arXiv:2602.13973v1 [math.GT] 15 Feb 2026

四页指标与带长的线性上界

Hyungkee Yoo

Abstract. 我们将纽结或链环的四页指标引入为一种表示不变量，它源于四页开书分解中的嵌入。利用约化非分裂图的棋盘图的生成树，我们构造出一个由单个状态圆构成的Kauffman状态。相应的底层四价平面图的欧拉回路确定一条与每条边恰好相交一次的绑定圆，从而得到一个至多含有 $2c(K)$条弧的四页表示。因此

$$\alpha_4(K) \leq 2c(K),$$

在非交替情形下取严格不等式。

我们进一步证明，带长以四页指标为上界，从而得到线性上界

$$\mathrm{Rib}(K) \leq 2c(K).$$

这改进了此前已知的带长的一般线性上界，并提供了一种估计带长的图示方法。

1. Introduction

带长由考夫曼 [14], 提出，用平坦折叠带实现来衡量纽结或链环的几何复杂度。理解其随交叉数增长的规律，一直是几何纽结理论中的核心问题。

折叠带结是将一条细长的矩形带折叠成平面构形而得到的，其核心是一幅表示给定纽结型的分段线性图，如图 1 所示。这种构造为纽结和链环提供了平面带实现。

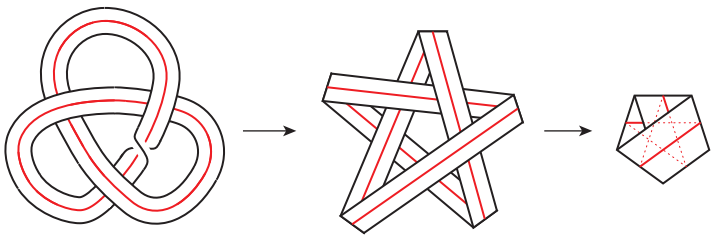


Figure 1. 三叶结的折叠带结

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57K10.*Key words and phrases.* 带长、折叠带结、纽结图、四页指标。

由于平凡结可以有长度任意小的折叠带实现，因此带长通过下确界来定义。以下形式化定义见 [6, 7]。

定义 1. 设 K 为一个纽结。宽度为 $w > 0$ 的折叠带结 K_w 满足：

(1) 带是平坦的，其折痕线彼此不相交。(2) K_w 的核心是有限条直线线段的并集，并带有表示 K 的纽结型的交叉信息。

定义 2. 设 K 为一个纽结或链环，并设 $w > 0$。则

$$\mathrm{Rib}(K) = \inf_{K'_w \in [K]_w} \frac{\mathrm{Len}(K'_w)}{w}$$

称为 K 的带长，其中 $[K]_w$ 表示表示 K 的宽度为 w 的折叠带结集合。

纽结或链环图是将纽结或链环投影到配备上下交叉信息的平面上的正则投影，而交叉数 $c(K)$ 是表示 K 的所有图示中的最小交叉数。Tian [24] 建立了带长的二次上界，Denne [5] 将其改进为阶为 $c(K)^{3/2}$ 的估计。后续研究证实，对于各种纽结和链环族，其增长是线性的 [6, 15, 16]。

Diao 和 Kusner 猜想，带长具有如下形式的渐近界

$$c_1 c(K)^{\alpha} \leq \mathrm{Rib}(K) \leq c_2 c(K)^{\beta}.$$

他们预期 $\alpha = 1/2$ 和 $\beta = 1$。最近，Denne 和 Pat- terson [8] 证明了该问题的下界为常数。特别地，Kim、No 和 Yoo [17] 证明，对于任意纽结或链环 K，

$$\mathrm{Rib}(K) \leq \frac{5}{2} c(K) + 1,$$

由此确立了一般的线性上界。

我们通过将带长与源自 $\mathbb{R}^3$ 的开书分解的表示不变量联系起来，来研究这一问题。纽结或链环 K 的弧表示，是将 K 嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的开书分解的有限多个页中，并使每一页恰好包含一条真嵌入弧。所需页数的最小值称为弧指标 $\alpha(K)$ [2]。K 的三页表示，是将 K 嵌入开书分解的三页中，其中每页可以包含多条两两不相交的弧。此类表示中弧的最小数量称为三页指标 $\alpha_3(K)$ [12]。

基于这些概念，我们将四页指标 $\alpha_4(K)$ 定义为 K 的四页表示中弧的最小数目，如图2所示。$\alpha_4(K)$ 的精确定义与基本性质见第2节。

本文旨在提出一种新的图示方法，从而获得更精确的线性估计。我们的方法建立在纽结图、Kauffman状态与表示不变量之间的结构性联系之上。从一个非分裂链环图出发，我们关联一个适当的Kauffman状态，并由此自然得到一个四页表示。

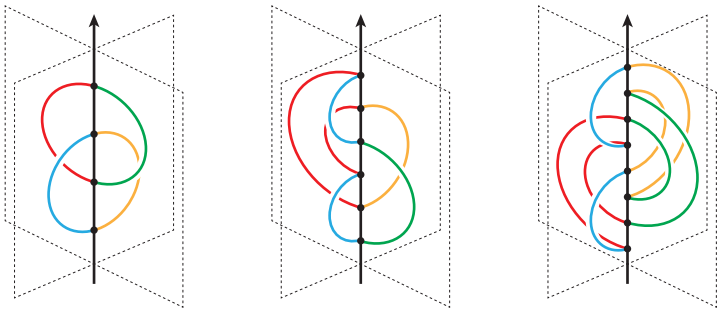


FIGURE 2. 霍普夫链环、三叶结和八字结的四页表示

我们的首个结果确立了四页指标与带长之间的结构性关系。

定理1. 对任意纽结或链环 K,

$$\mathrm{Rib}(K) \leq \alpha_4(K).$$

由于 $\alpha_4(K) \leq \alpha_3(K)$，且已知 $\alpha_3(K)$随交叉数 [25], 线性增长，因此形式上可得 $\alpha_4(K)$也具有线性上界。然而，这种间接论证无法给出精确的系数。我们的主要图论结果如下。

定理2. 对任意非分裂、非平凡的纽结或链环 K,

$$\alpha_4(K) \leq 2c(K).$$

此外，若 K 是非交替的，则该不等式为严格不等式。

特别地，界 $\alpha_4(K) \leq 2c(K)$对霍普夫链环和三叶结取到。结合定理1，这立即推出如下推论。

推论3. 对任意非分裂的非平凡结或链环 K,

$$\mathrm{Rib}(K) \leq 2c(K)$$

且在非交替情形下为严格不等式。

本文组织如下。在第2节中，我们引入四页表示并定义四页指标 $\alpha_4(K)$, 建立其基本性质。在第3节中，我们证明带长以四页指标为上界。第5节发展了一种由纽结图得到四页表示的图示构造，并建立线性界 $\alpha_4(K) \leq 2c($ $K)$。最后，在第4节中，我们研究圆形四页表示，并在非交替情形下改进该不等式。

2. Four-page presentations and the four-page index

链环在 $\mathbb{R}^3$ 中的结构化嵌入为研究拓扑复杂性提供了一个组合框架。一个经典例子是 Cromwell [2], 引入的弧表示，其中纽结或链环被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 开书分解的有限多个页中。此类表示所需的最少页数称为弧指标

α（K），它与交叉数、桥数及其他不变量 [1, 3, 4, 21, 22, 23] 的关系已得到广泛研究。

Dynnikov [9], 提出了另一种观点，他引入了三页表示。在这种设定下，环境空间被限制在开书的三页中，每一页都可以包含若干条彼此不相交的弧。Dynnikov 证明，每个链环都存在三页表示；后续研究则考察了纽结、链环和空间图的各种类别中的这种表示 [10, 11, 12, 18, 19, 20, 27]。

最近，三页表示的变体也被用于研究带长。对于定向链环，可以考虑旋转三页表示，其中定向决定了链环依次穿过三页的循环次序。引入这一构造是为了通过从纽结图转向表示数据，再进一步得到折叠带实现，推导带长估计 [26]。这些结果表明，表示不变量或许能够捕捉与带长相关的几何信息。受这一研究方向的启发，我们引入一种基于四页的类似概念。

定义 3。纽结或链环的四页表示 K 是在开书分解 $\mathbb{R}^3$ 中的 K 表示，并满足以下条件:

(1) 恰有四页相交于 K。（2）每一页包含有限条两两不相交的适当嵌入弧。

Dynnikov 证明了每个纽结或链环都具有三页表示。从这样的表示出发，可以如下获得四页表示。选择位于三个页之一中的一条弧，并通过完全支撑于同一页内的平面同痕，将该弧的一个内部点推至绑定轴。此操作将该弧分成两条在新点处与绑定轴相交的弧，从而使弧的总数增加一条。随后可将其中一条弧移入最初为空的第四页。因此，每个纽结或链环都具有四页表示。

与三页情形一样，与绑定轴的交点数等于表示中的弧数。

定义 4. 纽结或链环 K 的四页指标 $\alpha_4(K)$定义为其所有四页表示中弧的最小数量。

四页指标与弧指标和三页指标密切相关。

首先，设 K 是一个可用含有 m条弧的四页表示来表示的纽结或链环。经过微小扰动，可以重新分配这些弧，使每条弧都位于一个足够大的开书分解中的不同页上。因此，含有 m 条弧的四页表示会导出一个含有m 条弧的弧表示。对所有四页表示取最小值，可得

$$\alpha(K) \leq \alpha_4(K),$$

其中 $\alpha(K)$表示弧指标。

另一方面，设 K 是一个可采用三页表示的非平凡结或链环。在任何这样的表示中，每

页上的弧数都不小于 K 的桥数，如 [12] 所示。由于非平凡链环的桥指标至少为二，因此每个三页表示在每页上至少包含两条弧。因此，可以将其中一页上的一条弧移至额外的第四页，而不增加弧的总数。这样便得到一个弧数相同的四页表示，因此

$$\alpha_4(K) \leq \alpha_3(K).$$

3. From four-page presentations to ribbonlength

本节证明定理1。关键观察是，四页表示可以直接几何实现为折叠带结。现在我们描述这一构造。

定理1的证明。设 K 是一个纽结或链环，它有一个包含 m 条弧的四页表示。弧的数量与绑定轴上的交点数量一致。我们构造 K 的单位宽度折叠带实现，使其核心长度可以任意接近m。

考虑 K的一个四页表示。在每个绑定点，表示中恰有两条弧相交。由于四页围绕绑定轴按循环顺序排列，绑定点处相邻的两条弧要么位于相邻的页中，要么位于相对的页中。前一种情况下，两条弧以直角相交；后一种情况下，它们共线并构成平角。

我们为每个绑定点配上一块边长为 1 的方形带片。如果两条相邻的弧位于相对的页中，则将正方形保持平展，使带笔直延伸，从而实现一个 180° 转弯。如果两条弧位于相邻的页中，则沿正方形的一条对角线折叠，以此实现带的一个 90° 转弯，如图3所示。

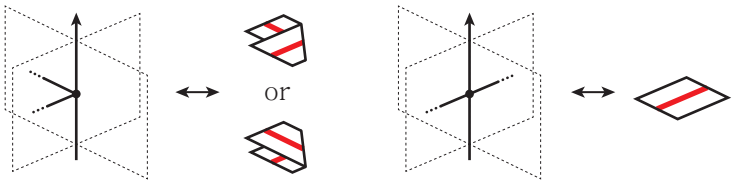


Figure 3. 绑定点附近的局部构型及其对应的带片

将这些方形带片沿绑定轴放置，使其内部两两不相交。由于带被视为二维物体，因此可以沿绑定轴方向压缩这些带片，使其高度任意小。这样，整个构型便可在一个平面内实现。

随后，根据四页表示的组合结构，在每一页内将这些部分连接起来。由于每一页中的弧两两不相交，因此连接时不会引入额外交点，且折痕线仍彼此不相交。

所得对象是表示 K 的折叠带结。每个绑定点贡献一个边长为 1 的正方形，而连接所增加的长度可以任意小。因此，对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{Rib}(K) \leq m + \varepsilon.$$

由于带长定义为所有折叠带实现的下确界，我们得出

$$\mathrm{Rib}(K) \leq m.$$

对所有四页表示取最小值得到

$$\mathrm{Rib}(K) \leq \alpha_4(K),$$

这就完成了证明。 □

4. Circular four-page presentations

本节通过绑定圆介绍四页表示的平面描述。在先前的工作中， [25], 提出了一种方法：借助由底层平面图的生成结构产生的适当绑定圆，直接从纽结图构造三页表示。我们对这一构造进行调整和改进，以获得适用于圆形四页表示的绑定圆。这种平面视角为从链环图构造四页表示提供了一种便捷的图示方法。

我们考虑对配备四页开放书结构的 $\mathbb{R}^3$ 进行一点紧化。在此紧化下，绑定轴变为一个平凡结圆，称为绑定圆；每一页则变为由该圆界定的圆盘，如图4所示。因此，四页表示完全由链环与绑定圆的交点，以及将所得弧分配到四页的方式决定。

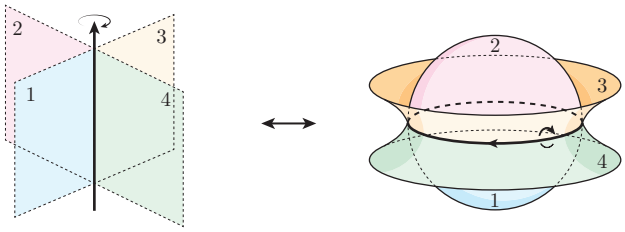


Figure 4. 四页表示及其带有页面排序的圆形四页表示

这一观点允许一种纯平面的描述。在平面中固定一条简单闭曲线 γ ，并将其视为绑定圆。我们在 γ 内部放置两页，在 γ外部放置两页。与三页情形不同，交叉既可以出现在 γ内部，也可以出现在其外部，因为绑定圆的每一侧都分配了两个不同的页。借助适当的局部上下穿越约定来区分 γ 每一侧的两页，这些弧便可由平面图以组合方式确定。反之，任何满足下述条件的构形都确定该链环的一个四页表示。

定义5. 设 D 为一个纽结或链环图。若下列条件成立，则平面中的简单闭曲线 γ称为 D 的圆形四页表示的绑定圆：

(1) 曲线 γ 与 D 相交于有限个点。(2) 被 γ 截开的 D 的每段弧都属于以下四种类型之一：(a) 位于 γ 内部，且弧上的每个交叉都是上交叉；(b) 位于 γ 内部，且弧上的每个交叉都是下交叉；(c) 位于 γ 外部，且弧上的每个交叉都是上交叉；(d) 位于 γ 外部，且弧上的每个交叉都是下交叉。

(3) 同一类型的任意两段弧都不会相yp邻 j接于 g γ.

γ 与 D 的交点称为绑定点。绑定点的数量等于相应四页表示中的弧数。

由于绑定点的数量等于弧的数量，对于图 D，只需构造一个绑定圆 γ，并统计它与 D 的交点数。因此，我们将 D 视为四价平面图，并构造一个与底图的每条边至多相交一次的绑定圆。由此得到弧数量的组合界。

5. 来自结图图的四页指标

本节证明定理2。首先，假设 K 是一个分裂链环，其每个非分裂分支都满足定理2。由于交叉数在分裂并下具有可加性，而且分裂分支的四页表示可以分别安排在开书中互不相交的区域内，因此对每个非分裂分支分别应用该论证，即可得到所需的不等式。

然而，平凡分裂分支的交叉数为零，而它的任何四页表示都至少需要两条弧。因此，存在平凡分裂分支时，该不等式未必成立。由此，只需考虑 K 是非分裂且非平凡的情形。

如果存在一条平面中的简单闭曲线，在恰好一点处横截 D，并将该交叉与图的其余部分分隔开，则称纽结图 D 的这个交叉为可约交叉。如果一个图不含可约交叉，则称其为约化图。

由于可约交叉不会影响纽结型，且最小图不含可约交叉，因此我们可以假设 D 是约化的。这一假设简化了后续构造中的组合论论证。

设 D 是非平凡结或链环 K 的一个非分裂约化图，具有 $c(D)$ 个交叉。忽略交叉信息后，D 可视为一个连通四价平面图。记 $G(D)$ 为 D 的底层四价平面图。由于 $G(D)$ 是四价的，因此有

$$|E(G(D))| = 2|V(G(D))| = 2c(D).$$

我们的目标是为 D 的圆形四页表示构造一个绑定圆 γ，使得 γ 与 $G(D)$ 的每条边恰好相交一次。这立即意味着绑定点的数量为 $|E(G(D))| = 2c(D)$，因此 $\alpha_4(K) \leq 2c(K)$。

固定 D 区域的棋盘格着色。令 $\Gamma(D)$ 为一个图，其顶点是阴影区域，边对应于 D 的交叉。由于 D 是非分裂的，$\Gamma(D)$ 是连通的。选取 T ($\Gamma($ D)) 的一棵生成树。

现在定义由生成树 T 确定的一个考夫曼状态 S_T。在 D 的每个交叉处，都有两种可能的平滑方式 [13]。我们选择一种平滑方式，使所得状态能够编码相应的对偶边是否属于 T 或其补集。更确切地说，D 的每个交叉都对应于 $\Gamma(D)$ 的一条唯一边，我们根据该边是否属于 T 来选择该交叉处的平滑方式。将由此得到的状态记为 S_T。

引理4. 状态 S_T 恰有一个状态圆。

证明。所选的平滑方式沿着 T 的边合并状态圆，并阻止额外的连通分支沿 T 之外的边形成。等价地，所得状态圆可视为由 T 确定的 S^2 诱导胞腔分解中某个适当生成子复形的正则邻域边界。因此，S_T 恰有一个连通分支。□

令 C_T 表示 S_T 的唯一状态圆。由于 C_T 恰好沿着底图 $G(D)$ 的每条边行进一次，它确定了一个欧拉回路

$$E_T = (e_1, \ldots, e_{2c(D)})$$

$G(D)$。

对于 $G(D)$ 的每条边 e，在 e 的内部选取一点，例如其中点，并记为 $m(e)$。沿着欧拉回路 E_T，我们用嵌入弧连接相继的中点 $m(e_i)$ 和 $m(e_{i+1})$；这些弧画在 $G(D)$ 的面内部，该面是两条相邻边 e_i 和 e_{i+1} 相交之处所在的面。这样一来，所得曲线除点集 $\{m(e) \mid e \in E(G(D))\}$ 外，与 $G(D)$ 保持不相交。由于 E_T 是一个循环序列，这些弧依次相连并返回到 $m(e_1)$，因此该构造产生一条闭曲线。我们将这条闭曲线记为 γ'。

引理5. 曲线 γ' 可以选为简单曲线。

证明。每条连接弧都位于 $G(D)$ 的某个面的内部。虽然多条弧可能位于同一个面内，但只要将它们安排得足够靠近面的边界，并在必要时进行小幅扰动，就能使它们两两不相交。这些调整不会改变它们与 $G(D)$ 的交点模式。□

根据 γ'的构造，D 的每个交叉都被切分成两条弧，即一条上弧和一条下弧，并且这些弧完全位于 γ'的一侧。此外，γ' 与 D 恰好相交于 $2c(D)$个点，即所选的点 $m(e)$，每条 $G(D)$边 e 上各有一个。因此，γ' 满足圆形四页表示的绑定圆的定义5中的条件（1）。

注意， γ' 是通过平面同痕从状态圆 C_T 得到的：该同痕将 C_T 上相邻点 $m(e_i)$与$m(e_{i+1})$之间的每条子弧替换为相应的连接弧。特别地， γ' 在 $G(D)$的补集中与 C_T 同痕，因此将平面分成相同的两个区域。下一个引理表明， γ' 也满足定义5中的条件（2）。

引理6。 γ' 的内部和外部都至少包含 D的一个交叉。

证明。由于 D 是非分裂的，对偶图 $\Gamma(D)$是连通的。由于 D是约化的， $\Gamma(D)$没有割边。没有割边的连通图不可能是树。因此， $\Gamma(D)$不是树，并且对于任意生成树$T \subset \Gamma(D)$，都存在 $\Gamma(D)$中至少一条不属于 T的边。

根据状态 $S(T)$的构造，对应于T 的边的交叉位于状态圆 C_T的一侧，而对应于 $\Gamma(D) \setminus T$中的边的交叉位于另一侧。由于 γ' 与 C_T同胚，同样的分隔性质也适用于 γ'。

由于 T 至少包含一条边， γ' 的内部至少包含一个交叉。由于 $\Gamma(D) \setminus T$非空，外部也至少包含一个交叉。□

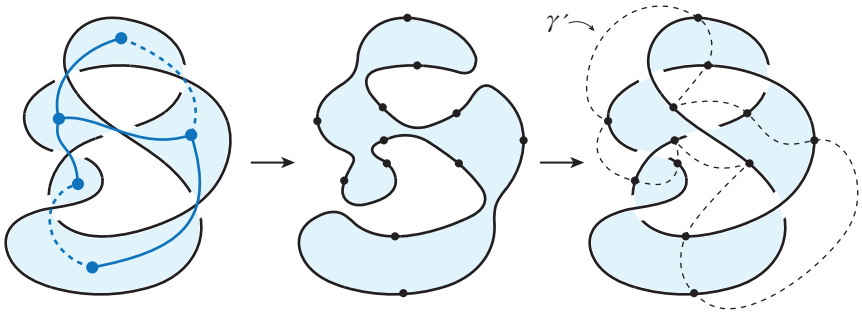


FIGURE 5. 圆形四页表示的绑定圆

上述构造总结于图5中。如果图 D 是交替的，那么沿着简单闭曲线 γ'，越过曲线上方和下方的交叉点必然交替出现。因此， γ'满足定义5的条件（3）。在这种情况下，曲线 γ' 满足定义5的所有条件，因而定义了一个绑定圆。然而，对于非交替图，这一邻接条件可能不成立，因此需要进行额外的局部修改。为此，我们证明以下引理。

引理7. 设 D 是一个链环图， γ' 是如上由欧拉回路构造的闭曲线。假设 $G(D)$的一条边 e_i 具有如下性质：其两个端点交叉是非交替的，且这两个交叉都位于 γ' 的同一侧（要么都在内部，要么都在外部）。那么，可以通过在 e_i 的一个小邻域内进行平面同痕来修改 γ'，使修改后的曲线 $\tilde{\gamma}$ 与 $m(e_i)$不相交，并且仍满足定义5中的条件（1）和（2）。

证明. 设 N 是平面中边 e_i 的一个充分小的闭正则邻域。选取 N，使其与 D 的交集恰好是 D 中由 e_i 以及两个端点交叉附近的小子弧组成的部分，并且 N 不包含 $G(D)$ 的其他交叉或边。根据构造，γ' 仅在所选点 $m(e_i)$ 处与 e_i 相交。必要时缩小 N 后，我们可以假设 $\gamma' \cap N$ 是一条单一嵌入弧，它在 $m(e_i)$ 处与 e_i 相交，并连接 ∂N 上的两点。

在 N 内，将子弧 $\gamma' \cap N$ 替换为 N 中的另一条嵌入弧，它在 ∂N 上具有相同的端点，但沿 ∂N 延伸，从而避开点$m(e_i)$，并且除可能与 $G(D)$ 的相同边发生与先前相同的横截相交外，始终停留在 $N \setminus D$ 中。将所得闭曲线记为 $\tilde{\gamma}$。在 N 之外，我们使 γ' 保持不变。

根据对 N 的选取，该修改不会在 N 之外产生 $\tilde{\gamma}$ 与 D 的任何新交点，并且在 N 内，替换弧被选取为始终位于 D的补集中。因此 $\tilde{\gamma}$ 仍与 D 相交于有限多个点，从而满足定义5的条件（1）。此外，由于该修改的支撑集位于仅包含 D 在 e_i 附近局部部分的一个邻域内，被 $\tilde{\gamma}$ 截出的 D 的每条弧都与之前类型相同（沿该弧的内/外以及上/下行为保持不变）。特别地，定义5的条件（2）得以保持。

因此，$\tilde{\gamma}$ 满足定义5中的条件（1）和（2），如所述。 □

反复应用引理7，我们得出，即使在非交替情形下，也可以对曲线进行修改，使其满足定义5中的条件（3），如图6所示。

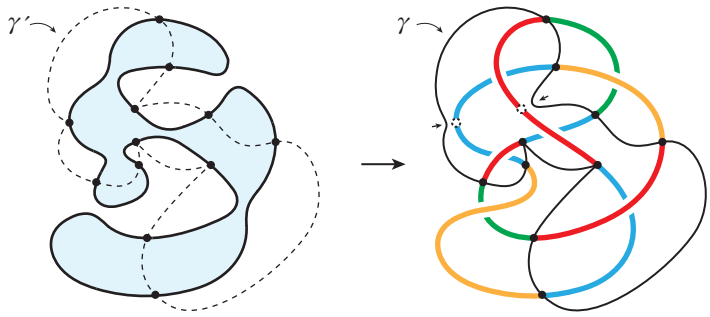


FIGURE 6. 圆形四页表示的绑定圆

现在我们可以完成定理2的证明。

定理2的证明。设 D 为一个非分裂的非平凡结或链环的约化图 K，其交叉数为 $c(D)$。根据上述构造，我们得到一条简单闭曲线 γ，它作为 D 的圆形四页表示的绑定圆。此外，γ 与底图 $G(D)$ 的每条边至多相交一次。由于 $G(D)$ 有 $2c(D)$ 条边，绑定点的数量至多为 $2c(D)$。因此，相应的四页表示至多有 $2c(D)$ 条弧，故

$$\alpha_4(K) \leq 2c(D).$$

对 K 的所有图取最小值可得

$$\alpha_4(K) \leq 2c(K).$$

如果 D 是非交替的，那么 $G(D)$至少有一条边，其两个端点交叉是非交替的。选择一棵生成树$T \subset \Gamma(D)$，使得 $\Gamma(D)$中与这一交叉构型对应的边不包含在 T 中（等价地说，两个端点交叉位于由 T确定的状态圆的同一侧）。采用这棵生成树后，所得曲线 γ' 满足引理7的假设。应用该引理，我们可以在对应边的中点附近对 γ' 作局部修改，从而去掉一个绑定点，同时保持定义5中的条件（1）和（2）。因此，在非交替的情况下，可以至少减少一个绑定点，同时仍满足绑定圆的定义条件。在这种情况下，我们得到

$$\alpha_4(K) < 2c(K).$$

证明至此完成。 □

定理2给出了系数为 2 的线性上界。现在我们证明，对于某些链环，这个系数是最优的。

推论8. $\alpha_4(2_1^2) = 4$ 和 $\alpha_4(3_1) = 6$。

证明。对于霍普夫链环 $2_1^2,$，我们有 $\alpha(2_1^2) = 4$ 和 $c(2_1^2) = 2$。由于

$$\alpha(K) \leq \alpha_4(K) \leq 2c(K),$$

由此可得

$$4 \leq \alpha_4(2_1^2) \leq 4,$$

因此 $\alpha_4(2_1^2) = 4$。

对于三叶结 $3_1,$，我们有 $\alpha(3_1) = 5$，并且 $c(3_1) = 3$。因此

$$5 \leq \alpha_4(3_1) \leq 6.$$

反设 $\alpha_4(3_1) = 5$。那么存在一个 3_1 的圆形四页表示，且恰有五个绑定点。

根据引理6，绑定圆的内部和外部都必须至少包含图的一个交叉。由于三叶结有三个交叉，绑定圆所确定的至少一个区域必须包含至少两个交叉。

然而，根据定义5的条件（3），沿绑定圆相邻的两条弧不能属于同一类型。要将这些交叉分配到不同的弧类型，同时保持沿圆周的交替模式，至少需要六个绑定点。因此，只有五个绑定点的圆形四页表示不可能存在。因此 $\alpha_4(3_1) = 6$。□

Acknowledgements

本研究由韩国政府教育部资助的韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划项目（RS-2023-00244488）支持。

References

[1] Y. Bae 和 C.-Y. Park。链环弧指标的一个上界。 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 129 3 491 500, 2000 , ( ): – . [2] P. Cromwell。将纽结和链环嵌入开书 I：基本性质。 *Topology and its Applications* 64 1 37 58, 1995 , ( ): – . [3] P. Cromwell。纽结和链环的弧表示。 *Banach Center Publications*, 42 1 57 64, 1998 ( ): – . [4] P. R. Cromwell 和 I. J. Nutt。将纽结和链环嵌入开书 II：弧指标的界。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 119:309–319, 1996. [5] E. Denne。折叠带结的带长与交叉数。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30 04 2150028, 2021 , ( ): . [6] E. Denne、J. C. Haden、T. Larsen 和 E. Meehan。折叠带结族的带长。 *Involve, a Journal of Mathematics*, 15(4):591–628, 2023. [7] E. Denne、M. Kamp、R. Terry 和 X. C. Zhu。平面中折叠带平凡结的带长。 *Knots, Links, Spatial Graphs, and Algebraic Invariants*, 689:37, 2015. [8] E. Denne 和 T. Patterson。结族及多重扭转莫比乌斯带的有界带长。 *arXiv preprint arXiv:2509.18370*, 2025. [9] I. Dynnikov。结理论的三页方法：编码与局部变换。 *Functional Analysis and Its Applications* 33 4 260 269, 1999 , ( ): – . [10] I. Dynnikov。结理论的三页方法：泛半群。 *Functional Analysis and Its Applications* 34 1 29 40, 2000 , ( ): – . [11] I. Dynnikov。表示链环的新方法：一维形式体系与解缠技术。 *Acta Applicandae Mathematicae*, 69(3):243–283, 2001. [12] U. Jang、M. Lee 和 H. Yoo。环面链环的三页指标。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 34 12 2550063, 2025 , ( ): . [13] L. H. Kauffman。状态模型与琼斯多项式。 *Topology* 26 3 395 407, , ( ): – .[14] L. H. Kauffman。最小平面打结带。载于 *In Knot Theory: Including Applications to the Life Sciences* 1987 *Physical And Numerical Models* 495 506 , 第 – 页。世界科学出版社，2005。[15] H. Kim、S. No 和 H. Yoo。扭转环面结的带长。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 31 12 2250092, 2022 , ( ): . [16] H. Kim、S. No 和 H. Yoo。2 *Journal of Knot* 桥结的折叠带长。 *Theory and Its Ramifications* 32 04 2350030, 2023 , ( ): . [17] H. Kim、S. No 和 H. Yoo。纽结和链环带长的线性上界。 *Algebraic & Geometric Topology*, 2026。即将发表。[18] V. Kurlin。链环 3 *Functional Analysis and Its Applications* 35 3 230 233, 2001 价图的三页 Dynnikov 图。 , ( ): – . [19] V. Kurlin。空间图的三页编码与复杂性理论。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 16 1 59 102, 2006 , ( ): – . [20] V. Kurlin 和 V. Vershinin。奇异结的三页嵌入。 *Functional Analysis and Its Applications* 38 1 14 27, 2004 , ( ): – . [21] H. Matsuda。开书分解中的链环与标准接触结构。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(12):3697–3702, 2006. [22] H. R. Morton 和 E. Beltrami。弧指标与考夫曼多项式。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 123 1 41 48, 1998 , ( ): – . [23] L. Ng。论弧指标与最大瑟斯顿–贝尼昆数。 *J. Knot Theory Ramifications* 21 4 2012 , ( ), . [24] G. Tian。环面结与扭结带长的线性上界。 *arXiv preprint arXiv:1809.02095v1*, 2018. [25] H. Yoo。三页指标的图示方法。 *arXiv:2601.12846*, 2026. [26] H. Yoo。具有二部对偶图的交错链环带长的新上界。 *arXiv:2601.10278*, 2026. [27] H. Yoo。有理链环与椒盐链环的三页指标。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 35 1 2550074, 2026 , ( ): .

Department of Mathematics Education, Sunchon National University, Sun-cheon 57922, Republic of Korea*Email address*: hyungkee@scnu.ac.kr