arXiv:2602.13968v1 [math.CV] 15 Feb 2026

复 Sobole夫空间中函数的精细性质

NGOC CUONG NGUYEN

Abstract. 我们全面研究有界开子集 $\mathbb{C}^n$ 上复 Sobolev 空间中函数的局部性质。主要工具是该空间相应的泛函容量，其灵感源自 Vigny [Vig07] 提出的全局容量。我们证明了这种容量与用于多次调和函数的 Bedford-Taylor 容量之间的不等式；就指数而言，该不等式是尖锐的。此外，我们证明了泛函容量是一种 Choquet 容量。我们还证明了该容量的 Alexander-Taylor 型不等式。这使我们得以强化 Dinh、Marinescu 和 Vu [DMV23], 、Vigny 和 Vu [VV24] 的相关研究结果。最后，我们通过体积-容量不等式刻画了该空间中的 Moser-Trudinger 型不等式。

Contents

1. 引言 2
2. 定义与基本性质 6
2.1. 复 Sobolev 空间 6
2.2. 函数的基本例子 7
2.3. 逼近 8
2.4. 紧致性与完备性 12
2.5. 多重次调和函数的 Bedford-Taylor 容量 16
3. 基本积分不等式 17
4. 一种泛函容量 23
5. 拟连续性 28
6. 可容性 33
7. 嵌入狄利克雷空间 36
7.1. 与闭正流相关的狄利克雷空间 36
7.2. 狄利克雷空间中的容量 40
8. 指数可积性 42
8.1. 体积与容量的比较 42
8.2. Alexander-Taylor 型不等式 46
9. 勒贝格点 48
10. 附录 53
参考文献 56

Date: 2026年2月17日。

1. Introduction

设 (X,ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形。Sobolev 空间 $W^{1,2}(X)$ 的一个自然子空间称为复 Sobolev 空间 W^*，由 Dinh 和 Sibony [DS06] 在他们关于复动力系统的研究中引入。事实证明，这个新空间是前者很好的复版本，因为它考虑了流形的复结构。许多具有底层流形重要性质的函数族都属于该空间，其中包括利普希茨函数、有界拟多重次调和（psh）函数，或更一般地，[CW05] 中研究的有界 δ拟多重次调和函数。Vigny [Vig07] 研究了该空间的基本泛函性质，并证明它是一个巴拿赫空间，具有相应的范数 $\|\cdot\|_*$；该范数强于 Sobolev 范数。然而，该空间不是自反的，并且相对于该范数的强拓扑，光滑函数在 W^* 中不稠密。他还为该空间定义了一种泛函容量，并证明它是 Choquet 意义下的容量。此外，这种泛函容量与 [K03] 中定义的全局多重位势论中的 Bedford 和 Taylor 相对容量在定性上可比。

由于具有灵活的性质，这一空间已在高维复动力系统、复 Monge-Amp`ère 方程及其他领域得到广泛应用，参见例如 [BiD23], [DKN22], [DKW21], [DoNV25], [Vig17], [Vu20、Vu24、Vu26]and [WZ24]。此外，文献 [DoN25]还提出了一种更高阶的复 Sobolev 空间。

Sobolev 空间中的元素除去一个勒贝格测度为零的集合后几乎处处有定义，这一点与拟次调和或准拟次调和函数不同。关于索伯列夫容量的精细性质是经典结果 [EG92], [KLV21]。然而，这种容量不足以刻画多极集，因此不适合研究 W^* 中的函数。我们需要使用 W^* 的相应容量，它支配索伯列夫容量。然而，复 Sobolev 空间中的新容量更难分析。一个关键区别在于，在这些空间中，我们不能再依赖极大函数技巧，尽管这类技巧非常强大（参见例如 [KLV21]）。

最近，[DMV23], [Vig07] and [VV24] 证明，多重位势论是研究 W^*的一种合适而强大的工具。因此，他们在研究这类空间中函数的局部性质方面取得了重大进展。

我们继续研究局部复索伯列夫空间，[DMV23] and [Vig07]此前曾对其进行过部分研究。我们的目标是进一步发展这一方法，重点关注多重位势论中泛函容量与Bedford和Taylor的经典容量 [BT82] 以及Alexander和Taylor的容量[AT84]之间新的最优不等式。

设Ω $\subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界域，$\omega = dd^c|z|^2$ 是标准K¨ahler形式。记 $W^{1,2}$(Ω $\mathbb{R}$)为通常的Sobolev空间。对于 $f \in W^{1,2}$(Ω $\mathbb{R}$)，我们将Γ_f 定义为满足以下条件的所有正闭(1,1)-流 T 的集合

$$df \wedge d^c f \leq T \quad \text{weakly in } \Omega.$$

这里我们使用归一化

$$d^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\overline{\partial} - \partial), \quad dd^c = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\overline{\partial}.$$

考虑子空间

$$W^*(\Omega) = \left\{ f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) : \text{there exists } T \in \Gamma_f \text{ with } \|T\|_\Omega < +\infty \right\},$$

其中 $\|T\|_\Omega := \int_\Omega T \wedge \omega^{n-1}$. 对于 $f \in W^*(\Omega)$，定义其 W^*-范数

$$\|f\|_*^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \inf_{T\in\Gamma_f} \|T\|_\Omega.$$

随后，我们重新证明了 [Vig07] 中得到的基本泛函结果。具体而言，$(W^*(\Omega)\ \|\cdot\|_*)$ 是一个巴拿赫空间（定理 2.15），并且相对于范数 $\|\cdot\|_*$ 的强拓扑，连续函数在 $W^*(\Omega)$ 中不稠密（命题2.19）。如果 $n=1$，那么$W^*(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$；否则，$W^*(\Omega)$ 不是自反的（推论 2.20）。需要指出的是，这些性质与 Cegrell 和 Wiklund 研究的 δ-拟束状函数空间的性质有一些相似之处 [CW05]。

受 [Vig07] 中泛函容量的启发，我们对博雷尔子集 $E \subset\Omega$ 定义局部容量 $\mathsf{c}(E) := \mathsf{c}(E, \Omega)$，如下所示：

$$\mathsf{c}(E) = \inf\left\{\|v\|_*^2 \mid v \in \mathscr{K}(E)\right\},$$

其中

$$\mathscr{K}(E) = \{v \in W^*(\Omega) \mid \{v \le -1\}^o \supset E \text{ and } v \le 0\}.$$

这里 $\{v \le -1\}^o \supset E$ 表示在 E的某个邻域内几乎处处成立。

Sobolev 空间中的泛函容量已经得到了很好的理解，同时也是研究其元素精细性质的有效工具，参见例如 [EG92，第 4.7—4.8]章。相比之下，迄今为止，使用 $\mathsf{c}(\cdot)$ 研究复 Sobolev 空间还不够有效。我们的目标是利用这一容量，系统地研究 $W^*(\Omega)$ 中函数的局部性质。这与 [Vig07] 和 [DMV23] 所采用的视角不同；后者使用了 Bedford和Taylor [BT82] 所定义的拟次调和函数的相对容量。也就是说，对于博雷尔集 $E \subset\Omega$,

$$cap(E,\Omega) = \sup\left\{\int_E (dd^c u)^n : u \in PSH(\Omega),\ -1 \le u \le 0\right\}.$$

我们的第一个主要结果解释了为什么 $cap(\cdot, \Omega)$ 能够在以往的工作中得到有效使用。粗略地说，它们彼此等价。

定理 1.1。 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 是一个严格伪凸域。

(a) 存在一个常数 $A > 0$，使得对于每个博雷尔集 $E \subset \Omega$,

$$\mathsf{c}(E) \le A[cap(E,\Omega)]^{\frac{1}{n}}.$$

(b) 设 $D \subset\subset\Omega$ 为一个子域。存在一个常数 A'，使得对于每个博雷尔集 $E \subset D$,

$$\frac{1}{A'} cap(E,\Omega) \le \mathsf{c}(E).$$

此外，就指数而言，上述不等式是尖锐的。

该定理的陈述由引理4.5、4.7以及注记4.6、8.11组成。在紧集K¨ahler流形上，这两个不等式均已在 [DKN22，命题5.1] 中得到，其中$\mathsf{c}(E)$由另一个等价的 W^*-范数定义，但其最优性尚不清楚。在此类流形上，第一个不等式的定性版本早已由 [Vig07] 得到，第二个不等式也在那里得到了证明，但未证明其指数是尖锐的。

在局部情形下，证明有所不同。第一个不等式的证明的关键在于利用 Cegrell 不等式 [Ce04]，而第二个不等式的证明则源于比较原理。另一方面，指数的最优性可由 Alexander-Taylor 型不等式推出

该不等式在引理 8.10 中得到证明。后一个不等式本身也具有独立的研究价值。其应用之一是，在定理 9.1 中，为给定的 $f \in W^*(B(0,1))$ 存在一个整体拟次调和函数次延拓。这个拟次调和函数次延拓结果是推导如下性质的重要工具：这类函数的勒贝格点集合具有零容量。该结果归功于 Vigny 和 Vu [VV24]，其中有界情形此前已在 [Vig07] 中得到证明。我们在定理 9.3 中改进了该结果的表述，并且其证明也得到了简化。

定理 1.1 和 [BT82] 的直接推论是：博雷尔集 $P \subset \Omega$ 是多极集，当且仅当 $c(P) = 0$。鉴于容量等价，[DMV23] 中的结果可以用 $c(\cdot)$ 来重新表述；这些结果此前是针对 $cap(\cdot, \Omega)$ 得出的。然而，正如上文所强调的，我们将采用另一种途径，利用泛函容量 $c(\cdot)$ 的优势（参见引理 4.3、命题 5.3、引理 5.5），从而为 [DMV23] 中的结果提供替代证明。特别是，借鉴 [DMV23] 和 [Vig07]，中的思路，我们简化了此前在 [DMV23，定理 2.10] 中证明的准连续代表结果（另见 [Vig07，定理 22]）。

推论 1.2。令 $f \in W^*(\Omega)$。存在一个拟连续修正 $\widetilde{f}$，使得 $f = \widetilde{f}$ 几乎处处成立。此外，若 g 是 f的另一个拟连续修正，则在一个多极集之外成立。

证明中最具技术性的部分在于精细的积分估计。在此过程中，我们改进了 [DMV23] 中得到的估计。事实证明，在定理 9.3 中，按照 Sobolev 空间 [EG92，第 4]，

$$f^*(x) \equiv \begin{cases} \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f\, dy & \text{if this limit exits,} \\ = 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.1}$$

是一个拟连续修正，其中 dy 是 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 上的勒贝格测度。

借助拟连续性结果，我们可以定义函数$g \in W^*(\Omega)$关于与有界拟次调和函数相关的 Monge-Amp`ère 测度的积分（定义 5.12）。第 9 节进一步推进了这一结果，在那里我们证明 $W^*(\Omega)$自然嵌入到一个与闭的正（$n-1, n-1$）流 $\theta = [dd^c(\phi+\delta|z|^2)]^{n-1}$ 相关的狄利克雷空间中，其中给定了 $\phi \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$ 和 {v12)。因此，对于 $f, g \in W^*(\Omega)$，积分 $\int_K df \wedge d^c g \wedge \theta$ 在每个紧集 $K \subset \Omega$上都有定义。Do、Nguyen 和 Vu 最近在 [DoNV25] 中研究了这一方面。

第二个主要结果如下。

定理 1.3。设Ω 是 $\mathbb{C}^n$中的一个有界开集。在博雷尔子集上定义的集合函数 $E \mapsto c(E) = c(E,\Omega)$ 是一个 *Choquet* 容量。

这一结果是 [Vig07] 的局部类比。在紧 K¨ahler 流形上，[Vig07, 定理 30] 的证明采用了狄利克雷空间中的容量概念 [Vig07, 引理 23]，以及通过与闭正流 [FO84] 相关的一族容量来刻画多极集的方法。这里我们采用类似的策略。值得注意的是，我们只利用多重位势论，就为推论 7.9 中的刻画给出了更简洁的证明。

复 Sobolev 空间中函数的另一个显著性质是 Dinh、Marinescu 和 Vu [DMV23], 所证明的一致指数可积性，它与拟次调和函数的一致指数可积性非常接近。具体而言，存在正的常数 α

以及 A，使得对于每个满足 $\|f\|_* \le 1$ 的 $f \in W^*(B(0,\ 1))$,

$$\int_{\bar{B}(0,\frac{1}{8})} e^{\alpha|f|^2} dx \le A. \tag{1.2}$$

这一结果应与 H¨ormander [Ho07 的命题 4.2.9]以及 Skoda [Sk72] 关于拟次调和函数指数可积性的著名结果相比较。在 [DMV23 的定理 1.2] 的证明中，作者运用了维数归纳论证以及正流的切片理论。我们在命题 8.4 中给出了一种新的、更简单的证明方法，将不等式归约到一维情形。这样，在采用光滑核进行标准卷积后，只需处理光滑函数。常数可以显式计算出来，但并非最优。此外，我们在注 8.8 中指出，对于所有 $n \ge 1$，$|f|$ （1.2）中的指数 2 都是最优的；这一点此前仅对 $n = 1$ in[DMV23]所涉及的情形已知。

第三个主要结果通过次水平集的体积—容量不等式，完整刻画了不等式（1.2）。

定理 1.4。 设 $K \subset\subset \Omega$ 为一个紧子集。以下命题成立，且彼此等价。

(a) 存在常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，仅依赖于 K,Ω，使得对每个博雷尔集 $E \subset K$

$$V_{2n}(E) \le A_1 e^{-\alpha/\mathfrak{c}(E)}.$$

(b) 存在一致常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，仅依赖于 K,Ω，使得对每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和 $f \le 0$,

$$V_{2n}(\{f < -1\} \cap K) \le A_1 e^{\frac{-\alpha}{\|f\|_*^2}}.$$

(c) 存在一致常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，仅依赖于 K,Ω，使得对每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和范数 $\|f\|_* \le \kappa$ 的 $f \le 0$,

$$V_{2n}(\{f < -s\} \cap K) \le A_1 e^{-\alpha s^2/\kappa^2}, \quad \forall s > 0.$$

(d) 存在一致常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，仅依赖于 K,Ω，使得对每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和满足 $\|f\|_* \le 1$ 的 $f \le 0$,

$$V_{2n}(\{f < -s\} \cap K) \le A_1 e^{-\alpha s^2}, \quad \forall s > 0.$$

这一刻画部分受到 ˚Ahag、Cegrell、Ko-lodziej、Pham 和 Zeriahi [ACKPZ]的工作的启发。最后，我们在注 8.9 中指出，这些不等式对于与 H¨older 连续拟次调和函数相关的一大类 Monge-Amp`ere 测度均成立。

致谢。 我谨向 G. Marinescu 和 D.-V. Vu 致谢，感谢他们诚挚邀请我于 2025年9月 访问科隆大学，并与我就 [DMV23]的结果进行了许多富有助益的讨论。我感谢 S. Ko-lodziej 和 D.-V. Vu 对论文草稿提出的宝贵意见。本文是在作者访问复杂几何中心（大田）期间撰写的。他谨向 Jun-Muk Hwang 和 Yongnam Lee 致谢，感谢他们的热情支持和无微不至的款待。他也感谢该机构提供了理想的工作条件。

2. Definitions and elementary properties

本节将介绍相关记号，并研究基本的函数性质。

2.1. 复 Sobolev 空间。 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界开子集，并且

$$\omega = dd^c|z|^2$$

是 $\mathbb{C}^n$ 中的标准 Kähler 形式。对于 $f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$，令 Γ_f 表示所有满足以下条件的正闭 $(1,1)$-流 T 的集合

$$dd^c f \leq T \quad \text{weakly in } \Omega. \tag{2.1}$$

（这个集合 Γ_f 可能为空。）Ω 上正 $(1,1)$-流 T 的总质量定义为

$$\|T\|_\Omega := \int_\Omega T \wedge \omega^{n-1}.$$

回顾一下，我们定义子空间

$$W^*(\Omega) = \left\{ f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) : \text{there exists } T \in \Gamma_f \text{ with } \|T\|_\Omega < +\infty \right\} \tag{2.2}$$

W^*范数对于 $f \in W^*(\Omega)$ 定义为

$$\|f\|_*^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \inf_{T \in \Gamma_f} \|T\|_\Omega. \tag{2.3}$$

此时，它是与 f相关的一个量。在研究其基本性质之后，我们将在定理 2.15 中证明它确实是一个范数。

由 Ω 中有限质量闭正 $(1,1)$-流的弱紧性，存在一个闭正 $(1,1)$-流 T_f，使得

$$dd^c f \leq T_f \quad \text{and} \quad \inf_{T \in \Gamma_f} \|T\|_\Omega = \|T_f\|_\Omega. \tag{2.4}$$

定义2.1。 满足 (2.4) 的闭正 $(1,1)$-流 T 称为 f的极小流，或称为实现 f的 W^*范数的流。

零边界值 Sobolev 空间记作 $W_0^{1,2}(\Omega)$，我们还考虑

$$W_0^*(\Omega) = W^*(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

注意，由 [GT，引理 7.6]，若 f，$g \in W^{1,2}(\Omega)$，则对几乎处处的点

$$\nabla \max\{f, g\} = \begin{cases} \nabla f & \text{on } \{f > g\}, \\ \nabla g & \text{on } \{f \leq g\}, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中，∇f 表示 $\mathbb{R}^{2n}$中 f 的梯度。在特殊情形 $g = 0$下，我们记作

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{and} \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

一个基本不等式是：对于每个 s，$t \in \mathbb{R}$ 和 f，$g \in W^{1,2}(\Omega)$，

$$d(sf + tg) \wedge d^c(sf + tg) \geq 0$$

作为系数属于 $L^1(\Omega)$ 的正 $(1,1)$-形式。等价地，我们有

$$s^2 dd^c f + t^2 dd^c g \geq st(dd^c g + dd^c f). \tag{2.6}$$

更一般地，若 $u, v \in L^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$，则根据柯西-施瓦茨不等式，对 Φ 的每个强正测试 $(n-1, n-1)$-形式，

$$2\int uv\ df \wedge d^c g \wedge \Phi \leq 2\left(\int u^2 df \wedge d^c f \wedge \Phi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int v^2 dg \wedge d^c g \wedge \Phi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \int u^2 df \wedge d^c f \wedge \Phi + \int v^2 dg \wedge d^c g \wedge \Phi.$$

因此，

$$2uv\ df \wedge d^c g \leq u^2 df \wedge d^c f + v^2 dg \wedge d^c g \tag{2.7}$$

在电流的弱意义下。

引理 2.2. 设 $f, g \in W^*(\Omega)$。设 T和 S为正的$(1, 1)$-流，满足$df \wedge d^c f \leq T$和 $dg \wedge d^c g \leq S$。那么，

$$d\max\{f, g\} \wedge d^c \max\{f, g\} \leq T + S.$$
$$d\min\{f, g\} \wedge d^c \min\{f, g\} \leq T + S.$$

因此，

$$d|f| \wedge d^c|f| \leq 2T.$$

证明。这些都是由 (2.5) 和流 S 与 T 的正性直接得出的。 □

This lemma combined with the definition of $\|\cdot\|_*$ yields

引理 2.3。设 $f, g \in W^*(\Omega)$。那么，$\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 属于 $W^*(\Omega)$，并且

$$\|\max\{f, g\}\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*, \quad \|\min\{f, g\}\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*.$$

此外，对于任意常数 $c \in \mathbb{R}$，

$$\|\max\{f, c\}\|_* \leq \|f\|_*, \quad \|\min\{f, c\}\|_* \leq \|f\|_* \tag{2.8}$$

一个直接且非常有用的推论如下。

推论 2.4。若 $f \in W^*(\Omega)$，则 $f^+ = \max\{f, 0\}$ 和 $f^- = -\min\{f, 0\}$ 属于 $W^*(\Omega)$。此外，$\|f^+\|_* \leq \|f\|_*$，$\|f^-\|_* \leq \|f\|_*$ 和 $\||f|\|_* \leq 2\|f\|_*$。

2.2. **函数的基本例子**。我们给出新空间中函数的几个例子。

例2.5。具有紧支撑的光滑函数或 Ω 中的全局 Lipschitz 函数属于 $W^*(\Omega)$。

例2.6。设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集。

(a) 若 $u, v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，则 $u \pm v \in W^*(\Omega)$。(b) 设 $u \in PSH(\Omega) \cap L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 且 $u \leq -1$。那么，$-\log(-u) \in PSH(\Omega)$。直接计算可得，对于任意 $\Omega' \subset\subset \Omega.$，$-\log(-u) \in W^*(\Omega')$。一般而言，它们无界。(c) 设 $\Omega = B(0, 1/2)$。那么，$u(z_1, ..., z_n) = -(-\log |z_1|)^a \in W^*(\Omega)$ 当且仅当 $a < 1/2$. 该函数也是多重次调和函数。

下一个结果归功于 Vigny [Vig07] 以及 Dinh、Marinescu 和 Vu [DMV23, 引理 2.8]。

引理 2.7. 设 $f \in W^*(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。假设 $df \wedge d^c f \le dd^c u$ 对于某个负函数 $u \in PSH(\Omega) \cap C^0(\Omega)$。记 $N := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$，并令 $u_N := \max\{u, -N\} + N$。那么，

$$d(u_N f) \wedge d^c(u_N f) \le N^2 dd^c(u_N^2 + u_{N+1}).$$

因此，对于每个 $\Omega' \subset\subset \Omega$，$u_N f \in W^*(\Omega')$。

证明。由 (2.7) 可得

$$d(u_N f) \wedge d^c(u_N f) \le 2u_N^2 df \wedge d^c f + 2f^2 du_N \wedge d^c u_N$$

作为系数属于 $L^1(\Omega)$ 的正 (1,1)-流。容易看出，$du_N \wedge d^c u_N \le dd^c u_N^2$ 在弱意义下当 $0 \le u_N \le N$ 时成立，且它是拟次调和的。u 的连续性蕴含

$$dd^c \max\{u, -N-1\} = dd^c u$$

在开集 $\{u > -N-1\} \supset \{u \ge -N\}$上。因此，$u_N^2 df \wedge d^c f \le N^2 dd^c u_{N+1}$。结合这些事实即可轻易得到证明。 □

如果采用下文的逼近论证（注 2.10），引理 2.7 中将无需假设 u 连续。

2.3. 逼近。 我们固定如下的标准光滑核。定义$\eta(z) \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$为

$$\eta(z) = \begin{cases} c_0 e^{\frac{1}{|z|^2-1}} & \text{if } |z| < 1, \\ 0 & \text{if } |z| \ge 1, \end{cases}$$

其中常数 c_0 的选取满足 $\int_{\mathbb{C}^n} \eta(x)dx = 1$。对每个 $\varepsilon > 0$，令

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right). \tag{2.9}$$

本文中将反复使用这一族函数。我们还记作

$$\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}. \tag{2.10}$$

下面这个简单的观察非常有用。

引理 2.8。 设 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ 且 $T = \sum T_{j\bar{k}} \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \underline{dz_j} \wedge d\bar{z}_k$ 是一个阶为零的(1,1)-流。则，

$$df \wedge d^c f \le T$$

弱收敛当且仅当对每个 $\zeta \in \mathbb{C}^n$，

$$\sum_{j,k} \partial_j f(z) \partial_{\bar{k}} f(z) \zeta^j \bar{\zeta}^k \le \sum_{j,k} T_{j\bar{k}}(z) \zeta^j \bar{\zeta}^k \tag{2.11}$$

在零阶分布的意义下，其中 $\partial_j f := \partial f/\partial z_j$ 且 $\partial_{\bar{k}} f = \partial f/\partial \bar{z}_k$。

证明。显然，$df \wedge d^c f \le T$ 成立当且仅当

$$\sum (T_{j\bar{k}} - \partial_j f\, \partial_{\bar{k}} f)\sqrt{-1} dz^j \wedge d\bar{z}^k = \sum S_{j\bar{k}} \sqrt{-1} dz^j \wedge d\bar{z}^k =: S \ge 0$$

作为正的 (1,1)-流，其中 $S_{j\bar{k}} = T_{j\bar{k}} - \partial_j f \partial_{\bar{k}} f$。由于 $S * \eta_\varepsilon$ 弱收敛到 S（当 $\varepsilon \to 0$ 时），上述不等式等价于 $S * \eta_\varepsilon \ge 0$ 作为 (1,1)-形式成立。根据正 (1,1)-形式的一个刻画，当且仅当

$$\sum (S_{j\bar{k}} * \eta_\varepsilon) \zeta^j \bar{\zeta}^k = \sum (S_{j\bar{k}} \zeta^j \bar{\zeta}^k) * \eta_\varepsilon \ge 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

因此， $S \geq 0$ 当且仅当 $\sum S_{j\bar{k}}\zeta^j\bar{\zeta}^k \geq 0$ 对每个 $\zeta \in \mathbb{C}^n$都作为零阶分布弱收敛。证明完成。□

这导出了一种刻画

命题 2.9。 设 $f \in W^{1,\,2}(\Omega)$ 且 T 是一个正的$(1,\,1)$-流。那么，

$$df \wedge d^c f \leq T$$

在电流的弱意义下，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$,

$$d(f * \eta_\varepsilon) \wedge d^c(f * \eta_\varepsilon) \leq T * \eta_\varepsilon$$

在Ω_ε中以电流的弱意义（或逐点）成立。

证明。 充分性很容易证明，因为如果第二个不等式对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立，那么令 $\varepsilon \to 0$ ，即可得到第一个不等式。下面证明必要性。假设 $df \wedge d^c f \leq T$在 $T = \sum T_{j\bar{k}}\frac{\sqrt{-1}}{\pi} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ 中弱收敛。由于

$$f * \eta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int f(z-x)\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int f(z-x)\eta_\varepsilon(x)dx,$$

我们计算得

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(f * \eta_\varepsilon(z)) = \int (\partial_j f)(z-x)\eta_\epsilon(x)dx.$$

由 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 的柯西-施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}
&\sum \partial_j f(z-x)\ \partial_{\bar{k}} f(z-y)\zeta^j\bar{\zeta}^k \\
&\leq \frac{1}{2}\sum \partial_j f(z-x)\partial_{\bar{k}} f(z-x)\zeta^j\bar{\zeta}^k + \frac{1}{2}\sum \partial_j f(z-y)\partial_{\bar{k}} f(z-y)\zeta^j\bar{\zeta}^k.
\end{aligned}$$

由于 $\eta_\varepsilon(x) \geq 0$，可得

$$\begin{aligned}
&2\iint \sum \partial_j f(z-x)\partial_{\bar{k}} f(z-y)\zeta^j\bar{\zeta}^k\eta_\varepsilon(x)\eta_\epsilon(y)\,dxdy \\
&\leq \iint \sum \partial_j f(z-x)\partial_{\bar{k}} f(z-x)\zeta^j\bar{\zeta}^k\eta_\varepsilon(x)\eta_\epsilon(y)\,dxdy \\
&\quad + \iint \sum \partial_j f(z-y)\partial_{\bar{k}} f(z-y)\zeta^j\bar{\zeta}^k\eta_\varepsilon(x)\eta_\epsilon(y)\,dxdy \\
&= 2\int \sum \partial_j f(z-x)\partial_{\bar{k}} f(z-x)\zeta^j\bar{\zeta}^k\eta_\varepsilon(x)\,dx \\
&:= 2I,
\end{aligned}$$

其中我们用到了以下事实：对每个 $\varepsilon > 0$， $\int \eta_\varepsilon(x)dx = 1$ 。引理 2.8 中的不等式 (2.11) 给出

$$I \leq \int \sum T_{j\bar{k}}(z-x)\zeta^j\bar{\zeta}^k\eta_\varepsilon(x)\,dx = \sum T_{j\bar{k}} * \eta_\varepsilon(z)\zeta^j\bar{\zeta}^k,$$

因此,

$$\sum \partial_j(f * \eta_\varepsilon)(z)\ \partial_{\bar{k}}(f * \eta_\varepsilon)(z)\zeta^j\bar{\zeta}^k \leq \sum (T_{j\bar{k}} * \eta_\varepsilon)(z)\zeta^j\bar{\zeta}^k$$

在分布意义（或逐点意义）下。左侧改写为

$$\sum [(\partial f/\partial z_j) * \eta_\varepsilon]\ [(\partial f/\partial \bar{z}_k) * \eta_\varepsilon]\zeta^j\bar{\zeta}^k.$$

换句话说，根据正（1，1）形式的刻画， $df_\varepsilon \wedge d^c f_\varepsilon \leq T_\varepsilon$ in Ω_ε ；参见 Demailly 的著作 [De12，第 3 章，推论 1.7]。□

注 2.10。 引理 2.7 对一般的有界多次调和函数 u也成立，即它不必连续。事实上，设 f 和 u是引理中的函数，定义$f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ 和 $u_\varepsilon = u * \eta_\varepsilon$。它们是光滑的，并且根据命题 2.9 满足 $df_\varepsilon \wedge d^c f_\varepsilon \leq dd^c u_\varepsilon$。因此，

$$d(u_{N,\varepsilon} f_\varepsilon) \wedge d^c(u_{N,\varepsilon} f_\varepsilon) \leq N^2(dd^c u_{N,\varepsilon}^2 + u_{N+1,\varepsilon}), \tag{2.12}$$

其中 $u_{N,\varepsilon} = \max\{u_\varepsilon, -N\} + N$。由于 $u_{N,\varepsilon}$是递减收敛到 u_N 的有界拟多重次调和函数，其中 $\varepsilon \to 0$，因此 (2.12) 右端弱收敛到$N^2 dd^c(u_N^2 + u_{N+1})$。另一方面，上述不等式表明，对于给定的开子集 $\Omega' \subset\subset \Omega$， $\{v_\varepsilon f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$在 $W^{1,2}(\Omega')$ 中的范数一致有界。因此，它有一个子列弱收敛到 $w \in W^{1,2}(\Omega')$。然而，$u_{N,\varepsilon} f_\varepsilon \to u_N f$ in$L^1(\Omega')$。因此，根据 $W^{1,2}(\Omega')$ 中弱极限的唯一性， $w = u_N f$in $L^1(\Omega')$。由此可得，(2.12) 左端在 $W^{1,2}(\Omega')$ 中弱收敛到$d(u_N f) \wedge d^c(u_N f)$，其中 $\varepsilon \to 0$。

以下结果受到有界变差函数相关结果的启发[EG92，第 5] 章。

命题 2.11. 设 $f \in W^*(\Omega)$。那么， $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon \in W^* \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ 且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega_\varepsilon)} = \|f\|_{W^*(\Omega)}.$$

类似地，对于每个 $\Omega' \subset\subset \Omega$，$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega')} = \|f\|_{W^*(\Omega')}$。此外，对于 $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega, \Omega')$，

$$\|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega')} \leq \|f\|_{W^*(\Omega)}.$$

证明。 设 T为一个闭正 $(1,1)$-流，实现 f的 W^*-范数（定义 2.1）。由于

$$\int_\Omega T \wedge \omega^{n-1} = \int_\Omega \sum_{j=1}^n T_{j\bar{j}} < +\infty,$$

并且每个系数 $T_{j\bar{j}}$ 都是正拉东测度，因此我们可以将它们延拓到$\mathbb{C}^n$，并通过令 $T := \mathbf{1}_\Omega \cdot T$ 将其在 Ω 外定义为零（它仍是正流，但不再是闭流）。因此，$(\widetilde{T})_\varepsilon \wedge \omega^{n-1}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中有定义，其中 $(\widetilde{T})_\varepsilon = (\widetilde{T}) * \eta_\varepsilon$.~此外，我们有 $(T)_\varepsilon = T * \eta_\varepsilon =: T_\varepsilon$ 在 Ω_ε上。

由命题 2.9 可得

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|^2_{W^*(\Omega_\varepsilon)} &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} T_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} \\ &\leq \int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega T \wedge \omega^{n-1}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，在第二个不等式中，我们对与 η_ε 的卷积使用了 Young 不等式和 Minkowski 不等式，涉及 $L^2(\Omega)$ 中的函数以及 $\mathbb{C}^n$ 中的正拉东测度（例如，参见 [Fd99，命题 8.9、8.49]）。由此可得

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega_\varepsilon)} \leq \|f\|_*.$$

另一方面，对每个 $\varepsilon > 0$，令 S_ε 为一个闭正 $(1，1)$-流，它实现了 f_ε 在 Ω_ε 中的范数。它们在紧子集上的质量一致有界。因此，存在 Ω 上的一个闭正 $(1，1)$-流 S，使得

$$S_\varepsilon \to S$$

在子列中弱收敛（为简便起见，我们仍用同一个序列表示）。显然，$df \wedge d^c f \leq S$ 在 Ω 中弱收敛，因为 $f_\varepsilon \to f$ 属于 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$。接下来，我们注意到 $\|S \wedge \omega^{n-1}\|_\Omega < +\infty$。事实上，由于 $S_\varepsilon \to S$ 弱收敛，对于开集$D \subset\subset \Omega$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} S_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} \geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_D S_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} \geq \int_D S \wedge \omega^{n-1}.$$

令 $D \uparrow \Omega$，可得 $\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} S_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} \geq \int_\Omega S \wedge \omega^{n-1}$. 因此,

$$\|f\|^2_{W^*(\Omega)} \leq \int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega S \wedge \omega^{n-1} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|^2_{W^*(\Omega_\varepsilon)}.$$

综上可得 $\liminf_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega_\varepsilon)} \geq \|f\|_* \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega_\varepsilon)}$。

接下来，第二个恒等式的证明与第一个类似，但不改变积分域会更简单。最后，$\|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega')} \leq \|f_\varepsilon\|_{W^*(\Omega_\varepsilon)}$且 (2.13) 推出命题中的最后一个不等式。□

我们在此记录一个有用的事实：引理 2.8、命题 2.9 和命题 2.11 对其他正的单位逼近族也成立。特别地，考虑如下族

$$\chi_r = \frac{\mathbf{1}_{B(0,r)}}{|B(0,r)|}, \quad r > 0$$

and

$$(f)_{x,r} := f * \chi_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy. \tag{2.14}$$

这里，$B(z,r)$是半径为 r 、中心为 x 的球，而 $|B(x,r)|$ 是其勒贝格测度。于是，$(f)_r(x) = (f)_{x,r}$属于 $W^* \cap C^0(\Omega_r)$。对于

$$(|f|)_{x,r} = |f| * \chi_r(x).$$

为简单起见，我们将 f 在一般博雷尔集 $E \subset \mathbb{C}^n$ 上的平均值记为

$$⨍_E f dx = \frac{1}{|E|}\int f dx, \tag{2.15}$$

其中，$|E|$ 是 $\mathbb{C}^n$中 E 的勒贝格测度。Evans and Gariepy 的著作 [EG92 第 1.7 节定理 1]) 中的一个经典定理指出，对于 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，有

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} f dy = f(x)$$

对于 $x \in \Omega$，存在某个博雷尔集 F使得 $|F| = 0$。此外，其更强的版本[EG92 第 1.7 节推论 1] 也成立

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |f - f(x)|dy = 0 \quad x \in \Omega \setminus F. \tag{2.16}$$

接下来，我们回顾这一事实的一个有用推论，其证明源自[KLV21,定理 2.35]。

命题 2.12. 设 $1 < p < \infty$ 和 $E \subset \Omega$ 是一个博雷尔集。设 $\{f_j\} \subset L^p(\Omega, \mathbb{R})$和 $\{g_j\} \subset L^p(\Omega, \mathbb{R})$ 满足 $f_j \to f \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ 弱收敛，且 $g_j \to g \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$弱收敛。若对几乎处处的 $x \in E$，有 $|f_j(x)| \leq g_j(x)$，则几乎处处有 $(x)| \leq g(x)$ $x \in E$。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$证明。定义 $f_j = \mathbf{1}_E f_j$ 和 $\widehat{g}_j = \mathbf{1}_E g_j$。于是，$|f_j| \le \widehat{g}_j$ 在 Ω 中几乎处处成立。我们还有$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$，$f_j \to f$ 和 $\widehat{g}_j \to \widehat{g}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中均弱收敛。因此，通过替换这些序列，我们可以假设 $E = \Omega$。设 $x \in \Omega$ 是 g 和 f的一个勒贝格点。令$0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$。

我们首先假设 $(f)_{x,\ r} = \fint_{B(x,\ r)} f dy \neq 0$。定义

$$\psi(y) = \frac{\mathbf{1}_{B(x,r)}}{|B(x,r)|}(y) \times \frac{(f)_{x,r}}{|(f)_{x,r}|}.$$

根据柯西-施瓦茨不等式以及关于弱收敛的假设，

$$\begin{aligned}\left|\fint_{B(x,r)} f dy\right| &= \int_\Omega f(y)\psi(y)dy = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j\psi dy \\ &\le \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega |f_j||\psi|dy \\ &\le \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega g_j|\psi|dy \\ &= \fint_{B(x,r)} g dy.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\fint_{B(x,r)} f dy\right| \le \fint_{B(x,r)} g dy.$$

当 $(f)_{x,\ r} = 0.$ 时，这个不等式显然成立。现在令 $r \to 0$，由于根据 (2.16)，极限在 Ω 中几乎处处存在，我们便得到结论。□

2.4. 紧致性与完备性。我们首先证明，在 W^*-范数一致有界的条件下，复 Sobolev 空间具有良好的紧性性质。然后利用这一点证明该空间的基本泛函性质。

下文我们将多次使用 $W^{1,2}(\Omega\ \mathbb{R})$ 中的弱收敛。此类收敛的一个有用判据如下。根据里斯表示定理，序列 $f_j \to f$ 在 $W^{1,2}(\Omega\ \mathbb{R})$ 中弱收敛，当且仅当 $f_j \to f$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛且 $\nabla f_j \to \nabla f$ 在 $L^2(\Omega\ \mathbb{R}^{2n})$ 中弱收敛。

引理 2.13. 设 $\{f_j\}_{j\ge1} \subset W^*(\Omega)$。假设对每个 $j \ge 1$ 都有 $\|f_j\|_* \le A$。若 $f_j \to f$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中弱收敛，则 $f \in W^*(\Omega)$ 且 $\|f\|_* \le A$。

证明。设 T_j 为 $f_j, j \ge 1$ 的最小流。由于 $\|T_j\|_\Omega \le A$，存在子列 T_{j_k} 弱收敛于一个闭正 (1,1)-流 T，且 $\|T\|_\Omega \le \liminf \|T_{j_k}\|_\Omega$。为简便起见，我们仍记作 f_j, T_j，而不用 f_{j_k}, T_{j_k}。设 ϕ 为 Ω 中的正测试形式。则，

$$\langle df_j \wedge d^c f_j, \phi\rangle \le T_j(\phi).$$

还要注意的是

$$\begin{aligned}0 &\le \langle d(f - f_j) \wedge d^c(f - f_j), \phi\rangle \\ &= \langle df \wedge d^c f, \phi\rangle + \langle df_j \wedge d^c f_j, \phi\rangle - 2\langle df \wedge d^c f_j, \phi\rangle \\ &\le \langle df \wedge d^c f, \phi\rangle + T_j(\phi) - 2\langle df \wedge d^c f_j, \phi\rangle.\end{aligned}$$

令 $j \to \infty$，由 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的弱收敛以及流的弱收敛可得 $\langle df \wedge d^c f, \phi\rangle \le T(\phi)$。因此，$f \in W^*(\Omega)$。此外，若我们写作

$\langle f, g\rangle_\Omega = \int_\Omega fgdx$ 表示希尔伯特空间 $L^2(\Omega)$ 中的内积，则

$$0 \le \langle f - f_j, f - f_j\rangle_\Omega = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\langle f, f_j\rangle_\Omega .$$

在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中， $f_j \to f$ 的弱收敛所具有的范数半连续性（例如参见 [LL，定理 2.11]）意味着

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \le \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

因此， $\|f\|_* \le A$。 □

推论 2.14. 设 $\{f_j\}_{j\ge1} \subset W^*(\Omega)$ 满足：对每个 $j \ge 1$， $\|f_j\|_* \le A$ 。存在一个子列 $\{f_{j_k}\}$，它在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中弱收敛至 $f \in W^*(\Omega)$，且$\|f\|_* \le \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_*$。

证明。这立即由$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \|f\|_*$对每个 $f \in W^*(\Omega)$ 均成立，以及引理 2.13 得出。□

以下基本的泛函分析结果归功于 Vigny[Vig07，命题 1]。

定理 2.15。 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$中的一个有界域。

(a) $\|\cdot\|_*$ 是 $W^*(\Omega)$ 上的一个范数，且 $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \|\cdot\|_*$。

(b) $W^*(\Omega)$ 和 $W^*_0(\Omega)$ 在此范数下均为巴拿赫空间。

证明。设 $f, g \in W^*(\Omega)$，并设 T, S 分别是 f, g的最小流。取满足 (2.6) 中条件的 s, $t > 0$，其中 $st = 1$，可得

$$\begin{aligned} d(f+g)\wedge d^c(f+g) &= df\wedge d^c f + dg\wedge d^c g + [df\wedge d^c g + dg\wedge d^c f] \\ &\le (1+s^2) df\wedge d^c f + (1+t^2) dg\wedge d^c g \\ &\le (1+s^2)T + (1+t^2)S. \end{aligned}$$

因此

$$\|f+g\|^2_* \le \min_{s>0}\left\{(1+s^2)\|f\|^2_* + (1+1/s^2)\|g\|^2_*\right\}. \tag{2.17}$$

现在验证三角不等式。不失一般性，我们可以假设 $g \ne 0$。此外，通过除以一个常数，我们可以假设 $\|g\|_* = 1$ 。我们需要证明

$$\|f+g\|_* \le \|f\|_* + 1.$$

如果 $f = 0$，则不等式成立。否则，对 $s^2 = 1/\|f\|_* > 0$应用 (2.17)，

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2_* &\le (1+s^2)\|f\|^2_* + 1 + 1/s^2 \\ &= (1+\|f\|^2_*) + s^2\|f\|^2_* + 1/s^2 \\ &= (1+\|f\|_*)^2. \end{aligned}$$

这就证明了三角不等式。

接下来，我们证明在此范数下它是一个完备空间。事实上，设 $\{f_j\}$ 是关于 $\|\cdot\|_*$. 的柯西序列。由于 $W^{1,2}$-范数被 W^*-范数控制，该序列在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中是柯西序列。由引理 2.13，它关于 $W^{1,2}$-范数收敛到 $f \in W^*(\Omega)$ 中的某个元素。设 S_{jk}是$f_j - f_k$的最小流。我们有

$$d(f_j - f_k)\wedge d^c(f_j - f_k) \le S_{jk}.$$

令 $\varepsilon > 0$。存在 k_0，使得对于 j， $k \ge k_0$，

$$\|S_{jk}\|_\Omega \le \|f_j - f_k\|_* \le \varepsilon.$$

由 (1,1)-流的弱紧性可知，对于每个固定的 j，存在一个子列 $\{S_{jk_s}\}_{k_s\geq 1}$ 弱收敛到闭正 (1,1)-流 τ_j，且 $\|\tau_j\|_\Omega \leq \varepsilon$。对于正测试形式 ϕ，我们有：

$$d(f_j - f_{k_s}) \wedge d^c(f_j - f_{k_s})(\phi) \leq S_{jk_s}(\phi).$$

令 $k_s \to \infty$，根据勒贝格控制收敛定理，左端收敛于 $d(f_j - f) \wedge d^c(f_j - f)(\phi)$，而右端收敛于$\tau_j(\phi)$。因此，对于 $j \geq k_0$，$\|f_j - f\|_* \leq 2\varepsilon$。换言之，$f_j$关于 W^*-范数收敛于 f。□

命题 2.16。令 f，$g \in W^*(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。

(a) $fg \in W^*(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。(b) 如果另外 $f \in W_0^*$

(Ω)，那么 $fg \in W_0^*(\Omega)$。

证明。关于索伯列夫空间 $W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 和$W^{1,2}_0(\Omega)$ 的 (a) 和 (b) 中的陈述是经典结果，参见例如 [Bz11，命题 9.4，9.18]。另一方面，基本不等式 (2.7) 蕴含

$$\begin{aligned} d(fg) \wedge d^c(fg) &\leq 2f^2 dg \wedge d^c g + 2g^2 df \wedge d^c f \\ &\leq 2f^2 T_f + 2g^2 T_g, \end{aligned}$$

其中 T_f，T_g分别是 f，g的最小流。由于 f，g有界，最后一个流被闭正流 $A(T_f + T_g) \in \Gamma_{fg}$所支配。□

回顾一下，函数 $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ 属于 BMO(Ω)（有界平均振荡空间），是指存在一个常数 $A > 0$ 使得

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|dx \leq A \tag{2.18}$$

对所有球 $B \subset\subset \Omega$ 均成立，其中如同 (2.15) 中一样，

$$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f dx.$$

此外，函数 $f \in$ BMO(Ω) 属于 VMO(Ω)（消失平均振荡），是指

$$\lim_{|B|\to 0} \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|dx = 0 \tag{2.19}$$

对每个球 $B \subset\subset \Omega$ 均成立。

众所周知，如果拟次调和函数 u属于 VMO(Ω)，那么它的勒隆数处处为零。得益于 Biard 和 Wu 的近期工作 [BW24]，其逆命题也成立。

例 2.17. 令 $n \geq 2$ 并假设 $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$。对于 $1 \leq \ell \leq n$，函数

$$u(z_1, ..., z_n) = \frac{|z_\ell|^2}{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$$

属于 $W^*(\Omega) \cap$ 有界平均振荡空间（Ω），但不属于小有界平均振荡空间（Ω）。事实上，数列

$$u_\varepsilon = \frac{|z_\ell|^2}{\varepsilon + \sum_{i=1}^n |z_i|^2}$$

是 $W^*(\Omega)$ 中的光滑函数，其 W^*-范数一致有界。此外$u_\varepsilon \uparrow u$属于 $W^{1,2}(\Omega)$。因此，由引理 2.13 可得 $u \in W^*(\Omega)$。利用u 的齐次性，我们很容易看出 $u \in$属于 BMO(Ω)，但不属于 VMO(Ω)。

我们有如下适用于 $W^*(\Omega)$ 的 BMO估计，与拟次调和函数的情形类似。

引理2.18。 $W^*(\Omega)$ 中的每个函数都属于 BMO(Ω')，其中 $\Omega' \subset\subset \Omega$。

证明。设 $h \in W^*(\Omega)$，并假设 $dh \wedge d^c h \leq T$，其中 T是一个闭正流，满足 $\|T\|_\Omega < +\infty$。设 $B(x,r) \subset \Omega$ 是一个球。回顾

$$(h)_{x,r} := \fint_{B(x,r)} h(y)dy.$$

由 Poincar´e 不等式 [GT（公式 (7.45)，第 164] 页）在球上对 $h \in W^{1,2}(\Omega)$ 的适用，可得

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} |h-(h)_{x,r}|^2 dy &\leq Ar^2 \int_{B(x,r)} |\nabla h|^2 dy \\ &\leq Ar^2 \int_{B(x,r)} dh \wedge d^c h \wedge \omega^{n-1},\end{aligned}$$

其中 $A = A(n)$。于是，根据 H¨ Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\fint_{B(x,r)} |h-(h)_{x,r}|dy &\leq \left(\fint_{B(x,r)} |h-(h)_{x,r}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq A'\left(\frac{1}{r^{2n-2}}\int_{B(x,r)} T\wedge\omega^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq A'\sqrt{\nu(T,x,r)},\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中 $\nu(T,\ x,\ r)$ 是 $r \in [0, r_0]$ 的增函数，并且 $\lim_{r\to 0}\nu(T,\ x,\ r) = \nu(T,\ x)$ 是 T 在 x 处的（有限）勒隆数。因此， $h \in \mathrm{BMO}(\Omega')$。□

下面的结果表明，在高维复 Sobolev 空间中，非光滑函数存在差异，处理起来也更加困难。这一点可以由例2.6预见，因为该空间包含奇异拟亚纯函数。

下一个结果包含于 [Vig07，命题 7] 中。

命题2.19。 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界域。

(a) 如果 $n = 1$，则 $W^*(\Omega) = W^{1,\ 2}(\Omega)$ 连同其 ***Sobolev***范数。(b) 如果 $n \geq 2$，则 $C^0(\Omega) \cap W^*(\Omega)$ 中的连续函数在 $W^*(\Omega)$ 中关于 W^*-范数并不稠密。

证明. (a)显然。接下来证明(b)。证明中用到了 [Vig07，命题 7]中的一个思路。具体而言，在例 2.17 中，有许多属于 W^*（Ω）但不属于 VMO(Ω) 的函数。令 f 为这样一个函数。我们证明它无法用 W^*（Ω） $\cap C^0$（Ω）中的函数逼近。

事实上，若 $g \in C^0(\Omega)$，则 $\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |g - (g)_{x,r}|dy = 0$。因此，对于满足 $g \in W^*(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ 的 $h = f - g$,

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\fint_{B(x,r)} |f-(f)_{x,r}|dy \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\fint_{B(x,r)} |f-(f)_{x,r}|dy - \fint_{B(x,r)} |g-(g)_{x,r}|dy\right) \\ &\leq \lim_{r\to 0}\fint_{B(x,r)} |h-(h)_{x,r}|dy.\end{aligned}$$

由于 $h \in W^*(\Omega)$，存在一个正闭 (1,1)-流，使得 $dh \wedge d^c h \leq T$。将不等式 (2.20) 应用于 h，并结合上述不等式，可得

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}| dy \leq A' \sqrt{\nu(T,x)},$$

其中，$\nu(T, x)$ 是 T在点 x处的勒隆数。这意味着，如果 $C^0(\Omega) \cap W^*(\Omega)$ 关于 W^*-范数在 $W^*(\Omega)$ 中稠密，那么我们可以找到质量 $\|T\|_{B(x,r)}$任意小的此类闭正流。特别地，

$$\limsup_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}| dy = 0, \quad x \in \Omega.$$

这意味着 $f \in$ 小有界平均振荡空间（Ω），这是不可能的。因此，$W^*(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ 关于 W^*-范数在 $W^*(\Omega)$ 中不可能稠密。□

由此得到一个推论 [Vig07，推论 8]，它与 Cegrell 和 Wiklund [CW05]研究的某个 δ-拟次调和函数空间类似。为方便读者，我们给出详细证明。

推论 2.20。设 Ω 是 $\mathbb{C}^n, n \geq 2$中的一个开集。那么，$W^*(\Omega)$ 不是自反的。

证明。我们紧密遵循 [Vig07 中的推论 8]。假设该空间是自反的。那么，W^*-范数中的闭单位球关于对偶拓扑是弱紧的。令 $0 \leq u \leq 1$ 为例 2.17 中的一个函数，令 $0 \leq \chi \leq 1$ 为 Ω 中的一个截断函数。显然，$\chi u \in W^*(\Omega)$。定义 $u_k = u * \eta_{1/k}$。由命题 2.11 可知，$f_k = \chi u_k \in W^*(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$，并且对于一个与 k无关的常数A，有 $\|f_k\|_* \leq A$。根据弱紧性（推论 2.14），存在一个子列 $f_j \to g$在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中弱收敛，且 $g \in W^*(\Omega)$。因此，根据 $W^{1,2}(\Omega)$ 中弱极限的唯一性，有 $g = f$。Mazur 引理（参见例如 [Yo80，定理 2，第 120] 页）表明，g 是 $\{f_j\}$ 在 W^*-范数中的凸组合和的极限。这与前一个命题矛盾。□

2.5. **多次调和函数的 Bedford-Taylor 容量**。回忆一下，对于博雷尔集 $E \subset \Omega$,

$$cap(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E (dd^c u)^n : u \in PSH(\Omega),\ -1 \leq u \leq 0 \right\}. \tag{2.21}$$

根据 BT82] 中的经典结果，我们知道 $cap(\cdot, \Omega)$ 同时具有内正则性和外正则性。给定博雷尔集的容量可由其相对极值函数实现。也就是说，假设 Ω 是严格伪凸的，并且 $E \subset \Omega$ 是一个博雷尔集。定义

$$u_E(z) = \sup \{u(z) : u \in PSH(\Omega),\ u \leq -1 \text{ on } E,\ u \leq 0\} \tag{2.22}$$

且 u_E^* 是其上半连续正则化。那么，

$$cap(E, \Omega) = \int_\Omega (dd^c u_E^*)^n. \tag{2.23}$$

关于一个一般公式，我们请读者参阅 [BT82，第 6.5] 命题；其中左端是外容量，适用于不一定是博雷尔集的集合。

我们还需要比较闭正的 (1,1)-流的总质量积分。这是测度弱收敛的一个推论。我们以最简单的形式陈述如下。

引理 2.21。 设 $0 \le k \le n-1$。设 T 是开子集(1,1)中的闭正流Ω $\subset\subset \mathbb{C}^n$。假设 $\varphi, \psi \in PSH \cap L^\infty$(Ω) 满足 $\varphi \le \psi \le 0$ 在Ω 中，且$\lim_{z\to\partial\Omega} \varphi(z) = 0$。那么，

$$\int_\Omega T \wedge (dd^c\psi)^k \wedge \omega^{n-k-1} \le \int_\Omega T \wedge (dd^c\varphi)^k \wedge \omega^{n-k-1}. \tag{2.24}$$

证明。 事实上，对于 $\varepsilon > 0$，在 Ω 的 ∂ 附近有 max$\{\varphi+\varepsilon, \psi\} = \varphi+\varepsilon$。因此，由分部积分，

$$\int_\Omega (dd^c\varphi)^k \wedge T \wedge \omega^{n-k-1} = \int_\Omega (dd^c \max\{\varphi+\varepsilon, \psi\})^k \wedge T \wedge \omega^{n-k-1}.$$

令 $\varepsilon \to 0$，并注意到右侧的被积函数弱收敛于 $(dd^c\psi)^k \wedge T \wedge \omega^{n-k-1}$，根据 Demailly [De89，定理 1.7]。因此，所需的不等式得证。□

3. Basic integral inequalities

本节中，我们始终假设 Ω $\subset\subset \mathbb{C}^n$ 是一个严格伪凸域。令 ρ为 Ω 的严格拟 plurisubharmonic 定义函数，它在$\bar{}$Ω 的某个邻域内光滑，并满足

$$dd^c\rho \ge \omega \quad \text{on } \bar{\Omega}.$$

令 $-1 \le \phi \le 0$ 为 Ω 上的多重次调和函数。定义

$$\gamma := (dd^c\phi)^{n-1}.$$

我们还考虑一个非负的光滑截断函数

$$\chi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \chi \ge 0.$$

关于 Monge-Amp`ere 测度 $(dd^c\phi)^n$ 和 $d\chi \wedge d^c\chi \wedge \gamma$，我们列出以下关于光滑函数 L^2-范数估计的结果。

引理 3.1. 令 $g \in C_c^\infty$(Ω $\mathbb{R}$)。则，

$$\int g^2 (dd^c\phi)^n \le 10 \int dg \wedge d^c g \wedge (dd^c\phi)^{n-1}.$$

证明。 由于 $(dd^c\phi * \eta_\varepsilon)^n$ 弱收敛到 $(dd^c\phi)^n$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们不妨假设 ϕ 在 Ω 上光滑。根据分部积分，

$$\frac{1}{2}\int g^2 (dd^c\phi)^n = -\int g dg \wedge d^c\phi \wedge \gamma. \tag{3.1}$$

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} -\int g dg \wedge d^c\phi \wedge \gamma &\le \left(\int dg \wedge d^c g \wedge \gamma\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2 d\phi \wedge d^c\phi \wedge \gamma\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le 2\int dg \wedge d^c g \wedge \gamma + \frac{1}{8}\int g^2 d\phi \wedge d^c\phi \wedge \gamma. \end{aligned}$$

再进行一次分部积分，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\int g^2 d\phi \wedge d^c\phi \wedge \gamma &= -\frac{1}{4}\int g\phi dg \wedge d^c\phi \wedge \gamma - \frac{1}{8}\int g^2\phi (dd^c\phi)^n \\ &\le \frac{1}{4}\left|\int g\phi dg \wedge d^c\phi \wedge \gamma\right| + \frac{1}{8}\int g^2 (dd^c\phi)^n. \end{aligned}$$

对第一个积分再次使用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left|\int g\phi dg\wedge d^c\phi\wedge\gamma\right| &\leq \frac{1}{4}\int \phi^2 dg\wedge d^c g\wedge\gamma+\frac{1}{16}\int g^2 d\phi\wedge d^c\phi\wedge\gamma\\ &\leq \frac{1}{4}\int dg\wedge d^c g\wedge\gamma+\frac{1}{16}\int g^2 d\phi\wedge d^c\phi\wedge\gamma.\end{aligned}$$

结合最后两个不等式，可得

$$\frac{1}{16}\int g^2 d\phi\wedge d^c\phi\wedge\gamma\leq\frac{1}{4}\int dg\wedge d^c g\wedge\gamma+\frac{1}{8}\int g^2(dd^c\phi)^n.$$

因此，

$$-\int gdg\wedge d^c\phi\wedge\gamma\leq\frac{5}{2}\int dg\wedge d^c g\wedge\gamma+\frac{1}{4}\int g^2(dd^c\phi)^n.$$

由此及恒等式 (3.1) 可得所需的不等式。 □

引理 3.2。 设 $f\in C^\infty(\Omega)$ 且 $0\leq\chi\in C_c^\infty(\Omega)$。则

$$\int f^2 d\chi\wedge d^c\chi\wedge\gamma\leq 4\int\chi^2 df\wedge d^c f\wedge\gamma+2A_0\int\chi f^2\omega\wedge\gamma,$$

其中 A_0 是一个正的常数，使得 $-A_0\omega\leq dd^c\chi\leq A_0\omega$。

证明。 经过分部积分可得

$$\begin{aligned}\int f^2 d\chi\wedge d^c\chi\wedge\gamma &= -2\int f\chi df\wedge d^c\chi\wedge\gamma-\int f^2\chi dd^c\chi\wedge\gamma\\ &\leq 2\left|\int f\chi df\wedge d^c\chi\wedge\gamma\right|+A_0\int f^2\chi\omega\wedge\gamma,\end{aligned}$$

这里用到了事实 $dd^c\chi\leq A_0\omega$。接下来，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$2\left|\int f\chi df\wedge d^c\chi\wedge\gamma\right|\leq 2\int\chi^2 df\wedge d^c f\wedge\gamma+\frac{1}{2}\int f^2 d\chi\wedge d^c\chi\wedge\gamma.$$

结合上述两个不等式，我们得到

$$\frac{1}{2}\int f^2 d\chi\wedge d^c\chi\wedge\gamma\leq 2\int\chi^2 df\wedge d^c f\wedge\gamma+A_0\int f^2\chi\omega\wedge\gamma.$$

这等价于我们所需的估计。 □

引理 3.3。 设 $f\in C^\infty(\Omega)$ 且 $0\leq\chi\in C_c^\infty(\Omega)$。

$$\int(\chi f)^2(dd^c\phi)^n\leq 100\int\chi^2 df\wedge d^c f\wedge(dd^c\phi)^{n-1}+40A_0\int\chi f^2\omega\wedge(dd^c\phi)^{n-1}$$

证明。 对 $g=\chi f$ 应用引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}\int(\chi f)^2(dd^c\phi)^n &\leq 10\int d(\chi f)\wedge d^c(\chi f)\wedge\gamma\\ &\leq 20\int[\chi^2 df\wedge d^c f+f^2 d\chi\wedge d^c\chi]\wedge\gamma.\end{aligned}$$

现在，对最后一个积分中的第二项应用引理 3.2，即可得到所需结论。□

换言之，为了得到引理 3.3 中的不等式，我们将被积函数 $(\chi f)^2 dd^c\phi$ 替换为 $100\chi^2 df\wedge d^c f + 40A_0\chi f^2\omega$。对于右侧的第二个积分，我们可以用 $\chi := (\chi_1)^2$ 继续这一过程，其中 χ_1 再次是一个截断函数。重复这一过程 n 次后，我们很容易得到

推论 3.4。设 $f\in C^\infty(\Omega)$ 且 $0\le\chi\in C_c^\infty(\Omega)$。则，

$$\int \chi^{2^n} f^2 (dd^c\phi)^n \le 100\int df\wedge d^c f\wedge\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k\,\chi^{2^k}(dd^c\phi)^k\wedge\omega^{n-1-k}\right) + (40A_0)^n\int \chi f^2\omega^n.$$

其中 $A_k = [40(1+A_0)]^{n-1-k}$。

注意，当 $-1\le\phi\le 0$ 是一般的有界多次调和函数且 f 光滑时，该推论中的不等式仍然成立。然而，其右端只涉及 f 的梯度及其 L^2 范数，因此我们可以采用简单的逼近论证，交换 ϕ 和 f 的正则性假设，如下所示。

推论 3.5。设 $f\in W^{1,2}(\Omega)$。进一步假设 ϕ 在 *supp* χ的某个邻域内光滑。那么，

$$\int \chi^{2^n} f^2 (dd^c\phi)^n \le 100\int df\wedge d^c f\wedge\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k\,\chi^{2^k}(dd^c\phi)^k\wedge\omega^{n-1-k}\right) + (40A_0)^n\int \chi f^2\omega^n.$$

其中 $A_k = [40(1+A_0)]^{n-1-k}$。

我们现在可以陈述上述估计的主要应用。这加强了 [DMV23，引理 2.5]，其大意是：$W^*(\Omega)$ 中的连续函数相对于有界多次调和函数的 Monge-Amp`ère 测度，在局部具有一致的 L^2-可积性。更精确地说，

命题 3.6。设 $f\in W^*(\Omega)\cap C^0(\Omega)$。设 $D\subset\subset\Omega$ 为一个子域。那么，对于每个博雷尔集 $K\subset D$,

$$\int_K f^2(dd^c\phi)^n \le A\|f\|_*^2,$$

其中 A 仅取决于 D,Ω。

证明。取 $0\le\chi\le 1$ 一个光滑的截断函数，使得 $\chi\equiv 1$ 在 D 上且 supp $\chi\subset\subset\Omega$。只需证明

$$J := \int \chi^{2^n} f^2(dd^c\phi)^n \le A\|f\|_*^2.$$

根据 $[dd^c(\phi*\eta_\varepsilon)]^n$ 到 $(dd^c\phi)^n$ 的弱收敛以及 f的连续性，我们可以假设 ϕ 是光滑的。由于 ϕ 有界，我们可以通过考虑 $\max\{\phi, A_0\rho\}$ 在 χ 的支集之外对其进行修改，其中 A_0 仅依赖于 ρ。因此， $\phi\ge A_0\rho$ 并且$\phi = A_0\rho$ 在 Ω 的邻域内。此外，根据命题 2.11 中的光滑化性质，我们进一步假设 f 是光滑的。

现在，设 T是一个满足 $df \wedge d^c f \leq T$的闭正流。推论 3.4 表明

$$J \leq A_1 \int T \wedge \sum_{k=1}^{n-1} (dd^c\phi)^k \wedge \omega^{n-1-k} + A_1 \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

由于 $A_0\rho \leq \phi \leq 0$ 属于 Ω，质量比较（引理 2.21）推出

$$\begin{aligned}\int T \wedge (dd^c\phi)^k \wedge \omega^{n-1-k} &\leq \int T \wedge [dd^c(A_0\rho)]^k \wedge \omega^{n-1-k} \\ &\leq A_2 \int T \wedge \omega^{n-1}.\end{aligned}$$

因此， $J \leq A_1A_2(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T\|_\Omega)$。对所有 T属于 Γ_f取下确界，我们完成证明。□

注 3.7。 目前，命题 3.6 中需要 f 的连续性，以确保左端的积分有定义。不过，我们将在下文的~定理 5.10 中证明， f 关于 Bedford-Taylor 容量存在一个准连续代表 $f \in W^*(\Omega)$。因此，对于定义 5.12 中的一般 f，也可以定义该积分。此外，在第 7 节中，我们将看到，本节中的所有估计对于一般的 $f \in W^*(\Omega)$ 以及有界多次调和函数 ϕ都成立。

下一个结果是 [DMV23，引理 2.5]中第二部分的定量版本。

引理 3.8。 设 $f \in W^*(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ 满足 $|f| \leq 1$。设 $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足 $0 \leq \chi \leq 1$。假设 $df \wedge d^c f \leq dd^c u$ 对某个 $u \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$成立。那么，

$$\int \chi^{2^n} f^2 (dd^c\phi)^n \leq A \left[\int \chi f^2 (\omega + dd^c u)^n\right]^{\frac{1}{2^n}},$$

其中 A 是一个一致常数，其取决于 $supp$ χ、Ω 和 $\|u\|_{L^\infty}$。更准确地说，

$$A = A_0 \|u\|^a_{L^\infty}, \quad where\ a = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{2^{i-1}}$$

且 A_0 是一个仅取决于 χ、ω的常数。

证明。 回顾 $\gamma = (dd^c\phi)^{n-1}$，并将 $\phi := \phi + 1$ 替换后，得到 $0 \leq \phi \leq 1$。由逼近序列的弱收敛性，我们首先可以假设 ϕ 是光滑的。定义 $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ 和 $u_\varepsilon = u * \eta_{\varepsilon\circ}$ 接下来，利用命题 2.9，得到

$$df_\varepsilon \wedge d^c f_\varepsilon \leq dd^c u_\varepsilon.$$

由于 $f_\varepsilon \to f$ 在 supp χ 上一致收敛，我们有 $f_\varepsilon^2(\omega + dd^c u_\varepsilon)^n \to f^2(\omega + dd^c u)^n$ 在 Ω 中弱收敛。因此，只需证明 ϕ， u 和 f 为光滑函数时的不等式即可。证明通过反复使用分部积分和柯西-施瓦茨不等式完成。第一步如下：

$$\begin{aligned}\int (\chi f)^2 dd^c\phi \wedge \gamma &= -2 \int \chi f d(\chi f) \wedge d^c\phi \wedge \gamma \\ &\leq 2 \left(\int f^2 d(\chi f) \wedge d^c(\chi f) \wedge \gamma\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \chi^2 d\phi \wedge d^c\phi \wedge \gamma\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

右侧的第二个积分有如下界

$$\int \chi^2 d\phi \wedge d^c\phi \wedge \gamma \leq \int \chi^2 dd^c\phi^2 \wedge \gamma \leq A_1',$$

在最后一个不等式中，我们对一个仅取决于 supp χ 的支集的常数 $A_1' > 0$ 使用了 Chern-Levine-Nirenberg（CLN）不等式。接下来，对于 (3.2) 的另一个被积函数,

$$\begin{aligned} f^2 d(\chi f) \wedge d^c(\chi f) &\leq 2f^2(\chi^2 df \wedge d^c f + f^2 d\chi \wedge d^c\chi) \\ &\leq 2f^2[\chi^2 dd^c u + 2d\chi \wedge d^c\chi], \end{aligned}$$

其中，我们对括号中的第二项使用了事实 $|f| \leq 1$。对两边积分，并对括号中的第二项使用引理 3.2，我们得到

$$\int f^2[\chi^2 dd^c\phi] \wedge \gamma \leq A_1 \left(\int f^2[\chi^2 dd^c u + A_0\chi\omega] \wedge \gamma \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

其中 $A_1 = 2\sqrt{18}A_1'$。因此，我们将 (3.3) 左边的一个因子 $\chi^2 dd^c\phi$ 替换为右边的因子 $\chi^2 dd^c u + A_0\chi\omega$：对积分开平方，再乘以一致常数 A_1。

我们可以对右侧得到的每个积分重复这一过程，并替换 $\chi^2 dd^c\phi$。为了使最终积分中 $dd^c\phi$因子不存在时， χ 的指数至少为一，我们需要一开始就从χ^{2^n} 出发。显然，常数可能会在每一步中增大。

也就是说，结合一个初等不等式（$x + y$）$^k \leq 2^k$（$x^k + y^k$），对于$x,$ $y \geq 0$ 以及正整数 k，我们可以将这一系列不等式改写如下:

$$\begin{aligned} \left(\int f^2[\chi^{2^n} dd^c\phi] \wedge \gamma \right)^{2^n} &\leq A_1 \left(\int f^2\chi^{2^n} dd^c u \wedge \gamma \right)^{2^{n-1}} \\ &\quad + A_1 \left(\int f^2\chi^{2^{n-1}}\omega \wedge \gamma \right)^{2^{n-1}} \\ &\leq \cdots \\ &\leq A_n \sum_{k=1}^{n} \int f^2\chi^{2^k} (dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k}. \end{aligned}$$

考虑到对每个整数 $1 \leq k \leq n$ 都有 $0 \leq \chi^{2^k} \leq \chi$，其中 $0 \leq \chi \leq 1$，即可得到所需的估计。这里的常数 A_k 来自使用CLN不等式

$$\int \chi dd^c\phi^2 \wedge (dd^c u)^k \wedge \omega^\ell \wedge (dd^c\phi)^{n-k-\ell} \leq A_k \|u\|_{L^\infty}^k,$$

且它们仅取决于 χ 和Ω。 □

引理 3.9。 设 $v, w \in PSH \cap L^\infty$(Ω)。设 $0 \leq f \in W^*$(Ω) $\cap C^0$(Ω)。那么，

$$\begin{aligned} \int \chi^2 f(\omega + dd^c w)^n \leq \int \chi^2 f(\omega + dd^c v)^n \\ + \left(\int \chi d(v-w) \wedge d^c(v-w) \wedge \tau \right)^{\frac{1}{2}} (I^{\frac{1}{2}} + J^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

其中

$$\tau = \sum_{k=1}^{n-1} (\omega + dd^c v)^k \wedge (\omega + dd^c w)^{n-1-k},$$
$$I = \int \chi f^2 d\chi \wedge d^c\chi \wedge \tau, \quad J = \int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \tau.$$

证明。 我们记 $(\omega + dd^c w)^n - (\omega + dd^c v)^n = dd^c(w-v) \wedge \tau$并记 $h = w - v$。由分部积分

$$\int \chi^2 f dd^c h \wedge \tau = -\int [2\chi f d\chi + \chi^2 df] \wedge d^c h \wedge \tau.$$

我们将对右端的每个积分使用柯西-施瓦茨不等式。对于第一个，我们得到

$$\left(\int \chi f d\chi \wedge d^c h \wedge \tau \right)^2 \leq \int \chi f^2 d\chi \wedge d^c\chi \wedge \tau \int \chi dh \wedge d^c h \wedge \tau.$$

右端的第二个积分有上界

$$\left(\int \chi^2 df \wedge d^c h \wedge \tau \right)^2 \leq \int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \tau \int \chi^2 dh \wedge d^c h \wedge \tau$$

结合这些不等式以及 $0 \leq \chi \leq 1$ 这一事实，我们便得到该引理的证明。 □

应用局部化原理，我们有

推论 3.10. 设 v、w、f 和 τ 如引理 *3.9* 中所述。假设 $w \geq v$ 位于 *supp* χ 的某个邻域 $D \subset\subset \Omega$ 中。那么，

$$\left| \int \chi^2 f(\omega + dd^c w)^n - \int \chi^2 f(\omega + dd^c v)^n \right| \leq A\|f\|_* \left(\int_D (w-v)(\omega + dd^c v)^n \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 A 是依赖于 $\|v\|_{L^\infty}$、*supp* χ 和 D 的一致常数。

证明. 从 v, w 中减去相同的常数后，我们可以假设 $v \leq w \leq 0$。如果在 supp χ 之外修改 v, w，左侧的积分不会改变。因此，将 v, w 替换为 $\max\{v, A_0\rho\}$ 和 $\max\{w, A_0\rho\}$ 后，我们可以假设它们在 D 之外相等，特别是，它们在$\partial\Omega$ 的某个邻域内相等。现在，应用引理 3.9，我们得到

$$\left| \int \chi^2 f(\omega + dd^c w)^n - \int \chi^2 f(\omega + dd^c v)^n \right| \leq \left(\int \chi d(v-w) \wedge d^c(v-w) \wedge \tau \right)^{\frac{1}{2}} (I^{\frac{1}{2}} + J^{\frac{1}{2}}).$$

通过分部积分，且 $w \geq v$ 在 Ω 中，我们有

$$\int d(v-w) \wedge d^c(v-w) \wedge \tau = \int (w-v)(\omega_v^n - \omega_w^n) \leq \int (w-v)\omega_v^n.$$

剩下需要估计 I 和 J，这与命题 3.6 的证明非常相似。事实上，令 $M = 2($ $2\|v\|_{L^\infty} + \|\rho\|_{L^\infty})$ 并定义

$$\phi := \frac{v + w + \rho}{M}.$$

我们有 $\tau \le M^{n-1}(dd^c\phi)^{n-1}$。如果 $T \in \Gamma_f$，那么

$$J \le \int T \wedge \tau \le M^{n-1} \int T \wedge (dd^c\phi)^{n-1}.$$

由于 $A_0\rho \le \phi \le 0$，质量比较（引理 2.21）表明

$$\int T \wedge (dd^c\phi)^{n-1} \le \int T \wedge (dd^c A_0\rho)^{n-1} \le A_1\|T\|_\Omega.$$

对 $T \in \Gamma_f$ 取下确界，我们得到

$$J \le M^{n-1}A_1\|f\|_*^2.$$

为估计 I，我们注意到 $d\chi \wedge d^c\chi \le A_0 dd^c\rho$，因此

$$d\chi \wedge d^c\chi \wedge \tau \le A_0 dd^c\rho \wedge \tau \le A_0 M^n (dd^c\phi)^n.$$

因此，由命题 3.6,

$$I \le A_2 \int \chi f^2 (dd^c\phi)^n \le A_3\|f\|_*^2.$$

证明完毕。 □

推论 3.11. 设 $v \in PSH(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 满足 $v \le 0$。假设 *supp* $\chi \subset\subset D \subset\subset \Omega$，并记 $v_j = v * \eta_j$。则对于 $0 \le f \in W^*(\Omega) \cap C^0(\Omega)$,

$$\left| \int \chi^2 f(\omega + dd^c v_j)^n - \int \chi^2 f(\omega + dd^c v)^n \right| \le A\|f\|_* \left[\int_D (v_j - v)(\omega + dd^c v)^n \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中 A 是一个依赖于 $\|v\|_{L^\infty}$、*supp* χ 和 D 的一致常数。

证明。 这是由 $w = v_j$ 的推论 3.10 得出的。 □

4. A functional capacity

我们从容量的基本定义和性质开始。设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 为一个开子集。设 $E \subset\Omega$ 为一个博雷尔集。定义

$$\mathscr{K}(E) = \{v \in W^*(\Omega) \mid \{v \le -1\}^o \supset E \text{ and } v \le 0\}. \tag{4.1}$$

如果 $E = G$ 是一个开集，那么其内部 $E^o = E$ 以及

$$\mathscr{K}(G) = \{v \in W^*(\Omega) \mid v \le -1 \text{ in } G \text{ and } v \le 0\}.$$

我们将容量定义为

$$\mathsf{c}(E) = \inf\left\{\|v\|_*^2 \mid v \in \mathscr{K}(E)\right\}. \tag{4.2}$$

在容量的定义中，$\mathscr{K}(E)$ 和 $\mathsf{c}(\cdot)$ 都取决于 Ω。然而，在大多数情况下，域 Ω 是固定的，因此为简便起见，我们写作

$$\mathsf{c}(E) := \mathsf{c}(E, \Omega).$$

注意，如果 $v \in \mathscr{K}(E)$，则由 (2.8) 可得 $\max\{v, -1\} \in \mathscr{K}(E)$ 且 $\|\max\{v, -1\}\|_* \le \|v\|_*$。因此，我们可以在 $\mathscr{K}(E)$ 中考虑满足以下条件的候选对象：

$$-1 \le v \le 0, \quad \text{and } v = -1 \text{ on an open set } G \supset E. \tag{4.3}$$

此外，对于紧集 $K \subset\Omega$，我们有：

$$\mathsf{c}(K) < +\infty. \tag{4.4}$$

事实上，设 χ 是一个截断函数，它在 K 上取值为 1，在 K 的某个邻域外取值为 0。于是， $-\chi \in W^*(\Omega)$，因为它是一个光滑函数。因此，

$$\mathsf{c}(K) \le \|\chi\|_*.$$

我们列出一些基本性质，其证明相当标准（例如参见 [AH96]）。不过，为方便读者，我们仍给出详细证明。

命题 4.1. 设 E, F 和 E_j, $j \ge 1$ 是 Ω 中的博雷尔集。

(a) 若 $E \subset F \subset \Omega' \subset \Omega$，则 $\mathsf{c}(E) \le \mathsf{c}(F)$，且 $\mathsf{c}(E, \Omega') \le \mathsf{c}(E, \Omega)$，其中 $\mathsf{c}(E, \Omega')$ 是相对于子域 Ω' 定义的。*(b)* 设 $\{E_j\}_{j\ge1}$ 是一个递增序列，且 $E = \cup_{j\ge1} E_j$。则 $\lim_j \mathsf{c}(E_j) \le \mathsf{c}(E)$。*(c)* 对每个序列 $\{E_j\}_{j\ge1}$, $E = \cup_{j=1}^\infty E_j$, 有 $\mathsf{c}(E) \le \sum_{j=1}^\infty \mathsf{c}(E_j)$。*(d)* 设 K_j 是一个由紧集构成的递减序列，且 $K = \cap_j K_j$。则 $\mathsf{c}(K) = \lim_j \mathsf{c}(K_j)$。

证明。 (a) 可由容量的定义 (4.2) 轻易得出，而 (b) 是 (a) 的推论。为证明次可加性 (c)，我们可以假设 $A := \sum_j \mathsf{c}(E_j) < +\infty$，否则结论显然成立。固定 $\varepsilon > 0$ 。对每个 j，存在 $-1 \le v_j \le 0$ 属于 $\mathscr{K}(E_j)$，使得 $\mathsf{c}(E_j) \ge \|v_j\|_*^2 - 2^{-j}\varepsilon$ ，且 $v_j = -1$ 在开集 $G_j \supset E_j$ 上几乎处处成立。令 $u_k = \min_{j\le k} v_j$。序列 u_k 单调递减。由引理 2.3 可知

$$\|u_k\|_*^2 \le \sum_{j=1}^k \|v_j\|_*^2 \le \sum_{j=1}^\infty \mathsf{c}(E_j) - \varepsilon = A + \varepsilon.$$

由推论 2.14，存在 $\{u_k\}_{k\ge1}$ 的弱极限 $u \in W^*(\Omega)$，满足 $\|u\|_*^2 \le A + \varepsilon$。对固定的 j，当 $k \to \infty$ 时，我们有 $\mathbf{1}_{G_j} \cdot u_k \to \mathbf{1}_{G_j} \cdot u$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛。由命题 2.12 可知，对 $j = 1, 2...$， $u \le -1$ 属于 G_j。于是， $u \le -1$ 在 $G := \cup_j G_j \supset E$ 上，且 $u \in \mathscr{K}(E)$。因此， $u \in \mathscr{K}(E)$ 且 $\mathsf{c}(E) \le \|u\|_*^2 \le A + \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 任意，(c) 的证明即告完成。

最后我们证明 (d)。由 (a) 中的单调性，$\mathsf{c}(K) \le \lim_j \mathsf{c}(K_j)$。设$\varepsilon > 0$。存在 $v \in \mathscr{K}(K)$，使得 $v \le -1$ 在开集 $G \supset K$ 上，且 $\mathsf{c}(K) \ge \|v\|_*^2 - \varepsilon$。由于 K_j 为紧集，当 $j \ge 1$ 充分大时， $K_j \subset G$。因此，$v \in \mathscr{K}(K_j)$ 且 $\mathsf{c}(K_j) \le \|v\|_* \le \mathsf{c}(K) + \varepsilon$。换言之，$\lim_j \mathsf{c}(K_j) \le \mathsf{c}(K) + \varepsilon$。令 $\varepsilon \to 0$，则 (d) 的证明随之得出。□

注 4.2。

(a) 设 $E \subset E'$ 为 Ω 中的博雷尔集。若 $V_{2n}(E' \setminus E) = 0$，则 $\mathsf{c}(E) = \mathsf{c}(E')$。它在全纯映射下是非减的，即若 $h: G \to \Omega$ 是全纯映射，则

$$\mathsf{c}(E, G) \le \mathsf{c}(h(E), \Omega).$$

(b) 设 $D \subset\subset \Omega' \subset \Omega$。我们不知道是否存在一个仅取决于 Ω 和 Ω' 的常数 $A > 0$，使得对于每个博雷尔集 $E \subset D$,

$$\mathsf{c}(E, \Omega) \le A\, \mathsf{c}(E, \Omega'). \tag{4.5}$$

不过，稍后我们将在推论 4.8 中证明，对于新的容量 $\mathsf{c}(\cdot, \Omega)$，右侧带有某个指数的较弱版本。

我们的主要目标之一是证明，按照 Choquet 的意义，c(·,Ω) 是一个容量。内正则性较难，将在定理 6.5 中证明；不过，外正则性很容易得到，如下所示。

引理 4.3 (外正则性)。 对于博雷尔子集 $E \subset\subset \Omega$,

$$\mathsf{c}(E) = \inf\{\mathsf{c}(G) : E \subset G,\ G \text{ is open}\}.$$

证明。 由命题 4.1-(a) 中的单调性,

$$\mathsf{c}(E) \leq \inf\{\mathsf{c}(G) : E \subset G,\ G \text{ is open}\}.$$

为证明反向不等式，我们可以假设 $\mathscr{K}(E)$ 非空。设 $\varepsilon > 0$。存在 $v \in \mathscr{K}(E)$，使得 $\|v\|_*^2 \leq \mathsf{c}(E)+\varepsilon$，且存在一个开集 G_ε，使得 $v(x) \leq -1$几乎处处 $x \in G_\varepsilon$。因此,

$$\inf\{\mathsf{c}(G) : E \subset G,\ G \text{ is open}\} \leq \mathsf{c}(G_\varepsilon) \leq \|v\|_*^2 \leq \mathsf{c}(E) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$，即可得证。 □

类似的论证表明，勒贝格体积受容量控制。

推论 4.4。 对于博雷尔集 $E \subset \Omega$， $|E| \leq \mathsf{c}(E)$。特别地，每个零容量集的勒贝格测度都为零。

证明。 不妨设 $\mathsf{c}(E) < \infty$，否则该不等式显然成立。令 $\varepsilon > 0$，并设 $v \in \mathscr{K}(E)$ 满足 $\|v\|_*^2 \leq \mathsf{c}(E) + \varepsilon$。存在一个开集 $G \supset E$，使得$v(x) \leq -1$ 对几乎处处的 $x \in G$成立。这意味着

$$|E| \leq |G| \leq \int_G |v|^2 dx \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_*^2 \leq \mathsf{c}(E) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$，即可得到所需的不等式。 □

我们已从上述例子中看到，有界拟多重次调和函数属于 $W^*(\Omega)$。对于这类函数，第 2.5 节中的 Bedford-Taylor 容量 $cap(\cdot,\Omega)$ 非常适合用来研究其精细性质。Dinh、Marinescu 和 Vu [DMV23] 也使用了$cap(\cdot,\Omega)$ 来研究 $W^*(\Omega)$ 中函数的一些精细性质。事实上，我们将证明这两种容量 c(·,Ω) 和 $cap(\cdot,\Omega)$ 彼此可比。

Th定理 1.1-(a) 的第一部分表述如下 。

引理 4.5 (由 Bedford-Taylor 容量控制)。 假设 Ω 是严格拟凸的。存在一个常数 $A > 0$，使得对于每个博雷尔集 $E \subset\subset \Omega$,

$$\mathsf{c}(E) \leq A\,[cap(E,\Omega)]^{\frac{1}{n}}.$$

注 4.6。 在证明 c(·，Ω) 是 Choquet 意义下的容量（定理 6.5）之后，我们将去掉 E 的相对紧性条件。

证明。 令 u_E^* 表示 (2.22) 中 E 的相对极值函数。由于这两个容量都是外正则的（引理 4.3 和 [BT82]），我们可以假设 $E = G$ 是一个开集，因此 $u_G = u_G^*$。于是，$-1 \leq u_G \leq 0$ 且 $u_G = -1$ 在 G 上。由此可得

$$\mathsf{c}(G) \leq \|u_G\|_*^2. \tag{4.6}$$

令 ρ 为 Ω 的严格拟 plurisubharmonic 定义函数。我们可以假设 $dd^c\rho \geq \omega$。由于 $G \subset\subset \Omega$，这意味着 $u_G = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立（例如，参见 [De89，性质 (13.11)]）。利用 $-1 \leq u_G \leq 0$ 并进行分部积分,

$$\|u_G\|_{L^2}^2 = \int (u_G)^2 (dd^c\rho)^n \leq \int -u_G (dd^c\rho)^n = \int -\rho dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1}.$$

为简便起见，这里以及下文的证明中，我们省略积分符号中的 Ω。最后一个积分小于

$$\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \int dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1}.$$

由于 $0 \le u_G + 1 \in PSH(\Omega)$，我们有 $du_G \wedge d^c u_G \le \frac{1}{2} dd^c(1+u_G)^2$. 因此,

$$\begin{aligned} \|u_G\|_*^2 &\le \int (u_G)^2 (dd^c\rho)^n + \frac{1}{2}\int dd^c(1+u_G)^2 \wedge (dd^c\rho)^{n-1} \\ &\le A_1 \int dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1} + \int dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $A_1 = \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}$，并且我们用到了这一事实:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int dd^c(1+u_G)^2 \wedge (dd^c\rho)^{n-1} \\ &= \int du_G \wedge d^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1} + \int (1+u_G) dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1} \\ &= \int dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1}. \end{aligned}$$

应用 Cegrell 的一个不等式 [Ce04]，我们得到

$$\begin{aligned} \int dd^c u_G \wedge (dd^c\rho)^{n-1} &\le \left[\int (dd^c\rho)^n\right]^{\frac{n-1}{n}} \left[\int (dd^c u_G)^n\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= A_0 [cap(G,\Omega)]^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 A_0 是一个一致常数，因为 ρ 在 Ω 上光滑；最后一个等式用到了公式 (2.23)。

结合 (4.6)、(4.7) 和 (4.8)，我们得到 $\mathsf{c}(G) \le A_0(1+A_1)[cap(G,\Omega)]^{\frac{1}{n}}$. □

我们现在可以陈述定理 1.1-(b)，它给出了两个容量之间的不等式的反向不等式。

引理 4.7. 设 $D \subset\subset \Omega$。存在一个常数 A'，它只依赖于 D 和Ω，使得对每个博雷尔集 $E \subset D$,

$$cap(E,\Omega) \le A' \mathsf{c}(E)$$

证明. 由于两个容量都是外正则的，只需再次证明 $E = G$ D中的一个开子集的情形即可。令 $u = u_G = u_G^*$ 为 G 在 Ω 中的相对极值函数，并考虑 $u := \max\{u, A_0\rho\}$。我们可以假设 $u = u_G$在 Ω 上成立，且它在 Ω 的某个邻域内有定义。此外，我们还可以增大 A_0（依赖于 D,Ω），使得

$$A_0\rho \le u_G \quad \text{in } \Omega. \tag{4.9}$$

记 $u_j := u * \eta_j$ 为第 2.3 节中的光滑核族所对应的卷积。这些函数在 j 充分大时定义于 Ω 上。

设 $f \in \mathscr{K}(G)$ 满足：在 G 上 $f \le -1$ 几乎处处成立，并且还假设 $-1 \le f \le 0$ 属于 Ω。设 $0 \le \chi \le 1$ 属于 $C_c^\infty(\Omega)$，满足在 D 上 $\chi = 1$，且 $\operatorname{supp}\chi \subset\subset \Omega$。由于 $(dd^c u_j)^n$ 弱收敛到 $(dd^c u)^n$，由公式 (2.23) 可得

$$cap(G,\Omega) \le \liminf_{j\to\infty} \int_G (dd^c u_j)^n \le \liminf_{j\to\infty} \int_D \chi^{2^n} f^2 (dd^c u_j)^n. \tag{4.10}$$

固定一个指标 j，于是 u_j 光滑。对 $\phi = u_j$ 应用推论 3.5，得到

$$\int \chi^{2^n} f^2 (dd^c u_j)^n \le \int df \wedge d^c f \wedge \left(\sum_{k=1}^{n-1} 100 A_k \, \chi^{2^k} (dd^c u_j)^k \wedge \omega^{n-1-k} \right) + (40A_0)^n \int \chi f^2 \omega^n,$$

其中 $A_k = [40(1+A_0)]^{n-1-k}$。若 $T \in \Gamma_f$，即 $df \wedge d^c f \le T$ 在 Ω 中，则

$$\begin{aligned} \int \chi^{2^n} f^2 (dd^c u_j)^n &\le \int T \wedge \left(\sum_{k=1}^{n-1} 100 A_k \, \chi^{2^k} (dd^c u_j)^k \wedge \omega^{n-1-k} \right) \\ &\quad + (40A_0)^n \int \chi f^2 \omega^n \\ &=: J_1 + J_2. \end{aligned}$$

我们首先考虑 J_2。显然，

$$J_2 \le A_1' \|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.11}$$

接下来我们估计 $J_1 = J_1(j)$。令 $j \to +\infty$，由弱收敛可得

$$\begin{aligned} \limsup_{j\to\infty} J_1 &\le A_0' \int \chi T \wedge \sum_{k=1}^{n-1} (dd^c u)^k \wedge \omega^{n-1-k} \\ &\le A_0' \int_\Omega T \wedge \sum_{k=1}^{n-1} (dd^c u)^k \wedge \omega^{n-1-k}. \end{aligned}$$

由 (4.9)，我们应用引理 2.21 中的质量比较，得到

$$\begin{aligned} \limsup_{j\to\infty} J_1 &\le A_0' \int_\Omega T \wedge \sum_{k=1}^{n-1} [dd^c (A_0 \rho)]^k \wedge \omega^{n-1-k} \\ &\le A_1' \int_\Omega T \wedge \omega^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中，最后一个不等式用到了事实 $dd^c \rho \le A\omega$。

将 (4.10)、(4.11) 和 (4.12) 结合起来，我们得到

$$cap(G, \Omega) \le \limsup_{j\to\infty} (J_1 + J_2) \le A_1' (\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T\|_\Omega).$$

对所有流取下确界 $T \in \Gamma_f$，得到 $cap(G, \Omega) \le A_1' \|f\|^2_*$。这对每个 $f \in \mathscr{K}(G)$ 都成立，因此 $cap(G, \Omega) \le A_1' \mathsf{c}(G)$。□

作为上述两个容量比较的结果，现在我们可以陈述 $\mathsf{c}(\cdot, \Omega)$ 的弱等价性质；在注 4.2-(b) 中提到了这一性质，而这里我们考虑的是它在较小区域上的情形。

推论 4.8. 设 $D \subset\subset \Omega' \subset \Omega$。那么，存在一个常数 $A = A(D, \Omega)$，使得对每个博雷尔集 $E \subset D$，

$$\mathsf{c}(E, \Omega') \le \mathsf{c}(E, \Omega) \le A \left[\mathsf{c}(E, \Omega') \right]^{\frac{1}{n}}.$$

证明。 第一个不等式直接由命题 4.1-(a) 得出。接下来只需验证第二个不等式。对于 Bedford-Taylor 容量，我们知道 $cap(E,\Omega) \leq cap(E,\Omega')$。因此，利用引理 4.5 和 4.7，我们得到

$$\mathsf{c}(E,\Omega) \leq A[cap(E,\Omega)]^{\frac{1}{n}} \leq A[cap(E,\Omega')]^{\frac{1}{n}} \leq A'[\mathsf{c}(E,\Omega')]^{\frac{1}{n}},$$

其中 A' 仅取决于 Ω 和 D。 □

5. Quasi-continuity

本节将证明， $W^*(\Omega)$ 中的函数存在一个关于容量 $\mathsf{c}(\cdot, \Omega)$ 的拟连续表示。下面给出相关术语的精确定义。

定义5.1。 如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个开集 $G \subset \Omega$，使得 $\mathsf{c}(G) < \varepsilon$，且限制函数 $u_{|\Omega\setminus G}$ 连续（相对于 $\Omega \setminus G$ 上的诱导拓扑），则称函数 u 在 Ω 中拟连续（q.c）。

如果存在一个零容量集 P，即 $\mathsf{c}(P) = 0$，使得该命题对每个 $x \notin P$ 都成立，则称该命题拟处处（q.e）成立。

注记5.2。 由引理4.5、4.7（另见下文定理 6.5），Bedford-Taylor 容量 $cap(\cdot, \Omega)$ 与 $\mathsf{c}(\cdot, \Omega)$ 彼此等价。因此，这里的拟连续性和拟处处概念与多复变位势论中的经典概念一致。所以，对于属于 $W^*(\Omega)$ 的拟次调和函数，使用这些性质不会造成混淆。

以下结论是位势论中的经典结果 [FOT94，引理 2.14]。

命题 5.3。 设 $D \subset \Omega$ 为一个开集，且 f 在 D 上拟连续。若 $f \geq 0$ 几乎处处成立于 D，则 $f \geq 0$ 在 D 上拟处处成立。

证明。 对于每个 $k \geq 1$，存在一个 G_k 开集，使得 $\mathsf{c}(G_k) < 1/k$，且 $f_{|_{F_k}}$ 在 $F_k = D \setminus G_k$ 上连续。定义 $F'_k = \mathrm{supp}\,(\mathbf{1}_{F_k} \cdot dV_{2n})$ 和 $G'_k = D \setminus F'_k$。于是，$G_k \subset G'_k$ 且 $V_{2n}(G'_k \setminus G_k) = 0$。根据定义，$\mathsf{c}(G'_k) = \mathsf{c}(G_k)$。只需证明对于每个 $x \in \cup_k F'_k$，$f(x) \geq 0$。

假设 $f(x) < 0$ 对于某个 $x \in F'_k$ 成立。那么，根据连续性，存在一个邻域 U_x，使得对于每个 $y \in F'_k \cap U_x$，都有 $f(y) < 0$。由于 $V_{2n}(F'_k \cap U_x) > 0$，这将与 $f \geq 0$ 在 D 上几乎处处成立的假设矛盾。我们得出结论：对于 $x \in \cup_k F'_k$，$f(x) \geq 0$。□

与拟次调和函数不同， $W^*(\Omega)$ 中的函数在勒贝格测度为零的集合之外才有定义。为了在给定函数的每个等价类中选取一个合适的代表元，我们需要以下概念。

定义 5.4. 设 f, g 是 Ω 中的函数。若 g 拟连续且 $g = f$ 几乎处处成立，则称 g 是 f 的拟连续修正。此时，我们用 $\widetilde{f}$ 表示 g。

根据上述命题，两个拟连续修正在拟处处相等。我们的目标是证明 $W^*(\Omega)$ 中的每个元素都存在一个拟连续修正。

引理 5.5. 设 $f \in W^*(\Omega) \cap C^0(\Omega)$。假设 $f \geq 0$ 或 $f \leq 0$ 在 Ω 上成立。记 $E_s = \{z \in \Omega : \ |f(z)| > s\}$，其中 $s > 0$。那么，

$$\mathsf{c}(E_s) \leq \frac{1}{s^2}\|f\|_*^2. \tag{5.1}$$

证明。由于 f 连续， $E_s = \{z \in \Omega: \ |f|/s > 1\}$ 是开集，且 $-|f|/s \in \mathscr{K}(E_s)$。结论由 c($E_s$) 的定义即可得到。我们添加 f 不变号这一假设，唯一原因是为了避免右侧出现常数 4；一般而言， $\|\|f\|\|_* \leq 2\|f\|_*$。 □

定义 5.6. Ω 中的函数序列 $\{f_k\}_{k\geq 1}$ 称为关于容量 c(·,Ω) 的柯西序列，如果对每一个紧集 $K \subset \Omega$ 以及 $\delta > 0$,

$$\limsup_{j,k\to\infty} \mathsf{c}(\{|f_j - f_k| > \delta\} \cap K) = 0.$$

我们现在可以陈述一个关键要素，它有助于选取 $W^*(\Omega)$ 中函数的一个良好代表元。这一结果受到 Dinh、Marinescu 和 Vu[DMV23，引理 2.9，定理 2.10] 的启发，他们在其中使用了 Bedford-Taylor 容量。我们具有比较两种容量的优势。因此，我们使用适当的容量来处理超水平集的各个部分。

定理 5.7. 设 $f \in W^*(\Omega)$。记 $f_k = f * \eta_{1/k}$，其中 $k = 1, 2.....$。则$\{f_k\}$ 是容量意义下的柯西序列。

证明。我们固定一个紧集 $K \subset\subset \Omega$ 以及 $\delta > 0$。设 $\varepsilon > 0$，我们希望证明存在 $j_0 > 0$ ，使得对于 $j, k > j_0$,

$$\mathsf{c}(\{|f_j - f_k| > \delta\} \cap K, \Omega) < \varepsilon. \tag{5.2}$$

严格地说，由于函数 f_j 定义在稍小的区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上，其中 $K \subset\subset \Omega'$，我们需要改为考虑 c(·, Ω′)。另一方面， K 是固定的， $\tilde{}$ $\bar{}$根据推论 4.8，不失一般性，我们可以假设 $f \in W^*(\Omega)$ 对 Ω 的某个邻域成立。因此，在下文中我们仍可写成 c(E) = c(E,Ω)。

现在，通过记 $f = f^+ - f^-$，我们可以假设 $f \geq 0$。然后，我们将估计归结为 $\{f_j\}$ 一致有界的情形，如下所述。固定一个较大的 $N > 0$ ，并 $\hat{}$考虑 $f_j = \min\{f_j, N\}$。于是，

$$\{|f_j - f_k| > \delta\} \subset \{|\widehat{f}_j - \widehat{f}_k| > \delta\} \cup E_{jk}(N),$$

其中 $E_{jk}(N) = \{f_j > N\} \cup \{f_k > N\}$. 利用引理 5.5，我们得到对于 $N > j_1$,

$$\mathsf{c}(E_{jk}(N)) \leq \frac{1}{N^2}(\|f_j\|_*^2 + \|f_k\|_*^2) \leq \varepsilon/4. \tag{5.3}$$

$\hat{}$因此，考虑 f_j 后，我们可以从现在起假设该序列一致有界于 N。为简便起见，我们仍使用相同的记号 f_j。这些函数满足

$$df_k \wedge d^c f_k \leq T * \eta_{1/k}. \tag{5.4}$$

接下来，通过用有限个小球覆盖 K 并利用容量的次可加性，我们将问题化归为以下情形： $df \wedge d^c f \leq T = dd^c u$ 位于球 $\Omega = B(0, 2r)$ 中，且 $K \subset B(0, r)$，其中某个 $r > 0$ 满足 $u \in PSH(B(0, 3r))$ 为负。因此，若定义 $u_k := u * \eta_{1/k}$，则由 (5.4) 可得

$$df_k \wedge d^c f_k \leq dd^c u_k \quad \text{in } B(0, 3r/2).$$

现在我们使用 Bedford-Taylor 容量，它满足

$$cap(\{u < -N\} \cap B(0, r), \Omega) \leq \frac{1}{N}\|u\|_{L^1(\Omega)}$$

根据 CLN不等式（例如参见 [K05，命题 1.10]）。因此，对于 $N > j_2$,

$$cap(\{u < -N\} \cap B(0,r), \Omega) \leq (\varepsilon/4)^n/A, \tag{5.5}$$

其中 A 是引理 4.5 中出现的常数。我们将其分为

$$K \subset (K \cap \{u \geq -N\}) \cup \{u < -N\}.$$

根据 (5.5)，只需估计 $cap(\{|f_j - f_k| > \delta\} \cap K \cap \{u \geq -N\}, \Omega)$。由 Bedford-Taylor 容量的定义和马尔可夫不等式可知，这一部分不超过

$$\sup \left\{ \frac{1}{\delta^2} \int_{K \cap \{u \geq -N\}} (f_j - f_k)^2 (dd^c \phi)^n \right\}, \tag{5.6}$$

其中，上确界取遍 Ω 中所有的 $0 \leq \phi \leq 1$ 拟次调和函数。根据一个初等不等式

$$\mathbf{1}_{\{u \geq -N+1\}} \leq \max\{u, -N\} + N := u_N$$

我们得到

$$\int_{K \cap \{u \geq -N+1\}} (f_j - f_k)^2 (dd^c \phi)^n \leq \int_K u_N^2 (f_j - f_k)^2 (dd^c \phi)^n.$$

断言5.8. 对于每个 $\Omega' \subset\subset \Omega$，我们有 $g_j := u_N f_j \in W^*(\Omega')$，并且

$$dg_j \wedge d^c g_j \leq N^2 dd^c (u_N^2 + u_{j,N+1}),$$

其中 $u_{j,N+1} = \max\{u_j, -N-1\}$。此外，

$$v_j := N^2(u_N^2 + u_{j,N+1}) \searrow N^2(u_N^2 + u_{N+1}) =: v.$$

断言*5.8*的证明。 第一个结论由例2.7和注 2.10立即得出，而第二部分则由其公式得出。 □

接下来，令 $0 \leq \chi \leq 1$ 为一个光滑的截断函数，使得 $\chi = 1$ 在 K 的一个邻域上成立，且 $\operatorname{supp} \chi \subset\subset \Omega$。现在我们可以对满足下列条件的$g_j - g_k = u_N(f_j - f_k)$应用引理 3.8：

$$d(g_j - g_k) \wedge d^c(g_j - g_k) \leq 2dd^c(v_j + v_k).$$

这里，$0 \leq v_j = N^2(u_N^2 + u_{j,N+1}) \leq N^4$是一个拟次调和函数，其中 $j \geq 1$。于是，

$$\begin{aligned} &\int_K (g_j - g_k)^2 (dd^c \phi)^n \\ \leq\ & A_0 N^{4a} \left(\int \chi (g_j - g_k)^2 \left[\omega + 2dd^c(v_j + v_k)\right]^n \right)^{\frac{1}{2^n}}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

右侧的最后一个积分由推论 3.10 处理如下：

$$\begin{aligned} &\int \chi (g_j - g_k)^2 [\omega + 2dd^c(v_j + v_k)]^n \\ &\qquad \leq \int \chi (g_j - g_k)^2 (\omega + 4dd^c v)^n \\ &\qquad\quad + A_1 \|g_j - g_k\|_* \int_\Omega \left[2(v_j + v_k) - 4v\right] (\omega + 4dd^c v)^n \\ &\qquad =: I + J. \end{aligned}$$

根据勒贝格单调收敛定理，对于 j， $k \geq j_3$,

$$J \leq \frac{1}{A_0 N^{4a}} \left(\delta^2/A^n\right)^{2^n} (\varepsilon/4)^n =: \varepsilon'. \tag{5.8}$$

为了估计 I，我们再次应用推论 3.11，并取另一个独立指标 ℓ,

$$I \leq \int \chi(g_j - g_k)^2[\omega + 4dd^c(v * \eta_{1/\ell})]^n + A_2\|g_j - g_k\|_* \int_\Omega 4(v * \eta_{1/\ell} - v)(\omega + 4dd^c v)^n.$$

因此，我们可以先选择足够大的 $\ell = \ell_0$，使得第二个积分小于$\varepsilon'/2$；然后选择 j, $k > j_5 > \max\{j_1, j_2, j_3, j_4\}$，使得第一个积分小于 $\varepsilon'/2$。因此，对于 j， $k > j_5$,

$$I \leq \varepsilon'. \tag{5.9}$$

结合 (5.3)、(5.5)、(5.6)、(5.7)、(5.8)、(5.9) 和引理 4.5，我们得到，对于j, $k > j_5$,

$$\mathsf{c}(\{|f_j - f_k| > \delta\} \cap K) < \varepsilon.$$

由此证明了 (5.2)。 □

注 5.9. 上述论证适用于每个序列 $f_k = f * \eta_{\varepsilon_k}$，其中 $\varepsilon_k \searrow 0$，以及每个序列 $f_{r_j} = f * \chi_{r_j}$，其 $r_j \to 0$ 按照 (2.14) 定义。因此，对于这样的序列，定理的陈述仍然成立。

我们现在准备证明推论 1.2 中拟连续修正的存在性。该推论是 Dinh、Marinescu 和 Vu [DMV23，定理 2.10] 在我们这一情形下的改述。下面给出的证明是标准的，我们紧密遵循[FOT94，定理 2.13] 中的证明。

定理 5.10. 设 $f \in W^*(\Omega)$。存在一个拟连续修正 $\tilde{f}$。

证明. 设 $D \subset\subset \Omega$ 是一个子域。设 $f_k = f * \eta_{1/k}$，其中 $k = 1,2,\ldots$。定义

$$E_k = \{x \in D : |f_k - f_{k+1}| > 1/2^k\}, \quad G_j = \cup_{k \geq j} E_k.$$

通过选取一个子列，我们可以假设 $\mathsf{c}(E_k) \leq 2^{-k}$。因此，$\mathsf{c}(G_j) \leq 2^{-j}$并且

$$\mathsf{c}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j\right) = 0.$$

如果 $x \in D \setminus G_j$，那么

$$|f_{N+s}(x) - f_N(x)| \leq \sum_{k \geq N} |f_{k+1} - f_k| \leq 1/2^N.$$

对所有 $s \geq 1$ 和 $N \geq j$ 都成立。这意味着，将 $\{f_k\}$ 限制在 $D \setminus G_j$ 上，当 $k \to \infty$ 时一致收敛。令 $\tilde{f}(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$，其中 $x \in \cup_j (D \setminus G_j)$。那么，$\tilde{f}$ 是一个拟连续函数，并且在 D 上 $\tilde{f} = f$ 几乎处处成立。

现在我们证明其拟连续性。令 D_ℓ 是 $\Omega = \cup_\ell D_\ell$的一列递增的相对紧区域。定义

$$E_k(\ell) = \{x \in D_\ell : |f_k - f_{k+1}| > 1/2^k\}, \quad G_j(\ell) = \cup_{k \geq j} E_k(\ell).$$

通过对角线论证，我们可以取一个子列，使得对每个 $\ell \geq 1$，都有 $\mathsf{c}(E_k(\ell)) \leq 2^{-\ell-k}$。因此，$\mathsf{c}(G_j(\ell)) \leq 2^{-\ell-j}$，并且

$$\mathsf{c}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j(\ell)\right) = 0.$$

若 $x \in D_\ell \setminus G_j(\ell)$，则

$$|f_{N+s}(x) - f_N(x)| \leq \sum_{k \geq N} |f_{k+1} - f_k| \leq 1/2^N.$$

对所有 $s \geq 1$ 和 $N \geq j$均成立。这意味着，当 $k \to \infty$ 时，$\{f_k\}$ 在 $D_\ell \setminus G_j(\ell)$ 上的限制一致收敛。令

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{for } x \in \bigcup_{\ell \geq 1} \cup_{j\geq 1}[D_\ell \setminus G_j(\ell)]. \tag{5.10}$$

于是，$f = f$ 在 Ω 上几乎处处成立。我们验证其拟连续性。该函数在 $F_j(\ell)$ 上的限制是连续的：$= D_\ell \setminus G_j(\ell)$。定义 $F_j = \cap_{\ell=1}^{\infty} F_j(\ell)$。我们有

$$\mathsf{c}(\Omega \setminus F_j) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathsf{c}(G_j(\ell)) \leq 1/2^j.$$

因此，定理的证明完成。 □

最后，我们得出引言中的拟连续修正结论。

推论 *1.2* 的证明。 存在性由定理 5.10 得出，而在一个多极集之外的唯一性由命题 5.3 得出。□

接下来我们定义

$$\widetilde{W^*}(\Omega) = \{g \in W^*(\Omega) : g \text{ is quasi-continuous}\}. \tag{5.11}$$

由定理 5.10 和命题 5.3 可知，$\sim W^*(\Omega)$ 关于勒贝格测度几乎处处意义下的等价类，与拟处处意义下的等价类相同。我们将 (5.1) 推广如下。

推论 5.11。 设 $f \in W^*(\Omega)$ 满足 $f \geq 0$ 或 $f \leq 0$。假设$\Omega' \subset\subset \Omega$。定义 $E'_s = \{z \in \Omega' : \ |f(z)| > s\}$，其中 $s > 0$。那么，

$$\mathsf{c}(E'_s, \Omega') \leq \frac{1}{s^2}\|f\|^2_{W^*(\Omega')}.$$

证明。 不妨设 $f \geq 0$。令 $f_k = f * \eta_{1/k}$ 和 f 如定理 5.10 的证明中所示。我们可以将 $k \geq 1$ 取足够大，使得所有 f_k 都属于$W^*(\Omega') \cap C^0(\Omega')$。在本证明中，对于博雷尔集，我们现在记 $\mathsf{c}(E) = \mathsf{c}(E, \ \Omega')$。

令 $\varepsilon > 0$。由于 $f = f$ 拟处处，因此存在一个开集 $G \subset \Omega'$，使得 $\mathsf{c}(G) < \varepsilon$ 且 $f_k \to f$ 在 $\Omega' \setminus G$上一致成立。因此，对于 $s > \delta > 0$，存在 $k_0 = k_0(\delta)$，使得对于 $k \geq k_0$，

$$E'_s = \{z \in \Omega' : f > s\} \subset \{z \in \Omega' : f_k > s - \delta\} \cup G.$$

对 f_k 应用 (5.1)，得到

$$\mathsf{c}(E'_s) \leq \mathsf{c}(\{f_k > s - \delta\}) + \varepsilon \leq \|f_k\|^2_{W^*(\Omega')}/(s-\delta)^2 + \varepsilon.$$

依次令 $k \to \infty$、$\delta \to$ 和 $\varepsilon \to 0$，并使用命题 2.11，即可得到所需的不等式。□

另一个很好的推论是，L^2-可积函数在 $W^*(\Omega)$ 中相对于有界拟多重次调和函数的 Monge-Amp`ère 测度局部可积。设 $\phi \in PSH(\Omega)$ 满足~条件 $0 \le \phi \le 1$。定义 $\mu := (dd^c\phi)^n$。设 $f \in W^*(\Omega)$，并设 f 为一个拟连续修正。设 $D \subset\subset \Omega$ 为一个子域。根据定理 5.10，存在一个序列 $f_k := f * \eta_{1/k}$ 在 D 中拟处处收敛到 f。若 g 是另一个拟~连续修正，则根据命题 5.3，$g = f$拟处处成立。若 $|f| \le N$，则 $|f_k| \le N$，且 $|f| \le N$ 在 D 中拟处处成立。由勒贝格控制收敛定理和命题 3.6，我们得到对于 $K \subset D$

$$\int_K (\widetilde{f})^2 d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_K f_k^2 d\mu \le A\|f\|^2_{W^*(\Omega)}, \tag{5.12}$$

其中 $A > 0$ 与 f无关。因此，

$$\int_K f^2 d\mu := \int_K (\widetilde{f})^2 d\mu \tag{5.13}$$

对于有界函数 $f \in W^*(\Omega)$，该式定义良好。一般而言，我们考虑 $f_N :=\min\{|f|, N\}$，其中 $N > 0$，并定义

$$\int_K f^2 d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int_K \widetilde{f}_N^2 d\mu.$$

右侧的极限存在，因为它是关于 N的递增序列，且由 (5.12) 一致有界。因此，下列积分定义良好。

定义 5.12。设 $\phi \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$。定义 $\mu :=(dd^c\phi)^n$。设 $g \in W^*(\Omega)$，且 $K \subset\subset \Omega$ 为紧子集。若 $g \ge 0$，则

$$\int_K g d\mu := \int_K \widetilde{g} d\mu,$$

其中 $\widetilde{g}$ 是拟连续修正。一般而言，

$$\int_K g d\mu := \int_K g^+ d\mu - \int_K g^- d\mu.$$

6. Capacitability

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界开集。我们的目标是证明 c(·，Ω) 是 Choquet 意义下的容量。第一个结果的灵感来自 [Vig07 在紧 K¨ahler 流形上的推论 31] 的一个类似结果。此外，我们还证明了局部情形下极值函数的唯一性。遵循 [FO87，引理 2.1.1]，我们首先假设集合是开的，之后再去掉这一条件。

引理 6.1。假设 $E \subset \Omega$ 是一个开子集。存在唯一的 $\Phi_E \in W^*(\Omega)$，使得 $\mathrm{c}(E) = \|\Phi_E\|^2_*$。此外，在 Ω 中 $-1 \le \Phi_E \le 0$ 几乎处处成立，并且在E上 $\Phi_E = -1$ 拟处处成立。

证明。我们首先证明其存在性。设 $\{u_j\}_{j\ge1}$ 和 $-1 \le u_j \le 0$ 是 $\mathscr{K}(E)$ 中的一个序列，满足 $\mathrm{c}(E) = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_*$。由推论 2.14 可知，取子列后，$u_j$在 $W^{1,2}(X)$ 中弱收敛到 $u \in W^*(\Omega)$，且$\|u\|_* \le \liminf_j \|u_j\|_*$。由命题 2.12，我们有 $u = -1$ 在 E 上几乎处处成立，且 $-1 \le u \le 0$ 在 Ω 中成立。该命题的证明只用到了勒贝格

函数在 $L^p(\Omega)$ 中的点。由于 E 是开集， $u \in \mathscr{K}(E)$（这是用到开性的地方），且 $\mathsf{c}(E) = \|u\|_*^2$。当然，我们可以用 $\widetilde{u}$ 代替 u。由命题 5.3 以及 E的开性可知， $\widetilde{u} = -1$ 拟处处成立。

接下来，我们证明唯一性。假设 u_1 和 u_2 是这样两个函数。设 T_1和 T_2 分别是 u_1 和 u_2 的极小闭正流。因此，

$$\mathsf{c}(E) = \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T_1\|_\Omega = \|u_2\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T_2\|_\Omega.$$

定义 $v = (u_1 + u_2)/2$。显然， $dv \wedge d^c v \le (T_1 + T_2)/2$ ，因此，

$$\begin{aligned}\mathsf{c}(E) &\le \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T\|_\Omega \\ &= \frac{1}{4}(\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_2\|^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2}\|u_1 u_2\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2}(\|T_1\|_\Omega + \|T_2\|_\Omega).\end{aligned}$$

这意味着

$$2\int_\Omega u_1 u_2 dx \ge \int_\Omega u_1^2\, dx + \int_\Omega u_2^2\, dx.$$

因此， $u_1 = u_2$ 几乎处处。 □

容易看出，如果 $v \in W^*(\Omega)$且在 E的某个邻域内 $v \le -1$ 几乎处处成立，那么$\widetilde{\ \ v} \in W^*(\Omega)$，并且在 E上 $\widetilde{v} \le -1$ 几乎处处成立。我们证明，容量定义中的下确界可以在这个更大的空间中考虑。

引理 6.2. 对于博雷尔集 E,

$$\mathscr{K}'(E) := \{v \in W^*(\Omega) \mid \widetilde{v} \le -1 \ q.e. \ on \ E \ and \ \widetilde{v} \le 0 \ q.e.\}.$$

于是,

$$\mathsf{c}(E) = \inf\{\|v\|_*^2 : v \in \mathscr{K}'(E)\}.$$

证明。 由于 $\mathscr{K}(E) \subset \mathscr{K}'(E)$，我们有 $\mathsf{c}(E)$ 大于下确界。接下来只需证明反向不等式。考虑 $h \in \mathscr{K}'(E)$，并固定其准-$\widetilde{\ }$连续修正 h （定理 5.10）。给定 $0 < \varepsilon << 1$ ，我们选取一个$\widetilde{\ }$开集 $G := G_\varepsilon$ ，使得 $\mathsf{c}(G) < \varepsilon$ ，并且 h 限制在 $\Omega \setminus G$ 上连续$\widetilde{\ }$，且 $h \le -1$ 在 $E \cap (\Omega \setminus G)$上成立。记 u 为引理 6.1 中开集 G 对应的函数 Φ_G。那么

$$D_\varepsilon = \{x \in \Omega \setminus G : \widetilde{h} < -1 + \varepsilon\} \cup G$$

是 Ω 中的一个开子集，且 $E \subset D_\varepsilon$。此外， $h + u \le -1 + \varepsilon$ 在 D_ε 上几乎处处成立，并且它在 Ω 中为负。因此，

$$\begin{aligned}\mathsf{c}(E) \le \mathsf{c}(D_\varepsilon) &\le \frac{\|h+u\|_*^2}{(1-\varepsilon)^2} \\ &\le \frac{(\|h\|_* + \|u\|_*)^2}{(1-\varepsilon)^2} \\ &\le \frac{(\|h\|_* + \sqrt{\varepsilon})^2}{(1-\varepsilon)^2}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \searrow 0$，则 $\mathsf{c}(E) \le \|h\|_*^2$。由于 h 是任意的，我们得出反向不等式。□

为了在引理 6.1 中去掉开性条件，我们需要将几乎处处收敛加强为拟处处收敛。这是最困难的一步，需要用到第7.2节中狄利克雷空间的泛函容量。

引理 6.3. 设 $\{u_j\}_{j\geq 1} \subset \mathscr{H}'(E)$ 满足 $\|u_j\|_*^2 \leq A$，其中 $j \geq 1$。假设 u_j在 $W^{1,2}(\Omega\ \mathbb{R})$ 中弱收敛到 $u \in W^*(\Omega)$。若 $u_j = -1$ 在 E上拟处处成立，则 $u = -1$在 E上拟处处成立。

证明。不失一般性，我们可以假设 u_j 和 u 是拟连续的，且 $-1 \leq u_j$，$u \leq 0$。定义 $F = \{u > -1\} \cap E$。我们希望证明 $\mathsf{c}(F) = 0$。由次可加性，只需证明对于 Ω 的一个紧集穷竭序列 $K_j \uparrow$，有 $\mathsf{c}(F \cap K_j) = 0$。换言之，我们可以假设 $F \subset\subset \Omega$，且 Ω 是一个严格伪凸域。

反设 $\mathsf{c}(F) > 0$。引理 4.5 推出$cap(F) > 0$。根据推论 7.9 中的刻画，存在 $\phi \in PSH(\Omega)$、$-1 \leq \phi \leq 0$ 和 $0 < \delta \leq 1$，使得与$\theta = (dd^c\phi + \delta\omega)^{n-1}$ 相关联的容量 c_θ 满足

$$\mathsf{c}_\theta(F) > 0. \tag{6.1}$$

此容量在狄利克雷空间 $\mathcal{F}$ 上定义，见（7.10）（定义 7.4），其中 $\mathcal{F}$ 被视为实希尔伯特空间 $H_0^1(\Omega\ \theta)$（引理 7.5）。后一个空间配备了（7.5）中的内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\theta$ 以及（7.6）中的 $\|\cdot\|_\theta$-范数。

¯设 $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足：在 E 的某个邻域上，$0 \leq \chi \leq 1$ 且 $\chi = 1$。由定理 7.6，$v_j := \chi u_j \in \mathcal{F}$ 且 $v := \chi u \in \mathcal{F}$，其 $\|\cdot\|_\theta$-范数一致有界。显然，$v_j \to v$ 在 $W^{1,\ 2}(\Omega\ \mathbb{R})$ 中弱收敛。因此，对于每个 $g \in C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$，都有 $\langle v_j,\ g\rangle_\theta \to \langle v,\ g\rangle_\theta$。由于后一个空间在 $\mathcal{F}$ 中稠密，可知 $v_j \to v$ 在 $(\mathcal{F},\ \|\cdot\|_\theta)$ 中弱收敛。Mazur 引理表明，存在一个凸组合 $\Phi_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} a_j v_j$，其中 $a_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{\ell} a_j = 1$，在 $\|\cdot\|_\theta$-范数下收敛到 v。

我们现在可以得到一个矛盾。根据假设，$j \geq 1$，$v_j = -1$在 $E \setminus P_j$ 上成立，其中 P_j 是多极的。因此，$\Phi_\ell = -1$ 在 E 上成立，除去一个多极集$P' = \cup_{j\geq 1} P_j$。由引理 7.8-(b)可知，每个 Φ_ℓ 关于 $\mathsf{c}_\theta(\cdot)$拟连续。根据 [FOT94，定理 2.1.4]，对 $\{\Phi_\ell\}_{\ell\geq 1}$，我们推得 $\Phi_\ell \to v$在 Ω 上逐点成立，$\setminus P''$，其中 $\mathsf{c}_\theta(P'') = 0$。因此，$u = v = -1$ 在 $E \setminus (P' \cup P'')$上成立。根据定义，$F \subset P' \cup P''$。再次应用推论 7.9，我们得到 $\mathsf{c}_\theta(F) = 0$。这与 (6.1) 矛盾。□

由上述引理可知，在引理 6.1 的证明中得到的函数 Φ_E 对每个博雷尔集都属于 $\mathscr{H}'(E)$。因此，引理 6.2 现在普遍成立。

推论 6.4. 设 $E \subset \Omega$ 是一个博雷尔子集。存在唯一的 $\Phi_E \in W^*(\Omega)$ 使得 $\mathsf{c}(E) = \|\Phi_E\|_*^2$。它满足：在 E 上几乎处处有 $-1 \leq \Phi_E \leq 0$，且拟处处有 $\Phi_E = -1$。

现在我们证明本节的主要结果，即定理 1.3 的内容。与 [Vig07 中定理 30] 的证明相比，这里的证明更为详尽。

定理 6.5. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界开集。定义在博雷尔集上的集合函数$E \mapsto \mathsf{c}(E) = \mathsf{c}(E,\Omega)$ 满足：

(a) 对于 $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$，*c(E₁) ≤c(E₂)*。*(b)* 如果 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ 是 *Ω* 中的紧集且 $K = \cap K_j$，那么 *c(K) =lim$_{j\to\infty}$ c(K$_j$)*。*(c)* 如果 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \Omega$ 是博雷尔集且 $E = \cup E_j$，那么 *c(E) =lim$_{j\to\infty}$ c(E$_j$)*。

证明. (a) 和 (b) 已在命题 4.1 中证明，因此只需证明 (c)。只需证明 $\mathsf{c}(E) \leq \lim_{j\to\infty} \mathsf{c}(E_j)$，因为另一

个方向由 (a) 显然成立。由引理 6.2，存在满足以下条件的 $u_j \in \mathscr{K}'(E_j)$

$$\mathsf{c}(E_j) = \|u_j\|_*^2.$$

我们可以假设 $\|u_j\|_*$ 在 $j \geq 1$ 中一致有界（否则结论成立）。因此，存在一个子列弱收敛到 $u \in W^*(\Omega)$。特别地， $u_j \to u$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛。命题 2.12 推出 $u = -1$ 在$E = \cup_j E_j$ 上几乎处处成立，且 $u \leq 0$ 在 Ω 中成立。引理 6.3 和命题 5.3 分别推出 $\widetilde{u} = -1$ 在 E 上拟处处成立，且 $\widetilde{u} \leq 0$ 在 Ω 中成立。因此，$\mathsf{c}(E) \leq \|u\|_*^2 \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|_*^2$. □

由于 $\mathsf{c}(\cdot, \Omega)$ 是 Choquet 意义下的容量，因此它是内正则的，即对于每个博雷尔集

$$\mathsf{c}(E) = \sup\{\mathsf{c}(K) : K \subset E \text{ is compact}\}.$$

结合引理 4.7 和引理 4.5，可得一个有用的观察。

推论 6.6。设 $E \subset \Omega$ 是一个博雷尔集。 E 是多极集，当且仅当$\mathsf{c}(E,\Omega) = 0$。

7. Embedding into Dirichlet spaces

7.1. 与闭正流相关的狄利克雷空间。本节将说明， $W^*(\Omega)$ 可以自然地嵌入与一个正闭$(n-1, n-1)$-流相关的狄利克雷空间中。这些正流由与有界拟多重次调和函数相关的(1,1)-流的楔积得到。

设 $-1 \leq \phi_1, ..., \phi_{n-1} \leq 0$ 是 Ω 中的拟次调和函数。那么，

$$\theta = dd^c\phi_1 \wedge \cdots \wedge dd^c\phi_{n-1} \tag{7.1}$$

这是一个双次数为$(n-1, n-1)$的闭正流。不失一般性，我们考虑所有函数 $\phi_k = \phi$ 的情形。我们在 $C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$ 上引入与 θ 相关的二次型，如下所示。对于 $f, g \in C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$,

$$\mathscr{E}_\theta(f, g) = \int df \wedge d^c g \wedge \theta$$

此处及本节余下部分所考虑的所有积分均在 Ω 上进行，因此积分式中省略 Ω。定义

$$\mathscr{E}_\theta(f) := \mathscr{E}_\theta(f, f) = \int df \wedge d^c f \wedge \theta.$$

θ 的迹测度由下式给出

$$\mu := \theta \wedge \omega = \sum \tau_{j\bar{j}},$$

这是一个正拉东测度。

注记 7.1。记作 $\theta = \sum \theta_{j\bar{k}}\ dz^j \wedge d\bar{z}^k$，其中 $\theta_{j\bar{k}}$ 是复 Radon 测度。它们相对于 $\mu = \theta \wedge \omega$绝对连续。因此，$\theta_{j\bar{k}} = h_{j\bar{k}} \cdot \mu$ 对于某个有界的（复值）博雷尔函数 $h_{j\bar{k}} \in L^\infty(\Omega\ d\mu)$成立。这给出

$$\mathscr{E}_\theta(v) = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^n \partial_j v \cdot \overline{\partial_k v}\ \theta_{j\bar{k}} = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^n \partial_j v \cdot \overline{\partial_k v}\ h_{j\bar{k}}\ d\mu,$$

Okada [Ok82] 的以下结果非常有用。

引理 7.2. 设 $\{f_i\}_{i\geq 1} \subset C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$ 满足 $f_i \to 0$ 属于 $L^2(\Omega\ d\mu)$。假设$\{f_i\}_{i\geq 1}$ 是 $\langle\cdot, \cdot\rangle_\theta$-范数下的柯西序列，即，

$$\mathscr{E}_\theta(f_j - f_k) = \int d(f_j - f_k) \wedge d^c(f_j - f_k) \wedge \theta \to 0 \quad as\ j, k \to \infty. \tag{7.2}$$

那么，$\lim_{j\to\infty} \mathscr{E}_\theta(f_j)\ = 0$。

证明。 我们首先证明以下刻画。对于 $g \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$[\mathscr{E}_\theta(g)]^{\frac{1}{2}} = \sup\left\{\int g dd^c\chi \wedge \theta : \chi \in C_c^\infty(\Omega),\ \|\chi\|_\theta \leq 1\right\}.$$

通过分部积分，

$$\int g dd^c\chi \wedge \theta = -\int dg \wedge d^c\chi \wedge \theta.$$

这里，利用 $\theta_\varepsilon :=\theta * \eta_\varepsilon$ 进行简单的逼近论证，即可得到分部积分公式成立。由此应用柯西-施瓦茨不等式可得，上确界小于 $[\mathscr{E}_\theta(g)]^{\frac{1}{2}}$。此外，对于 $\chi = -f/[\mathscr{E}_\theta(f)]^{\frac{1}{2}}$，上确界可以取到。刻画得证。

接下来，我们将其应用于 $h = f_j - f_k$。固定 $\varepsilon > 0$。由于 $\mathscr{E}_\theta(f_j - f_k) \to 0$，存在 N，使得对于 $j,\ k > N$，以及对于 $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int (f_j - f_k) dd^c\chi \wedge \theta < \varepsilon.$$

显然，全变差 $\|dd^c\chi \wedge \theta\| \leq A\omega \wedge \theta$，其中某个常数 A 仅依赖于 χ。令 $k \to \infty$，我们得到

$$\int f_j dd^c\chi \wedge \theta < \varepsilon.$$

对 χ 取上确界，并结合该刻画即可得出结论。 □

由于空间 $W^* \subset W^{1,\ 2}(\Omega)$，我们需要对 θ 作出额外假设，使得$L^2(\Omega\ d\mu)\ \subset L^2(\Omega)$。最简单的方法是考虑 $\phi :\ = \phi + \delta|z|^2$，其中某个$0 < \delta \leq 1$。由于 $\omega = dd^c|z|^2$，我们有

$$\theta = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \delta^{n-k}\omega^{n-1-k} \wedge (dd^c\phi)^k =: \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k\theta_k, \tag{7.3}$$

其中 $\theta_k = \binom{n-1}{k}\omega^{n-k} \wedge (dd^c\phi)^k$。因此，迹测度 $\mu = \theta \wedge \omega$ 满足

$$\mu \geq c_0 \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{n-1-k} \wedge (dd^c\phi)^k. \tag{7.4}$$

特别地， $\mu = \theta \wedge \omega \geq c_0\omega^n$和 $\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|^2_\theta$对于 $f \in C_c^\infty(\Omega)$。

考虑以下内积

$$\langle f, g\rangle_\theta = \int fg\ \omega^n + \mathscr{E}_\theta(f, g), \tag{7.5}$$

以及相应的范数

$$\|f\|^2_\theta = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathscr{E}_\theta(f, f). \tag{7.6}$$

假设 (7.3) 使得该内积在 $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 上正定。于是，我们定义实希尔伯特空间

$$H_0^1(\Omega,\theta) := \overline{C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})}$$

是 $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 关于 $\|\cdot\|_\theta$ 的完备化。乍一看，这是一个抽象函数空间。不过，我们将精确地刻画这个空间。

首先，得益于 Fukushima 和 Okada [FO87, 定理 2.5]，$\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是可闭的。更准确地说，在引理 7.2 中，我们可以将关于 μ 的 L^2-收敛假设替换为关于勒贝格测度的假设。

定理 7.3. 假设 $\{f_i\}_{i\geq 1}\subset C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 使得 $f_i\to 0$ 属于 $L^2(\Omega)$，且 $\{f_i\}_{i\geq 1}$ 是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta$- 范数的柯西序列，即

$$\mathscr{E}_\theta(f_j-f_k)=\int d(f_j-f_k)\wedge d^c(f_j-f_k)\wedge\theta\to 0 \quad as\ j,k\to\infty. \tag{7.7}$$

那么，$\lim_{i\to\infty}\mathscr{E}_\theta(f_i)=0$。

这引出了在 [Ok82] 中研究的一个自然函数空间。

定义 7.4. 若存在一个序列$w_j\in C_c^\infty(\Omega)$，使得 $w_j\to f$ 属于 $L^2(\Omega)$，且 $\{w_j\}_{j\geq 1}$ 关于半范数 $\mathscr{E}_\theta(\cdot)$构成柯西序列，则函数 $f\in L^2(\Omega)$属于 $\mathcal{F}$。

根据定理 7.3（另见 [Ok82，定理´eor`em 4]），该空间 $\mathcal{F}$ 与对称型 $\mathscr{E}_\theta$ 一起，在 $L^2(\Omega)$ 上构成一个正则狄利克雷空间。下面给出先前承诺的抽象希尔伯特空间的识别。

引理 7.5。 $H_0^1(\Omega,\theta)=\mathcal{F}$。

证明。考虑恒等映射 $\iota\colon C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})\to L^2(\Omega)$。由于$\|f\|_{L^2(\Omega)}\leq\|f\|_\theta$，该映射可连续延拓为 $\widetilde{\iota}\colon H_0^1(\Omega,\theta)\to L^2(\Omega)$。因此，$\mathcal{F}$包含在 $H_0^1(\Omega,\theta)$ 在 $\widetilde{\iota}$ 下的像中。若 $\widetilde{\iota}$ 是单射，则其像可识别为 $\mathcal{F}\subset L^2(\Omega)$。事实上，设 $f\in H_0^1(\Omega,\theta)$，使得 $\widetilde{\iota}(f)=0$。存在$\{f_i\}_{i\geq 1}\subset C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$，它是关于范数 $\|\cdot\|_\theta^2=\|\cdot\|_{L^2}^2+\mathscr{E}_\theta(\cdot)$ 表示 f 的柯西序列。特别地，$\{f_i\}$ 是 $\mathscr{E}_\theta$-柯西序列，且$\|f_i\|_{L^2(\Omega)}=\|\widetilde{\iota}(f_i)\|_{L^2(\Omega)}\to 0$. 由引理 7.3 得出 $\mathscr{E}_\theta(f_j)\to 0$。因此，

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega,\theta)}^2=\lim_{i\to\infty}\|f_i\|_\theta^2=\lim_{j\to\infty}\|f_i\|_{L^2}^2+\lim_{j\to\infty}\mathscr{E}_\theta(f_i,f_i)=0.$$

因此，$f=0$ 证明完成。 □

我们已准备好陈述嵌入定理。

定理 7.6. 如果 $f\in W^*(\Omega)$ 且 $\chi\in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$，则 $\chi f\in\mathcal{F}$。

证明。设 $df\wedge d^cf\leq T$ 是 Ω 中一个有限质量的闭正 (1，1)-流 T。令 $f_k=f*\eta_{1/k}$ 和 $T_k=T*\eta_{1/k}$ 为其与光滑核族的卷积。记 $g_k=\chi f_k$，当 k 足够大时，它在 Ω 中光滑。我们估计

$$\begin{aligned}\int dg_k\wedge d^cg_k\wedge\theta &\leq 2\int\chi^2df_k\wedge d^cf_k\wedge\theta+2\int f_k^2d\chi\wedge d^c\chi\wedge\theta\\ &\leq 10\int\chi^2T_k\wedge\theta+4A_0\int\chi f_k^2\,\omega\wedge\theta\\ &\leq A,\end{aligned}$$

其中，第二个不等式使用了引理 3.2 和 $df_k \wedge d^c f_k \leq T_k$。最后一个不等式中的有限性，对于第一个积分，源于 Chern-Levine-Nirenberg 不等式以及 T_k 弱收敛到 T；对于第二个积分，则源于命题 3.6。这意味着存在一个子列 $\{g_k\}_{k\geq 1}$ 弱收敛到 $g \in H_0^1(\Omega\ \theta) = \mathcal{F}$。取子列并应用 Mazur 引理[Yo80，第 2 定理，第 120]页，我们得到一个由下式定义的序列 $\{w_j\}_{j\geq 1} \subset C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$

$$w_j = \frac{1}{j}\sum_{\ell=1}^{j} g_{k_\ell} = \chi\left(\frac{1}{j}\sum_{j=1}^{\ell} f_{k_\ell}\right)$$

它在 $\|\cdot\|_\theta$ 范数下收敛于 g。由于 $w_j \to \chi f$ 属于 $L^2(\Omega)$，根据该空间的定义，我们有 $g = \chi f \in \mathcal{F}$。□

推论 7.7。设 $f, g \in W^*(\Omega)$ 且 $\chi \in C_c^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$。设 θ 是一个闭的正$(n-1, n-1)$流，如 (7.1) 中所述。则积分

$$\int df \wedge d^c\chi \wedge \theta \quad and \quad \int \chi^2 df \wedge d^c g \wedge \theta$$

是良定义的。

证明。若 f 光滑，则由分部积分可得

$$\int df \wedge d^c\chi \wedge \theta = -\int f dd^c\chi \wedge \theta. \tag{7.8}$$

接下来，对于一般的 $f \in W^*(\Omega)$，我们有 $\{f_k\}_{k\geq 1} = \{f * \eta_{1/k}\}_{k\geq 1}$ 关于容量是柯西列。取一个子列后，不妨设 $f_k \to f$ 在$\widetilde{}$容量意义下收敛，且 f 是拟连续的。因此，上述右端定义为

$$\int f dd^c\chi \wedge \theta := \int \widetilde{f} dd^c\chi \wedge \theta = \lim_{k\to\infty} \int \widetilde{f_k} dd^c\chi \wedge \theta.$$

因此，我们取该极限作为 (7.8) 左端的定义；此极限与子列的选取无关。

接下来，为了定义 $\int \chi^2 df \wedge d^c g \wedge \theta$，由极化可知，只需定义 $\int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \theta$ 和 $\int \chi^2 dg \wedge d^c g \wedge \theta$。我们先假设 $\theta = \theta_\delta$ 满足 (7.3)。由定理 7.6 可知

$$\int d(\chi f) \wedge d^c(\chi f) \wedge \theta_\delta$$

定义良好。因此，可以定义

$$\int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \theta_\delta := \int d(\chi f) \wedge d^c(\chi f) \wedge \theta_\delta - 2\int df \wedge d^c\chi \wedge \theta_\delta - \int d\chi \wedge d^c\chi \wedge \theta_\delta,$$

右侧的每个积分都有意义。当然，当 f 光滑时，这是一个严格成立的恒等式。由 $\chi f_j \to \chi f$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{F}$中的弱收敛可知，$\int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \theta_\delta$ 是 $\delta > 0$中的非负递增序列。最后，我们令

$$\int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \theta = \lim_{\delta\to 0^+} \int \chi^2 df \wedge d^c f \wedge \theta_\delta.$$

至此，推论得证。 □

感谢这一推论和定义 5.12，我们得出，在第 3 节中得到的积分估计现在对一般的 $f \in W^*(\Omega)$ 也成立。

7.2. 狄利克雷空间中的容量。 设 $\phi \in PSH(\Omega)$ 满足 $-1 \leq \phi \leq 0$。设 $\delta > 0$。根据定理 7.3，闭正流的这一对 (θ, μ)

$$\theta = [dd^c(\phi + \delta|z|^2)]^{n-1} \tag{7.9}$$

且测度 $\mu = \theta \wedge \omega$ 在 $L^2(\Omega, d\mu)$ 上可闭，并且 $\operatorname{supp} \mu = \Omega$，即它在 [FO87 第 173] 页的意义下是可容许的。因此，定义 7.4 中定义的 $\mathcal{F}$ 是 $L^2(\Omega, d\mu)$ 上的狄利克雷空间，其核心为 $C_c^\infty(\Omega)$，并配有狄利克雷型 $\mathcal{E}^\theta$。特别地，它是正则的 [FOT94，第 6] 页。

根据 [Ok82 定理 ´eor`em 1]，我们得到一个庞加莱型不等式，对于 $f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int f^2 d\mu = \int f^2 \theta \wedge dd^c|z|^2 \leq 8 \sup_\Omega |z| \int df \wedge d^c f \wedge \theta.$$

由此可知，$\mathcal{E}_1^\theta(f) = \|f\|^2_{L^2(d\mu)} + \mathcal{E}^\theta(f)$ 等价于 $\mathcal{E}^\theta(f)$。正如 [FO84 第 211] 页所指出的，[FOT94 第 2] 章中的位势论可以用 $\mathcal{E}^\theta$ 而非 $\mathcal{E}_1^\theta$ 来表述。对于开子集 $E \subset \Omega$，其容量定义为

$$\mathsf{c}_\theta(E) = \inf\{\mathcal{E}(v) : v \in \mathcal{F},\ v \geq 1 \quad \mu - \text{a.e. on } E\}. \tag{7.10}$$

对于一般的博雷尔集，我们定义

$$\mathsf{c}_\theta(E) = \inf\{\mathsf{c}_\theta(G) : E \subset G, \quad G \text{ is open subset in } \Omega\}.$$

特别地，对于紧子集 $K \subset \Omega$,

$$\mathsf{c}_\theta(K) = \inf\{\mathcal{E}^\theta(v) : v \in \mathcal{F} \cap C^0(\Omega),\ v \geq 1 \text{ on } K\}.$$

由于 Hilbert 空间中泛函容量的特殊性质，它是一个 Choquet 容量 [FOT94，定理 2.1。1]此外，我们有如下该容量与 Bedford-Taylor 容量之间的比较。

引理 7.8。 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 是一个严格伪凸域，且 $0 < \delta \leq 1$。

(a) 对于每个紧子集 $K \subset \Omega$,

$$cap(K) \leq 8\mathsf{c}_\theta(K),$$

其中 $\theta = (dd^c u^*_K + \delta\omega)^{n-1}$。

(b) 设 $D \subset\subset \Omega$ 为一个子域。存在常数 $A_0 = A(D,\Omega)$，使得对每个开子集 $G \subset D$,

$$\mathsf{c}_\theta(G) \leq A_0 \left[cap(G)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

证明。(a) 记 $\phi := u^*_K$ 为 K 在Ω中的相对极值函数。于是，$\phi \in PSH(\Omega)$ $-1 \leq \phi \leq 0$ 满足 $cap(K) = \int_K (dd^c\phi)^n$。对 $v \in C_c^\infty(\Omega)$以及 K上的$v \geq 1$，

$$\int_K (dd^c\phi)^n \leq \int_\Omega v^2 dd^c\phi \wedge \theta =: I,$$

其中 $\theta = (dd^c\phi + \delta\omega)^{n-1}$。Poincar´e型不等式 [Ok82，Th´eor`em 1]蕴含

$$I \leq 8\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega dv \wedge d^c v \wedge \theta.$$

对所有这样的 v取下确界，即得所需不等式。

(b) 设 $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$，使得 $0 \leq \chi \leq 1$ 和 $\chi = 1$ 位于邻域 D内。设$\varepsilon > 0$ 足够小。设 $u^*_G = u_G$ 为与 G相关的相对极值函数。由定理 7.6，$v = \chi u_G \in \mathcal{F}$。由于 $v = 1$ 在 G 上成立，我们有

$$\mathsf{c}_\theta(G) \leq \int dv \wedge d^c v \wedge \theta^{n-1}. \tag{7.11}$$

设 ρ为严格拟 plurisubharmonic 定义函数，且 $dd^c\rho \geq \omega$。将 $\phi := \max\{\phi, A\rho\}$ 替换为较大的 $A > 0$ 后，我们可以假设 $\phi = A\rho$ 在 Ω 上 $\setminus$ supp χ。由 (2.6),

$$d(\chi u_G) \wedge d^c(\chi u_G) \leq 2(\chi^2 du_G \wedge d^c u_G + u_G^2 d\chi \wedge d^c\chi).$$

因此,

$$\begin{aligned} \int dv \wedge d^c v \wedge \theta &\leq 2\int du_G \wedge d^c u_G \wedge \theta + 2\int u_G^2 d\chi \wedge d^c\chi \wedge \theta \\ &:= 2(I_1 + I_2). \end{aligned} \tag{7.12}$$

通过分部积分,

$$I_1 = \int (-u_G) dd^c u_G \wedge \theta \leq \int dd^c u_G \wedge [dd^c(\phi + \delta\rho)]^{n-1}$$

利用 Cegrell 不等式 [Ce04]，我们得到

$$I_1 \leq \left[\int (dd^c u_G)^n\right]^{\frac{1}{n}} \left[\int [dd^c(\phi + \delta\rho)]^n\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{7.13}$$

由于 $\phi + \delta\rho \geq (A+1)\rho$ 在 Ω 上成立，且在 $\partial\Omega$ 上取值为零，因此由比较原理

$$\int [dd^c(\phi + \delta\rho)]^n \leq (A+1)^n \int (dd^c\rho)^n := A_1$$

它与 G无关。因此,

$$I_1 \leq A_1 [cap(G)]^{\frac{1}{n}}.$$

关于 I_2 的估计非常类似。具体而言，利用 $d\chi \wedge d^c\chi \leq A' dd^c\rho$ 和分部积分 [Bl98，命题 2.1.3],

$$I_2 \leq A' \int (-u_G) dd^c\rho \wedge \theta = A' \int (-\rho) dd^c u_G \wedge \theta.$$

因此，再次利用 [Ce04]，我们得到对于 $A_2 = A' A_1 \|\rho\|_{L^\infty}$,

$$I_2 \leq A_2 [cap(G)]^{\frac{1}{n}}. \tag{7.14}$$

结合 (7.11)、(7.12)、(7.13) 和 (7.14)，得到 $\mathsf{c}_\theta(G) \leq A_3 [cap(G)]^{\frac{1}{n}}$，其中 A_3是一致常数。□

现在，我们用容量族来陈述多极集的刻画；该容量族在引理 6.3 的证明中用到。这一结果归功于 Fukushima 和 Okada [FO84]，其证明基于保角鞅扩散。我们的证明仅使用多重位势论。

推论 7.9. 设 $E \subset \Omega$ 是一个博雷尔子集。那么， $cap(E) = 0$ 当且仅当$\mathsf{c}_\theta(E) = 0$ 对所有形如(7.9) 且满足 $0 < \delta \leq 1$ 的 θ 成立。

证明。由于两个容量都是 Choquet 容量，我们可以假设 $E = K$ 是紧集。为证明充分条件，假设 $cap(K) > 0$。由引理 7.8 可立即得出 $\mathsf{c}_\theta(K) > 0$，其中其中 $\theta = (dd^c u_K^* + \delta\omega)^{n-1}$。为证明必要条件，我们假设 $cap(K) = 0$。令 $\varepsilon > 0$ 足够小。根据外正则性，存在一个开子集 $G \subset D \subset\subset \Omega$，使得 $K \subset G$ 且 $cap(G) < \varepsilon$。利用引理 7.8-(b)，我们推得 $\mathsf{c}_\theta(G) \leq A_0 \varepsilon^{\frac{1}{n}}$；其中 A_0 与 ε无关。令$\varepsilon \to 0^+$，则 $\mathsf{c}_\theta(G) \to \mathsf{c}_\theta(K)$，因此，$\mathsf{c}_\theta(K) = 0$。□

8. Exponential integrability

8.1. 体积与容量的比较。 本节将简化 [DMV23] 中指数可积性的一个定量版本。然后，利用这一结果，我们得到关于博雷尔集的勒贝格体积与其容量之间比较的若干等价表述。

令 $B_R := B(0, R)$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中半径为 $R > 0$ 的球。令 $u \in PSH(B_R)$。用 $W^*(B_R, u)$ 表示满足以下条件的函数 $f \in W^*(B_R)$ 的集合

$$df \wedge d^c f \leq dd^c u. \tag{8.1}$$

对于这一族中的光滑函数，我们有以下基本结果。

引理 8.1。 设 $f \in W^*(B_R, u) \cap C^\infty(B_R)$ 且 $u \in PSH \cap C^\infty(B_R)$。那么，对于满足 $|\zeta| = R$ 的 $\zeta \in \mathbb{C}^n$，函数 $\ell(\lambda) = f(\lambda\zeta)$ 属于 $W^* \cap C^\infty(\mathbb{D})$，其中 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘。此外，

$$\left|\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\right|^2 \leq \Delta_\lambda u(\lambda\zeta)/4.$$

证明。 这可由简单计算得到

$$\left|\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\right|^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\zeta^j\bar{\zeta}^k \leq \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\zeta^j\bar{\zeta}^k = \Delta_\lambda u(\lambda\zeta)/4,$$

其中，第二个不等式用到了 $df \wedge d^c f \leq dd^c u$ 这一事实。 □

推论 8.2. 设 $f(z)$ $u(z)$ 和 $\ell(\lambda)$ 如引理 *8.1* 中所述。进一步假设 $u(0) = -M$ 且 $M > 0$。记 $\mathbb{D}_r := \mathbb{D}(0, r)$ 为 $\mathbb{C}$ 中以 $0 < r < e^{-\frac{1}{2}}$ 为中心的圆盘。那么，

$$\|\nabla \ell\|^2_{L^2(\mathbb{D}_r)} \leq \int_{\mathbb{D}_r} \Delta_\lambda u(\lambda\zeta)/4 \leq \pi M.$$

证明。 第一个不等式由引理 8.1 得出。第二个不等式由次调和函数 $L(\lambda) = u(\lambda\zeta)/M$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的里斯表示公式得出，参见例如 Ho07 中命题 4.2 的证明。9]。□

下一个结果对于证明一致指数可积性至关重要。

引理 8.3。 设 $u \in PSH \cap C^\infty(B(0, 1))$ 和 $f \in W^*(u, B(0, 34)) \cap C^\infty(B(0, 34))$ 且 $f \leq 0$。定义

$$\kappa^2 = \int_{B(0,\frac{3}{4})} |f|^2 dx + \int_{B(0,\frac{3}{4})} dd^c u \wedge \omega^{n-1}.$$

假设 $u(0) = -M\kappa^2$。存在一致常数 $A > 0$ 和 $\alpha > 0$，它们独立于 f 和 u，使得

$$\int_{B(0,\frac{1}{2})} e^{\frac{\alpha|f|^2}{M\kappa^2}} dx \leq A.$$

证明。 考虑 $f := f/\kappa$ 和 $u := u/\kappa^2$后，我们可以假设

$$\kappa = 1 \quad \text{and} \quad u(0) = -M.$$

我们首先估计限制在每条复直线上的函数，其定义域为相应的圆盘。具体而言，对于 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 与 $|\zeta| = 3/4$，我们考虑

如引理 8.1 中的$\ell(\lambda) = f(\lambda\zeta)$。它在圆盘 $\mathbb{D}(0,r)$上的平均值 $0<r<1$由下式给出

$$(\ell)_r = \fint_{\mathbb{D}_r} \ell(\lambda) dV_2(\lambda).$$

由推论 8.2，对于 $0<r<e^{-\frac{1}{2}}$，我们有

$$\int_{\mathbb{D}_r} |\nabla \ell|^2 dV_2 \leq \pi M.$$

对函数 $\ell(\lambda)-(\ell)_r$应用 $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 中的 Moser-Trudinger 不等式（该函数的平均值为零，参见例如 [Le05]），可得

$$\int_{\mathbb{D}_r} e^{\alpha_0 |\ell(\lambda)-(\ell)_r|^2} dV_2(\lambda) \leq c_0. \tag{8.2}$$

其中 $\alpha_0 = 2/M$。

令 $0<\tau<\alpha_0$ 为稍后确定的量。接下来，对于 $\delta = (1+\sqrt{17})/4$，我们有

$$a^2 \leq (1+\delta)(a-b)^2 + \frac{b^2}{2} \quad \forall\, a,b \geq 0$$

由一个初等不等式可得。因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau|\ell(\lambda)|^2} dV_2 &\leq \int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau(1+\delta)|\ell-(\ell)_r|^2} e^{\frac{\tau}{2}|(\ell)_r|^2} dV_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r} e^{2\tau(1+\delta)|\ell-(\ell)_r|^2} dV_2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau|(\ell)_r|^2} dV_2,\end{aligned}$$

其中第二个不等式中的被积函数使用了柯西-施瓦茨不等式。由对称性，

$$\int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau|(\ell)_r|^2} dV_2 \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r} e^{2\tau(1+\delta)|\ell-(\ell)_r|^2} dV_2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau|\ell|^2} dV_2,$$

上述两个不等式意味着

$$\int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau|\ell(\lambda)|^2} dV_2 \leq \int_{\mathbb{D}_r} e^{2\tau(1+\delta)|\ell-(\ell)_r|^2} dV_2. \tag{8.3}$$

现在我们可以选择

$$\tau = \frac{\alpha_0}{2(1+\delta)} = \frac{4}{(5+\sqrt{17})M} =: \frac{\alpha}{M}. \tag{8.4}$$

结合 (8.2)、(8.3) 和 (8.4)，我们得到以下界

$$\int_{\mathbb{D}_r} e^{\tau|\ell(\lambda)|^2} dV_2 \leq c_0. \tag{8.5}$$

最后，我们使用极坐标估计 $B(0,\ R)$ 上的积分。

$$\begin{aligned}\int_{B_R} e^{\tau|f|^2} dV_{2n} &= \int_{|\zeta|=1}\int_{D_R} e^{\tau|f(\lambda\zeta)|^2} |\lambda|^{2n-2} dV_2(\lambda) dS(\zeta) \\ &\leq R^{2n-2}\int_{|\zeta|=1} c_0 R^2 dS(\zeta) \\ &\leq c_0 R^{2n}\sigma_{2n-1}.\end{aligned}$$

至此证明完成，因为我们可以取 $R = 1/2 < e^{-1/2}$。 □

我们现在可以陈述证明 [DMV23、定理 1.2] 的关键组成部分。借助引理 8.3，证明既不需要归纳论证，也不需要流的切片理论。

命题 8.4. 设 $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$ 为单位球。存在正的常数α和 A，使得对所有 $f \in W^*(B(0,1))$ 满足 $\|f\|_* \le 1$,

$$\int_{\bar{B}(0,\frac{1}{8})} e^{\alpha|f|^2} dx \le A.$$

证明。设 T为 $B := B(0,1)$ 中的正闭 $(1,1)$-流，实现 f 的 W^*-范数，特别是,

$$df \wedge d^c f \le T$$

and

$$\int_B |f|^2 dx + \int_B T \wedge \omega^{n-1} \le 1.$$

根据 Skoda 的结果 [Sk72] 以及附录中的引理 10.1（另见 [Vu20，引理 2.1]），我们可以选择一个拟次调和势 u，使其满足

$$T = dd^c u$$

使得 $u \le 0$ 属于 $B(0,3/4)$，并且

$$\int_{\bar{B}(0,\frac{1}{8})} |u| \, dx \le A_0. \tag{8.6}$$

对于某个一致常数 A_0。于是， $f \in W^*(B(0,3/4)\ u)$。

首先假设 f， $u \in C^\infty(B(0,\ 3/4))$。令 $-M := \sup_{\bar{B}(0,\frac{1}{8})} u < 0$。由于 u在 B中是次调和的， $u(a)$ 在某个 $a \in \partial B(0,\ 1/8)$ 处取到最大值。显然,

$$0 < M \le \fint_{B(0,\frac{1}{8})} |u| \, dx \le \frac{A_0}{|B(0,1/8)|} =: M_0. \tag{8.7}$$

因此， M 有一致上界 M_0。

考虑 $v(z) = u(z+a)$ 和 $g(z) = f(z+a)$。于是， $dg \wedge d^c g \le dd^c v$ 和$v(0) = -M$。由引理 8.3，存在一致常数 $\alpha_1 > 0$ 和 $A_1 > 0$，使得

$$\int_{\bar{B}(0,\frac{1}{4})} e^{\alpha_1 |g|^2/M} dx \le A_1.$$

由于 $B(0,\ 1/8) \subset B(a,\ 1/4)$,

$$\int_{\bar{B}(0,\frac{1}{8})} e^{\alpha_1 |f|^2/M} dx \le \int_{\bar{B}(a,\frac{1}{4})} e^{\alpha_1 |f|^2/M} dx = \int_{\bar{B}(0,\frac{1}{4})} e^{\alpha_1 |g|^2/M} dx \le A_1.$$

令 $\alpha = \alpha_1/M_0$，我们便在光滑情形下完成了证明。

现在我们去掉关于 f 和 u的光滑性假设。对较小的 $\varepsilon > 0$，记 $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$和 $u_\varepsilon = u * \eta_\varepsilon$。于是，在 $B_\varepsilon = B(0,\ 3/4 - \varepsilon)$ 上，它们满足

$$df_\varepsilon \wedge d^c f_\varepsilon \le dd^c u_\varepsilon \quad \text{on } B_\varepsilon.$$

此外，对于 $B' = B(0,5/8)$,

$$\int_{B'} |f_\varepsilon|^2 dx + \int_{B'} dd^c u_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} \le 1.$$

第一部分的论证表明 $\int_{\bar{B}(0,\frac{1}{8})} e^{\alpha|f_\varepsilon|^2} dx \le A_2$. 由于 $f_\varepsilon \to f$ 在 $L^1(B')$ 中，我们可以假设经过取子列后，收敛几乎处处成立。因此，结论由 Fatou 引理得出。□

推论 8.5. 设 $K \subset\subset \Omega$ 为紧子集。存在仅依赖于 K 与 Ω 的正的常数α、$A > 0$，使得

$$V_{2n}(\{|f| \ge s\} \cap K) \le A e^{-\alpha s^2}, \quad s > 0$$

对每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和 $\|f\|_* \le 1$。

证明. 由于 K 是紧集，存在由球 $B(a_i, r_i)$ 构成的有限覆盖，使得$B(a_i, 8r_i) \subset \Omega$。通过平移与伸缩，只需估计$\{|f| > s\} \cap B(0, 1/8)$ 的体积。由命题 8.4 容易得到

$$V_{2n}\left(\{|f| \ge s\} \cap \bar{B}(0,1/8)\right) \le \int_{\bar{B}(0,1/8)} e^{\alpha(|f|^2 - s^2)} dx \le A e^{-\alpha s^2}.$$

这就是所需的估计。□

注 8.6. 一致常数 α 和 A 可在命题 8.4 的证明中显式计算。推论中的常数也可以如此计算。不过，它们与最优值相差甚远，因此这里不予列出。求出单位球对应的最优常数将非常有趣。

我们现在可以刻画体积的这种衰减。

定理 *1.4* 的证明. 由推论 8.5 可知，证明可直接由下面这组等价命题得出。□

命题 8.7. 回忆一下，对于博雷尔集 E，有$\mathsf{c}(E) = \mathsf{c}(E,\Omega)$。设 $K \subset\subset \Omega$ 为一个紧子集。以下各命题彼此等价。

(a) 存在仅依赖于 K,Ω 的常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得对每个博雷尔集 $E \subset K$

$$V_{2n}(E) \le A_1 e^{-\alpha/\mathsf{c}(E)}.$$

(b) 存在一致常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，它们仅取决于 K、Ω，使得对于每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和 $f \le 0$,

$$V_{2n}(\{f < -1\} \cap K) \le A_1 e^{\frac{-\alpha}{\|f\|_*^2}}.$$

(c) 存在一致常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，它们仅取决于 K、Ω，使得对于范数 $\|f\|_* \le \kappa$ 的每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和 $f \le 0$，

$$V_{2n}(\{f < -s\} \cap K) \le A_1 e^{-\alpha s^2/\kappa^2}, \quad \forall s > 0.$$

(d) 存在一致常数 $A_1 > 0$ 和 $\alpha > 0$，它们仅取决于 K、Ω，使得对于满足 $\|f\|_* \le 1$ 的每个 $f \in W^*(\Omega)$ 和 $f \le 0$，

$$V_{2n}(\{f < -s\} \cap K) \le A_1 e^{-\alpha s^2}, \quad \forall s > 0.$$

证明。我们将证明 (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a)。我们先证明 (a) $\Rightarrow$ (b)。

令 f 为定理 5.10 中 f 的一个拟连续修正。由于 $f = \tilde{f}$ 几乎处处成立，我们有 $V_{2n}(f < -1) = V_{2n}(\tilde{f} < -1)$ 和 $\|f\|_* = \|\tilde{f}\|_*$。推论 5.11 给出 $\mathsf{c}(\{\tilde{f} < -1\} \cap K) \le \|\tilde{f}\|_*^2$。对 $E = \{\tilde{f} < -1\} \cap K$ 应用 (a)，得到

$$V_{2n}(\{f < -1\} \cap K) \le A_3 e^{-\alpha/\|f\|_*^2}.$$

为证明 (b) $\Rightarrow$(c)，我们可以考虑 $g = f/s$。于是， $\|g\|_*^2 = \|f\|_*^2/s^2$，证明便容易得到。接下来，考虑 $f := f/\kappa$，(c) $\Rightarrow$ (d) 显然成立。最后，我们证明 (d) $\Rightarrow$ (a)。由两边的外正则性，只需对开子集 E证明。令 $f = \Phi_E$ 为引理 6.1 中对应于 E 的极值函数。特别地，$f \in W^*$(Ω)，且在 E上几乎处处有 $f = -1$。注意到 c(E) $= \|f\|_{*}^2$。 对$g = f/\sqrt{\mathsf{c}(E)}$应用 (d)，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有

$$V_{2n}(E) \le V_{2n}(g < (-1+\varepsilon)/\sqrt{\mathsf{c}(E)}) \le A_2 e^{-\alpha(1-\varepsilon)^2/\mathsf{c}(E)}.$$

令 $\varepsilon \to 0$，我们便得到 (a) 的证明。 □

注 8.8. 就指数而言，命题 8.7 中的不等式是尖锐的。事实上，由第一个不等式 (a) 和引理 4.5 可知，对于博雷尔集 $E \subset\subset \Omega$,

$$V_{2n}(E) \le A_1 e^{-\alpha/\mathsf{c}(E)} \le A_1 e^{-\alpha/[cap(E,\Omega)]^{\frac{1}{n}}}.$$

由 [ACKPZ, 定理 A] 可知，体积与 Bedford-Taylor 容量之间不等式中的指数是尖锐的。因此，命题中不等式的指数也同样尖锐。由此，命题 8.4 和 [DMV23, 定理 1.2] 中的指数 2 对所有 $n \ge 1$ 都是最优的。

注 8.9. 设 Ω 是一个有界严格拟凸域，且 $K \subset\subset \Omega$ 是一个紧子集。设 $u_1, ..., u_n$ 是 Ω 中的 H¨older 连续拟次调和函数。由 [DKN22, 命题 2.4] 可知，Radon 测度

$$\mu = \mathbf{1}_K \, dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_n$$

是 W^*(Ω)-H¨older 连续的。这意味着存在正的常数 $c > 0$ 和$\alpha > 0$，使得对于 $f \in W^*$(Ω) 和 $\|f\|_* \le 1$,

$$\left| \int_\Omega f d\mu \right| \le c\|f\|_*^\alpha.$$

结合此不等式以及 [Ng18, 命题 2.9] 的证明中的论证，我们得到存在 $\alpha_1 > 0$ 和 $c_1 > 0$，使得对于 $f \in W^*$(Ω)、 $f \le 0$ 和$\|f\|_* \le 1$,

$$\mu(f < -s) \le c_1 e^{-\alpha_1 s^2}, \quad \forall s > 0.$$

换言之，命题 8.7 中的等价不等式对于一大类与 H¨older 连续拟次调和函数相关的 Monge-Amp¨ère 测度均成立。此结果也等价于 [DMV23, 定理 1.2] 的表述。

8.2. **Alexander-Taylor 型不等式**。 本节比较新的容量 c(·)与另一种通过极值函数定义的经典容量。

设 $B_R = B(0, R)$ 和 $B_r := B(0, r)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中以原点为中心、半径为 $0 < r < R$ 的球。设 $K \subset B_r$ 是一个紧集，则 Siciak-Zaharjuta 极值函数 U_K^* 由下式给出

$$U_K(z) = \sup\{v(z) \mid v \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n),\ v \le 0 \text{ on } K\}.$$

在此我们回顾

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}^n) = \{v \in PSH(\mathbb{C}^n) : \limsup_{z\to\infty}[v(z) - \log|z|] \le O(1)\} \tag{8.8}$$

记 $M_K := \sup_{B_R} U_K^*$。我们定义另一种容量如下:

$$T_R(K) = e^{-M_K} = e^{-\sup_{B_R} U_K^*}. \tag{8.9}$$

引理 8.10. 存在正的常数 A_r 和 A_R，分别依赖于 r、R，使得对于每个紧集 $K \subset B_r$,

$$\exp(-A_R\, \mathsf{c}(K, B_R)^{-1}) \le T_R(K) \le \exp(-A_r\, \mathsf{c}(K, B_R)^{-1/n}).$$

等价地,

$$\frac{1}{A_r}\frac{1}{M_K^n} \le \mathsf{c}(K, B_R) \le \frac{A_R}{M_K}. \tag{8.10}$$

证明. 由 [AT84 定理 2.1] 可知，Bedford-Taylor 容量满足 $cap(K, B_R) \ge 1/M_K^n$。由引理 4.7 中的事实可直接得到 (8.10) 中的第一个不等式：对于某个常数 $A(r)$，有 $cap(K, B_R) \le A(r)\mathsf{c}(K, B_R)$。为了证明第二个不等式，我们紧随 [De89 定理 11.1] 的思路。考虑 $B' := B(0, eR) \supset\supset B_R$。令 $M = \sup_{B_R} U_K$。由对数凸性，我们在 B' 上有 $U_K^* \le M + 1$。定义

$$u := \frac{U_K^* - M - 1}{M + 1}.$$

显然，$-1 \le u \le 0$ 在 B' 上，且 $u = -1$ 在 K上拟处处成立。根据容量的定义和引理 6.2,

$$\mathsf{c}(K, B_R) \le \|u\|^2_{W^*(B_R)}.$$

剩下只需估计 $\|u\|_*$ 在 B_R上的范数。

现在，存在 $z_0 \in B_R$使得 $U_K^*(z_0) = M$，因此 $u(z_0) = -1/(M + 1)$。由于 $u \le 0$ 在 B' 中，平均值不等式和 Harnack 不等式表明

$$u(z_0) \le A_1 \int_{B'} u\omega^n,$$

其中 $A_1 = A(R)$。这意味着

$$\|u\|_{L^1(B')} \le -\frac{u(z_0)}{A_1} \le \frac{A_2}{M}.$$

利用这一事实 $|u| \le 1$，我们得到

$$\int_{B_R} u^2\omega^n \le \|u\|_{L^1(B')} \le \frac{A_2}{M}.$$

设 χ 为一个截断函数，使得 $\chi \equiv 1$ 在 B_R 上成立，且 supp $\chi \subset B'$。那么,

$$\begin{aligned}\int_{B_R} dd^c(1+u)^2 \wedge \omega^{n-1} &\le \int_{B'} \chi dd^c(1+u)^2 \wedge \omega^{m-1} \\ &= \int_{B'} (1+u)^2 dd^c\chi \wedge \omega^{n-1} \\ &= \int_{B'} [2u + u^2] dd^c\chi \wedge \omega^{n-1}.\end{aligned}$$

括号中的第一项估计如下:

$$\int_{B'} 2udd^c\chi \wedge \omega^{n-1} \le A_0 \int_{B'} |u|\omega^n \le \frac{A_0 A_2}{M}.$$

第二项小于

$$A_0 \int_{B'} u^2\omega^n \le A_0 \int_{B'} |u|\omega^n \le \frac{A_0A_2}{M}.$$

因此，

$$\int_{B_R} dd^c(1+u)^2 \wedge \omega^{n-1} \le \frac{2A_0A_2}{M}.$$

由于 $du \wedge d^c u \le dd^c(1+u)^2,$，可得 $\mathsf{c}(K, B_R) \le 2(1+A_0)A_2/M.$ □

现在，我们可以得出结论：引言中容量之间不等式的指数是最优的。

备注 8.11 （定理 1.1 中最后一个结论的证明）。 Alexander-Taylor 不等式 [AT84] 表述为

$$\exp(-A_r/cap(K,\Omega)) \le T_R(K) \le \exp(-2\pi/[cap(K,\Omega)]^{\frac{1}{n}}),$$

其中两个不等式中的指数都是最优的（[AT84，备注 2]）。结合引理 4.7 中的 $cap(K) \le A_r\mathsf{c}(K)$ 以及引理 8.10 中的第一个不等式，我们可得

$$\exp(-A/cap(K,\Omega)) \le \exp(-A/\mathsf{c}(K,\Omega)) \le \exp(-2\pi/[cap(K,\Omega)]^{\frac{1}{n}})$$

具有尖锐指数。因此，引理 4.5 和引理 4.7 中的结果也具有尖锐指数。

9. Lebesgue points

本节研究 $W^*(\Omega)$ 中函数的勒贝格点集。我们简化了 [VV24 定理 1.1] 的证明。此外，我们证明了 $W^{1,2}(\Omega)$ 中 f 的精确表示是一个拟连续修正。

如果一点 x 满足以下条件，则称其为 $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ 的勒贝格点（相对于勒贝格测度）：

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f - f(x)|dy = 0 \tag{9.1}$$

由 (2.16) 可知，该极限几乎处处存在。因此，我们可以为 $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ 定义如下的精确代表。

$$f^\star(x) \equiv \begin{cases} \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f dy & \text{if this limit exits,} \\ = 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9.2}$$

注意，若 $f = g$ 属于 $L^1_{\rm loc}(\Omega)$，则对 Ω 中所有点 $x \in$ ，都有 $f^\star = g^\star$ 。此外，若$f \in W^*(\Omega)$ 且 $f = g$ 几乎处处成立，则 g 也属于 $W^*(\Omega)$。因此，要研究 f 的精细性质，我们需要关注其精确代表 $f^\star$。

借助第 8.2 节中的 Alexander-Taylor 型不等式，我们为给定的 $W^*(\Omega)$ 中的元素构造一个拟次调和函数次延拓。这一结果类似于多重位势论中的 El Mir 定理 [E79]。Vigny 和 Vu 最近得到了这样的次延拓 [VV24]。与 [VV24] 相比，我们的拟次调和函数次延拓的指数较小；不过，它属于勒隆类 (8.8)（在无穷远处具有最小增长），并且处处满足该不等式。下面给出的证明也相对简单一些。

定理 9.1. 设 $f \in W^*(B(0,1))$ 满足 $f \le -1$。假设 $\|f\|_* \le 1$。令$\varepsilon > 0$与 $0 < s < 1$。则存在 $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$，使得 $u \le -|f^\star|^{\frac{2}{n}-\varepsilon}$在$B(0,s)$ 上处处成立。

证明. 首先假设 f 连续。我们紧随 [De89 中 Demailly 的定理 11.4] 的证明。由于 $f \le -1$，可得 $\|f\|_* > 0$。对 $t \ge -1$，令 $G_t = \{z \in B(0,s) : f(z) < -t\}$，并令 $U_t^* \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ 为 G_t 的 Siciak-Zaharjuta 极值函数。由于 G_t 是开集，$U_t^* = 0$ 在 G_t 上。记 $M(t) = \sup_{B(0,1)} U_t^*$ 以及

$$u(z) = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^\infty t^{-1-\varepsilon}\,[U_t^* - M(t)]\,dt.$$

由引理 5.5 可知 $\mathsf{c}(G_t) \le \|f\|_*^2/t^2$. 因此，根据 Alexander-Taylor 型不等式 (8.10),

$$M(t) \ge \frac{a_1}{[\mathsf{c}(G_t)]^{1/n}} \ge a_1 t^{2/n},$$

[2]其中，在第二个不等式中我们用到了这一事实：$a_1/\|f\|_*^n \ge a_1 > 0$。这里，$a_1 > 0$可能是一个较小的数。由于 $U_t^* - M(t) \le 0$在 $B(0,1)$ 上成立，由对数凸性可得 $U_t^* - M(t) \le \log_+ |z|$。因此,

$$u(z) \le \log_+ |z|.$$

现在，对于 $z \in B(0,s) \cap G_t$，我们有 $U_t^* = 0$。因此,

$$u(z) \le -\frac{1}{\varepsilon}\int_1^{|f(z)|} t^{-1-\varepsilon} M(t)dt \le -\frac{a_1}{\varepsilon}\int_1^{|f(z)|} t^{-1-\varepsilon+2/n}dt.$$

直接计算最后一个积分可得

$$u(z) \le -\frac{a_1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{n} - \varepsilon\right)|f(z)|^{\frac{2}{n}-\varepsilon} + \frac{a_1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{n} - \varepsilon\right).$$

因此，必要时我们可以从一个较小的 ε 值开始，并从 u 中减去一个常数，从而得到

$$u \le -|f|^{\frac{2}{n}-\varepsilon} \quad \text{on } B(0,s).$$

还需验证 u 并非恒等于 $-\infty$。再次利用对数凸性，可得

$$\sup_{\bar{B}(0,1/2)} U_t^* \ge M(t) - \log 2.$$

因此，存在 $z_0 \in S \in (0,1/2)$，使得 $U_t^*(z_0) - M(t) \ge -\log 2$。Harnack 不等式表明

$$\frac{1-1/4}{(1+1/2)^{2n}}\int_{\partial B(0,1)} (U_t^* - M(t))d\sigma(z) \ge U_t^*(z_0) - M(t) \ge -\log 2.$$

对 t 关于此式积分，得到

$$\int_{\partial B(0,1)} u(z)d\sigma(z \ge -\frac{4}{3}(3/2)^{2n}\log 2.$$

现在，假设一般而言，$f \in W^*(B(0,1))$。我们考虑在（2.14）中定义的连续逼近 $f_r(x) = (f)_{x,\,r}$。取 $r > 0$ 足够小，使得 $B(0,s) \subset\subset B(0,1-r)$。上一步给出了满足 $u_r \le -|f_r|^{\frac{1}{n}-\varepsilon}$ 的 $u_r \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$，其定义在 $B(0,s)$ 上。在 $B(0,1)$ 上定义函数

$$u = \left(\limsup_{r\to 0} u_r\right)^*.$$

根据勒贝格微分定理，存在一个集合 $E \subset B$，其 $|E| = 0$满足 $\lim_{r\to 0}(f)_{r,\ x} = f^\star(x)$。因此，对于 $x \in B\setminus E$，有 $u(x) \le -|f^\star(x)|^{\frac{1}{n}-\varepsilon}$。另一方面，若 $x \in E$，则根据定义有 $u(x) \le 0 = f^\star(x)$。□

我们之后需要对定理 5.10 中的拟连续修正作出一个小幅改进。

引理 9.2. 设 f 是 $f \in W^*(\Omega)$的拟连续修正。那么，f拟处处多精细连续。这意味着存在一个多极集F，使得 f 在 $\Omega \setminus F$上多精细连续。

证明。由 Fuglede [Fg65，定理 3]（另见 [Br71，定理 IV，3.]）可知，存在博雷尔子集 $F \subset \Omega$，使得 $\mathrm{c}(F,\Omega) = 0$，并且 f 在 $\Omega \setminus F$ 上关于容量 $\mathrm{c}(\cdot)$ 多精细连续。根据推论 6.6，F是多极集。□

现在我们陈述本节关于勒贝格点的主要结果，该结果归功于 Vigny 和 Vu [VV24]。在通常的索伯列夫空间中，这类集合性质相对于相应的 Sobole夫泛函容量成立（例如参见 [EG92，第 4.8] 节）。现在，我们将这些性质针对复 Sobolev 空间中的函数，并关于 $\mathrm{c}(\cdot)$ 加以陈述。[EG92] 中的关键工具是极大函数，但在新的空间中已无法使用。因此，我们在这里给出的证明截然不同。我们陈述对 [VV24，定理 1.1] 的略微改进版本，其证明遵循 [VV24] 中的策略，但更为简洁。

定理 9.3. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 是一个开子集，且 $f \in W^*(\Omega)$。存在一个博雷尔子集 $E \subset \Omega$，使得 $\mathrm{c}(E) = 0$，并且满足

(i) 对每个 $x \in \Omega \setminus E$,

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f dy = f^\star(x).$$

(ii) 此外，对于每个 $x \in \Omega \setminus E$,

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f - f^\star(x)|^2 dy = 0.$$

因此，精确代表 $f^\star$ 是拟连续的。

证明。我们注意到，(i) 和 (ii) 是局部性质。事实上，假设对于每个相对紧的开子集 $\Omega' \subset\subset \Omega$，都存在一个博雷尔集 E，使得 $\mathrm{c}(E,\ \Omega) = 0$，并且 (i) 和 (ii) 在 $x \in \Omega' \setminus E$ 上成立。取一个穷竭序列 $\Omega_j \subset\subset \Omega$ 和 $\Omega = \cup_j \Omega j$，以及序列 $E_j \subset \Omega$，使得其 $\mathrm{c}(E_j,\ \Omega) = 0$，并且 (i) 和 (ii) 在 $\Omega_j \setminus E_j$ 上成立。根据容量的次可加性 (4.1)-(c)，我们令

$$E = \cup_j E_j.$$

于是，(i) 和 (ii) 将在 $\Omega \setminus E$ 上成立，其中 $\mathrm{c}(E,\ \Omega) = 0$。

接下来，由于 $cap(\cdot,\ \Omega)$ 支配 $\mathrm{c}(\cdot)$（引理 4.5），因此只需找到 E 使得$cap(E,\ \Omega) = 0$。利用容量的次可加性和局部可比性的众所周知性质，我们可以假设 $\Omega = B(0,\ 1)$，并且 f 在$B(0,\ 1)$ 的某个邻域内定义。根据定理 9.1，存在 $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ 使得

$$u \le -|f^\star|^{\frac{1}{2n}} \text{ on } \bar{B}(0,1). \tag{9.3}$$

Put

$$P := \{z \in B(0,1) : u = -\infty\}. \tag{9.4}$$

这是我们需要构造的集合 E 的一部分。以下结果类似于 [VV24，引理 3.1、3.2]。

引理 9.4。设 $x \in B(0,1) \setminus P$，其中 P 在 (9.4) 中定义。设 u 为 (9.3) 中的拟次调和函数次延拓。假设 $v \in PSH(B(0,1))$，使得 $v(x) > 0$。那么，

$$\lim_{r\to 0} \frac{|B(x,r) \cap \{v \le 0\}|}{|B(x,r)|} = 0. \tag{a}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\{v\le 0\}} |u|^{2n} dy = 0. \tag{b}$$

证明。容易看出，第一个等式等价于

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\{v>0\}} v(x) dy = v(x).$$

为此，设 $\varepsilon > 0$。由 v 的上半连续性，存在 $r_\varepsilon > 0$ 使得$B(x, r_\varepsilon) \subset \{v < v(x) + \varepsilon\}$。因此，对于 $0 < r < r_\varepsilon$,

$$\int_{B(x,r)\cap\{v>0\}} (v-\varepsilon) dy \le \int_{B(x,r)\cap\{v>0\}} v(x) dy.$$

这意味着

$$⨍_{B(x,r)} v dy - \varepsilon \le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\{v>0\}} v(x) dy.$$

结合 v 的次调和性，我们得到

$$v(x) - \varepsilon \le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\{v>0\}} v(x) dy \le v(x).$$

令 $r \to 0$，再令 $\varepsilon \to 0$，即可得到所需的恒等式。

接下来，我们证明第二个恒等式。令 $0 < \varepsilon < -u(x)$。由于 u 是上半连续的，且 $u(x) > -\infty$，因此对于某个足够小的$r_\varepsilon > 0$，有 $B(x, r_\varepsilon) \subset \{u < u(x) + \varepsilon\}$。因此，对于 $0 < r < r_\varepsilon$,

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\{v\le 0\}} |u|^{2n} dy \le \frac{(|u(x)|+\varepsilon)^{2n}}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\{v\le 0\}} dy$$

由第一个恒等式可知，当 $r \to 0$ 时，右侧趋于零。 □

现在，对于证明的其余部分，我们紧接着 [VV24] 进行。令 f 为 f的一个拟连续修正。由引理 9.2，存在一个多极集 F，使得$\widetilde{f}$ 在 $B(0,1) \setminus F$中多精细连续。定义

$$E := P \cup F. \tag{9.5}$$

我们将证明，多极集 E 满足该定理的要求。事实上，令 $x \in B(0,1) \setminus E$。我们断言

$$f^\star(x) = \widetilde{f}(x), \tag{9.6}$$

或者等价地

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} f dy = \lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} \widetilde{f} dy = \widetilde{f}(x).$$

~事实上，第一个等式由以下事实得出： $f = f$ 几乎处处成立于 $B(0,\ 1)$。为证明第二个等式，我们使用 Cartan 定理，该定理联系了细极限与通常极限（[BT87，定理 2.4]和 [Br71，定理 III，2.]）。为此，设 V 是 x的一个多重细开邻域。由 [BT87，定理 2.3]可知，我们可以假设

$$V = \{|z - x| < a\} \cap \{v > 0\}$$

对于某个常数 $a > 0$， v 在 $B(0,1)$ 上是拟次调和的，且 $v(x) > 0$。于是，Cartan 定理表述为

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in V}} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(x).$$

~根据勒贝格定理， $f^\star = f$ 几乎处处成立，且 $|f^\star| \leq |u|^{2n}$ 在 (9.3) 中成立。因此， $|f| \leq |u|^{2n}$ 几乎处处成立。于是，引理 9.4-(b) 推出

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \cap \{v \leq 0\}} \widetilde{f} dy = 0.$$

结合引理 9.4-(a)，可得

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \widetilde{f} dy &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r) \cap \{v > 0\}|} \int_{B(x,r) \cap \{v > 0\}} \widetilde{f} dy \\ &= \widetilde{f}(x), \end{aligned}$$

因此，(9.6) 得证。

最后，我们有

$$\begin{aligned} \fint_{B(x,r)} |f - f^\star(x)|\, dy &= \fint_{B(x,r)} |\widetilde{f} - f^\star(x)|\, dy \\ &= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \cap V} |\widetilde{f} - f^\star(x)|\, dy \\ &\quad + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \setminus V} |\widetilde{f} - f^\star(x)|\, dy. \end{aligned}$$

右侧的第一个积分随着 $r \to 0$ 趋于零，这是由 x 处 f 的细连续性~ ~以及 $f(x) = f^\star(x)$ 所致。第二个积分有界于

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \setminus V} (|u|^{2n} + |u(x)|^{2n}) dy$$

根据引理 9.4，该式随着 $r \to 0$ 趋于零。至此，(i) 得证。

接下来，为证明 (ii)，我们注意到，对于 $x \in B(0,\ 1) \setminus E$，

$$\begin{aligned} &\lim_{r \to 0} \left(\fint_{B(x,r)} |f - f^\star(x)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lim_{r \to 0} |(f)_{x,r} - f^\star(x)| + \lim_{r \to 0} \left(\fint_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

这里回顾一下， $f_r(x) = (f)_{x,\ r} = \fint_{B(x,\ r)} f dy$。

最后，我们证明 $f^\star$ 的拟连续性。根据注 5.9，具有 $r_j = 1/j$ 的序列 $\{f_{r_j}\}_{r_j}$ 是容量意义下的柯西序列。存在一个子列逐点收敛到拟连续函数 g。此外，给定

$\varepsilon > 0$，存在开集 $U \subset \Omega$，使得 c(U) $< \varepsilon$ （定理 5.10），且该子列在 $\Omega \setminus U$ 上一致收敛到 g。由 (i)，由于 $f_{r_j}(x) \to f^\star(x)$ 在 $\Omega \setminus E$ 上成立，因此可得 $g(x) = f^\star(x)$ 在 $\Omega \setminus E$ 上成立。换言之， $f^\star$ 是拟连续的。□

10. Appendix

本节将详细介绍 Skoda [Sk72] 的以下结果，该结果在命题 8.4 的证明中用到。设 T 为单位球 B(0,1)中的正闭 (1,1)-流。定义 $\beta = \sqrt{-1}\partial\bar\partial|z|^2$，并假设

$$\int_{B(0,1)} T \wedge \beta^{n-1} \le 1.$$

引理 10.1。 存在一个拟次调和势 $U(z) \le 0$，属于 $B(0, 3/4)$，使得

$$dd^c U = T$$

此外，还存在与 U 无关（且可显式计算）的一致常数 $c_0, A > 0$，满足

$$\int_{|z|\le \frac{1}{8}} \exp\left[-\frac{U(z)}{c_0}\right] dz \le A.$$

证明。引理中的第一条结论是经典结果，可通过多种方法得到。然而，在 Skoda [Sk72 第 7] 节所给出的构造中，需要仔细考察一致指数可积性这一额外性质。通过向 U 加上一个严格拟 plurisubharmonic 函数 $\rho(z) = |z|^2 - 1$，我们可以假设

$$T \ge \beta \quad \text{in } B(0,1). \tag{10.1}$$

设 $0 \le \eta \le 1$ 是一个截断函数，使得 $\eta = 1$ 在 B(0, 3/4) 上成立，且 supp $\eta \subset B$(0,1)。为简单起见，我们沿用 [Sk72] 中的记号，记作 $p = n - 1$，并定义

$$U(z) = -\int |z - x|^{-2p} \eta(x)\, T(x) \wedge \beta^p.$$

根据 [Sk72 第 3] 节或 [Ho07 引理 4.3.4] 中的计算，我们有

$$T(z) = \sqrt{-1}\partial\bar\partial U(z) \quad \text{on } B(0, 3/4).$$

接下来，我们验证 $U(z)$ 在 B(0, 1/8) 上的一致指数可积性。为此，我们记 $\alpha = \sqrt{-1}\partial\bar\partial \log|z|^2$，并将 $E(z)$ 记为 $= \log|z|^2$。Sk72 式 (7.13) [] 写作

$$\begin{aligned} U(z) = p &\int E(x - z)\alpha^p \wedge \eta(x)T(x) \\ &- \int \sqrt{-1}\, \bar\partial_x E(x - z) \wedge \alpha^{p-1} \wedge \partial_x \eta \wedge T \\ &- p \int \sqrt{-1} E\, \bar\partial_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \partial_x \eta \wedge T. \end{aligned}$$

若 $z \in B$(0, 1/4)，则最后两个积分在 $\eta = 1$ on B(0, 3/4) 上是光滑函数。更确切地说，

$$|\partial_x E(x - z)| \le \frac{A_n}{|x - z|}, \quad |\partial_x \bar\partial_x E(x - z)| \le \frac{A_n}{|x - z|^2}.$$

因此，对于 $z \in B(0,\ 1/4)$，这两个积分均由一个绝对常数 A_0 一致有界。接下来需要估计

$$U_3(z) = \frac{p}{2^p\pi^p}\int_{\mathbb{C}^n} \log|z-x|^2\alpha^p(z-x)\wedge\eta(x)T(x).$$

我们仍可将 $U_3(z)$替换为

$$U_4(z) = \frac{p}{2^p\pi^p}\int_{|x|\le R} \log|z-x|^2\alpha^p(z-x)\wedge T(x)$$

对于 $z \in B(0,1/4)$，以及 $1/2 \le R < 3/4$，因为它们的差在 $B(0,1/4)$上是一致有界的。令

$$\mu(z) = \int_{|x|\le R}\alpha^p(z-x)\wedge T(x) \quad \text{and} \quad \kappa(z) = \frac{\mu(z)}{2^p\pi^p}\frac{n}{c}. \tag{10.2}$$

我们改写为

$$-\frac{n}{pc}U_4(z) = \int_{|x|\le R}\log[|z-x|^{-\kappa(z)}]\frac{\alpha^p(z-x)\wedge T(x)}{\mu(z)}.$$

利用詹森不等式和对数函数的凹性，我们得到

$$-\frac{n}{pc}U_4(z) \le \log\left[\int_{|x|\le R}|z-x|^{-2\kappa(z)}\frac{\alpha^p(z-x)\wedge T(x)}{\mu(z)}\right], \tag{10.3}$$

因此，对于 $r = 1/8$ 和 $R = 1/2$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{|z|\le\frac{1}{8}}&\exp\left[-\frac{n}{pc}U_4(z)\right]dz\\ &\le \iint_{|z|\le\frac{1}{8},|x|\le\frac{1}{2}}|z-x|^{-2\kappa(z)}\frac{\alpha^p(z-x)\wedge T(x)}{\mu(z)}.\end{aligned} \tag{10.4}$$

我们需要从上下两方面估计 $\mu(z)$ 和 $\kappa(z)$。回忆一下，迹测度和射影测度定义如下:

$$\sigma = \frac{1}{2^p p!}T(x)\wedge\beta^p, \quad \nu = \frac{1}{2^p\pi^p}T(x)\wedge\alpha^p.$$

定义函数

$$\sigma(r) = \int_{|x|<r} d\sigma(x).$$

勒隆的一项重要结果指出，$r \mapsto \sigma(B(z,\ r))/r^{2p}$ 在 $[0,1]$ 中单调递增（例如参见 Demailly [De12，第 III 章，推论 5.8.]）。因此，极限

$$\nu(z) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{2p}}\int_{|x-z|<r}T(x)\wedge\beta^p = \lim_{r\to 0}\frac{\sigma(B(z,r)}{r^{2p}\pi^p/p!}$$

存在，称为 T 在 z处的勒隆数。根据 [Sk72，公式 (1.17)]可得

$$\nu(z) + \int_{0<|x-z|<r}T(x)\wedge\alpha^{n-1}(x-z) = \frac{1}{2^p r^p}\int_{|x-z|<r}T(x)\wedge\beta^{n-1}. \tag{10.5}$$

这就得到了 $|z| \le r$,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-p}\mu(z) &\le (2\pi)^{-p}\int_{|z-x|\le r+R} \alpha^p(z-x)\wedge T(x)\\ &\le \pi^{-p}p!(r+R)^{-2p}\int_{|x-z|\le r+R} d\sigma(x)\\ &\le \pi^{-p}p!(r+R)^{-2p}\int_{|x|\le 2r+R} d\sigma(x).\end{aligned}$$

换言之,

$$(2\pi)^{-p}\mu(z) \le \left(\frac{2r+R}{r+R}\right)^{2p}\frac{\sigma(2r+R)}{(2r+R)^{2p}}.$$

因此，对于$|z| \le r = \frac{1}{8}$和 $R = \frac{1}{2}$，我们得到：

$$(2\pi)^{-p}\mu(z) \le 2^{2p}\sigma(3/4) =: \frac{c(1-\varepsilon)}{n}, \tag{10.6}$$

其中 $0 < \varepsilon < 1/2$ 是固定的。

接下来，我们从下方估计 $\mu(z)$。若 $\nu(z) = 0$，则由 (10.5) 可知，对 $|z| \le r$,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-p}\int_{|z-x|\le R-r} \alpha^p(z-x)\wedge T(x) &= \pi^{-p}p!(R-r)^{-2p}\int_{|x-z|\le R-r} d\sigma(x)\\ &\ge \pi^{-p}p!(R-r)^{-2p}\int_{|x|\le R-2r} d\sigma(x)\\ &= (2\pi)^{-p}(R-r)^{-2p}\int_{|x|\le R-2r} T(x)\wedge\beta^p.\end{aligned}$$

代入 $r = \frac{1}{8}$ 与 $R = \frac{1}{2}$，我们得到，对 $|z| \le \frac{1}{8}$ 以及 $\nu(z) = 0$,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-p}\mu(z) &\ge (2\pi)^{-p}(3/8)^{-2p}\int_{|x|\le\frac{1}{4}} \beta^n\\ &= (2\pi)^{-p}(3/8)^{-2p}2^n\pi^n(1/4)^n\\ &=: c_1.\end{aligned} \tag{10.7}$$

由 [Sk72 引理 7.1]，集合 $\{z:\ \nu(z) > 0\}$ 的测度为零，因为 $U(z)$ 是局部可积的（或直接由 Siu 定理 [Si74]）。因此，(10.7) 几乎处处成立。

结合 (10.4)、(10.6) 与 (10.7)，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{|z|\le\frac{1}{8}} \exp\left[-\frac{n}{pc}U_4(z)\right]dz\\ &\le \frac{1}{(2\pi)^p c_1}\iint_{|z|\le\frac{1}{8},|x|\le\frac{1}{2}} |z-x|^{-2(n-p-\varepsilon)}\alpha^p(z-x)\wedge T(x).\end{aligned}$$

由于 $\alpha^p(z-x)$ 的系数受控于 $A(n,p)|z-x|^{-2p}$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{|z|\le\frac{1}{8}} \exp\left[-\frac{n}{pc}U_4(z)\right]dz &\le \frac{A(n,p)}{(2\pi)^p c_1}\iint_{|z|\le\frac{1}{8},|x|\le\frac{1}{2}} |z-x|^{-2n+2\varepsilon}d\sigma(x)dz\\ &= A_1.\end{aligned}$$

证明由 $c_0 = pc/n$ 完成。 □

References

[AH96] D. R. Adams 和 L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, 《数学科学基础丛书》第314卷，施普林格，柏林，1996年。[ACKPZ
] *Partial pluricomplex energy* P. ̊Ahag、*and integrability exponents of plurisubharmonic functions* **222** 2009 2036 U. Cegrell、S. Kolodziej、H.H. Pham、A. Zeriahi, ,《高级数学》（），- 2058。[AT84] H. J. Alexander 和 B. A. Taylor, *Comparison of two capacities in* C^n, 《数学杂志》186 (1984)，第3期，407–417。[BT82] E. Bedford、B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, 《数学学报》149 (1982)，1-40。[BT87] E. Bedford 和 B. A. Taylor, *Fine topology, Šilov boundary, and* $(dd^c)^n$. 《泛函分析杂志》72 (1987)，第2期，225–251。[BiD23] F. Bianchi 和 T.-C. Dinh, *Equilibrium states of endomorphisms of* $\mathbb{P}^k$ *I: existence and properties* 9 **172** 2023 164 201 , 《纯粹与应用数学杂志》（） （），–。[BW24] S. Biard、J. Wu, *Equivalence between VMO functions and Zero Lelong numbers functions*, arXiv:2403.03568。[Bl98] Z. B-locki, *The complex Monge-Ampère operator in pluripotential theory*, 讲义，1997年。https://gamma.im.uj.edu.pl/ blocki/publ/ln/wykl.pdf [Br71] M. Brelot, *On topologies and boundaries in potential theory*, 1966年授课内容的扩充版，《数学讲义》第175卷，施普林格，柏林-纽约，1971年。[Bz11] H. R. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext丛书，施普林格，纽约，2011年。[Ce04] U. Cegrell, *The general definition of the complex Monge-Ampère operator*, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》54 (2004)，159-179。[CW05] U. Cegrell 和 J. Wiklund, *A Monge-Ampère norm for delta-plurisubharmonic functions*, 《斯堪的纳维亚数学杂志》97 (2005)，第2期，201–216；[De89] J.-P. Demailly, *Potential theory in several complex variables*, 在CIMPA于尼斯举办的1989年7月复分析暑期学校课程中讲授。[De12] J.-P. Demailly, 复分析与微分几何。（2012），https://www- fourier.univ-grenoble-alpes.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf [DKW21] T.-C. Dinh、L. Kaufmann 和 H. Wu, *Products of random matrices: a dynamical point of view* **17** 2021 3, 933 969 , 《纯粹与应用数学季刊》（），第–期。[DKN22] T.-C. Dinh、S. Ko
 The complex Sobolev space and Hölder lodziej 和 *continuous solutions to Monge-Ampère equations* **54** 2022 N. C. Nguyen, ,《伦敦数学会通报》（），第2期，772–790。[DMV23] T.-C. Dinh、G. Marinescu 和 D.-V. Vu，Moser-Trudinger不等式与复Monge-Amp`ere方程，《比萨高等师范学院科学年刊》（5）24 (2023)，第2期，927–954。[DS06] T.-C. Dinh、N. Sibony, *Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps* **59** 2006 754 768 , 《纯粹与应用数学通讯》（）–。[DoN25] T.-D. Do、D.-B. Nguyen, *Higher complex Sobolev spaces on complex manifolds*, arXiv:2405.06385，即将在《印第安纳大学数学杂志》发表。[DoNV25] T.-D Do、D.-B. Nguyen、D.-V. Vu, *Non-collapsing volume estimate for local Kähler metrics in big cohomology classes* 2502 16136 , arXiv: . . [LL] E. H. Lieb 和 M. Loss, *Analysis*，第二版，《数学研究生丛书》第14卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。[E79] H. El Mir。 *Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires*, S´《P. Lelong - H. Skoda 研讨会（分析）1978/79》，《数学讲义》第822号，施普林格出版社（1979），221–237。[EG92] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, 《高等数学研究丛书》，CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，1992年。[Fd99] G. B. Folland, *Real analysis*，第二版，《纯粹与应用数学》（纽约）丛书，威立-因特科学出版物，，威立，纽约，1999年。[Fg65] B. Fuglede, *Quasi topology and fine topology*, S´Brelot-Choquet-Deny研讨会。位势论，第10卷，第2期（1965-1966），报告第12号，第1-14页。

[FO84] M. Fukushima 和 M. Okada, *On conformal martingale diffusions and pluripolar sets*《泛函分析杂志》55 (1984)，第 3 期，377–388。[FO87] M. Fukushima 和 M. Okada，关于多重次调和函数的狄利克雷型，《数学学报》159 (1987)，第 3–4 期，171–213。[FOT94] M. Fukushima、Y. Oshima 和 M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes* 19, 1994，

德格鲁伊特数学研究丛书，德格鲁伊特，柏林，.[GT] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*，1998 年版重印本，数学经典丛书，施普林格，柏林，2001。[Ho07] L. V. H¨ormander, *Notions of convexity*，现代 Birkhäuser 经典丛书，Birkhäuser 波士顿，波士顿，马萨诸塞州，2007。[KLV21] J. Kinnunen、J. Lehrb¨ack 和 A. V. Vahakangas, *Maximal function methods for Sobolev spaces* 257，数学调查与专著丛书，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，[2021] ©2021。[K03] S. Kołodziej, *The Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*,《印第安纳大学数学杂志》52 (3) (2003) 667–686。[K05] S. Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory*，美国数学会回忆录178 (2005)，第64页。[Le05] M. Leckband, *Moser's inequality on the ball B^n for functions with mean value zero*,《纯粹与应用数学通讯》58 (2005)，第6期，789–798。[Ng18] N. C. Nguyen, *On the Hölder continuous subsolution problem for the complex Monge-Ampère equation* **57** 2018 1, ，《变分法与偏微分方程》（），第 8 号论文，15 页。[Ok82] M. Okada, *Espaces de Dirichlet généraux en analyse complexe*,《泛函分析杂志》46 (1982)，第3期，396–410。[Si74] Y. T. Siu, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents* **27** 1974 53 156 ，《数学创刊》（），–。[Sk72] H. Skoda, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$,《法国数学会通报》100 (1972)，353–408。[Vig07] G. Vigny, *Dirichlet-like space and capacity in complex analysis in several variables*,《泛函分析杂志》252 (2007)，第1期，247–277。[Vig17] G. Vigny，关于一般正则双有理映射的相关性指数衰减 $\mathbb{P}^k$,《数学年刊》362 (2015)，第3–4期，1033–1054。[VV24] G. Vigny 和 D.-V. Vu, *Lebesgue points of functions in the complex Sobolev space*,《国际数学杂志》35 (2024)，第5期，论文编号2450014，22页。[Vu20] D.-V. Vu, *Equilibrium measures of meromorphic self-maps on non-Kähler manifolds*,《美国数学会汇刊》373 (2020)，第3期，2229–2250。[Vu24] D.-V. Vu, *Continuity of functions in complex Sobolev spaces*,《纯粹与应用数学季刊》20 (2024)，第6期，2769–2780。[Vu26] Vu26 D.-V. Vu, *Uniform Diameter and Non-collapsing Estimates for Kähler Metrics*,《几何分析杂志》36，75 (2026)。[WZ24] J. Wang 和 B. Zhou, *Trace inequalities isocapacitary inequalities and regularity of the complex Hessian equations* **67** 2024 3, 557 576 ，《中国科学：数学》（），第–期。[Yo80] K. Yosida, *Functional analysis*，第六版（1980）重印本，数学经典丛书，施普林格，柏林，1995。

Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon34141, South Korea*Email address*: cuongnn@kaist.ac.kr