arXiv:2602.14015v1 [math.CT] 15 Feb 2026

关于幺半群半同余的零类

M. Hoefnagel、N. Martins-Ferreira 和 M. Sobral

2026年2月17日

摘要

本文研究幺半群半同余的零类，将其视为幺半群上的内自反关系。经典例子包括正规子幺半群，它们是同余的零类；以及正锥，它们是预序的零类。这两者都分别可通过 Eilenberg 句法等价和 Pin 引入的句法预序得到众所周知的句法刻画。然而，除此之外，尚未建立一种通用的句法对象概念，用以刻画半同余的零类，这种零类也称为 clot。

为弥补这一空白，我们引入一种自反的句法关系；当且仅当它与幺半群运算相容时，该关系才刻画 clot。与同余和预序的情形不同，这种相容性并非自动成立。我们进一步建立了一个针对给定幺半群的子幺半群的条件层级，由此诱导出具有逐渐增强性质的句法关系：首先确保其与幺半群运算相容，随后再施加传递性和对称性等额外关系性质。文中还讨论了若干示例情形，包括正锥和正规子幺半群。

关键词： clot、句法同余、半同余、幺半群。**MSC（2020）：** 20M32, 20M50, 18A22。

1 引言

对于幺半群 A 的子幺半群 M，我们稍作推广了 S. Eilenberg [4] 提出的句法等价概念，以及 J.-E. Pin [11, 6], 提出的句法预序概念，并在 [10] 中引入了 M-等价关系的概念（它总是一个同余），以及 M-预序关系的概念（它也总是与幺半群运算相容），也就是说，两者都是内关系。

在同一篇著作中，我们为每个子幺半群 M 关联了一个 A 上的自反关系 R_M；当 R_M 是内在的时，称之为 M-**自反关系**。第一作者证明了这种关系并非总是内在的，下面给出了相应的反例。事实上，这已可由 [10], 中的一个例子推出；该例此前被忽略了，正如例 2 之前所述。

Clot 是内自反关系的零类。其最初的范畴论定义针对半阿贝尔范畴，见 [7]；后来又针对具有有限余积的正则范畴给出了定义，见 [8]；在后者中，内自反关系称为半同余。

2 预备知识

Eilenberg [4] 的句法等价 和 J.-E. Pin [11, 6] 的句法预序 最初是针对满足以下条件的配对 (A, M) 定义的：A 是自由幺半群，且 M 是 A 的子集。我们对这些概念稍作推广：对于任意幺半群 A 的子集 M，考虑相应的 M-同余 和 M-预序，并为这类配对引入 M-关系的概念。

设 A 是一个幺半群，且 M 是 A 的一个子集，不一定是子幺半群。我们在 A 上定义 M-同余、M-预序和 M-关系如下：

1. M-同余记作 $\sim_M$。若且唯若对于每个 $x,\ y \in A$，元素 $a \in A$ 称为与 $b \in A$ M-同余，记作 $a \sim_M b$。

$$xay \in M \ \Leftrightarrow\ xby \in M.$$

2. M-预序记作 $\leq_M$。若元素 $a \in A$ 满足以下条件，则称其为

被 $b \in A$ 以 M-先行，记作 $a \leq_M b$，当且仅当，对于每个 $x, y \in A$,

$$xay \in M \ \Rightarrow \ xby \in M.$$

3. M关系记作 R_M。元素 $a \in A$称为与 $b \in A$ 满足 M关系，记作 aR_Mb, 当且仅当对于每个 x， $y \in A$,

$$(xay = 1) \ \Rightarrow \ xby \in M.$$

命题 1. 设 M 是幺半群 A 的一个子集。

1. 关系 $\sim_M$ 是幺半群范畴中的内等价关系。

2. 关系 $\leq_M$ 是幺半群范畴中的内部预序。

3. 关系 R_M 是自反的，当且仅当 $1 \in M$。

4. 若 $1 \in M$，则对于每个 a， b， $c \in A$， aR_Mb 蕴含 acR_Mbc 且 caR_Mcb。

5. 关系 R_M 是幺半群范畴中的内关系，当且仅当对于任意 a、 a'、 b、 $b' \in A$,

$$\forall x_1, y_1 \in A, \ (x_1aa'y_1 = 1) \Rightarrow x_1bb'y_1 \in M$$

在.....成立时成立

$$\begin{cases} \forall x_2, y_2 \in A, \ (x_2ay_2 = 1) \Rightarrow x_2by_2 \in M, \\ \forall x_3, y_3 \in A, \ (x_3a'y_3 = 1) \Rightarrow x_3b'y_3 \in M. \end{cases}$$

设 $S \subseteq A \times A$ 是 A上的一个关系。我们将 S 的零类 定义为集合

$$\{u \in A \mid 1Su\},$$

记作 $[1]_S$。

从现在起，我们只考虑 M 是 A的子幺半群的情形。如果存在一个同余（即一个内等价关系） $E \subseteq A \times A$，使得 $M = [1]_E$，我们就称 M 是 A 的正规子幺半群。类似地，如果存在一个内部预序（即一个内部自反且传递关系） $P \subseteq A \times A$，使得$M = [1]_P$，我们就称 M 是 A 的正锥。最后，如果存在一个内自反关系 $S \subseteq A \times A$，使得 $M = [1]_S$，我们就称 M 是 A 的$clot$。

命题 2。设 M 是幺半群 A的一个子幺半群。

1. 子幺半群 M 是 A 的正规子幺半群，当且仅当 M 是 $\sim_M$ 的零类。*2.* 子幺半群 M 是 A 的正锥，当且仅当 M 是 $\leq_M$ 的零类。*3.* 如果子幺半群 M 是 A 的 *clot*，那么 $M = [1]_{R_M}$。*4.* 如果 R_M 是内关系且 $M = [1]_{R_M}$，那么 M 是 A 的 *clot*。*5.* 条件 $M = [1]_{R_M}$ 等价于以下条件：对于每个 x，$y \in A$，以及每个 $u \in M$，

$$xy = 1 \ \Rightarrow \ xuy \in M.$$

6. 如果 A 是群，那么 $M = [1]_{R_M}$ 当且仅当 M 在 A 中对共轭封闭。

接下来，我们将更详细地分析 M-关系。

3 幺半群的半同余

在 [10], 中已证明，对于幺半群 A 的任意子幺半群 M，上文引入的关系 $\sim_M$ 和 $\leq_M$ 分别是 A 上的内等价关系（即同余）和内部预序。此外，正如上面的命题所述，它们对正规子幺半群和正锥给出了内在刻画。

每当 R_M 是一个内关系时，我们就称其为 M-自反关系；在这种情况下，条件 $M = [1]_{R_M}$ 刻画了 M 是一个 clot 的情形，正如我们接下来回顾的（[10], 命题 3）。

命题 3。设 M 是幺半群 A的子幺半群。那么，当且仅当满足以下条件时，M 是自反关系 R_M 的零类：

(R) 对于每个 x、$y \in A$ 和每个 $u \in M$，

$$xy = 1 \ \Rightarrow \ xuy \in M.$$

如果 M 是一个 *clot*，那么 $M = [1]_{R_M}$；反之，若关系 R_M 是内在的，则结论也成立。

证明。我们首先证明$[1]_{R_M} \subseteq M$。事实上，若 $1R_M u$，则对每个$x, y \in A$，都有

$$x1y = 1 \;\Rightarrow\; xuy \in M.$$

特别地，取 $x = y = 1$，我们得到 $u \in M$。

反过来，$M \subseteq [1]_{R_M}$ 当且仅当条件（R）成立。因此，在条件（R）下，我们有 $M = [1]_{R_M}$。

现在假设 M 是一个 clot，也就是说，它是某个定义在 A 上的内自反关系 S 的零类。若 $1Su$，则由S 的自反性和相容性可得 $xySxuy$。因此，每当 $xy = 1$ 时，我们便得到 $1Sxuy$，即$xuy \in M$。所以条件（R）成立，从而 $M = [1]_{R_M}$。

若 R_M 具有相容性，则逆向蕴含也成立。 □

第一作者通过构造以下例子，证明了关系 R_M 并不总是半同余。

例1. 回顾一下，双循环 幺半群 B 是由两个生成元 x, y 上的自由幺半群，按照由单个关系 $xy \sim 1$生成的同余取商得到的。B 中的每个元素都可以唯一地表示为 $y^n x^m$，其中 n, m为某些自然数。考虑子幺半群

$$M = \{\, y^n x^m \mid n, m \in 2\mathbf{N} \,\}$$

B的。

我们证明 R_M 不是内关系。首先，我们有 $(y^2x)R_M(yx^2)$，因为对于 B 中任意满足以下条件的元素 $y^n x^m$ 和 $y^{n'} x^{m'}$

$$(y^n x^m)(y^2 x)(y^{n'} x^{m'}) = 1,$$

可得 $n = 0 = m'$ 和 $m = n' + 1$。因此

$$x^{n'+1}(yx^2)y^{n'} = x^2 \in M.$$

同理，我们有 $xR_M y$，因为 $(y^n x^m)x(y^{n'} x^{m'}) = 1$ 意味着 $n = 0 = m'$和 $m + 1 = n'$，由此可得

$$x^m y y^{m+1} = y^2 \in M.$$

然而，它们的乘积不满足该关系：我们并没有 $(yx)R_M(y^2x^2)$，因为

$$x(y^2x^2)y = yx \notin M.$$

因此，该关系不是内在的。

命题 2（第 (3) 项）提供了另一种理解方式，说明 R_M 并非总是内在的。该命题指出，条件 $M = [1]_{R_M}$ 是 R_M 成为半同余的必要条件。与我们在 [10], 的例 (J) 中所述相反（我们将在下文回顾该例），该例展示了一个子幺半群M，使得 $[1]_{R_M} \neq M$，因而相应的关系 R_M 不是内在的。

例 2.（例 (J)，[10]）令 $A =$ **集合(自然数，自然数)** 为所有自然数上的自映射构成的幺半群，其运算为复合；令 M 为由函数 $u = 2 \times -$生成的子幺半群。于是，M 由函数 $u^n = 2^n \times -$（其中 $n \in$ **自然数**$_0$,）组成，而 u^n（其中 $n > 0$）不属于关系 R_M的零类。

事实上，令 $f, g \in A$ 由 $g(x) = x + 1$ 定义，并且当$x > 1$时由 $f(x) = x - 1$ 定义，而 $f(1) = 1$。于是 $f \cdot g = 1_{\mathbf{N}}$，但 $f \cdot u^n \cdot g \notin M$，因为

$$f \cdot u^n \cdot g(x) = 2^n(x + 1) - 1$$

对于 $x \in \mathbf{N}$。因此 $[1]_{R_M} = \{1_{\mathbf{N}}\}$ 和 R_M 不是半同余。

对于平凡子幺半群 $M = \{1_A\}$ 和 $M = A$，关系 R_M 总是 A上的半同余。

有一大类幺半群，对于其中的每个子幺半群 M，这些自反关系都是半同余。事实上，只要满足以下条件，关系 R_M 就与幺半群运算相容：

$$(*) \qquad \forall x, y, s, t \in A,\ (xy = 1,\ xs \in M,\ ty \in M) \Rightarrow ts \in M. \qquad (1)$$

这一条件源于如下要求：A 的每个左（或右）可逆元素都是可逆的，即

$$\forall x, y \in A,\ (xy = 1 \Rightarrow yx = 1),$$

它刻画了戴德金有限幺半群，也称为冯·诺依曼有限幺半群或直接有限幺半群。

在戴德金有限幺半群中，条件 $(*)$ 成立：由 $xs,\ ty \in M$ 可得 $tyxs \in M$，并且由于 $yx = 1$ 在 $xy = 1$ 时成立，我们得出$ts \in M$。

戴德金有限幺半群包括群、交换幺半群、有限幺半群和消去幺半群，但并非所有幺半群都是戴德金有限的。例如，对于任意无限集 X，幺半群 $\mathbf{Set}(X, X)$ 以及双循环幺半群都不是戴德金有限的。

戴德金有限这一条件强于条件（$*$），而条件（$*$）并非 R_M 相容性的必要条件，如 [10] 中的例（I）所示。

注 1. 在群范畴中，若 M 是群 A 的子群，则条件（R）意味着 M 是 A 的正规子群。在这种情况下，同余 R_M 与由 M 诱导的经典等价关系相同，

$$a \sim b \ \Leftrightarrow\ ab^{-1} \in M,$$

当且仅当 M 是正规子群时，它才是同余。

若 A 是群且 M 是 A 的子幺半群，则条件（R）意味着 M 在共轭作用下封闭。通过在 A 上定义预序如下，这类有序对（A, M）构成一个与预序群范畴等价的范畴

$$a \leq b \ \Leftrightarrow\ ba^{-1} \in M,$$

也就是说，$b \in Ma = aM$，如 [3] 中所述。

4 何时 R_M 是半同余?

为回答这个问题，我们考虑一个更一般的范畴语境。

令 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，其对象是形如 (A, M) 的对，其中 A 是一个幺半群，M 是 A 的子幺半群；其态射 $f\colon (A, M) \to (A', M')$ 是满足 $f(M) \subseteq M'$ 的幺半群同态 $f\colon A \to A'$。我们考虑 $\mathcal{C}$ 的以下一列满子范畴：

$$\mathcal{C}_5 \subset \mathcal{C}_4 \subset \mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, \tag{2}$$

其中：

1. $\mathcal{C}_1$ 由所有使得 R_M 是内关系的对(A, M)组成；

2. $\mathcal{C}_2$ 由所有满足条件$(*)$的对(A, M)组成:

$$\forall x, y, s, t \in A,\ (xy = 1,\ xs \in M,\ ty \in M) \Rightarrow ts \in M;$$

3. $\mathcal{C}_3$ 由所有满足 A 为戴德金有限的有序对 $(A,\ M)$ 组成;

4. $\mathcal{C}_4$ 由所有满足 A 为群的有序对 $(A,\ M)$ 组成;

5. $\mathcal{C}_5$ 由所有满足 A 和 M 均为群的有序对 $(A,\ M)$ 组成。

所有这些包含关系都是严格的:

1. $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}$, 由例 1 和例 2 可知;

2. $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_1$, 如幺半群 $A =$ **集合(N, N)** 在复合运算下所示, 其中 $M = \{1_{\mathbf{N}}\}$ (见 [10], 例 **I(ii)**);

3. $\mathcal{C}_3 \neq \mathcal{C}_2$, 如 $A =$ **Set(N, N)** 所示, 其中 $M = A$ (见 [10], 例 **I(i)**);

4. $\mathcal{C}_4 \neq \mathcal{C}_3$, 因为并非每个戴德金有限幺半群都是群;

5. $\mathcal{C}_5 \neq \mathcal{C}_4$, 因为在 $\mathcal{C}_5$ 中, A 和 M 都必须是群。

为了研究确保 M 是 R_M 的零类的条件, 我们引入 $\mathcal{C}$ 的以下满子范畴:

1. $\mathcal{C}_0$, 由所有满足 $M = [1]_{R_M}$ 的偶 $(A,\ M)$ 组成;

2. $\mathcal{C}_{0.5}$, 由所有满足 M 是 clot 的偶 $(A,\ M)$ 组成;

3. $\mathcal{C}_{(i,0)} = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_0$, 对于 $i = 1$, ..., 5。

由此得到另一条满子范畴链:

$$\mathcal{C}_{(1,0)} \subset \mathcal{C}_{0.5} \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}. \tag{3}$$

这些包含关系满足以下性质:

1. $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$, 因为存在满足 $[1]_{R_M} \neq M$ 的例子, 例如 [10]中的例子 **(J)**;

2. $\mathcal{C}_{0.5} \subset \mathcal{C}_0$，因为 clot 是满足 ([10] 定理 4(f)) 的子幺半群 M

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbf{N},\ \forall a_1, \ldots, a_{n+1} \in A,\ \forall u_1, \ldots, u_n \in M, \\ &\quad a_1 \cdots a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_1 u_1 a_2 \cdots a_n u_n a_{n+1} \in M, \end{aligned} \tag{4}$$

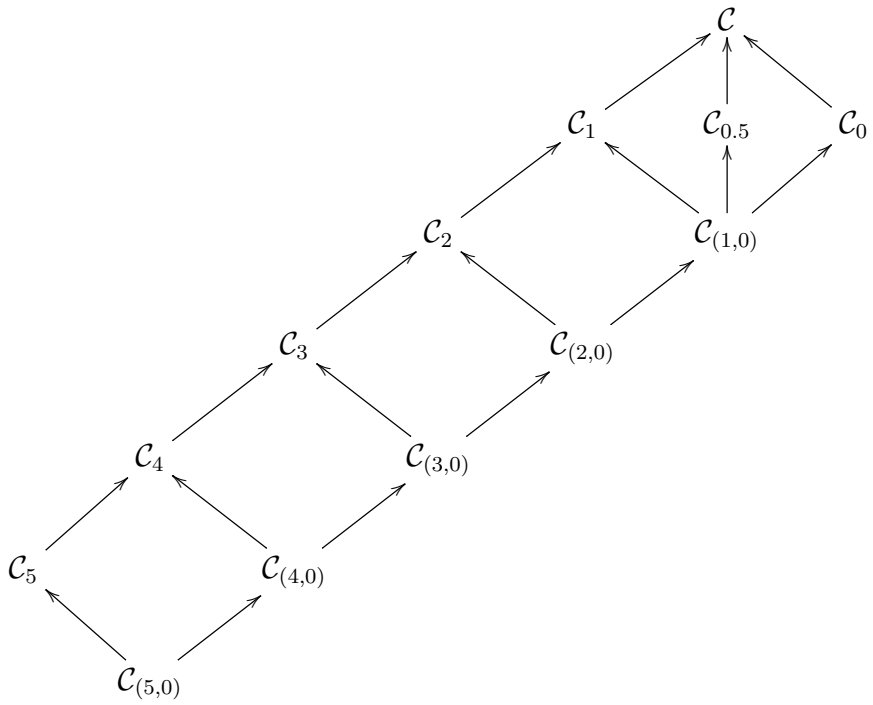
这意味着

$$\forall x, y \in A,\ \forall u \in M,\ xy = 1 \Rightarrow xuy \in M, \tag{5}$$

也就是说， $M = [1]_{R_M}$;

3. 尚不清楚包含关系 $\mathcal{C}_{(1,0)} \subset \mathcal{C}_{0.5}$ 是否为严格包含，也就是说，是否存在幺半群 A 的子幺半群 M，使得对于某个半同余 S， $M = [1]_S$（从而 $M = [1]_{R_M}$），但 R_M 不是内在的。

综上，我们得到 $\mathcal{C}$ 的满子范畴如下图:



这里， $\mathcal{C}_{(1,0)}$ 是所有满足以下条件的有序对 (A, M) 所构成的范畴： R_M 是内在的，且M 是 R_M的零类。特别地， $\mathcal{C}_{(4,0)}$ 等价于

预序群范畴；而 $\mathcal{C}_{(5,0)}$的对象是有序对 (A, M)，其中 M 是群 A的正规子群，该范畴等价于以群中的同余关系为对象的范畴。

现在我们转而讨论预序幺半群，也就是配备了内在的、自反且传递的关系的幺半群。

1. 令 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，它由所有满足 $M = [1]_{\leq_M}$ 的序对 (A, M) 组成，也就是说，

$$a \in M \iff \forall x, y \in A,\ (xy \in M \Rightarrow xay \in M).$$

根据 [10] 的命题 2，M 是某个内在预序的正锥，当且仅当它是 M-预序的零类。因此，$\mathcal{D}$ 可以视为由正锥确定的预序幺半群范畴。不同于 $\mathcal{C}_{(4,0)}$（它等价于预序群范畴），$\mathcal{D}$ 严格小于所有预序幺半群构成的范畴，因为并非每个预序都由其正锥确定（[9], 的例 1）。

2. 令 $\mathcal{D}_r$ 为 $\mathcal{D}$ 的全子范畴，它由所有满足 M 为右齐次的序对 (A, M) 组成，也就是说，对所有 $a \in A$，都有 $aM \subseteq Ma$。等价地，由 $a \leq_r b$ 当且仅当 $b \in Ma$ 定义的预序是内在的（[9], 的命题 2），而 M 是其正锥。

3. 类似地，令 $\mathcal{D}_l$ 为 $\mathcal{D}$ 的全子范畴，由所有满足 M为左齐次的对 (A, M) 组成，即对所有$a \in A$，有 $Ma \subseteq aM$。等价地，当 $b \in aM$为内在的时，由 $a \leq_l b$ 定义的预序以 M 为其正锥。

在这种情况下，我们有严格包含关系

$$\mathcal{C}_{(4,0)} \subset \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C}_{0.5} \subset \mathcal{C}, \qquad i \in \{r, l\}.$$

事实上：

1. $\mathcal{D} \neq \mathcal{C}_{0.5}$;

2. $\mathcal{D}_i \neq \mathcal{D}$，因为 M-预序严格包含预序 $a \leq b$ if$b \in Ma$或 $b \in aM$;

3. $\mathcal{C}_{(4,0)} \neq \mathcal{D}_i$，因为在 $\mathcal{C}_{(4,0)}$ 中，幺半群 A 是一个群，而 M在共轭下封闭，因此既是左齐次的，也是右齐次的。

如果 M 同时是左齐次和右齐次的，我们就称其为齐次。

在 [9], 中，正规子幺半群一词用于指我们现在所称的齐次子幺半群（单侧概念则称为左正规或右正规）。这种术语并不恰当，因为按照我们现在的定义，正规子幺半群不一定是齐次的，以下例子便说明了这一点。

例3。设 $A = \mathbf{Set}(X,\ X)$ 是有限集 X 上所有自映射在复合运算下构成的幺半群，其中该有限集至少有两个元素；令 $M = S_X$ 为所有双射构成的子幺半群。则 M 是 A 的正规子幺半群，因为它是 A 上的 M-同余的零类，

$$\forall f, g \in A,\ \forall u \in M,\ (f \circ g \in M \Leftrightarrow f \circ u \circ g \in M).$$

然而，并非每个 $f \in A$ 都满足 $f \circ M = M \circ f$：只需令 f 为一个常值映射即可。

最后，令 $\mathcal{D}_h$ 为 $\mathcal{D}_r$（或 $\mathcal{D}_l$）的全子范畴，由所有满足 M 是群的对 $(A,\ M)$ 构成。这些恰好是这样的预序幺半群：由正锥 M 定义的预序是 A 上的同余。

事实上，若 M 是一个群且 $a \leq_r b$，则对于某个 $u \in M$有 $b = ua$，因此 $a = u^{-1}b$，所以 $b \leq a$。反过来，若该预序是对称的，则$u \geq 0$ 蕴含 $u \leq 0$，因此存在 $v \in M$ 使得 $0 = vu$，这表明每个 $u \in M$ 都是可逆的。因此， $\mathcal{D}_h$ 是幺半群中同余关系的一个子范畴。

文献 [5] 提出了研究幺半群中同余关系的另一种方法，其中将群中的同余关系与正规子群之间的经典等价关系推广到了任意幺半群的情形。

利益声明

作者声明不存在任何竞争利益。

资助

第二作者（N. Martins-Ferreira）感谢葡萄牙科学与技术基金会（Fundação para a Ciência e Tecnologia）

通过以下项目获得FCT/MCTES（PIDDAC）资助：联合实验室ARISELA/P/0112/2020年；UIDP/04044/2020年；UIDB/04044/2020年；PAMI - ROTEIRO/0328/2013（N° 022158）；MATIS（CENTRO-01-0145-FEDER-000014 - 3362）；PRR-C05-i03-I-000251（Fruit-PV）；Generative.Thermodynamic；以及莱里亚理工学院的CDRSP和ESTG。

第三位作者感谢科英布拉大学数学中心（CMUC, https://doi.org/10.54499/UID/00324/2025）提供的经费支持，该中心隶属葡萄牙科学技术基金会（FCT），资助项目编号为 UID/00324/2025 和 UID/PRR/00324/2025。

参考文献

[1] D. Bourn。《原模范畴中的正规子对象与阿贝尔对象》。《代数杂志》，(228):143–164, 2000年。[2] D. Bourn 和 M. Gran。《原模范畴中的中心性与正规性》。《范畴理论及其应用》，9(8):151–165, 2002年。[3] M.M. Clementino, N. Martins-Ferreira, A. Montoli。《预序群的范畴行为》。《纯粹与应用代数杂志》，9 (8):4226–4245, 2019年。[4] S. Eilenberg。《自动机、语言与机器》，A卷，哥伦比亚大学，纽约。[5] J. Elgueta，《幺半群上的正规子幺半群与同余关系》，《澳大利亚数学会杂志》，第116卷，第3期，2024年6月，页331–362。[6] K. Henckell 和 J-E. Pin。《有序幺半群与J-平凡幺半群》。《Birget, J-C.; Margolis, S., Meakin, J.; Sapir, M.（编）. 群与半群中的算法问题》，Birkausern，美国马萨诸塞州波士顿，页121–137，2000年，《数学趋势》。hal-00112620。[7] G. Janelidze, L. Márki 和 A. Ursini。《泛代数与半阿贝尔范畴中的理想与clot》。《代数杂志》，307 (2007), 191–208。[8] B. Metere。《正则 Mal’tsev 范畴中的 Bourn-正规单态射》。《范畴理论及其应用》，32(5):122–147, 2017年。

[9] N. Martins-Ferreira 和 M.Sobral。《预序幺半群的 Schreier 分裂扩张》。《逻辑与代数编程方法期刊》(2020年)。网址：https://doi.org/10.1016/jlamp.2021.100643。[10] N. Martins-Ferreira 和 M. Sobral。《幺半群单态射的正规性》。《数学探索》(2023年)。网址：https://doi.org/ 10.1016/j.indag.2023.03.007。[11] J-E. Pin。《句法半群》。《Rozenberg, G.; Salomaa, A.（编）. 形式语言理论手册》，Springer - Verlag。第1卷：122–147，1997年。

Michael Hoefnagel 数学科学系 斯
泰伦博斯大学 私人邮政信箱 X1，马
蒂兰 7602 南非

国家理论与计算科学研究所（NITheCS） 南非
mhoefnagel@sun.ac.za

Manuela Sobral 数学系
科英布拉大学 邮政信箱
3008，3001–454 科英布拉
葡萄牙
sobral@mat.uc.pt

Nelson Martins-Ferreira 数学系 高
等技术与管理学院 莱里亚理工学院
2411–901 莱里亚 葡萄牙
martins.ferreira@ipleiria.pt