w。则 μ 在 $\mathrm{ch}(V_\lambda^w)$ 中的重数与 $v^{-1}\mu$ 在 $\mathrm{ch}(V_\lambda^{v^{-1}*w})$中的重数相同。此外， $v^{-1}\mu$位于 $P_\lambda^{v^{-1}*w}$ 的面 $\mathcal{F}(e, \eta)$ 上。

证明。 我们对 $\ell(v)$进行归纳。情形 $\ell(v) = 1$ 由命题 5.4给出。

设 $v = s_i u$，于是 $s_i v = u \leqslant v_\circ$ 再次由命题 5.4 可知， e^μ 在 $\mathrm{ch}(V_\lambda^w)$ 中的系数与 $e^{s_i\mu}$ 在 $\mathrm{ch}(V_\lambda^{s_i*w})$中的权相同；并且， $s_i\mu$ 属于对应于 $\mathcal{F}(u$的面， $\eta)$ 在 $P_\lambda^{s_i*w}$ 上，由引理 5.5可得。

将归纳假设应用于 $s_i\mu \in \mathcal{F}(u,\ \eta)$ 中的 $P_\lambda^{s_i*w}$，可得 $s_i\mu$ 在 $\mathrm{ch}(V_\lambda^{s_i*w})$ 中的重数与 $u^{-1}s_i\mu = v^{-1}\mu$ 在 $\mathrm{ch}(V_\lambda^{u^{-1}*s_i*w})$ =$\mathrm{ch}(V_\lambda^{v^{-1}*w})$中的重数相同，并且 $u^{-1}s_i\mu = v^{-1}\mu$属于面 $\mathcal{F}(e, \eta)$ 在 $P_\lambda^{u^{-1}*s_i*w} = P_\lambda^{v^{-1}*w}$上。□

例 2. 继续看 B_3 与 $\lambda = \rho$、 $w = s_1s_3s_2s_3s_1s_2s_3$、$v = s_1$以及 $\eta = x_1$的型中的例子，图3说明了，特征 V_λ^w在面$\mathcal{F}(v、\ \eta)$ 上的部分，经乘以 v^{-1}后，与特征 $V_\lambda^{v^{-1}*w}$在面 $\mathcal{F}(e、\ \eta)$上的部分相同。这说明了定理5.6。

虽然图中未显示，但特征V_λ^q 在同一面上的部分也同样如此。因此，沿该面的重数对于V_λ^w和 V_λ^q 相同，这是定理3.8(2)(2)证明中的最后一个论证。

定理 3.8 第二部分的证明现在可以直接由定理 5.6轻易得出。

定理 3.8(2) 的证明。回想一下， q 是布鲁哈特区间 $[e, w]$ 中唯一满足 $w^{-1} * v = q^{-1}v$ 的 Weyl 群元素。取 μ 为 P_λ^q 和 P_λ^w 的公共面 $\mathcal{F}(v, \eta)$ 上的一个权。由于 $v^{-1} * q = v^{-1} * w$，通过对 q 作出这一巧妙选择，定理 5.6 表明，$\mathsf{ch}(V_\lambda^{v^{-1}*w}) = \mathsf{ch}(V_\lambda^{v^{-1}*q})$ 中 $v^{-1}\mu$ 的重数分别与 $\mathsf{ch}(V_\lambda^w)$ 和 $\mathsf{ch}(V_\lambda^q)$ 中 μ 的重数相同；因此，后两个重数相等，证毕。□

References

[1] Berenstein, A. D., Zelevinsky, A.V.，权的重数何时等于 1？《函数分析及其应用》24(4) (1990), 259–269. 1[2] Bernstein, J., Gel'fand, I.M., Gel'fand, S.I.，舒伯特胞腔与空间的上同调 G/P, Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), 1–26. 7[3] Besson, M., Jeralds, S., Kiers, J.，权多面体与 Demazure 特征的饱和性, Mathematische Annalen 388 (2024), 4449–4486. 2, 6, 7, 8, 16[4] Besson, M., Jeralds, S., Kiers, J.，仿射 Demazure 权多面体与扭曲布鲁哈特序，arXiv: 2404.03142 2, 6, 8[5] Besson, M., Jeralds, S., Kiers, J.，几何不变理论与伸缩 Kostka 准多项式，《国际数学研究通报》2025, issue 5. 3[6] Chriss, N., Ginzburg, V.，《复几何与表示论》，《数学进展》（Birkh¨auser），Birkh¨auser 1997. 13[7] Dabrowski, R.，关于舒伯特簇上线丛存在非平凡整体截面的充要条件的一个简明证明，载于《Kazhdan–Lusztig 理论及相关主题》，《当代数学》139（V. Deodhar 编）（1992）6[8] Derksen, H., Weyman, J.，箭图表示的组合学, Ann. Inst. Fourier 61(3), (2011). 1[9] King, R., Tollu, C., Toumazet, F.，Littlewood–Richardson 系数的因式分解，J. Combin. Theory Ser A 116(2) (2009), 314–333. 1[10] Kempf, G.，《诱导表示的 Grothendieck-Cousin 复形》，《数学进展》23(3) (1978), 310–396. 13[11] Kumar, S.，《Kac-Moody 群、其旗簇与表示论》，《数学进展》（Birkh¨auser），Birkh¨auser Boston, MA 2002. 2, 13[12] Ressayre, N.，分支系数的约化，J. Lie Theory 31(3) (2021) 1[13] Roth, M.，Littlewood–Richardson 系数的约化规则，Int. Math. Res. Not. 2011 (18), 4105–4134. 1, 2, 10[14] Schuster, M.，共形块的秩约化, arXiv: 1512.03877 (2016). 1[15] Springer, T.A.，《线性代数群，第 2 版》，Birkh¨auser Boston, 1998. 12[16] Tsukerman, E., Williams, L.，Bruhat 区间多面体，Adv. Math 285 (2015), 766–810 8

YMSC, Tsinghua University, Beijing 100871, P.R. China电子邮箱地址: bessonm@tsinghua.edu.cn

University of Sydney, Camperdown, NSW 2006, Australia电子邮箱地址: samuel.jeralds@sydney.edu.au

Epic Systems Corporation, Verona, WI 53593, USA电子邮箱地址: jkiers@epic.com