arXiv:2602.14047v1 [math.FA] 15 Feb 2026

关于 Schur–Agler 范数

Michael Hartz *, Yi Wang †

2026年2月17日

摘要

我们将多圆盘上全纯函数的 Schur–Agler 范数描述为一个凸优化问题的解。我们从理论和实践两个角度探讨这一描述所带来的结果。首先，我们统一证明了已知结论：可以通过对角化矩阵组或幂零矩阵组来检验 Schur–Agler 范数；此外，我们还给出了 Agler 分解存在性的一种新证明。其次，我们将 Schur–Agler 空间的前对偶描述为多圆盘上的一个解析函数空间。第三，我们在统一框架下处理了已有的冯·诺伊曼不等式反例，并展示了若干构造反例的方法。在实践方面，我们说明了如何利用半定规划对齐次多项式的 Schur–Agler 范数进行数值近似。

关键词：Schur–Agler 范数、冯·诺伊曼不等式、Andô 不等式、可交换压缩算子、汉克尔算子、半定规划 MSC（2020年）：主要分类 47A13；次要分类 47A20、47B35、90C22

1 引言

1951年，约翰·冯·诺依曼在 [32] 中证明了以下不等式：设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个压缩算子，即 $\|T\| \leq 1$，则对于任意解析多项式 $p \in \mathbb{C}[z]$,

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_\infty.$$

这里，$\|p\|_\infty$ 表示 p 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的上确界范数。1963年，Tsuyoshi Andô 在 [8] 中证明了冯·诺伊曼不等式的二变量类比。也就是说，对于希尔伯特空间上的一对可交换压缩算子 (T_1, T_2) 以及任意解析多项式 $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \|p\|_\infty := \|p\|_{\mathbb{D}^2}.$$

然而，1973 年，N. Th. Varopoulos 在 [31] 中证明，对于三个或更多交换压缩算子，相应的不等式不成立。例如，[11][12][17][30]中构造了明确的反例。为推广或解释这一现象而开展的研究，推动了算子理论、算子代数和函数论的发展。综述论文 [10]和著作 [3][6][26][27]包含了大量相关主题的参考文献。关于一些较新的进展，也可参见论文 [4][14][15][20][21][22] 。

*萨尔大学数学系，66123 萨尔布吕肯，德国。M.H. 的部分研究经费来自德国研究基金会的埃米·诺特计划（DFG 项目编号 466012782）。

†重庆大学数学与统计学院、数学中心，401331，中国重庆，wang yi@cqu.edu.cn

若交换元组 $\mathbf{T}=(T_1,\ \cdots,\ T_d)$ 中的算子满足：对每个 i，都有$\|T_i\|<1$，则称该元组由严格压缩算子组成。对于定义在 $\mathbb{D}^d$上的全纯函数 f，其 Schur–Agler 范数为

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}:=\sup\{\|f(\mathbf{T})\|:\mathbf{T}=(T_1,\ \cdots,\ T_d)\text{ 是由严格压缩算子组成的交换元组}\}.$$

若函数 f 满足 $\|f\|_{\mathrm{SA}}<\infty$，则称其属于 Schur–Agler 空间 $\mathcal{SA}_d$。容易证明 $\|f\|_{\mathrm{SA}}\geq\|f\|_\infty$。因此 $\mathcal{SA}_d\subseteq H^\infty(\mathbb{D}^d)$。经典的冯·诺伊曼不等式和 Andˆo 不等式表明，当 $d=1,\ 2$，$\|f\|_{\mathrm{SA}}=\|f\|_{\mathbb{D}^d}$且 $\mathcal{SA}_d=H^\infty(\mathbb{D}^d)$ 时。对于 $d\geq 3$，尚不清楚冯·诺伊曼不等式是否在某个常数倍意义下成立。等价地说，我们不知道这两个范数是否等价，或者这两个空间是否包含相同的函数集合。令

$$C(d)=\sup\left\{\frac{\|p\|_{\mathrm{SA}}}{\|p\|_\infty}\ :\ p\in\mathbb{C}[\mathbf{z}],p\neq 0\right\}=\sup\left\{\frac{\|f\|_{\mathrm{SA}}}{\|f\|_\infty}\ :\ f\in\mathcal{SA}_d,f\neq 0\right\}.$$

（例如，可以利用 Fej´er 均值看出该等式，参见下文引理 2.3。）因此，问题在于 $C(d)$ 对于 $d\geq 3$ 是否有限。令 $P_{d,\ n}$ 为d 个变量的次数为 n 的齐次多项式空间。当不会引起混淆时，我们简记 P_n 为$P_{d,\ n}$。定义

$$C(d,n)=\sup\left\{\frac{\|p\|_{\mathrm{SA}}}{\|p\|_\infty}\ :\ p\in P_{d,n},\ p\neq 0\right\}.$$

通过添加一个变量使多项式齐次，可以证明

$$C(d)\leq\sup_n C(d+1,n)\leq C(d+1),$$

从而将许多问题归结为齐次情形。在 [12], P. G. Dixon 给出了 $C(d,n)$ 的上界和下界：

$$d^{\frac{1}{2}[\frac{n-1}{2}]}\lesssim_n C(d,n)\lesssim_n d^{\frac{n}{2}-1}.$$

这里，记号 $A\lesssim_n B$ 表示存在一个常数 C，它仅依赖于 n，使得$A\leq CB$。在 [15], 第一作者证明，对于 $d\geq 3$,

$$C(d,n)\lesssim_d(\log(n+1))^{d-3}.$$

特别地，$\sup_n C(3,n)<\infty$。

本文的动机源于以下简单观察：

(1) 要计算 Schur–Agler 范数，只需考虑由严格压缩算子构成的循环交换元组；

(2) 一个循环交换元组 $\mathbf{T}$，带有一个指定的循环向量 ξ，在酉等价意义下由该半内积确定

$$\langle p,q\rangle_{\mathbf{T},\xi}:=\langle p(\mathbf{T})\xi,q(\mathbf{T})\xi\rangle,\quad\forall p,q\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]=\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_d].$$

(3) 对于严格压缩循环交换元组（$\mathbf{T}$ ξ），相关的半内积$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbf{T},\ \xi}$ 通过以下方式唯一确定 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 上的一个正有界算子 $L_{\mathbf{T},\ \xi}$

$$\langle L_{\mathbf{T},\xi}p,q\rangle_2=\langle p,q\rangle_{\mathbf{T},\xi},\quad\forall p,q\in\mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

我们定义如下正算子凸锥。

$$\mathcal{L}_c=\left\{L\in\mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d))\ :\ L\geq 0,\ M_{z_i}^*LM_{z_i}\leq L,\ i=1,\cdots,d\right\}.$$

那么 $L_{\mathbf{T},\ \xi}\in\mathcal{L}_c$。反过来，每个算子 $L\in\mathcal{L}_c$ 都定义了一个交换元组 $\mathbf{T}$，它具有循环向量 ξ，使得

$$\langle p(\mathbf{T})\xi,q(\mathbf{T})\xi\rangle=\langle Lp,q\rangle_2.$$

我们将在第 3 节开头更详细地阐述上述内容。上述观察结果导出了以下描述：Schur–Agler 范数是一个凸优化问题的解。

引理 1.1 (引理 3.3)。 对于任意 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$,

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}^2 = \sup\left\{ \frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_c, L \neq 0 \right\},$$

等式两边都允许取无穷大。

对于齐次的 $p \in P_{d,\ n}$，上述描述可化为有限维凸锥

$$\mathcal{L}_c^{(n)} = \left\{ L \in \mathcal{L}_c \ : \ L = \sum_{k=0}^{n} L_k, \text{ where } L_k \in \mathcal{B}(P_{d,k}) \right\},$$

见引理 3.4。

我们指出，与 $L \in \mathcal{L}_c^{(n)}$对应的算子元组是 $n+1$ 阶幂零的。作为比较，我们还给出上确界范数的一个平行凸描述（引理 3.5），其中锥 $\mathcal{L}_c$ 被锥替代

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t &= \left\{ L \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d)) \ : \ L \geq 0,\ M_{z_i}^* L M_{z_i} = L,\ i = 1, \cdots, d \right\} \\ &= \left\{ \text{positive Toeplitz operators on } H^2(\mathbb{D}^d) \right\}.\end{aligned}$$

我们的凸描述与 Agler 关于循环算子和 Schur–Agler 范数的线性泛函方法密切相关（参见 [1][6]）。它们也与 [23]中的方法有关。为展示这一框架的用途，我们给出两个已有结果的新证明。首先，我们简洁而统一地证明，在计算 Schur–Agler 范数时，只需考虑幂零矩阵或可对角化矩阵。我们用 $\mathcal{C}_d$ 表示由严格压缩矩阵构成的循环交换d-元组的集合（矩阵大小不限）。

命题 1.2。对于 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^d)$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{SA}} &= \sup\left\{ \|f(\mathbf{T})\| \ : \ \mathbf{T} \in \mathcal{C}_d \text{ is jointly nilpotent} \right\} \\ &= \sup\left\{ \|f(\mathbf{T})\| \ : \ \mathbf{T} \in \mathcal{C}_d \text{ is jointly diagonalizable} \right\}.\end{aligned}$$

可对角化矩阵足以满足要求这一事实，源自 Agler 定理 [2]； [5]中证明了一个更一般的结果。关于幂零矩阵的陈述以及相关历史讨论，见 [22]。

我们证明命题 1.2 的关键步骤，是说明在计算 Schur–Agler 范数时，只需考虑与 Hardy 空间上的 M_z 相似的可交换压缩元组（命题 4.1）。用 L算子语言证明这一事实会非常简短：在$\mathcal{L}_c$中，可以用 $L + \epsilon I$逼近 L 。我们还为 Agler 分解的存在性给出了一个新的证明（定理 4.4）。关键思路是将配对 $\mathrm{Her}(\mathbb{D}^d) \times \left(\mathrm{Her}(\mathbb{D}^d)\right)^*$（见注 3.8）替换为配对 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)) \times \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d))$，并将遗传函数恢复为 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d))$中某个算子的核函数。

这些凸描述还使我们能够将 Schur–Agler 空间的预对偶实现为 $\mathbb{D}^d$ 上的解析函数空间。对于 $g \in H^2(\mathbb{D}^d)$，定义

$$\mathcal{L}_c(g) = \{ L \in \mathcal{L}_c \ : \ L \geq g \otimes g \}, \quad \text{and} \quad \|g\|_* = \inf\left\{ \sqrt{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_c(g) \right\}.$$

我们证明如下结论。

定理 1.3 (定理 5.4 (1))。 对偶 *Schur–Agler* 范数 $\|\cdot\|_*$ 是一个范数，并且对于每个$f \in H^2(\mathbb{D}^d)$，我们有

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} = \sup\{|\langle f, g\rangle_2| : g \in H^2(\mathbb{D}^d), \|g\|_* \le 1\}.$$

事实上，该映射

$$\mathcal{SA}_d \to (H^2(\mathbb{D}^d), \|\cdot\|_*)^*, \quad f \mapsto \langle \cdot, f\rangle_2,$$

是一个共轭线性等距同构。

相应地，齐次多项式上的简化凸描述给出了 $\|q\|_*$ 关于$q \in P_{d,\ n}$的简化描述。此外， $\|\cdot\|_{\mathrm{SA}}$ 和 $\|\cdot\|_*$ 限制在每个$P_{d,\ n}$ 上时互为对偶（定理 5.4 (2)）。上确界范数的凸描述给出了 H^∞(**$\mathbb{D}^d$**)的前对偶的一种实现（命题 5.6）。令($\mathcal{SA}_d$)$_*$ 表示(H^2(**$\mathbb{D}^d$**) $\|\cdot\|_*$)的完备化。由定理 1.3 可知，该空间恰好是 $\mathcal{SA}_d$的前对偶。在命题5.5中，我们确定了($\mathcal{SA}_d$)$_*$的一些基本性质。特别地，它是 $\mathbb{D}^d$上的一个解析函数空间。我们相信，预对偶 Schur–Agler 空间($\mathcal{SA}_d$)$_*$ 或将为新的研究打开大门。

借助 L 算子框架，我们也能够重新表述在[11][12][17][30]中构造的反例。在附录中，我们给出它们的 L算子的计算，并解释其构造。由这些例子可以得出一个结论：Hankel 算子在其构造中发挥着重要作用。设 $g \in H^\infty$(**$\mathbb{D}^d$**)，并设 $\Gamma_g \in \mathcal{B}$(H^2(**$\mathbb{D}^d$**)) 为符号为 g 的小 Hankel 算子。利用众所周知的恒等算子 $M_{z_i}^*\Gamma_g = \Gamma_g M_{z_i}$，很容易证明$\Gamma_g^*\Gamma_g \in \mathcal{L}_c$。仅凭这一构造无法得到冯·诺伊曼不等式的任何反例。然而，对于齐次多项式 $q \in P_{d,\ n}$ 和 $0 \le k \le n$，可以构造

$$L = \Gamma_q^*\Gamma_q\big|_{P_{d,\ge k}} + CP_{d,<k}.$$

这里 $C > 0$ 是一个经过适当选择的常数；我们滥用记号，用 $P_{d,\ \ge k}$ （分别用 $P_{d,\ <k}$）同时表示次数为 $\ge k$ （分别为 $< k$）的多项式空间及其上的投影。基于对 L 的这一选择，我们得到两种构造反例的方法（第 6 节中的方法 1 和方法 2）。事实证明， [11][12][30] 中的反例都符合方法 2。Holbrook 例子 [17]则更为微妙。不过，通过改进的方法（方法 3 和方法 4），我们得到了相同的下界。

我们构造 L 的方法给出了对偶 Schur–Agler 范数 $\|\cdot\|_*$的上界，从而得到 Schur–Agler 范数的下界。这些下界可以用弱乘积相当明确地描述。定义

$$\|p\|_{P_{d,k}\odot P_{d,l}} = \inf\left\{\sum_{i=1}^m \|f_i\|_2 \cdot \|g_i\|_2 \ :\ f_i \in P_{d,k},\ g_i \in P_{d,l},\ \text{and } p = \sum_{i=1}^m f_i g_i\right\}, \quad \forall p \in P_{d,k+l},$$

and

$$\|p\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,l}} = \inf\left\{\sum_{i=1}^d \|f_i\|_{P_{d,k}\odot P_{d,l}} \ :\ f_i \in P_{d,k+l},\ \text{and } p = \sum_{i=1}^d z_i f_i\right\}, \quad \forall p \in P_{d,k+l+1}.$$

同样，在不会引起混淆时，我们将省略下标“d”。对于任意 $p \in P_n$，我们还定义

$$|||p|||_1 := \max_{0\le k\le n} \|p\|_{P_k\odot P_{n-k}}, \quad |||p|||_2 := \max_{0\le k\le n-1} \|p\|_{Z\odot P_k\odot P_{n-k-1}}.$$

接下来我们证明如下定理。

定理 1.4 (定理 6.3)。 对于任意 $p \in P_{d,\ n}$,

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} \geq |||p|||_2 \geq |||p|||_1.$$

由于我们的方法 2 复现了 Dixon 下界的构造，我们的下界 $|||\cdot|||_2$ 至少不小于 [12] 中给出的下界。弱乘积表达式也符合这样的一般启发：Schur–Agler 范数较大的多项式应该难以分解。尽管如此，事实证明，这类下界并不能说明 $C(d) = \infty$。实际上，我们证明它们等价于 Hardy 范数，而 Hardy 范数小于上确界范数。

定理 1.5 (定理 7.1)。 设 $d \in \mathbb{N}$。存在常数 $C_d \leq \binom{2d-2}{d-1}$，使得对所有$p \in P_{d,\ n}$，都有

$$\|p\|_2 \leq |||p|||_1 \leq \sqrt{C_d}\|p\|_2.$$

此外,

$$|||p|||_1 \leq |||p|||_2 \leq \sqrt{d}|||p|||_1.$$

我们还列出另外三种可能有用的方法（方法 3–5）。然而，由此得到的下界没有简洁的表达式。

我们对 Schur–Agler 范数和对偶 Schur–Agler 范数的凸描述，也使得人们能够利用半定规划对这些范数进行数值近似。事实上，上述许多结果都受到这类数值实验的启发。

本文结构如下。第 2 节回顾本文所用的一些基本定义和结果。第 3 节对前文提到的观察作更详细的说明，并给出 Schur–Agler 范数的凸描述、齐次多项式的简化描述，以及上确界范数的对应描述。第 4 节为两个已知结果给出新的证明，即在可对角化元组或幂零元组上检验冯·诺伊曼不等式的结果，以及 Agler 分解的存在性。第 5 节证明定理 1.3，以及关于齐次多项式和上确界范数的相应结果。我们还证明预对偶 Schur–Agler 空间 $(\mathcal{SA}_d)_*$ 的一些基本性质。第 6 节介绍 5 种利用 Hankel 算子构造 $L \in \mathcal{L}_c$ 的方法。前两种方法给出了定理 1.4 中 Schur–Agler 范数的弱乘积下界。对于 Kaijser-Varopoulos-Holbrook 型多项式，即这些多项式

$$p_t(z) = \sum_{i=1}^{d} z_i^2 + \frac{t}{2}\sum_{i\neq j} z_i z_j, \quad t \in \mathbb{C},$$

我们明确计算了它们的 Schur–Agler 范数和对偶 Schur–Agler 范数。在第 7 节中，我们证明定理 1.5。在第 8 节中，我们说明如何使用半定规划近似 $\|\cdot\|_{\mathrm{SA}}$ 和 $\|\cdot\|_*$。在附录中，我们计算反例 [11][12][17][30] 中的 L 算子，并解释它们的作用。

致谢：作者谨向 Catalin Badea、Joseph Ball、Chunlan Jiang、Greg Knese、Dexie Lin、Orr Shalit 和 Yijun Yao 致谢，感谢他们进行的有益讨论。

人工智能工具（如 ChatGPT 和 DeepSeek）被用于进行文献检索、编写数值实验代码以及进行一些初步计算。最终文章完全由人工撰写。

2 预备知识

在本节中，我们简要回顾 Hardy 空间、Hankel 算子、弱乘积以及 Schur–Agler 范数的一些基本知识。

2.1 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$

对于 $d \in \mathbb{N}$，Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上的全纯函数空间，其泰勒系数平方可和。也就是说，

$$H^2(\mathbb{D}^d) := \left\{ f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} a_\alpha z^\alpha \ : \ \|f\|_2^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} |a_\alpha|^2 < \infty \right\}.$$

关于 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 的背景知识可参见 [28]。可以证明，对于任意 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$，径向极限 $f^*(z) := \lim_{r \to 1^-} f(rz)$ 对几乎所有 $z \in \mathbb{T}^d$ 都收敛，且映射 $f \mapsto f^*$ 给出了到 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 中的等距嵌入。因此，通常将 f 与 f^* 等同，并将$H^2(\mathbb{D}^d)$视为 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 的子空间。回顾一下，函数 $\{z^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^d}$ 构成了 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 的标准正交基。于是，$H^2(\mathbb{D}^d)$ 是 $\{z^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d}$的闭线性包。众所周知，$H^2(\mathbb{D}^d)$ 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上的再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$K_z(w) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{1 - w_i \bar{z}_i}.$$

这意味着，对于任意 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ 和任意 $z \in \mathbb{D}^d$，$f(z) = \langle f, K_z \rangle_2$。于是 $\|K_z\|^2 = \prod_{i=1}^d \frac{1}{1-|z_i|^2}$。记 $k_z = \frac{K_z}{\|K_z\|}$ 为 z处的归一化再生核。令 P 为 Szegő 投影，即从 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 到 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 的正交投影。对于 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$，小汉克尔算子 Γ_ϕ 定义为

$$\Gamma_\phi : H^2(\mathbb{D}^d) \to H^2(\mathbb{D}^d), \quad \Gamma_\phi(f) = P(\phi \cdot Uf),$$

其中 $Uf(z) = f(\bar{z})$。等价地，$\langle \Gamma_\phi f, g \rangle_2 = \langle \phi, fg \rangle_2$，其中

$$\widehat{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}. \tag{2.1}$$

下面这个众所周知的恒等式对我们的证明至关重要：对于任意 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $i = 1, \cdots, d$，

$$M_{z_i}^* \Gamma_\phi = \Gamma_\phi M_{z_i}. \tag{2.2}$$

2.2 弱乘积

回忆一下，$P_{d,n}$ 是由 d个变量构成的 n次齐次解析多项式空间。令$Z_d = \{z_1, \cdots, z_d\}$。对于 $k, l \in \mathbb{N}_0$，第 6 节和第 7 节将使用以下弱乘积范数。

$$\|p\|_{P_{d,k} \odot P_{d,l}} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \|f_j\|_2 \cdot \|g_j\|_2 \ : \ f_j \in P_{d,k}, \ g_j \in P_{d,l}, \text{ and } p = \sum_{j=1}^m f_j g_j \right\}, \quad \forall p \in P_{d,k+l};$$

and

$$\|p\|_{Z_d \odot P_{d,k} \odot P_{d,l}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^d \|f_i\|_{P_{d,k} \odot P_{d,l}} \ : \ f_i \in P_{d,k+l}, \text{ and } p = \sum_{i=1}^d z_i f_i \right\}, \quad \forall p \in P_{d,k+l+1}.$$

容易验证

$$\|p\|_{P_{d,k}\odot P_{d,l}} \le \|p\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,l-1}}; \tag{2.3}$$

这一点也可以　从下面的对偶性看出。对于 $n\in\mathbb{N}$，我们在 $P_{d,n}$ 上定义另外两个范数:

$$\|q\|_{\mathrm{Han}_k} = \left\|\Gamma_q\big|_{P_{d,k}}\right\|, \quad 0\le k\le n,$$

and

$$\|q\|'_{\mathrm{Han}_k} = \max_{1\le i\le d}\left\|\Gamma_q M_{z_i}\big|_{P_{d,k}}\right\|, \quad 0\le k\le n-1.$$

我们将使用 Hankel 与弱乘积范数之间的以下标准对偶性。

引理 2.1. *(1)* 对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0\le k\le n$，$\|\cdot\|_{\mathrm{Han}_k}$ 和 $\|\cdot\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}}$ 上的范数 $P_{d,n}$ 关于通常的柯西配对互为对偶。也就是说，这些映射

$$(P_{d,n},\|\cdot\|_{\mathrm{Han}_k})\to(P_{d,n},\|\cdot\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}})^*, \quad q\mapsto\langle\cdot,q\rangle_2,$$

and

$$(P_{d,n},\|\cdot\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}})\to(P_{d,n},\|\cdot\|_{\mathrm{Han}_k})^*, \quad q\mapsto\langle\cdot,q\rangle_2,$$

是共轭线性等距同构。

(2) 对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0\le k\le n-1$，$\|\cdot\|'_{\mathrm{Han}_k}$ 和 $\|\cdot\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}}$ 上的范数 $P_{d,n}$ 关于通常的柯西配对互为对偶。

证明。(1) 由于$P_{d,k}$ 是有限维的，只需证明第一个映射是等距映射。为简化记号，我们记 $\langle\cdot,\cdot\rangle_2=\langle\cdot,\cdot\rangle$。

设$q\in P_{d,n}$，并令$h=\sum_j f_jg_j\in P_{d,k}\odot P_{d,n-k}$，其中$f_j\in P_{d,k}$ 且$g_j\in P_{d,n-k}$。则

$$\begin{aligned}|\langle h,q\rangle| = \Big|\sum_j\langle q,f_jg_j\rangle\Big| = \Big|\sum_j\langle\Gamma_q\widehat{f_j},g_j\rangle\Big| &\le \sum_j\|\Gamma_q\widehat{f_j}\|_2\|g_j\|_2\\ &\le \|q\|_{\mathrm{Han}_k}\sum_j\|f_j\|_2\|g_j\|_2.\end{aligned}$$

对 h的所有此类表示取下确界，得到

$$|\langle h,q\rangle|\le\|q\|_{\mathrm{Han}_k}\|h\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}}.$$

反过来，由于 Γ_q 将$P_{d,k}$ 映入$P_{d,n-k}$，我们有

$$\begin{aligned}\|q\|_{\mathrm{Han}_k} &= \sup\{|\langle\Gamma_q\widehat{f},g\rangle| : f\in P_{d,k},g\in P_{d,n-k},\|f\|_2,\|g\|_2\le1\}\\ &= \sup\{|\langle q,fg\rangle| : f\in P_{d,k},g\in P_{d,n-k},\|f\|_2,\|g\|_2\le1\}\\ &\le \sup\{|\langle h,q\rangle| : h\in P_{d,k}\odot P_{d,n-k},\|h\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}}\le1\}.\end{aligned}$$

这表明

$$\|q\|_{\mathrm{Han}_k} = \sup\{|\langle h,q\rangle| : h\in P_{d,k}\odot P_{d,n-k},\|h\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}}\le1\}.$$

(2) 设 $q\in P_{d,n}$ 且 $h=\sum_i z_if_i\in P_{d,n}$。利用 $\Gamma_qM_{z_i}=\Gamma_{M_{z_i}^*q}$ 这一事实和 (1)，我们得到

$$|\langle h,q\rangle|\le\sum_i|\langle z_if_i,q\rangle| = \sum_i|\langle f_i,M_{z_i}^*q\rangle|\le\sum_i\|f_i\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}}\|\Gamma_{M_{z_i}^*q}\big|_{P_{d,k}}\|$$

$$\leq \|q\|'_{\mathrm{Han}_k} \sum_i \|f_i\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}}.$$

因此

$$|\langle h, q\rangle| \leq \|q\|'_{\mathrm{Han}_k} \|h\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\left\|\Gamma_q M_{z_i}\Big|_{P_{d,k}}\right\| &= \sup\{|\langle f, M_{z_i}^* q\rangle| : f \in P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}, \|f\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq 1\}\\ &= \sup\{|\langle z_i f, q\rangle| : f \in P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}, \|f\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq 1\}\\ &\leq \sup\{|\langle h, q\rangle| : h \in Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}, \|h\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq 1\}.\end{aligned}$$

这表明

$$\|q\|'_{\mathrm{Han}_k} = \sup\{|\langle h, q\rangle| : h \in Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}, \|h\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq 1\}. \qquad \square$$

注 2.2. 众所周知，弱乘积空间可以视为迹类算子空间的商空间；例如参见 [7, 第 2]节。在我们的情形下，这一点可以表述得非常明确，并可用于计算弱乘积范数的上界。具体而言，设 $p \in P_{d,\ n}$，比如 $p(z) = \sum_{|\gamma|=n} c_\gamma z^\gamma$，并令 $0 \leq k \leq n$。将次数为 k 的单项式 z^α 按某种方式排列，并将所得列向量记为 $[z^\alpha]_{|\alpha|=k}$。那么我们可以表示

$$p(z) = \left[z^\alpha\right]_{|\alpha|=k}^T A \left[z^\beta\right]_{|\beta|=n-k},$$

其中 $A = [a_{\alpha,\beta}]$ 是适当大小的标量矩阵。注意，标量矩阵 A 能以这种方式表示p，当且仅当对所有 γ，$c_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha\beta}$。

如果 $A = \sum_j v_j w_j^T$ 是将 A 分解为秩一矩阵的分解，那么我们就得到一个弱分解 $p = \sum_j f_j g_j$，其中

$$f_j = \left[z^\alpha\right]^T v_j \quad \text{and} \quad g_j = w_j^T \left[z^\beta\right].$$

由于 $\|f_j\|_2 = \|v_j\|$ 和 $\|g_j\|_2 = \|w_j\|$，这表明

$$\|p\|_{P_k\odot P_{n-k}} \leq \|A\|_{\mathrm{nuc}}.$$

反过来，p 的任意弱分解都会得到某个表示矩阵A 的核分解，其中该矩阵表示 p，因此 $\|p\|_{P_k\odot P_{n-k}}$ 是 p的表示矩阵的核范数的下确界。这也表明，在定义 $P_k \odot P_{n-k}$上的弱乘积范数时，只需考虑长度为 $m \leq \min(\dim(P_k), \dim(P_{n-k}))$ 的弱分解。

2.3 Schur–Agler 空间

对于多项式 $p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, ，其 Schur–Agler 范数定义为

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} := \sup\left\{\|p(\mathbf{T})\| \ : \ \mathbf{T} \text{ is a commuting } d \text{ tuple of contractions}\right\}.$$

更一般地，我们将全纯函数 $f\colon \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$ 的 Schur–Agler 范数定义为

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} = \sup\{\|f(\mathbf{T})\| : \mathbf{T} \text{ is a commuting } d\text{-tuple of strict contractions}\},$$

其中，$f(\mathbf{T})$（例如）定义为将$\mathbf{T}$ 代入 f 在 0 处的幂级数展开中。Schur–Agler 空间 $\mathcal{SA}_d$ 由所有满足 $\|f\|_{\mathrm{SA}} < \infty$的全纯 f 构成。显然，$\mathcal{SA}_d \subset H^\infty(\mathbb{D}^d)$。

引理 2.3。设 $f \in \mathcal{SA}_d$，并令 p_n 为 f 的第 n 个 *Fej´er* 均值。则，当 $n \to \infty$ 时，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 中的 $p_n \to f$，都有 $\|p_n\|_{\mathrm{SA}} \le \|f\|_{\mathrm{SA}}$。

证明。这由 Fej´er 核的标准性质可得；例如参见 [19, 第 1.2] 节。事实上，设 $F_n(z) = \sum_{k=-n}^{n}(1 - \frac{|k|}{n+1})z^k$ 为单变量的 Fej´er 核。因此，若 $f \in \mathcal{SA}_d$ 具有齐次分解 $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$，则

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) f_k(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z\bar{\lambda}) F_n(\lambda) d\sigma(\lambda).$$

p_n 的第一种表示容易推出：当 $n \to \infty$ 时，$p_n \to f$ 属于 $H^2(\mathbb{D}^d)$。第二种表示中的积分在 z 中 $\mathbb{D}^d$ 的紧子集上一致收敛，因此若 $\mathbf{T}$ 是一组严格交换收缩算子，则

$$p_n(T) = \int_{\mathbb{T}} f(\bar{\lambda}\mathbf{T}) F_n(\lambda) d\sigma(\lambda),$$

且该积分按算子范数收敛。由于对所有 $\lambda \in \mathbb{T}$ 都有 $\|f(\lambda \mathbf{T})\| \le \|f\|_{\mathrm{SA}}$，我们可以利用 Fej´er 核的正性与三角不等式得出

$$\|p_n(T)\| \le \int_{\mathbb{T}} \|f\|_{\mathrm{SA}} F_n(\lambda) d\sigma(\lambda) = \|f\|_{\mathrm{SA}}. \qquad \square$$

3 Schur–Agler 范数的凸描述

本节中，我们利用$H^2(\mathbb{D}^d)$上的正算子锥来描述 Schur–Agler 范数。对于齐次多项式，我们将该表达式化简为一个更小的锥。我们还给出上确界范数的对应描述。本节的结果为后续各节奠定了基础。

构造 3.1. 设 $\mathbf{T} = (T_1, \cdots, T_d)$ 是希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的一个交换 d元算子组。回忆一下，若向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 满足 $\{p(\mathbf{T})\xi : \ p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]\}$ 在 $\mathcal{H}$中稠密，则称其为 $\mathbf{T}$ 的循环向量。我们称 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 为循环交换（d元）组。若存在酉算子 U使得 $UT_i = T_i'U$且 $U\xi = \xi'$，则称两个循环交换元组 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 和 $(\mathbf{T}', \xi')$ 酉等价。对于循环交换元组 $(\mathbf{T}\ \xi)$，在 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ 上定义半内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{T},\xi}$ 如下：

$$\langle p, q \rangle_{\mathbf{T},\xi} = \langle p(\mathbf{T})\xi, q(\mathbf{T})\xi \rangle, \quad \forall p, q \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

令 $\mathcal{I} = \{p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : \ \langle p, p \rangle_{\mathbf{T},\xi} = 0\} = \{p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : \ p(\mathbf{T}) = 0\}$，赋予 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\mathcal{I}$ 由 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{T},\xi}$诱导的内积，并记其完备化为 $\mathcal{H}'$。定义

$$T_i' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}', \quad \text{determined by} \quad p + \mathcal{I} \mapsto z_i p + \mathcal{I}, \quad \forall p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}],\ \forall i = 1, \cdots, d.$$

取 $\xi' = 1 + \mathcal{I}$。容易验证，$(\mathbf{T}\ \xi)$ 与 $(\mathbf{T}', \xi')$ 酉等价。换言之，可以利用半内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{T},\xi}$ 重构元组 $(\mathbf{T}\ \xi)$。

在本文中，我们将上述构造进一步推进一步。其思路是将半内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{T},\xi}$ 表示为包含 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$,的解析函数空间上的一个正算子，并利用该空间上的算子论与函数论工具。

构造 3.2。 设 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 是一个循环交换的 d-元组，并假设存在常数 $C \geq 0$，使得对于所有 $p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$，$\|p(T)\xi\| \leq C\|p\|_2$ 成立。那么，下列等式定义了 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$上的一个有界线性算子 $L_{\mathbf{T},\xi}$：

$$\langle L_{\mathbf{T},\xi} p, q\rangle_2 = \langle p(\mathbf{T})\xi, q(\mathbf{T})\xi\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall p, q \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

例如，当每个 T_i 都是严格压缩算子时，这一结论成立；此时实际上我们有

$$\langle L_{\mathbf{T},\xi} f, g\rangle_2 = \langle f(\mathbf{T})\xi, g(\mathbf{T})\xi\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall f, g \in H^2(\mathbb{D}^d).$$

Let

$$\mathcal{L}_c = \left\{ L \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d)) \ : \ L \geq 0,\ M_{z_i}^* L M_{z_i} \leq L,\ i = 1, \cdots, d \right\}.$$

如果 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 是循环交换压缩算子元组（且 $L_{\mathbf{T},\xi}$ 有界），那么很容易验证 $L_{\mathbf{T},\xi} \in \mathcal{L}_c$。

反过来，给定 $L \in \mathcal{L}_c,\ L \neq 0$，定义半内积如下：

$$\langle p, q\rangle_L = \langle Lp, q\rangle, \quad \forall p, q \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

于是，构造 3.1 得到一个循环交换压缩算子元组 $(\mathbf{T}\ \xi)$，满足 $L = L_{\mathbf{T},\xi}$，因此

$$\langle Lp, q\rangle_2 = \langle p(\mathbf{T})\xi, q(\mathbf{T})\xi\rangle, \quad \forall p, q \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

或者，写作 $L = A^*A$，并令

$$T_i : \overline{\mathrm{Range}A} \to \overline{\mathrm{Range}A}, \quad \text{determined by} \quad A(f) \mapsto A(z_i f), \quad \forall f \in H^2(\mathbb{D}^d).$$

那么很容易验证，$\mathbf{T}$ 是一个带有循环向量 $\xi = A1$ 的交换压缩算子组，并且$L = L_{\mathbf{T},\xi}$。在酉等价意义下，元组 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 是唯一的。我们称它为与 L 相关联的循环交换元组。

下面的关键引理将在本文中反复用到。

引理 3.3. 对于任意 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$,

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}^2 = \sup\left\{ \frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_c, L \neq 0 \right\},$$

等式两边都允许取无穷大。

证明。 首先注意，若 $L \in \mathcal{L}_c$ 满足 $\langle L1,\ 1\rangle_2 = 0$，则与 L关联的交换元组为零，因此 $L = 0$。所以右侧定义良好。令 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$。令 $L \in \mathcal{L}_c$。对于$0 < r < 1$，定义

$$D_r : H^2(\mathbb{D}^d) \to H^2(\mathbb{D}^d), \quad D_r(h) = h_r, \quad \text{where } h_r(z) = h(rz).$$

记 $L_r = D_r L D_r$。于是

$$L_r \in \mathcal{L}_c, \quad M_{z_i}^* L_r M_{z_i} \leq r^2 L_r,$$

并且当 $r \to 1^-$时， $L_r \to L$ 在强算子拓扑中。令（$\mathbf{T}\ \xi$）为与 L_r 相关联的循环交换元组。于是 $\|T_i\| \leq r$，并且

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}^2 \geq \|f(\mathbf{T})\|^2 \geq \frac{\|f(\mathbf{T})\xi\|^2}{\|\xi\|^2} = \frac{\langle L_r f, f\rangle}{\langle L_r 1, 1\rangle} \to \frac{\langle Lf, f\rangle}{\langle L1, 1\rangle}, \quad r \to 1^-.$$

这就证明了陈述中的不等式“$\geq$”。

反过来，注意到

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} = \sup\left\{\frac{\|f(\mathbf{T})\xi\|}{\|\xi\|} : (\mathbf{T},\xi) \text{ cyclic commuting } d\text{-tuple of strict contractions}\right\}.$$

设 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 是由严格压缩算子组成的循环交换 d-元组，且令 $L_{\mathbf{T},\xi} \in \mathcal{L}_c$ 为相应的算子。那么

$$\frac{\|f(T)\xi\|^2}{\|\xi\|^2} = \frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2}$$

这就证明了陈述中的不等式“$\leq$”。 □

设 $P_n = P_{d,n}$ 为由 d 个变量构成的次数为 n 的齐次多项式空间。对于齐次多项式，引理 3.3 可以改进，即锥 $\mathcal{L}_c$ 可以替换为有限维锥。我们定义

$$\mathcal{L}_c^{(n)} = \left\{L \in \mathcal{L}_c : L = \sum_{k=0}^{n} L_k, \text{ where } L_k \in \mathcal{B}(P_k)\right\}.$$

换言之，$\mathcal{L}_c^{(n)}$ 由 $\mathcal{L}_c$ 中满足以下条件的元素构成：约化每个 P_k，并在 $P_{\leq n}^{\perp}$ 上消失。注意，算子 $L = \sum_{k=0}^{n} L_k$（其中每个 $L_k \in \mathcal{B}(P_k)$ 都是正的）属于 $\mathcal{L}_c$，当且仅当

$$M_{z_i}^* L_k M_{z_i} \leq L_{k-1} \quad \text{for all } k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, d.$$

引理 3.4。对于任意 $p \in P_n$,

$$\|p\|_{\mathrm{SA}}^2 = \sup\left\{\frac{\langle Lp, p\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_c^{(n)},\ L \neq 0\right\}.$$

证明。我们滥用记号，用 P_k 表示次数为 k 的齐次多项式空间，也表示到该空间的正交投影。令 $L \in \mathcal{L}_c$。根据引理 3.3，只需证明存在 $L' \in \mathcal{L}_c^{(n)}$，使得 $\langle Lp, p\rangle_2 = \langle L'p, p\rangle_2$ 且 $\langle L1, 1\rangle_2 = \langle L'1, 1\rangle_2$。令 $L' = \sum_{k=0}^{n} P_k L P_k$。为证明 $L' \in \mathcal{L}_c$，我们必须检查对于每个 i，都有 $M_{z_i}^* L' M_{z_i} \leq L'$。

由于对于 $k = 1, \ldots, n$ 及 $P_0 M_{z_i} = 0$，有 $P_k M_{z_i} = M_{z_i} P_{k-1}$，因此

$$M_{z_i}^* L' M_{z_i} = \sum_{k=0}^{n} M_{z_i}^* P_k L P_k M_{z_i} = \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} M_{z_i}^* L M_{z_i} P_{k-1} \leq \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} L P_{k-1} \leq L'$$

正如所需。 □

作为比较，我们建立上确界范数的一个相关表达式。令

$$\mathcal{L}_t = \{L \in B(H^2(\mathbb{D}^d)) : L \geq 0, M_{z_i}^* L M_{z_i} = L, i = 1, \cdots, d\}.$$

显然，$\mathcal{L}_t \subset \mathcal{L}_c$。根据多圆盘上 Brown–Halmos 判据的类似结果 [25, 定理 3.1]，$\mathcal{L}_t$ 恰好由所有作用于 $H^2(\mathbb{D}^d)$上的正 Toeplitz 算子构成。

引理 3.5。对于任意 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$,

$$\|f\|_{\infty}^2 = \sup\left\{\frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_t, L \neq 0\right\},$$

其中等式两边都允许取无穷大。

证明。如上所述，$\mathcal{L}_t$ 恰好由 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 上的所有正 Toeplitz 算子组成。此外，若 $T_w \in \mathcal{L}_t$，则

$$\langle T_w f, f\rangle_2 = \int_{\mathbb{T}^d} |f|^2 w \, d\sigma.$$

因此，

$$\sup\left\{\frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_t, L \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{\int_{\mathbb{T}^d} |f|^2 w \, d\sigma}{\int_{\mathbb{T}^d} w \, d\sigma} : w \in L^\infty(\mathbb{T}^d), w \geq 0, w \neq 0\right\}.$$

右侧的上确界显然等于 $|f|^2$ 在 $\mathbb{T}^d$ 上的本质上确界，也就是 $\|f\|_\infty^2$。

□

注 3.6. 若 $d \leq 2$，则上确界范数与 Schur–Agler 范数相同，因此引理 3.3 和引理 3.5 中的表达式也相同。现在我们说明 Sz.-Nagy 的膨胀定理如何体现在我们的图景中，从而在 $d = 1$ 的情况下，不借助这两个引理的陈述，更直接地联系 $\mathcal{L}_t$ 和 $\mathcal{L}_c$。

由于 $\mathcal{L}_t \subset \mathcal{L}_c$，显然对每个 $p \in \mathbb{C}[z]$,

$$\sup\left\{\frac{\langle Lp, p\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_t, L \neq 0\right\} \leq \sup\left\{\frac{\langle Lp, p\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_c, L \neq 0\right\}. \tag{3.1}$$

反过来，设 $L \in \mathcal{L}_c$，并假设相应的循环算子（T，h）是严格压缩算子。（对这类 $L \in \mathcal{L}_c$ 取上确界即可。）设 U 是 T 的最小酉膨胀，并设 μ 是与向量 h 相关联的 U 的谱测度，即

$$\langle q(U)^* p(U) h, h\rangle = \int_{\mathbb{T}} \overline{q} p \, d\mu \quad \text{for all } p, q \in \mathbb{C}[z].$$

由于 T 是严格压缩算子，μ 是绝对连续的（见 [29, 定理 II.1.2]），即 $d\mu = w d\sigma$，其中 $w \in L^1(\mathbb{T})$ 是非负的。暂且假设 $w \in L^\infty(\mathbb{T})$，并令 $\widehat{L} = T_w$ 为以 w 为符号的托普利茨算子。于是 $L \in \mathcal{L}_t$,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{L}1, 1\rangle_2 &= \int_{\mathbb{T}} w \, d\sigma = \int_{\mathbb{T}} 1 \, d\mu = \|h\|^2 = \langle L1, 1\rangle_2 \quad \text{and} \\ \langle \widehat{L}p, p\rangle_2 &= \int_{\mathbb{T}} |p|^2 w \, d\sigma = \|p(U)h\|^2 \geq \|p(T)h\|^2 = \langle Lp, p\rangle_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\widehat{\ }$ 对所有 $p \in \mathbb{C}[z]$ 都成立，因此 $L \leq L$。由此，当 $w \in L^\infty(\mathbb{T})$ 时，我们得到 (3.1) 的反向不等式。如果 w 仅属于 $L^1(\mathbb{T})$，我们令 $\widehat{L}_n$ 为以 $\min(w, n)$ 为符号的托普利茨算子，其中 $n \in \mathbb{N}$。那么，当 $n \to \infty$ 时，(3.2) 在极限下成立，从而一般情形下的反向不等式得证。

与引理 3.4 的证明类似，可以证明，借助引理 3.5 计算齐次多项式的上确界范数时，只需考虑分次算子 $L = \sum_{k=0}^\infty L_k \in \mathcal{L}_t$，其中每个 $L_k \in \mathcal{B}(P_k)$。然而，我们不再能考虑有限和 $L = \sum_{k=0}^n L_k$，其中每个 $L_k \in \mathcal{B}(P_k)$ 都是正的，并满足

$$M_{z_i}^* L_k M_{z_i} = L_{k-1} \quad \text{for all } k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{3.3}$$

问题在于，这类算子 L可能无法扩张为正 Toeplitz 算子。下面给出一个具体例子，其中上确界范数版本的引理 3.4 不成立。这个例子是通过半定规划进行数值实验发现的（另见第 8 节），但可以用符号方法验证，原则上甚至可以手算验证。

例 3.7。设

$$p(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2+z_3^2-2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$$

为 Kaijser–Varopoulos 多项式。已知 $\|p\|_\infty=5$；例如参见 [17, 命题2]，其中给出了证明。

我们赋予 P_0 基 $\{1\}$，并赋予 P_1 基 $\{z_1,z_2,z_3\}$，然后定义算子

$$L_0=1 \quad \text{and} \quad L_1=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

此外，赋予 P_2 基 $\{z_1^2,z_2^2,z_3^2,z_1z_2,z_1z_3,z_2z_3\}$，并定义

$$L_2=\begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{10} & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} & \frac{7}{10} & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

可以验证，这些算子满足 (3.3)（例如，$M_{z_1}^* L_2 M_{z_1}$ 是 L_2 中对应于行和列指标 1、4、5 的子矩阵，其值为 L_1）。此外，L_0、L_1、L_2 均为正（L_2 的特征值为 0、0、0、$\frac{3}{2}$、$\frac{3}{2}$、3）。我们有 $\langle L1$、$1\rangle_2=1$。但 $\langle Lp$、$p\rangle_2 \doteq \frac{144}{5}=28.8>25=\|p\|_\infty^2$。 —

注 3.8. 使用凸性论证研究 Schur–Agler 范数并非新方法。在 [1]（另见 [6, 第 2 节8]）中，Agler 定义了遗传函数空间 Her($\mathbb{D}^d$)，并将压缩循环交换元组（$\mathbf{T}$ ξ）表示为有界线性泛函 $\Lambda_{\mathbf{T},\xi} \in \big(\text{Her}(\mathbb{D}^d)\big)^*$。线性泛函$\Lambda_{\mathbf{T},\xi}$ 由下式确定：

$$\Lambda_{\mathbf{T},\xi}(z^\alpha \bar{w}^\beta)=\langle \mathbf{T}^\alpha \xi, \mathbf{T}^\beta \xi\rangle, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

通过线性延拓，这确定了 $\Lambda_{\mathbf{T},\xi}$ 在 $\mathbb{C}[\mathbf{z},\mathbf{w}]$, 上的取值，而这些元素在 Her($\mathbb{D}^d$) 中稠密。从本质上说，线性泛函锥 $\{\Lambda_{\mathbf{T},\xi}$：($\mathbf{T}$ ξ) 是压缩交换循环元组}的概念，其作用类似于我们这里的 $\mathcal{L}_c$。在第 4.2 小节中，我们将给出一个利用锥 $\mathcal{L}_c$证明 Agler 分解存在性的证明。

4 首个应用：新证明

本节中，我们给出两个例子，说明研究压缩交换算子元组时，来自 L 算子的额外结构如何发挥作用。我们将为已有结果给出两种新的证明。

4.1 在对角或幂零元组上检验 Schur–Agler 范数 s

本小节的目标是给出命题 1.2 的一个新证明。设 $\mathbf{T}$ 是一个与 M_z在 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 上相似的算子元组，即存在一个可逆算子 S，使得 $T_j=S^{-1}M_{z_j}S$对于 $j=1$、.....、d。如果 $f\in H^\infty(\mathbb{D}^d)$，则定义 $f(T)=S^{-1}f(M_z)S=S^{-1}M_fS$。

命题 4.1。对于 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^d)$,

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} = \text{上确界}\{\|f(\mathbf{T})\| : \mathbf{T} \text{是一个与 } M_z \text{ 相似的压缩算子元组，其中 } H^2(\mathbb{D}^d)\} .$$

证明。当 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, 时，不等式"≥"显然成立；而逼近论证（例如使用引理 2.3）表明，它对所有 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^d)$ 都成立。

反过来，由引理 3.3 可得

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}^2 = \sup\left\{\frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} : L \in \mathcal{L}_c\right\}.$$

设 $L \in \mathcal{L}_c, \varepsilon > 0$，并令 $L_\varepsilon = L + \varepsilon I$。则 $L_\varepsilon \in \mathcal{L}_c, L_\varepsilon$ 可逆，并且显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $L_\varepsilon \to L$ 在范数意义下收敛。因此,

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}^2 \leq \sup\left\{\frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} : L \in \mathcal{L}_c, L \text{ invertible}\right\}.$$

现在，设 $L \in \mathcal{L}_c$ 可逆，并令 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 为由 L 诱导的循环交换压缩算子元组。根据构造 3.2, $T_i = L^{1/2} M_{z_i} L^{-1/2}$, $i = 1, \cdots, d$; 因此 $\mathbf{T}$ 与 M_z 相似。此外，对所有 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$,

$$\frac{\langle Lf, f\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} = \frac{\|f(\mathbf{T})\xi\|^2}{\|\xi\|^2} \leq \|f(\mathbf{T})\|^2,$$

再次运用逼近论证可知，左侧的等式因而也包括不等式，对所有 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^d)$ 都成立。这就证明了剩下的不等式。 □

回顾一下，我们用 $\mathcal{C}_d$ 表示由任意阶的严格压缩矩阵组成的循环交换 d-元组集合。

命题 4.2。对于 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^d)$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{SA}} &= \sup\{\|f(\mathbf{T})\| \ : \ \mathbf{T} \in \mathcal{C}_d \textit{ is jointly nilpotent}\} \\ &= \sup\{\|f(\mathbf{T})\| \ : \ \mathbf{T} \in \mathcal{C}_d \textit{ is jointly diagonalizable}\} .\end{aligned}$$

证明。设 $\mathbf{T}$ 是一个与 M_z 相似的压缩算子元组，作用在 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 上，即 $\mathbf{T} = S^{-1} M_z S$。对于每个有限集 $F \subset \mathbb{D}^d$, 令 $Q_F = \text{span}\{K_z : z \in F\}$。那么 Q_F 在元组 M_z^* 下不变，因此 $M_F := S^* Q_F$ 在 $\mathbf{T}^*$ 下不变。此外， $M_z^*|_{Q_F}$ 是有限维空间上的可对角化元组，所以 $\mathbf{T}^*|_{M_F}$ 也是，进而 $P_{M_F}\mathbf{T}|_{M_F}$ 也如此。还需注意, $P_{M_F}\mathbf{T}|_{M_F}$ 是循环的，因为 $\mathbf{T}$ 是循环的，且 M_F 是共不变的。网 (P_{M_F}) 在强算子拓扑下收敛于恒等算子，因此

$$\|f(\mathbf{T})\| \leq \sup_F \|P_{M_F} f(\mathbf{T})\big|_{M_F}\| = \sup_F \|f(P_{M_F}\mathbf{T}\big|_{M_F})\|,$$

最后一个不等式由 M_F 的余不变性得出。根据命题 4.1，可知

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} \leq \sup\ \{\|f(\mathbf{T})\| : \mathbf{T} \text{是由循环可对角化压缩矩阵组成的交换元组}\} ;$$

通过用 $r\mathbf{T}$ 逼近 $\mathbf{T}$, 其中 $r < 1$，我们可得

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} \leq \sup\{\|f(\mathbf{T})\| : \mathbf{T} \in \mathcal{C}_d \text{ is diagonalizable}\}.$$

反向不等式显然成立。

幂零情形下的证明类似；将 Q_F 替换为

$$Q_n = \text{span}\{z^\alpha : |\alpha| \leq n\}.$$ □

注 4.3。 L-算子框架和引理 3.3 使得能够对命题 4.2 中的两个表达式给出统一的证明。直接处理算子时，将问题化归为幂零矩阵似乎比化归为可对角化矩阵更容易。例如，可以将交换元组 $\mathbf{T}$ 与单边移位 $M_z \in B(H^2(\mathbb{D}))$作张量积，然后用 $P_{1,\ \le n} M_z\big|_{P_{1'}\ \le n}$逼近 M_z，从而得到幂零元组。（这是 [22]中提到的第一作者所给出的证明。）但是，这样的过程一般不会产生可对角化元组；例如，当 $\mathbf{T}$ 本身是幂零的时，张量积仍然是幂零的。在 L-算子框架中，我们有用 $L+\varepsilon I$逼近 L 这一非常简单的方法，从而避免了这个问题。

4.2 Agler 分解

在 [1], Agler 证明了以下结果。右侧的分解现在被广泛称为 Agler 分解。

定理 4.4 (Agler [1])。 有界全纯函数 f 在 $\mathbb{D}^d$ 上满足 $\|f\|_{\mathrm{SA}} \le 1$，当且仅当存在正定核 k_1、$\cdots$、k_d，使得

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = \sum_{i=1}^{d} (1 - z_i \bar{w}_i) k_i(z,w), \quad \forall z, w \in \mathbb{D}^d.$$

对于一个遗传 性函数 $h(z,\ w) = \sum_{j=1}^{m} f_j(z)\overline{g_j(w)}$，其中 $f_j,\ g_j \in H^2(\mathbb{D}^d)$，定义算子 r

$$R_h = \sum_j f_j \otimes g_j \quad \text{on} \quad H^2(\mathbb{D}^d).$$

注意， R_h 不依赖于 h的分解，因为

$$\langle R_h K_w, K_z \rangle = h(z,w), \quad \forall z, w \in \mathbb{D}^d. \tag{4.1}$$

我们给出定理 4.4“仅当”部分的证明。（通常认为，“仅当”方向更难。）

定理 *4.4* 的证明，“⇒”。 假设 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^d)$ 且 $\|f\|_{\mathrm{SA}} \le 1$。令 $h(z,w) = 1 - f(z)\overline{f(w)}$，并令 $R_h = 1 \otimes 1 - f \otimes f$。令

$$\mathcal{C} = \left\{ A + \sum_{i=1}^{d} \left(B_i - M_{z_i} B_i M_{z_i}^* \right) \ :\ A, B_i \in \mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)),\ A, B_i \ge 0 \right\} \subset \mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)).$$

于是很容易验证

$$\mathcal{L}_c = \left\{ L \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d)) \ :\ \mathrm{Tr}(LC) \ge 0,\ \forall C \in \mathcal{C} \right\}.$$

同时， $\|f\|_{\mathrm{SA}} \le 1$ 意味着

$$\mathrm{Tr}(L_{\mathbf{T},\xi} R_h) = \langle L_{\mathbf{T},\xi} 1, 1 \rangle - \langle L_{\mathbf{T},\xi} f, f \rangle = \|\xi\|^2 - \|f(\mathbf{T})\xi\|^2 \ge 0,$$

对于所有由严格压缩算子组成的循环交换元组（$\mathbf{T}$ ξ）。如引理 3.3 的证明中所述，可以验证 $\{L_{\mathbf{T},\xi}$ ： ($\mathbf{T}$ ξ) 是由严格压缩算子组成的循环交换元组$\}$ 在$\mathcal{L}_c$中弱-$*$ 稠密。因此

$$\mathrm{Tr}(LR_h) \ge 0, \quad \forall L \in \mathcal{L}_c.$$

根据 Hahn-Banach锥分离定理， R_h 属于 $\mathcal{C}$的闭包。注意，对于 $C = A + \sum_{i=1}^{d} \left(B_i - M_{z_i} B_i M_{z_i}^*\right) \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\langle CK_w, K_z\rangle =& \langle AK_w, K_z\rangle + \sum_{i=1}^{d}(1 - z_i\bar{w}_i)\langle B_i K_w, K_z\rangle \\ =& (1 - z_1\bar{w}_1)\left(\frac{\langle AK_w, K_z\rangle}{1 - z_1\bar{w}_1} + \langle B_1 K_w, K_z\rangle\right) + \sum_{i=2}^{d}(1 - z_i\bar{w}_i)\langle B_i K_w, K_z\rangle.\end{aligned}$$

最后的表达 式是一个 Agler 分解。假设 $\{C_n\} \subset \mathcal{C}$ 和 C_n 收敛于 R_h。令 t

$$h_n(z, w) = \sum_{i=1}^{d}(1 - z_i\bar{w}_i)k_{n,i}(z, w)$$

C_n对应的 Agler 分解为 $h(z,\ w) = \langle R_h K_w,\ K_z\rangle = \lim_{n\to\infty} h_n(z,\ w)$。同时，注意到由正性,

$$|k_{n,i}(z, w)|^2 \le |k_{n,i}(z, z)||k_{n,i}(w, w)| \le \frac{1}{(1 - |z_i|^2)(1 - |w_i|^2)}|\langle C_n K_z, K_z\rangle\langle C_n K_w, K_w\rangle|.$$

因此，函数 $\{k_{n,i}(z,\ w)\}$ 局部一致有界，在 z 中全纯，并在 w中共轭全纯。由正规族论证即可得出结论。至此证明完成。

□

解释我们的方法与 Agler 的方法之间差异的一种方式如下：我们将对偶配对 $\mathrm{Her}(\mathbb{D}^d) \times \left(\mathrm{Her}(\mathbb{D}^d)\right)^*$（见注 3.8）替换为更熟悉的配对 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)) \times \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d))$，其中 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d))$表示迹类算子空间，而对偶性由迹给出。更明确地说，假设 $(\mathbf{T}\ \xi)$ 是一个由严格压缩算子构成的循环交换元组，那么

$$(h,\ \Lambda_{\mathbf{T},\xi}) = \langle h(\mathbf{T})\xi, \xi\rangle = \sum_j \langle p_j(\mathbf{T})\xi, q_j(\mathbf{T})\xi\rangle = \sum_j \langle L_{\mathbf{T},\xi} p_j, q_j\rangle_2 = \mathrm{Tr}(L_{\mathbf{T},\xi} R_h).$$

这里，左侧的记号 $(\cdot,\cdot)$ 表示配对 $\mathrm{Her}(\mathbb{D}^d)\times\left(\mathrm{Her}(\mathbb{D}^d)\right)^*$，右侧则表示配对 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)) \times \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d))$。代价是，并非所有遗传函数都定义 R_h，也并非所有循环交换元组都定义 $L_{\mathbf{T},\xi}$。但其优势在于，配对 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)) \times \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d))$ 具有更丰富的结构。对于许多问题而言，我们舍弃的函数和算子元组并非论证所必需。

更进一步，将 $\mathcal{S}^1(H^2(\mathbb{D}^d)) \times \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}^d))$ 替换为与自身配对的 $\mathcal{S}^2(H^2(\mathbb{D}^d))$ 后，上述定理 4.4 的证明仍然成立。正如隐匿等距映射论证等技巧所展示的那样，希尔伯特空间结构对于解决平方和类型问题可能十分重要。希尔伯特空间结构 $\mathcal{S}^2(H^2(\mathbb{D}^d))$ 对这一问题有何作用，仍有待发现。

5 对偶 Schur–Agler 范数

在第 3 节中，我们给出了 Schur–Agler 范数和上确界范数的凸描述。本节将说明这些凸描述如何给出这些空间的预对偶的描述。以下更一般的原理将会派上用场。

引理 5.1. 设 $\mathcal{H}$ 为一个希尔伯特空间，且 $\mathcal{L} \subset B(\mathcal{H})$ 为一个包含恒等算子的正算子凸锥。设 $\xi \in \mathcal{H}$。对于 $g \in \mathcal{H}$，定义

$$\|g\|_* = \inf\{\langle L\xi, \xi\rangle^{1/2} : L \in \mathcal{L}, L \geq g \otimes g\}.$$

那么：

(a) $\|\cdot\|_*$ 是 $\mathcal{H}$上的半范数。

(b) 对于所有的 $f \in \mathcal{H}$,

$$\sup\{|\langle f, g\rangle| : g \in \mathcal{H}, \|g\|_* \leq 1\} = \sup\{\langle Lf, f\rangle^{1/2} : L \in \mathcal{L}, \langle L\xi, \xi\rangle \leq 1\}.$$

证明。(a) 由于 $\mathcal{L}$ 包含恒等算子，因此对于所有 $g \in \mathcal{H}$，$\|g\|_* < \infty$。$\|\cdot\|_*$ 的绝对齐次性直接源于假设 $\mathcal{L}$ 是一个锥。我们需要证明三角不等式。

设 g_1，$g_2 \in \mathcal{H}$，并设 L_1，$L_2 \in \mathcal{L}$，其中 $L_i \geq g_i \otimes g_i$，$i = 1, 2$。利用基本不等式$2ab \leq (ta)^2 + (b/t)^2$，对于 a，$b \geq 0$ 和 $t > 0$，我们得到

$$(g_1 + g_2) \otimes (g_1 + g_2) \leq (1 + t^2) g_1 \otimes g_1 + (1 + 1/t^2) g_2 \otimes g_2 \quad \text{for all } t > 0.$$

因此，定义 $L = (1 + t^2)L_1 + (1 + 1/t^2)L_2$，我们有 $L \geq (g_1 + g_2) \otimes (g_1 + g_2)$。此外，由于 $\mathcal{L}$ 是一个凸锥，$L \in \mathcal{L}$。由此可得

$$\|g_1 + g_2\|_*^2 \leq \langle L\xi, \xi\rangle = (1 + t^2)\langle L_1\xi, \xi\rangle + (1 + 1/t^2)\langle L_2\xi, \xi\rangle \quad \text{for all } t > 0.$$

对 L_1 和 L_2 取下确界，得到

$$\|g_1 + g_2\|_*^2 \leq (1 + t^2)\|g_1\|_*^2 + (1 + 1/t^2)\|g_2\|_*^2 \quad \text{for all } t > 0.$$

若 $\|g_1\|_*, \|g_2\|_* \neq 0$，则右端在取 $t = \sqrt{\|g_2\|_*/\|g_1\|_*}$时达到最小值，此时我们得到

$$\|g_1 + g_2\|_*^2 \leq (\|g_1\|_* + \|g_2\|_*)^2.$$

若 $\|g_1\|_* = 0$ 或 $\|g_2\|_* = 0$，则分别取极限 $t \to \infty$ （或 $t \to 0$），可得到相同的不等式。

(b) 设 $f \in \mathcal{H}$，并令 $M = \sup\{\langle Lf, f\rangle^{1/2} : L \in \mathcal{L}, \langle L\xi, \xi\rangle \leq 1\}$，且假设 $M < \infty$。令$g \in \mathcal{H}$，并令 $L \in \mathcal{L}$ 满足 $L \geq g \otimes g$。那么

$$|\langle f, g\rangle|^2 = \langle (g \otimes g)f, f\rangle \leq \langle Lf, f\rangle \leq M^2\langle L\xi, \xi\rangle.$$

对 L取下确界，得到 $|\langle f, g\rangle| \leq M\|g\|_*$，这就证明了不等式“$\leq$”。

反过来，给定 $f \in \mathcal{H}$和 $L \in \mathcal{L}$，其中 $\langle L\xi, \xi\rangle \leq 1$，令 $L = A^*A$，并设 P为到一维空间 $\mathbb{C}Ap$上的正交投影。于是，A^*PA 是秩至多为 1 的正算子，因此可写成某个 $g \in \mathcal{H}$所对应的 $A^*PA = g \otimes g$形式。根据构造，$g \otimes g \leq L$，所以 $\|g\|_* \leq 1$。此外，

$$\langle Lf, f\rangle = \|Af\|^2 = \langle A^*PAf, f\rangle = \langle (g \otimes g)f, f\rangle = |\langle f, g\rangle|^2.$$

这就证明了剩下的不等式。 □

鉴于 根据上述引理 3.3、3.4、3.5 和引理 5.1，我们作如下定义 s.

定义 5.2。 (1) 对于 $g \in H^2(\mathbb{D}^d)$，定义

$$\mathcal{L}_c(g) = \{L \in \mathcal{L}_c \ : \ L \geq g \otimes g\},$$

并定义其对偶 *Schur–Agler* 范数为

$$\|g\|_* = \inf\left\{\sqrt{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_c(g)\right\}.$$

(2) 对任意非负整数 n 和任意齐次多项式 $q \in P_n$，定义

$$\mathcal{L}_c^{(n)}(q) = \left\{L = \sum_{k=0}^{n} L_k \in \mathcal{L}_c(q) \cap \mathcal{L}_c^{(n)} \ : \ L_n = q \otimes q\right\}.$$

(3) 对于 $g \in H^2(\mathbb{D}^d)$，定义

$$\mathcal{L}_t(g) = \{L \in \mathcal{L}_t \ : \ L \geq g \otimes g\}, \quad \text{and} \quad \|g\|_{H^\infty_*} = \inf\left\{\sqrt{\langle L1, 1\rangle_2} \ : \ L \in \mathcal{L}_t(g)\right\}.$$

引理 5.3. 对于 $g(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \in H^2(\mathbb{D}^d)$，有

$$\|g\|_* \geq \sup_\alpha |a_\alpha|.$$

证明。 设 $L \in \mathcal{L}$，其中 $L \geq g \otimes g$。根据 L 的定义，有

$$M^*_{z^\alpha}(g \otimes g)M_{z^\alpha} \leq M^*_{z^\alpha} L M_{z^\alpha} \leq L,$$

因此

$$|a_\alpha|^2 = |\langle g, z^\alpha\rangle|^2 = |\langle M^*_{z^\alpha}(g \otimes g)M_{z^\alpha}1, 1\rangle|^2 \leq \langle L1, 1\rangle_2.$$

对所有可容许的 L取下确界，即得所需不等式。 □

下面的定理说明了 $\|\cdot\|_*$这一名称的合理性。

定理 5.4. *(1)* 对偶 *Schur–Agler* 范数 $\|\cdot\|_*$ 是一个范数，并且对每个 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$，我们有

$$\|f\|_{\mathrm{SA}} = \sup\{|\langle f, g\rangle_2| : g \in H^2(\mathbb{D}^d), \|g\|_* \leq 1\}. \tag{5.1}$$

事实上，映射

$$\mathcal{SA}_d \to (H^2(\mathbb{D}^d), \|\cdot\|_*)^*, \quad f \mapsto \langle \cdot, f\rangle_2,$$

是一个共轭线性等距同构。

(2) 若 $q \in P_n$，则

$$\|q\|_* = \inf\left\{\sqrt{\langle L1, 1\rangle_2} : L \in \mathcal{L}_c^{(n)}, L \geq q \otimes q\right\} = \inf\left\{\sqrt{\langle L1, 1\rangle_2} : L \in \mathcal{L}_c^{(n)}(q)\right\}. \tag{5.2}$$

对于 $p \in P_n$,

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} = \sup\left\{|\langle p, q\rangle_2| \ : \ q \in P_n, \ \|q\|_* \leq 1\right\}. \tag{5.3}$$

因此，该映射

$$(P_n, \ \|\cdot\|_{\mathrm{SA}}) \to (P_n, \|\cdot\|_*)^*, \quad p \mapsto \langle \cdot, p\rangle_2$$

也是一个共轭线性等距同构。

证明。为方便起见，我们将始终记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_2$。由引理 5.1 (a) 和引理 5.3 可知，$\|\cdot\|_*$ 是一个范数。为证明 (5.1)，回顾引理 3.3 可知

$$\|f\|_{\mathrm{SA}}^2 = \sup\{\langle Lf, f\rangle : L \in \mathcal{L}_c, \langle L1, 1\rangle \le 1\}$$

对所有 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$。因此，(5.1) 由引理 5.1 的 (b) 部分推出。

为了完成命题 (1) 的证明，还需证明命题 (1) 中映射的满射性。注意，$(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_2)$ 收缩嵌入于 $(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_*)$（只需在 $\|\cdot\|_*$ 的定义中令 L 为恒等算子的一个标量倍）。因此，若 $\varphi \in (H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_*)^*$，则存在 $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$，使得 $\varphi(g) = \langle g,\ f\rangle$ 对所有 $g \in H^2(\mathbb{D}^d)$ 都成立。由 (5.1)，必有 $f \in \mathcal{SA}_d$。这就证明了命题 (1)。

我们暂且定义

$$\|q\|_*' = \inf\left\{\sqrt{\langle L1, 1\rangle_2} : L \in \mathcal{L}_c^{(n)}, L \ge q \otimes q\right\}.$$

于是 $\|q\|_* \le \|q\|_*'$，因此借助引理 5.1 (a)，我们可知 $\|\cdot\|_*'$ 是一个范数。此外，将引理 3.4 和引理 5.1 (b) 应用于次数至多为 n 的多项式空间，可得

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} = \sup\{|\langle p, q\rangle_2| : q \in P_n, \|q\|_*' \le 1\}.$$

另一方面，由陈述 (1)，我们有

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} \ge \sup\{|\langle p, q\rangle_2| : q \in P_n, \|q\|_* \le 1\}.$$

由于 $\|q\|_* \le \|q\|_*'$，我们必须处处取等。这证明了 (5.3)，并由对偶性也得到$\|q\|_* = \|q\|_*'$，即 (5.2) 的第一个等式。

为看出第二个等式，注意若 $n \ge 1$ 且 $L = \sum_{k=0}^n L_k$ 满足 $L_k \in \mathcal{B}(P_k)$，则 $L \in \mathcal{L}_c$当且仅当

$$M_{z_i}^* L_k M_{z_i} \le L_{k-1} \quad \text{for all } 1 \le k \le n, 1 \le i \le d.$$

因此，若 $L \in \mathcal{L}_c^{(n)}$满足 $L \ge q \otimes q$，则 $L_n \ge q \otimes q$，从而

$$M_{z_i}^*(q \otimes q) M_{z_i} \le M_{z_i}^* L_n M_{z_i} \le L_{n-1}.$$

这表明 $L' := q \otimes q + \sum_{k=0}^{n-1} L_k \in \mathcal{L}_c$同样成立，并且 $\langle L1, 1\rangle_2 = \langle L_0 1, 1\rangle_2 = \langle L'1, 1\rangle_2$。这表明了第二个等式；若 $n = 0$，则该等式是平凡的。这就完成了证明。 □

赋范空间 $(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_*)$ 并非完备，因为 $\|\cdot\|_* \le \|\cdot\|_2$，但这两个范数并不等价。例如，由于 $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_{\mathrm{SA}}$，我们看到，对于每个再生核 K_z，

$$\|K_z\|_* = \sup\{|\langle f, K_z\rangle_2| : \|f\|_{\mathrm{SA}} \le 1\} = 1.$$

我们将 $(\mathcal{SA}_d)_*$ 记作 $(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_*)$ 的完备化，并继续用$\|\cdot\|_*$表示该范数。由定理 5.4 可知，柯西配对可延拓为函数$f \in (\mathcal{SA}_d)_*$ 与 $g \in \mathcal{SA}_d$之间的配对，且这一配对给出了 $\mathcal{SA}_d$ 与 $((\mathcal{SA}_d)_*)^*$之间的共轭线性等距同构。特别地，我们可以在 $\mathcal{SA}_d$ 上赋予由这一对偶性定义的弱-$*$拓扑。现在我们记录巴拿赫空间 $(\mathcal{SA}_d)_*$的几条基本性质。

命题5.5。(a) $(\mathcal{SA}_d)_*$ 是 $\mathbb{D}^d$ 上的解析函数巴拿赫空间，且点求值连续。

(b) 多项式空间 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ 和 $\mathrm{span}\{K_z :\ z \in \mathbb{D}^d\}$ 在$(\mathcal{SA}_d)$中稠密 $*$.

(c) $\mathcal{SA}_d$ 上的弱-$*$ 拓扑由与$(\mathcal{SA}_d)_*$ 的对偶性所确定，是 $\mathcal{SA}_d$ 在$*$ 上的唯一弱拓扑，使得在 $\mathbb{D}^d$ 中每个点处的求值都是弱-$*$ 连续的。在 $\mathcal{SA}_d$的有界子集上，弱-$*$ 拓扑与在 $\mathbb{D}^d$上的逐点收敛拓扑一致。

(d) 多项式空间 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ 在 $\mathcal{SA}_d$ 中关于弱-$*$ 稠密。

证明。 我们按不同的顺序证明这些结论。

(b) 这是因为这两个空间在 $(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_2)$ 中都稠密，并且 $(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_2)$ 收缩嵌入到 $(\mathcal{SA}_d)_*$ 中且在其中稠密。

(c) 由于对所有 $z\in\mathbb{D}^d$， $K_z\in(\mathcal{SA}_d)_*$ ，点求值是弱-$*$ 连续的。此外，由于核函数的线性张成在 $(\mathcal{SA}_d)_*$ 中稠密，有界网弱-$*$ 收敛当且仅当它在 $\mathbb{D}^d$上逐点收敛。

唯一性结论是关于函数空间上的弱-$*$拓扑的一般原理：若 τ_1 是由 $(\mathcal{SA}_d)_*$ 给出的弱-$*$拓扑，而 τ_2 是另一种具有连续点赋值的弱-$*$ 拓扑，则恒等映射 $(\mathcal{SA}_d,\tau_2)\to(\mathcal{SA}_d,\tau_1)$ 在单位球上连续。由于单位球是 τ_2-紧的，且 τ_1 是豪斯多夫的，恒等映射是两个单位球之间的同胚。于是克雷因–斯米利安定理推出，恒等映射在整个 $\mathcal{SA}_d$ 上是同胚，即 $\tau_2=\tau_1$。

(d) 令 $f\in\mathcal{SA}_d$ ，并令 p_n 为 f的 Fej´er 均值序列。由引理 2.3，我们对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\|p_n\|_{\mathrm{SA}}\le\|f\|_{\mathrm{SA}}$ ，且 (p_n)逐点收敛于 f ，其中 $\mathbb{D}^d$。根据 (c)，这意味着 (p_n)弱-$*$收敛于 f 。

(a) 令 c_0 为定义在 $\mathbb{D}^d$ 上的解析函数空间，其泰勒系数收敛于 0，并赋予系数的上确界范数。由引理 5.3，$(H^2(\mathbb{D}^d)\ \|\cdot\|_*)$收缩嵌入于 c_0中，因此我们得到一个压缩映射 $\Phi:(\mathcal{SA}_d)_*\to c_0$ ，它延拓了嵌入映射。我们断言 Φ是单射。

由对偶性，只需证明伴随算子 $\Phi^*:\ell^1\to\mathcal{SA}_d$ 具有弱-$*$ 稠密的值域。但这由多项式在 $\mathcal{SA}_d$ 中的弱-$*$ 稠密性得到，即由 (d) 得到。因此， Φ 是单射，所以 $(\mathcal{SA}_d)_*$ 是一个收缩嵌入于 c_0中的解析函数空间，这也意味着点求值是连续的。

□

经典地， $H^\infty(\mathbb{D}^d)$ 是 $L^1(\mathbb{T}^d)/(H^\infty(\mathbb{D}^d)_\perp$ 的对偶空间，其中对偶性由柯西配对给出。为与前面的结果进行比较，我们记录下（前）对偶 H^∞ 范数的另一种表达式。

命题 5.6. 函数 $\|\cdot\|_{H^\infty_*}$ 是一个范数，并且对每个 $f\in H^2(\mathbb{D}^d)$，有

$$\|f\|_\infty=\sup\{|\langle f,g\rangle_2|:g\in H^2(\mathbb{D}^d),\|g\|_{H^\infty_*}\le1\}.$$

证明。 $\|\cdot\|_{H^\infty_*}$ 是半范数这一事实由引理 5.1 (a) 得出。由于 $\mathcal{L}_t\subset\mathcal{L}_c$，我们有$\|\cdot\|_{H^\infty_*}\ge\|\cdot\|_*$，因此它是一个范数。对偶关系由引理 5.1 (b) 和引理 3.5 得出。

□

例 5.7。 与例 3.7 中基本相同的算子 L 表明，定理 5.4 (2) 对 $\|\cdot\|_{H^\infty_*}$ 的类似结论不成立；也就是说，若 $q\in P_n$，则

$$\inf\left\{\langle L1,1\rangle^{1/2}:L=\sum_{k=1}^n L_k:L_k\text{ satisfy (3.3)},L\ge q\otimes q\right\}\tag{5.4}$$

可以严格小于 $\|q\|_{H^\infty_*}$。事实上，设

$$q(z)=z_1^2+z_2^2+z_3^2-\frac{1}{2}(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)$$

为 Holbrook 例子中的多项式。如果 p 是 Kaijser–Varopoulos 多项式，那么$\|p\|_\infty = 5$和 $\langle p, q\rangle_2 = 6$，因此$\|q\|_{H^\infty_*} \geq \frac{6}{5}$。但如果 L是例 3.7 中的算子，且 $L' = \frac{5}{4}L$，那么可以验证 $L' \geq q \otimes q$（差值 $L' - q \otimes q$ 是秩2投影的正标量倍数）。因此，(5.4) 中的下确界至多为 $\sqrt{\frac{5}{4}} < \frac{6}{5}$。

6 构造 L 的方法 L

对于齐次多项式 $q \in P_n$，我们提供了几种构造算子$L \in \mathcal{L}_c^{(n)}(q)$的方法。这将得到对偶 Schur–Agler 范数 $\|q\|_*$ 的上界；根据定理 5.4，这又给出了 Schur–Agler 范数的下界。我们展示了如何利用这些方法重新得到 [11][12][17][30]中构造的反例；有关其 L 算子的详细说明，请参见附录。最后，我们对 Kaijser-Varopoulos-Holbrook 型多项式的 Schur–Agler 范数和对偶 Schur–Agler 范数进行显式计算。在下一节中，我们将重点讨论由此得到的两个下界，它们的形式是弱乘积。

Hankel 算子在我们的构造中发挥着重要作用。回顾以下重要的恒等式：

$$M_{z_i}^* \Gamma_q = \Gamma_q M_{z_i}, \quad \forall i = 1, \cdots, d. \tag{6.1}$$

对于 $q \in P_n$ 和 $0 \leq k \leq n-1$，定义

$$A_k(q) = \left\| \Gamma_q \big|_{P_k} \right\|; \quad B_k(q) = \max_{1 \leq i \leq d} \left\| M_{z_i}^* \Gamma_q \big|_{P_k} \right\|.$$

方法 1： 对于 $0 \leq k \leq n-1$，定义

$$L_1 = \Gamma_{\widehat{q}}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_{\geq k+1}} + A_k(q)^2 \cdot P_{\leq k};$$

方法 2： 对于 $0 \leq k \leq n-1$，定义

$$L_2 = \Gamma_{\widehat{q}}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_{\geq k+1}} + B_k(q)^2 \cdot P_{\leq k};$$

引理 6.1. 设 L_1, L_2 如上所述。则 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_c^{(n)}(q)$。因此

$$\|q\|_* \leq \min_{0 \leq k \leq n-1} B_k(q) \leq \min_{0 \leq k \leq n-1} A_k(q).$$

证明. 显然，每个 L_i 均为正，并且对于任意 l，都会约化 P_l 。一个初等计算（参见附录中的 (9.1)）表明， $L_i|_{P_n} = q \otimes q$和 $L_i|_{P_{\leq n}^\perp} = 0$。因此，只需证明不等式 $M_{z_j}^* L_i M_{z_j} \leq L_i$。

$$\begin{aligned}
M_{z_j}^* L_1 M_{z_j} =& M_{z_j}^* \left(\Gamma_{\widehat{q}}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_{\geq k+1}} + A_k(q)^2 \cdot P_{\leq k} \right) M_{z_j} \\
=& M_{z_j}^* \Gamma_{\widehat{q}}^* \Gamma_{\widehat{q}} M_{z_j} \big|_{P_{\geq k}} + A_k(q)^2 \cdot P_{\leq k-1} \\
=& \Gamma_{\widehat{q}}^* M_{z_j} M_{z_j}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_{\geq k}} + A_k(q)^2 \cdot P_{\leq k-1} \\
=& \Gamma_{\widehat{q}}^* M_{z_j} M_{z_j}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_{\geq k+1}} + \Gamma_{\widehat{q}}^* M_{z_j} M_{z_j}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_k} + A_k(q)^2 \cdot P_{\leq k-1} \\
\leq& \Gamma_{\widehat{q}}^* \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_{\geq k+1}} + \left\| \Gamma_{\widehat{q}} \big|_{P_k} \right\|^2 \cdot P_k + A_k(q)^2 \cdot P_{\leq k-1} \\
=& L_1.
\end{aligned}$$

这里，我们使用了 $\|\Gamma_{\widehat{q}}|_{P_k}\| = \|\Gamma_q|_{P_k}\| = A_k(q)$。类似的论证表明， $M_{z_j}^* L_2 M_{z_j} \leq L_2$。证明至此完成。 □

我们回顾第 2 节中的两个定义。

定义 6.2。定义

$$\|p\|_{P_k\odot P_l}=\inf\left\{\sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_2\cdot\|g_i\|_2\ :\ f_i\in P_k,\ g_i\in P_l,\ \text{and } p=\sum_{i=1}^{m}f_ig_i\right\},\quad \forall p\in P_{k+l},$$

and

$$\|p\|_{Z\odot P_k\odot P_l}=\inf\left\{\sum_{i=1}^{d}\|f_i\|_{P_k\odot P_l}\ :\ f_i\in P_{k+l},\ \text{and } p=\sum_{i}z_if_i\right\},\quad \forall p\in P_{k+l+1}.$$

对于任意 $p\in P_n$，我们还定义

$$|||p|||_1:=\max_{0\le k\le n}\|p\|_{P_k\odot P_{n-k}},$$

and

$$|||p|||_2:=\max_{0\le k\le n-1}\|p\|_{Z\odot P_k\odot P_{n-k-1}}.$$

定理 6.3。对于任意 $p\in P_n$,

$$\|p\|_{\mathrm{SA}}\ge|||p|||_2\ge|||p|||_1. \tag{6.2}$$

证明。 由定理 5.4、引理 6.1 和引理 2.1，我们有

$$\|p\|_{\mathrm{SA}}=\sup_{q\in P_n\setminus\{0\}}\frac{|\langle p,q\rangle_2|}{\|q\|_*}\ge\max_{0\le k\le n-1}\sup_{q\in P_n\setminus\{0\}}\frac{|\langle p,q\rangle_2|}{B_k(q)}=|||p|||_2.$$

第二个不等式由 (2.3) 以及以下观察得出： $\|p\|_{P_k\odot P_{n-k}}=\|p\|_{P_{n-k}\odot P_k}$。 □

正如我们将在第 7 节中展示的那样，方法 1 是对方法 2 的简化，它牺牲了一个仅依赖于 d 的常数： $|||p|||_1\approx_d|||p|||_2$。根据附录中的解释，与 [11][12][30] 对应的 L 算子与方法 2 相匹配。特别是，下界 $|||\cdot|||_2$ 大于 [12] 中 Dixon 的下界。 $|||\cdot|||_1$ 和 $|||\cdot|||_2$ 的弱乘积表达式也符合这一普遍经验：Schur–Agler 范数较大的多项式难以分解。

不过，我们将在第 7 节证明，对于固定的 d，上述两个下界仍远非最优： $|||\cdot|||_1$ 和 $|||\cdot|||_2$ 与 Hardy 空间范数 $\|\cdot\|_2$可比。

下面列出另外几种构造 L 算子的方法。假设 $q\in P_n$。

方法 3： 对于 $0\le k\le n-1$，定义

$$C_k(q)=\max_{1\le i\le d}\left\|M_{z_i}^*|_{\Gamma_{\widehat{q}}(P_k)}\right\|=\max_{1\le i\le d}\left\|M_{z_i}^*|_{\Gamma_q(P_k)}\right\|,$$

and

$$L_3=q\otimes q+\sum_{k=0}^{n-1}C_k(q)^2\cdots C_{n-1}(q)^2\Gamma_{\widehat{q}}^*\Gamma_{\widehat{q}}\big|_{P_k}.$$

那么 $L_3\in\mathcal{L}_c^{(n)}(q)$。由此得到估计

$$\|q\|_*\le\|q\|_2\cdot\prod_{k=0}^{n-1}C_k(q).$$

注意，每个 $C_k(q)\le1$。此外，在备注 7.7 中，我们证明了方法 3 能够恢复再生核的对偶 Schur-Agler 范数，而前两种方法则不能。因此，方法 3 得出的下界比 $\|\cdot\|_\infty$ 大 $\|\cdot\|_{SA}$。

方法 4： 可以结合方法 2 和方法 3。也就是说，对于 $0 \le k \le n-1$，定义

$$L_4 = q \otimes q + \sum_{j=k+1}^{n-1} C_j(q)^2 \cdots C_{n-1}(q)^2 \Gamma_{\widehat{q}}^* \Gamma_{\widehat{q}}\big|_{P_j} + B_k(q)^2 C_{k+1}(q)^2 \cdots C_{n-1}(q)^2 \cdot P_{\le k}.$$

于是 $L_4 \in \mathcal{L}_c^{(n)}(q)$，由此可得

$$\|q\|_* \le B_k(q) C_{k+1}(q) \cdots C_{n-1}(q), \quad 0 \le k \le n-1.$$

方法 5： 方法 3 可以推广。设 $E_k \in \mathcal{B}(P_k)$ $0 \le k \le n$ 为正数，使得

$$E_0 = I, \quad M_{z_i} E_k M_{z_i}^*\Big|_{\Gamma_{\widehat{q}}(P_{n-k-1})} \le E_{k+1}.$$

Then

$$L_5 = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{\widehat{q}}^* E_{n-k} \Gamma_{\widehat{q}}\big|_{P_k} \in \mathcal{L}_c^{(n)}(q).$$

由此得到估计

$$\|q\|_* \le \sqrt{\langle E_n \widehat{q}, \widehat{q} \rangle_2}.$$

同样，也可以结合方法 2 和方法 5。具体细节留给感兴趣的读者。

如前所述，方法 2 可得出 [11][12][30] 中的反例。Holbrook 反例更为微妙。正如我们将在例 9.3 中说明的，相关的对偶多项式为 $q(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)$，它满足 $\|q\|_* = 1$。

我们计算

k	0	1
$A_k(q)$	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\frac{3}{2}$
$B_k(q)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$C_k(q)$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

, $\|q\|_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

因此，方法 1 和方法 2 给出的 $\|q\|_*$ 最佳下界为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$，大于 $\|q\|_* \equiv 1$。然而，$C_0(q)C_1(q)$ $\|q\|_2 = B_0(q)C_1(q) = 1$。因此，方法 3 和方法 4 得到了 $\|q\|_*$。使得 $C_1(q) < 1$ 的关键在于，$\Gamma_q(P_1)$ 是由系数和为零的一次多项式构成的二维空间。我们以一个例子结束本节。

例 6.4 (Kaijser-Varopoulos-Holbrook 型多项式)。我们给出一个例子，其中 Schur–Agler 范数和对偶 Schur–Agler 范数可以明确计算。对于 $t \in \mathbb{C}$，记作

$$p_t(z) = \sum_{i=1}^{d} z_i^2 + \frac{t}{2} \sum_{i \ne j} z_i z_j.$$

在 [13, 第 6] 节中，当 $t \in \mathbb{R}$，$t < 0$，$d > 1$，$\frac{1}{t} < \frac{2-d}{4}$ 时，已计算出 $\|p_t\|_{\mathrm{SA}}$。我们证明

$$\|p_t\|_{\mathrm{SA}} = d \max\left\{\left|1 - \frac{t}{2}\right|, \left|1 + \frac{t(d-1)}{2}\right|\right\}, \quad \forall t \in \mathbb{C}. \tag{6.3}$$

and

$$\|p_t\|_* = \frac{(d-1)|t-1| + |(d-1)t+1|}{d}, \quad \forall t \in \mathbb{C}. \tag{6.4}$$

如果 d 是偶数，那么 $\|p_t\|_\infty = \|p_t\|_{\mathrm{SA}}$。事实上，取 $z = (1, 1, \ldots\ldots, 1)$ 和 $z = (1, -1, 1, -1, \ldots\ldots, -1)$。正如 Kaijser-Varopoulos 例子和 Holbrook 例子所示，可能会出现 $\|p_t\|_\infty < \|p_t\|_{\mathrm{SA}}$。

证明。令 J 为一个 $d\times d$ 矩阵，其对角项全为 0，其余项全为 1。那么 J 的特征值为 $\lambda_1=-1$、$\lambda_2=d-1$，对应的特征空间为

$$E_1=\left\{x\in\mathbb{C}^d\ :\ \sum_i x_i=0\right\},\quad E_2=\mathbb{C}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

对于任意由压缩算子组成的交换元组$\mathbf{T}$，

$$p_t(\mathbf{T})=\begin{bmatrix}T_1 & T_2 & \cdots & T_d\end{bmatrix}\left((I_d+\frac{t}{2}J)\otimes I\right)\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_d\end{bmatrix}.$$

两侧的列算子和行算子的范数均为 $\leq\sqrt{d}$。因此 $\|p(\mathbf{T})\|\leq d\|I_d+\frac{t}{2}J\|=d\max\{|1-\frac{t}{2}|,|1+\frac{t(d-1)}{2}|\}$。对 $\mathbf{T}$ 取上确界，得到

$$\|p_t\|_{\mathrm{SA}}\leq d\max\left\{\left|1-\frac{t}{2}\right|,\left|1+\frac{t(d-1)}{2}\right|\right\}. \tag{6.5}$$

根据定理 5.4 中的对偶性，

$$\begin{aligned}\|p_t\|_*\geq&\sup_{s\in\mathbb{C}}\frac{|\langle p_t,p_s\rangle_2|}{\|p_s\|_{\mathrm{SA}}}\geq\sup_{s\in\mathbb{C}}\frac{|1+\frac{(d-1)}{2}t\bar{s}|}{\max\{|1-\frac{s}{2}|,|1+\frac{s(d-1)}{2}|\}}\\=&\sup_{s\in\mathbb{C}}\frac{\left|\langle(1-\frac{s}{2},1+\frac{s(d-1)}{2}),(\frac{(d-1)(1-t)}{d},\frac{1+(d-1)t}{d})\rangle_2\right|}{\|(1-\frac{s}{2},1+\frac{s(d-1)}{2})\|_\infty}.\end{aligned}$$

注意，若 $\alpha\in\mathbb{C}$ 且满足 $|\alpha|=1$，则方程 $1-\frac{s}{2}=\alpha(1+\frac{s}{(d-1)\,2})$ 有解，条件是 $\alpha(d-1)\neq-1$。由此可知，最后一个上确界等于内积中第二个向量的 1-范数，因此

$$\|p_t\|_*\geq\left\|\left(\frac{(d-1)(1-t)}{d},\frac{1+(d-1)t}{d}\right)\right\|_1=\frac{(d-1)|1-t|+|1+(d-1)t|}{d}. \tag{6.6}$$

另一方面，令 $x>0,y\in\mathbb{R}$，其取值稍后确定。令

$$L=p_t\otimes p_t+L_1+x,\quad\text{where } L_1=xI_d+yJ\in\mathcal{B}(P_1).$$

这里我们取 P_1 的基 $\{z_i\}_{i=1}^d$，并将 L_1 视为其矩阵表达式。由于 $M_{z_i}^*JM_{z_i}=0$，条件 $L\in\mathcal{L}_c^{(2)}(p_t)$ 等价于：

$$L_1\geq v_iv_i^*,\quad i=1,\cdots,d,$$

其中，v_i 是 $M_{z_i}^*p_t$ 在基 $\{z_i\}$下的向量表示。根据对称性，这等价于唯一条件

$$L_1\geq v_1v_1^*. \tag{6.7}$$

注意，L_1 具有特征值 $\mu_1:=x-y$ 和 $\mu_2:=x+(d-1)\,y$。我们可以暂时将 x略微增大，并假设 L_1 是可逆的，即 $\mu_1,\mu_2>0$。于是（6.7）等价于

$$\langle L_1^{-1}v_1,v_1\rangle\leq1\quad\Leftrightarrow\quad\mu_2|t-1|^2(d-1)+\mu_1\left|(d-1)t+1\right|^2\leq d\mu_1\mu_2. \tag{6.8}$$

由此可见，即使不对 L_1作可逆性假设，（6.7）也等价于（6.8）中的第二个条件以及 $\mu_1, \mu_2 \geq 0$。在这些限制下最小化 $x = (d-1)_d^{\mu_1+\mu_2}$ 可得————

$$x = \frac{((d-1)|t-1| + |(d-1)t+1|)^2}{d^2}, \quad y = \frac{(|(d-1)t+1| - |t-1|)\,(|(d-1)t+1| + (d-1)|t-1|)}{d^2}.$$

这表明

$$\|p_t\|_* \leq \frac{(d-1)|t-1| + |(d-1)t+1|}{d}. \tag{6.9}$$

结合 (6.6) 和 (6.9) 得到 (6.4)。根据对偶性，我们还有

$$\|p_t\|_{\mathrm{SA}} \geq \sup_{s\in\mathbb{C}} \frac{|\langle p_t, p_s\rangle_2}{\|p_s\|_*} = \sup_{s\in\mathbb{C}} d^2 \frac{|1 + \frac{(d-1)}{2} t\bar{s}|}{(d-1)|1-s| + |1+(d-1)s|} \geq d \max\left\{\left|1 - \frac{t}{2}\right|, \left|1 + \frac{t(d-1)}{2}\right|\right\},$$

这可通过选取 $s = 1$ 和 $s = -\frac{1}{d-1}$看出。结合 (6.5)，得到 (6.3)。 □

7 弱乘积范数

本节将更详细地研究 (6.2) 右侧出现的弱乘积范数。我们的目标是证明以下结果。

定理 7.1. 设 $d \in \mathbb{N}$。存在常数 $C_d \leq \binom{2d-2}{d-1}$，使得对所有 $p \in P_{d,n}$，都有

$$\|p\|_2 \leq |||p|||_1 \leq \sqrt{C_d}\|p\|_2.$$

此外，

$$|||p|||_1 \leq |||p|||_2 \leq \sqrt{d}|||p|||_1.$$

因此，这两个范数都与 Hardy 范数等价。特别是，仅凭定理 6.3 无法证明冯·诺伊曼不等式不成立（即使相差一个常数）。

我们先证明第二个不等式。

引理 7.2. 对于 $p \in P_{d,n}$，令 $|||p|||_1$ 和 $|||p|||_2$ 如定义 *6.2* 中所定义。则

$$|||p|||_1 \leq |||p|||_2 \leq \sqrt{d}|||p|||_1.$$

证明. 第一个不等式已在定理 6.3 中指出。对于任意 $p \in P_{d,n}$ 以及任意$0 \leq k \leq n-1$，设 $p = \sum_{j=1}^m f_j g_j$，其中 $f_j \in P_{d,k}$,$g_j \in P_{d,n-k}$。对每个 j，将 g_j分解为正交和 $g_j = \sum_{i=1}^d z_i g_{i,j}$，于是$\|g_j\|^2 = \sum_i \|g_{ij}\|_2^2$。记 $h_i = \sum_{j=1}^m f_j g_{i,j}$。那么$p = \sum_{i=1}^d z_i h_i$，并且

$$\|h_i\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq \sum_{j=1}^m \|f_j\|_2 \|g_{i,j}\|_2.$$

因此

$$\|p\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq \sum_i \|h_i\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq \sum_{j=1}^m \|f_j\|_2 \sum_{i=1}^d \|g_{i,j}\|_2 \leq \sqrt{d}\sum_{j=1}^m \|f_j\|_2\|g_j\|_2.$$

对 p 的所有分解取下确界，得到$\|p\|_{Z_d\odot P_{d,k}\odot P_{d,n-k-1}} \leq \sqrt{d}\|p\|_{P_{d,k}\odot P_{d,n-k}}$。至此，¯证明完毕。

□

为了证明定理 7.1 中的第一个不等式，我们先从一个简单的观察开始。

引理 7　　.3. 若 α 是一个多重指标， q 是一个齐次多项式，且 $|\alpha| \geq \deg(q)$，则

$$|||z^\alpha q|||_1 = \|z^\alpha q\|_2 = \|q\|_2.$$

证明。在定义 $|||\cdot|||_1$ 中取 $k=0$ 可得 $|||z^\alpha q|||_1 \geq \|z^\alpha q\|_2$，并且显然$\|z^\alpha q\|_2 = \|q\|_2$。反过来，设 $z^\alpha q$ 的次数为 $n = |\alpha| + \deg(q)$，并设 $k \in \{0,1,\dots,n\}$。我们希望估计 $\|z^\alpha q\|_{P_{n-k}\odot P_k}$。如有必要，将 k 替换为 $n-k$，不妨设 $k \leq \frac{n}{2}$。因此， $|\alpha| \geq k$。令 $\alpha = \beta + \gamma$ 表示满足 $|\beta| = k$ 的多重指标 β, γ。于是

$$\|z^\alpha q\|_{P_{d,n-k}\odot P_{d,k}} \leq \|z^\beta\|_2 \|z^\gamma q\|_2 = \|q\|_2.$$

对所有 $k \in \{0,\cdots,n\}$ 取最大值可得 $|||z^\alpha q|||_1 \leq \|q\|_2$，这就证明了剩下的不等式。

□

若 $t = (t_1,\dots,t_d)$ $s = (s_1,\dots,s_d) \in [0,1]^d$，我们用 $t \leq s$ 表示 $t_j \leq s_j$ 对所有$j = 1,\dots,d$都成立。我们需要以下组合引理。

引理 7.4。设 $d \in \mathbb{N}$，设

$$A_d = \left\{(t_1,\dots,t_d) \in [0,1]^d : \sum_j t_j = 1\right\}$$

并设

$$B_d = \left\{(s_1,\dots,s_d) \in [0,1]^d : \sum_j s_j = \frac{1}{2}\right\}.$$

存在一个有限子集 $F_d \subset B_d$，使得对于每个 $t \in A_d$，都存在 $s \in F_d$ 满足 $s \leq t$。我们可以达到 $|F_d| \leq \binom{2d-2}{d-1}$。

证明。若 $s \in B_d$，则

$$\{t \in A_d : t \geq s\} = s + B_d.$$

因此，子集 $F_d \subset B_d$ 具有所需性质，当且仅当

$$A_d \subset \bigcup_{s\in F_d} s + B_d.$$

另一方面，如果 $G_d \subset \mathbb{R}^d$ 是任意满足以下条件的子集

$$A_d \subset \bigcup_{s\in G_d} s + B_d,$$

那么我们也有

$$A_d \subset \bigcup_{s\in G_d\cap B_d} s + B_d.$$

因此，只需证明单纯形 A_d 至多可以被单纯形$B_d = \frac{1}{2}A_d$的 $\binom{2d-2}{d-1}$ 个平移所覆盖。通过施加仿射变换，这等价于覆盖单纯形这一相同问题

$$K = \{x \in [0,\infty)^{d-1} : \sum_j x_j \leq d-1\}$$

通过 $\frac{1}{2}K$ 的平移。这个问题的一个更一般版本已在 [34, 命题 2。1], 中得到解决，其中尤其表明 $\binom{2d-2}{d-1}$ 个平移就足够了。

□

注 7.5。 根据斯特林公式， $\binom{2d-2}{d-1}$ 的增长率相当于某个常数乘以 $d^{-1/2}4^d$。另一方面，比较单纯形 A_d 和 $B_d = \frac{1}{2}A_d$ 的 $d-1$ 维体积，可得下界 $|F_d| \geq 2^{d-1}$。特别地， $|F_d|$ 必然关于 d 呈指数增长。

我们记

$$X_{d,n} = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| = n\}$$

为长度为 n 的 d-变量多重指标集合。如果 $r \in [0,\infty)$，我们还定义

$$X_{d,\geq r} = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \geq r\}.$$

下述结果是引理 7.4 的离散类比。

引理 7.6。 设 $d \in \mathbb{N}$。存在常数 $C_d \leq \binom{2d-2}{d-1}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$，都存在子集 $G \subset X_{d,\geq \frac{n}{2}}$，满足 $|G| \leq C_d$，并且对于每个 $\alpha \in X_{d,n}$，都存在 $\beta \in G$，满足 $\beta \leq \alpha$。

证明。 若 $n = 0$，结论显然成立，因此设 $n \geq 1$。设 A_d, B_d 为引理 7.4 中出现的集合，并设 $F_d \subset B_d$ 为该引理给出的有限集。我们断言可以取 $C_d = |F_d|$。为此，设 $n \in \mathbb{N}_0$ 并定义

$$G = \{(\lceil ns_1 \rceil, \dots, \lceil ns_d \rceil) : (s_1, \dots, s_d) \in F_d\}.$$

这里， $\lceil x \rceil$ 表示 x的上取整。显然， $G \subset X_{d,\,\geq \frac{n}{2}}$。若$\alpha \in X_{d,\,n}$，令 $t = \alpha/n$。于是 $t \in A_d$，因此根据 F_d的定义性质，存在 $s \in F_d$使得 $s \leq t$。令 $\beta = (\lceil ns_1 \rceil,\ \dots\dots,\ \lceil ns_d \rceil) \in G$。于是

$$ns \leq nt = \alpha,$$

由于 α 的分量均为整数，我们得出 $\beta \leq \alpha$，如所求。 □

现在可以证明定理 7.1 中的第一个不等式了。将齐次多项式分解为带限多项式的基本思路已在 [15, 引理 3.3]中出现。

定理 *7.1* 的证明。 令$p \in P_{d,\,n}$。下界 $|||p|||_1 \geq \|p\|_2$ 可通过在 $|||\cdot|||_1$的定义中取 $k = 0$ 得到。对于上界，令 $G \subset X_{d,\,\geq \frac{n}{2}}$ 如引理 7.6 的结论所述。对每个$\alpha \in X_{d,\,n}$，取 $\beta(\alpha) \in G$ 使得 $\beta(\alpha) \leq \alpha$，并令 $\gamma(\alpha) = \alpha - \beta(\alpha)$。记

$$p(z) = \sum_{\alpha \in X_{d,n}} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in X_{d,n}} a_\alpha z^{\beta(\alpha)+\gamma(\alpha)} = \sum_{\beta \in G} z^\beta \sum_{\substack{\alpha \in X_{d,n} \\ \beta(\alpha)=\beta}} a_\alpha z^{\gamma(\alpha)}.$$

令 $q_\beta(z)$ 表示内层求和。于是

$$p = \sum_{\beta \in G} z^\beta q_\beta \quad \text{and} \quad \|p\|_2^2 = \sum_{\beta \in G} \|q_\beta\|_2^2.$$

由于$|\beta| \geq \frac{n}{2}$，根据引理 7.3 可得

$$|||p|||_1 \leq \sum_{\beta \in G} \left|\left|\left| z^\beta q_\beta \right|\right|\right|_1 = \sum_{\beta \in G} \|q_\beta\|_2 \leq |G|^{1/2} \Big(\sum_{\beta \in G} \|q_\beta\|_2^2 \Big)^{1/2} \leq C_d^{1/2} \|p\|_2,$$

其中我们在倒数第二步使用了柯西–施瓦茨不等式。 □

备注 7.7. 由定理 6.3，我们得到 $p \in P_n$的下界 $\|p\|_{\mathrm{SA}} \geq |||p|||_2 \geq |||p|||_1$。尽管这些下界可以超过 $\|p\|_\infty$，定理 7.1 表明它们往往远小于 $\|p\|_\infty$。$|||\cdot|||_1$ 与 $|||\cdot|||_2$ 未能刻画上确界范数，这一缺陷与下述观察密切相关。设 $K_z^{(n)}(w) = \sum_{|\alpha|=n} \bar{z}^\alpha w^\alpha$ 为$P_{d,n}$ 在 $z \in \mathbb{T}^d$处的再生核。可以验证（参见定理 5.4 之后的讨论），$\|K_z^{(n)}\|_* = 1$。对于 $0 \leq k \leq n-1$，令$a_k = \|K_z^{(k)}\|_2 = \sqrt{\binom{k+d-1}{d-1}}$。对每个 k，汉克尔算子 $\Gamma_{K_z^{(n)}}$作为从P_k 到 P_{n-k}的秩一算子作用。由此可以验证

$$A_k(K_z^{(n)}) = a_k a_{n-k}, \quad \text{and} \quad B_k(K_z^{(n)}) = a_k a_{n-k-1}.$$

显然，单独的每个 $A_k(K_z^{(n)})$或 $B_k(K_z^{(n)})$都远大于 1。因此，方法 1 和方法 2 无法恢复 $K_z^{(n)}$的对偶 Schur–Agler 范数。

还可以计算

$$C_k(q) = \frac{a_{n-k-1}}{a_{n-k}},$$

这意味着

$$C_0(K_z^{(n)}) \cdots C_{n-1}(K_z^{(n)}) \cdot \|K_z^{(n)}\|_2 = \frac{a_0}{a_n} \cdot a_n = 1 = \|K_z^n\|_*,$$

and

$$C_{n-1}(K_z^{(n)}) \cdots C_1(K_z^{(n)}) B_0(K_z^{(n)}) = \frac{a_0}{a_{n-1}} \cdot a_0 a_{n-1} = a_0^2 = 1 = \|K_z^n\|_*.$$

因此，方法 3 和方法 4 可以恢复 $\|K_z^{(n)}\|_*$。由此，根据对偶性，它们所得的 $\|\cdot\|_{\mathrm{SA}}$ 下界至少与上确界范数一样大。然而，要确定它们是否等价，还需要开发更多技巧。

注 7.8。 定理 7.1 中 $\frac{|||p|||_1}{\|p\|_\infty}$ 的上界约为$2^d d^{-1/4}$。反过来，Dixon 例子（参见例 9.4 和注 9.5）表明

$$\sup\left\{\frac{|||p|||_2}{\|p\|_\infty} : p \in P_{d,n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

随 d呈指数增长，因此

$$\sup\left\{\frac{|||p|||_1}{\|p\|_\infty} : p \in P_{d,n}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

根据引理 7.2。

8 半定规划

齐次多项式 $p \in P_n$ 的 Schur–Agler 范数的定义，

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} = \sup\{\|p(\mathbf{T})\| : \mathbf{T} \text{ tuple of commuting contractions}\}$$

似乎不适合进行数值计算，因为 d 元交换压缩算子元组构成的集合性质复杂（例如参见 [16, 33], ），而且映射 $\mathbf{T} \mapsto p(\mathbf{T})$ 具有非线性。

相比之下，引理 3.4 给出的表达式为

$$\|p\|_{\mathrm{SA}}^2 = \sup\{\langle Lp, p\rangle_2 : L \in \mathcal{L}_c^{(n)}, \langle L1, 1\rangle_2 \leq 1\},$$

其中凸锥 $\mathcal{L}_c^{(n)}$ 定义为

$$\mathcal{L}_c^{(n)} = \left\{ L = \sum_{k=0}^{n} L_k, L_k \in B(P_k), L_k \geq 0, M_{z_i}^* L_k M_{z_i} \leq L_{k-1} \text{ for } 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq d \right\}.$$

因此，$\|p\|_{\mathrm{SA}}^2$ 可表示为一个凸优化问题的解。

事实上，可行域由仿射约束和半正定约束刻画，目标函数是线性的。这类凸优化问题称为半正定规划（SDP），通常可以在实践中高效求解。同样，定理 5.4 (2) 给出了一个半正定规划，用于计算齐次多项式的对偶 Schur–Agler 范数的平方。

使用 MATLAB 工具箱 Yalmip [24] 和半正定规划求解器 MOSEK [9] 对该算法进行一种非常基础的实现，计算 Kaijser–Varopoulos 多项式的 Schur–Agler 范数，精度约为 8 位有效数字；在标准笔记本电脑上的运行时间不到 0.2 秒。此外，该算法还会返回一个极大化算子 L，可将其用作 p的 Schur–Agler 范数下界的数值证书。

我们还用该算法测试了一些以 $d = 4$个变量表示的低次数齐次多项式（这是 Schur–Agler 范数与上确界范数是否可比较尚不明确的第一个情形）。例如，当次数为 6 时，每个多项式的运行时间约为几秒。不过，运行时间会随次数迅速增加；并且已知该比值的最大值 $\frac{\|p\|_{\mathrm{SA}}}{\|p\|_\infty}$ 至多按次数的对数增长。此外，对于固定多项式，计算$\|p\|_{\mathrm{SA}}$ 是一个凸优化问题；而要在所有次数为 n 的多项式 p 中最大化比值 $\frac{\|p\|_{\mathrm{SA}}}{\|p\|_\infty}$，则是一个非凸优化问题（因为我们要最大化一个非凹函数），且存在许多局部极大值。因此，仅凭这些数值实验，似乎很难判断冯·诺伊曼不等式对于 4 变量齐次多项式是否能在一个常数范围内成立。

最后，我们指出，另一种将齐次多项式的 Schur–Agler 范数平方表示为半正定规划的方法，可以基于 Knese 关于 Schur–Agler 范数的 Carathéodory 插值型结果；参见 [22, 定理 1.3]。在这种情况下，程序将返回 Schur–Agler 范数上界的一个证书（Agler 分解）。基于引理 3.4 的算法在实际应用中似乎更快。

希望试用此算法的读者，可以在 https: //github.com/michaelhartz/Schur-Agler-norm 找到一个基本实现。

9 附录：经典反例

在本附录中，我们将 [11][12][17][30] 中的反例用 $L_{\mathbf{T},\ \xi}$ 算子来解释。为了将它们与我们在第 6 节中的方法联系起来，下面这个关于 $q \in P_{d,\ n}$ 的一般恒等算子可通过直接计算验证，且颇有用处：

$$\Gamma_q^* \Gamma_q = \sum_{|\alpha| \leq n} M_{z^\alpha}^* \widehat{q} \otimes M_{z^\alpha}^* \widehat{q}. \tag{9.1}$$

例 9.1(**Varopoulos-Kaijser 1974 [30]**）。

原始构造：取

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix},$$

并取 $p = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1z_2 - 2z_1z_3 - 2z_2z_3$. 然后可验证

$$p(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

So

$$\|p(\mathbf{T})\| = 3\sqrt{3}.$$

M与此同时，在 [30], 中已证明 $\|p\|_\infty = 5$，它严格小于 $\|p(\mathbf{T}) \qquad \|$.

该 L 算子： 我们详细说明本例中计算 L 算子的过程，并直接给出其余示例的结果。根据 $p(\mathbf{T})$ 的表达式，显而易见的选择是 $\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$。通过直接计算，我们验证了

$$\langle \xi, \xi \rangle = 1, \quad \langle T_i\xi, T_j\xi \rangle = \delta_{i,j},$$

$$\langle T_i^2\xi, T_jT_k\xi \rangle = -\frac{1}{3} \text{ if } j \neq k, \quad \langle T_i^2\xi, T_j^2\xi \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle T_iT_j\xi, T_kT_l\xi \rangle = \frac{1}{3} \text{ if } i \neq j, k \neq l,$$

以及 $\langle T^\alpha\xi, \ T^\beta\xi \rangle = 0$ 对于其他情形。换言之，

$$\langle L_{\mathbf{T},\xi}1, 1 \rangle = 1, \quad \langle L_{\mathbf{T},\xi}z_i, z_j \rangle = \delta_{i,j},$$

$$\langle L_{\mathbf{T},\xi}z_i^2, z_jz_k \rangle = -\frac{1}{3} \text{ if } j \neq k, \quad \langle L_{\mathbf{T},\xi}z_i^2, z_j^2 \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle L_{\mathbf{T},\xi}z_iz_j, z_kz_l \rangle = \frac{1}{3} \text{ if } i \neq j, k \neq l,$$

以及 $\langle L_{\mathbf{T},\ \xi}z^\alpha, \ z^\beta \rangle = 0$ 在其他情形下。这给出

$$L_{\mathbf{T},\xi} = 1 \otimes 1 + \sum_{i=1}^{3} z_i \otimes z_i + \frac{1}{3}q \otimes q,$$

其中 $q(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_1z_3$。

解释： 对于 $i = 1, \ 2, \ 3,$

$$M_{z_i}^* L_{\mathbf{T},\xi} M_{z_i} = 1 \otimes 1 + \frac{1}{3}\left(M_{z_i}^* q\right) \otimes \left(M_{z_i}^* q\right).$$

由于 $\|M_{z_i}^* q\|_2^2 = 3$，我们有 $\left\|\frac{1}{3}\left(M_{z_i}^* q\right) \otimes \left(M_{z_i}^* q\right)\right\| = 1$。因此 $\frac{1}{3}\left(M_{z_i}^* q\right) \otimes \left(M_{z_i}^* q\right)$ 小于 P_1 上的投影算子，即 $\sum_{i=1}^3 z_i \otimes z_i$。所以 $L_{\mathbf{T},\ \xi} \in \mathcal{L}_c$。事实上，根据

其表达式，$L_{\mathbf{T},\,\xi} \in \mathcal{L}_c^{(2)}$ ($\frac{q}{\sqrt{3}}$)。现在我们可以用引理 3.3 来解释这个反例：令 $L = L_{\mathbf{T},\,\xi}$，那么

$$\|p\|_{\mathrm{SA}}^2 \geq \frac{\langle Lp, p\rangle_2}{\langle L1, 1\rangle_2} = \frac{|\langle p, q\rangle_2|^2}{3} = 27 > 25 = \|p\|_\infty^2.$$

我们也可以用定理 5.4 来解释：

$$\|q\|_* \leq \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \|p\|_{\mathrm{SA}} \geq \frac{|\langle p, q\rangle_2|}{\|q\|_*} \geq 3\sqrt{3} > 5 = \|p\|_\infty.$$

（事实上，例 6.4 表明 $\|q\|_* = \frac{5}{3}$。）利用恒等式 (9.1)，我们还可以写成

$$L = \frac{1}{3}\Gamma_q^*\Gamma_q\big|_{P_2} + P_{\leq 1}.$$

由于 $\|M_{z_i}^*\Gamma_q\big|_{P_2}\|^2 = 3$ 对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，因此我们看到，这个例子也可以通过第 6 节中的方法 2 得到。

例 9.2（Crabb-Davie 1975 [11]）。

原始构造： $\mathbf{T} = (T_1,\ T_2,\ T_3)$ 由以下标准正交基之间的映射给出：$\mathbb{C}^8$

$$\begin{aligned}
T_1 :& e_1 \to e_2 \to (-e_5) \to (-e_8) \to 0, e_3 \to e_7 \to 0, e_4 \to e_6 \to 0\\
T_2 :& e_1 \to e_3 \to (-e_6) \to (-e_8) \to 0, e_2 \to e_7 \to 0, e_4 \to e_5 \to 0\\
T_3 :& e_1 \to e_4 \to (-e_7) \to (-e_8) \to 0, e_2 \to e_6 \to 0, e_3 \to e_5 \to 0,
\end{aligned}$$

and

$$p = z_1z_2z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3.$$

那么 $p(\mathbf{T})e_1 = 4e_8$。因此 $\|p(\mathbf{T})\| \geq 4 > \|p\|_\infty$。

该 L 算子： 取 $\xi = e_1$。与上面类似，我们计算

$$\begin{aligned}
L = L_{\mathbf{T},\xi} =& 1 \otimes 1 + \sum_{i=1}^3 z_i \otimes z_i\\
&+ (z_1z_2 - z_3^2) \otimes (z_1z_2 - z_3^2) + (z_2z_3 - z_1^2) \otimes (z_2z_3 - z_1^2) + (z_1z_3 - z_2^2) \otimes (z_1z_3 - z_2^2)\\
&+ (z_1z_2z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3) \otimes (z_1z_2z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3)\\
=& P_{\leq 1} + M_{z_1}^*p \otimes M_{z_1}^*p + M_{z_2}^*p \otimes M_{z_2}^*p + M_{z_3}^*p \otimes M_{z_3}^*p + p \otimes p.
\end{aligned}$$

解释： 写成 $L = \sum_{k=0}^3 L_k$，其中

$$L_0 = 1 \otimes 1, \quad L_1 = \sum_i z_i \otimes z_i, \quad L_2 = \sum_i M_{z_i}^*p \otimes M_{z_i}^*p, \quad L_3 = p \otimes p.$$

显然，对于 $k = 1,\ 3$，有 $M_{z_i}^*L_kM_{z_i} \leq L_{k-1}$。对于 $k = 2$，注意到

$$M_{z_i}^* L_2 M_{z_i} = \sum_{j=1}^{3} M_{z_i z_j}^* p \otimes M_{z_i z_j}^* p = L_1.$$

因此 $L \in \mathcal{L}_c^{(3)}(p)$。这意味着 $\|p\|_* \le 1$。根据引理 5.3，我们实际上有

$$\|p\|_* = 1, \quad \text{which implies} \quad \|p\|_{\mathrm{SA}} \ge \frac{\|p\|_2^2}{\|p\|_*} = 4 > \|p\|_\infty.$$

利用 (9.1)，对 L的另一种解释是

$$L = \Gamma_p^* \Gamma_p\big|_{P_{\ge 2}} + \max_i \left\| M_{z_i}^* \Gamma_p\big|_{P_1} \right\|^2 \cdot P_{\le 1}.$$

因此，这个例子也可以用方法 2 来构造。

我们还要指出，Kaijser-Varopoulos 例子的 L 算子是 Crabb–Davie 例子的L 算子的压缩。事实上，在 P_2上，Kaijser–Varopoulos 的 L 算子是将 Crabb–Davie 的 L 算子压缩到由 q张成的一维子空间所得。因此，这两个反例的关联比乍看之下更为密切。

例 9.3 (Holbrook 2001 [17])。在 [17], 中，Holbrook 给出了一个由三个 4×4 矩阵构成的冯·诺伊曼不等式反例。后来，Knese 在 [20] 中证明，冯·诺伊曼不等式在维数 3 时成立。因此，使该不等式失效的最小维数是 4。

原始构造： Holbrook 反例如下构造。设 e, h 是 $\mathbb{C}^4$中的一组正交规范向量，并设 f_1, f_2, f_3 是张成 $\{e, h\}^\perp$的单位向量，使得对于 $i \ne j$，有 $\langle f_i, f_j \rangle = -\frac{1}{2}$。定义算子 T_1, T_2, T_3 为

$$T_k e = f_k, \quad T_k f_j = \begin{cases} h & \text{if } k = j \\ -\frac{1}{2} h & \text{if } k \ne j \end{cases}, \quad T_k h = 0.$$

设 $p = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1 z_2 - 2z_2 z_3 - 2z_1 z_3$，如 Varopoulos-Kaijser 反例中所示。则 $\|p(\mathbf{T})\| = 6 = \frac{6}{5}\|p\|_\infty$。

该 L 算子： 我们计算

$$L_{\mathbf{T},e} = 1 \otimes 1 + \sum_{i=1}^{3} z_i \otimes z_i - \frac{1}{2} \sum_{i \ne j} z_i \otimes z_j + q \otimes q,$$

其中

$$q = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3),$$

解释： 再次，写作 $L = L_{\mathbf{T},\,e} = L_0 + L_1 + L_2$，其中

$$L_0 = 1 \otimes 1, \quad L_1 = \sum_{i=1}^{3} z_i \otimes z_i - \frac{1}{2} \sum_{i \ne j} z_i \otimes z_j, \quad L_2 = q \otimes q.$$

我们注意到$\|M_{z_i}^* L_2 M_{z_i}\| = \|M_{z_i}^* q\|_2^2 = \frac{3}{2}$，$i = 1,\ 2,\ 3$,和 L_1恰好是到 $\operatorname{span}\{M_{z_i}^* q\}_{i=1}^3$上的投影算子的 $\frac{3}{2}$ 倍。因此 $M_{z_i}^* L_2 M_{z_i} \le L_1$。我们直接验证

$$M_{z_i}^* L_1 M_{z_i} = L_0, \quad i = 1, 2, 3.$$

因此 $L \in \mathcal{L}_c^{(2)}(q)$，这意味着 $\|q\|_* \le 1$。再次根据引理 5.3，

$$\|q\|_* = 1, \quad \text{which implies} \quad \|p\|_{\mathrm{SA}} \ge \frac{|\langle p, q\rangle_2|}{\|q\|_*} = 6 > 5 = \|p\|_\infty.$$

如第 6 节所述，这个例子也可以用方法 3 和方法 4 来解释。

例 9.4 (Dixon 1976 [12]). 在证明 $C(d,\ n)$ 的下界时，Dixon 提出了一种构造冯·诺依曼不等式反例的方法。

原始构造： 假设 $n = 2r+1$ 是一个奇数，并且 $d > n$。利用一个组合引理（[12, 引理 3.2]），Dixon 构造了一个满足以下条件的集合 $\mathcal{S} = \{A_j\}_{j=1}^N$。

(1) 每个 A_i 都是 $\{1, 2, \cdots, d\}$ 的子集，且恰好包含 n 个元素；(2) 对于 $j \ne k$，$|A_j \cap A_k| < t = r+1$；(3) $N \ge \binom{d}{n}\binom{d}{n-t}^{-1}\binom{n}{t}^{-1}$。

对于 $A = \{i_1, \cdots, i_n\} \in \mathcal{S}$，记作 $z^A = z_{i_1}\cdots z_{i_n}$。Kahane、Salem 和 Zygmund 的一个结果 [18,第 6 章，定理 4], 另见 [12, 引理 3.1], 保证存在一组符号$\{\epsilon_A\}_{A\in\mathcal{S}}$，$\epsilon_A = \pm 1$，使得

$$p(z) = \sum_{A\in\mathcal{S}} \epsilon_A z^A,$$

具有上确界范数

$$\|p\|_\infty < C\left(dN\log n\right)^{1/2},$$

其中 C 是一个绝对常数。令 $\mathcal{H}$ 为具有标准正交基的有限维希尔伯特空间

$$e(j_1, \cdots, j_m), f(j_1, \cdots, j_m), \quad 0 \le m \le r, 1 \le j_1 \le \cdots \le j_m \le d.$$

对于 $m = 0$，直接记作 e 和 f。定义

$$T_l e(j_1, \cdots, j_m) = e(j_1, \cdots, j_h, l, j_{h+1}, \cdots, j_m), \quad 0 \le m \le r-1,$$

其中 h 满足 $j_h \le l \le j_{h+1}$;

$$T_l f(j_1, \cdots, j_m) = \begin{cases} f(j_1, \cdots, j_h, j_{h+1}, \cdots, j_m) & l = j_h \\ 0 & l \notin \{j_1, \cdots, j_m\} \end{cases} \qquad 0 \le m \le r;$$

$$T_l e(j_1, \cdots, j_r) = \sum\nolimits' \epsilon_{\{l, j_1, \cdots, j_r, i_1, \cdots, i_r\}} f(i_1, \cdots, i_r).$$

这里的求和 $\sum'$遍历所有整数 $1 \le i_1 \le \cdots \le i_r \le d.$。可以验证，$\mathbf{T}$ 是可交换压缩算子组，且 $p(\mathbf{T})e = Nf$。因此

$$\|p\|_{\mathrm{SA}} \ge \|p(\mathbf{T})\| \ge N.$$

因此,

$$\begin{aligned} C(d, 2r+1) \ge & \frac{\|p\|_{\mathrm{SA}}}{\|p\|_\infty} \ge \frac{N}{C\left(dN\log n\right)^{1/2}} = \frac{N^{1/2}}{C(d\log n)^{1/2}} \ge \left(\frac{\binom{d}{n}\binom{d}{n-t}^{-1}\binom{n}{t}^{-1}}{C^2 d\log n}\right)^{1/2} \\ & = \left(\frac{(r!)^2(r+1)!}{((2r+1)!)^2 C^2\log(2r+1)} \cdot \frac{(d-r)!}{d(d-2r-1)!}\right)^{1/2} \\ & \approx_r d^{r/2}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

该 L 算子： 通过直接计算，

$$\langle \mathbf{T}^{\alpha} e, \mathbf{T}^{\beta} e \rangle = \begin{cases} 0 & |\alpha| \neq |\beta|, \text{ or } \max\{|\alpha|, |\beta|\} > n \\ \delta_{\alpha,\beta}, & |\alpha| = |\beta| \leq r \\ \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma\cup\alpha}\epsilon_{\gamma\cup\beta}, & |\alpha| = |\beta| > r, \end{cases}$$

其中在最后一种情形下，求和遍及所有满足 $|\gamma| + |\alpha| = n$ 的 γ，且 $\gamma \cup \alpha$ 和 $\gamma \cup \beta$ 都属于 $\mathcal{S}$。由此我们可以验证

$$L = L_{\mathbf{T},e} = \sum_{|\gamma| \leq r} M_{z^{\gamma}}^{*} p \otimes M_{z^{\gamma}}^{*} p + P_{\leq r}.$$

解释： 再次，记 $L = \sum_{k=0}^{n} L_k$，$L_k \in \mathcal{B}(P_k)$。那么显然，对于 $k \neq r+1$，有 $M_{z_i}^{*} L_k M_{z_i} \leq L_{k-1}$。同时，

$$M_{z_i}^{*} L_{r+1} M_{z_i} = \sum_{|\gamma|=r} M_{z_i z^{\gamma}}^{*} p \otimes M_{z_i z^{\gamma}}^{*} p.$$

由集合 $\mathcal{S}$ 的条件（2），每个 $M_{z_i z^{\gamma}}^{*} p$ 要么为零，要么是一个单项式；对于不同的 γ，它们彼此不同。因此 $M_{z_i}^{*} L_{r+1} M_{z_i} \leq P_r = L_r$。还要注意，$L_n = p \otimes p$。所以 $L \in \mathcal{L}_c^{(n)}(p)$。由上述结果及引理 5.3，

$$\|p\|_{*} = 1, \quad \text{which implies} \quad \|p\|_{\mathrm{SA}} \geq \frac{\|p\|_2^2}{\|p\|_{*}} = N.$$

证明的其余部分与原始构造相同。再次由（9.1），我们看到

$$L = \Gamma_p^{*} \Gamma_p \big|_{\geq r+1} + P_{\leq r},$$

以及 $\max_i \| M_{z_i}^{*} \Gamma_p \big|_{P_r} \| = 1$，因此 Dixon 的例子也可以用方法 2 来解释。

注 9.5. 如果在 (9.2) 中取 $d = kr$，并且令 k 足够大，那么上面的结果给出

$$C(kr, 2r+1) \gtrsim \frac{1}{r^{1/4} (\log(2r+1))^{1/2}} \left(\frac{(1 + \frac{1}{k-2})^{k-1} (k-1)}{2^4} \right)^{r/2} \gtrsim 2^{r/2} = 2^{\frac{d}{2k}}.$$

因此，对于某个较大的 k，

$$C(d) \gtrsim 2^{\frac{d}{2k}}.$$

这表明 $C(d)$ 必须呈指数增长。事实上，如上所述，Dixon 的例子的构造与方法 2 相符。因此，上述估计实际上表明

$$\sup \left\{ \frac{\|\!|p|\!\|_2}{\|p\|_{\infty}} : p \in P_{d,n}, n \in \mathbb{N} \right\} \gtrsim 2^{\frac{d}{2k}}.$$

参考文献

[1] Jim Agler. Arveson 延拓定理与反解析模型。《积分方程与算子理论》，5(5):608–631，1982年。

[2] Jim Agler. 多圆盘上定义的某些全纯函数的表示。在《算子理论专题：Ernst D. Hellinger 纪念文集》，算子理论进展与应用第 48 卷，第 47–66 页。Birkh¨auser，巴塞尔，1990年。[3] Jim Agler 和 John E. McCarthy. Pick 插值与希尔伯特函数空间，数学研究生教程第 44 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[4] Jim Agler 和 John E. McCarthy. 特征簇。《数学学报》，194(2):133–153，2005年。[5] Jim Agler、John E. McCarthy 和 N. J. Young. 多面体上全纯函数的表示。《密歇根数学杂志》，62(4):675–689，2013年。[6] Jim Agler、John Edward McCarthy 和 Nicholas Young. 算子分析——复分析中的希尔伯特空间方法，剑桥数学专题第 219 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2020年。[7] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter. 完备 Pick 空间的弱乘积。《印第安纳大学数学杂志》，70(1):325–352，2021年。[8] T. Andˆo. 一对交换压缩算子。《塞格德数学科学学报》，24:88–90，1963年。[9] MOSEK ApS. MOSEK 文档，2025年。[10] Catalin Badea 和 Bernhard Beckermann. 谱集。https://arxiv.org/abs/1302.0546，2013年。[11] M. J. Crabb 和 A. M. Davie. 希尔伯特空间算子的冯·诺伊曼不等式。《伦敦数学会通报》，7:49–50，1975年。[12] P. G. Dixon. 次数大于二的多项式的冯·诺伊曼不等式。《伦敦数学会杂志》(2)，14(2):369–375，1976年。[13] Anatolii Grinshpan、Dmitry S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 Hugo J. Woerdeman. 多变量多项式的范数约束行列式表示。《复分析与算子理论》，7(3):635–654，2013年。[14] Michael Hartz. 交换加权移位算子的冯·诺伊曼不等式。《印第安纳大学数学杂志》，66(4):1065–1079，2017年。[15] Michael Hartz. 多圆盘上的冯·诺伊曼不等式。《数学年刊》，391(4):5235–5264，2025年。[16] John Holbrook 和 Matjaˇz Omladiˇc. 交换算子的逼近。《线性代数及其应用》，327(1-3):131–149，2001年。[17] John A. Holbrook. Schur 范数与多变量冯·诺伊曼不等式。在《算子理论及相关专题的最新进展》（塞格德，1999年），算子理论进展与应用第 127 卷，第 375–386 页。Birkh¨auser，巴塞尔，2001年。[18] Jean-Pierre Kahane. 函数的某些随机级数，剑桥高等数学研究第 5 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1985年。[19] Yitzhak Katznelson. 调和分析导论。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第三版，2004年。

[20] Greg Knese. 3×3 矩阵的冯·诺依曼不等式. 《伦敦数学会通报》, 48(1):53–57, 2016.[21] Greg Knese. 双圆盘上实现的Kummert方法. 《印第安纳大学数学杂志》, 70(6):2369–2403, 2021年.[22]Greg Knese. 用幂零矩阵检验冯·诺依曼不等式. https://arxiv.org/abs/2501.15671, 2025年.[23]Dexie Lin与Yi Wang. 循环算子、线性泛函与再生核希尔伯特空间. https://arxiv.org/abs/2507.17358.[24] J. L¨ofberg. Yalmip：MATLAB中的建模与优化工具箱. 载于CACSD会议论文集, 台北, 台湾, 2004年.[25] Amit Maji、Jaydeb Sarkar与Srijan Sarkar. $H^2(\mathbb{D}^n)$上的托普利茨算子与渐近托普利茨算子. 《数学科学通报》, 146:33–49, 2018.[26] Vern Paulsen. 完全有界映射与算子代数, 剑桥高等数学研究第78卷. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002.[27] Gilles Pisier. 相似性问题与完全有界映射, 《数学讲义》第1618卷. Springer-Verlag, 柏林, 增订版, 2001年. 包含“哈尔莫斯问题”的解答.[28] Walter Rudin. 多圆盘中的函数论. W. A. Benjamin, Inc., 纽约-阿姆斯特丹, 1969.[29] B´ela Sz.-Nagy、Ciprian Foias、Hari Bercovici与L´aszl´o K´erchy. 希尔伯特空间上算子的调和分析. Universitext. Springer, 纽约, 第二版, 2010.[30] N. Th. Varopoulos. 关于冯·诺依曼的一个不等式以及张量积度量理论在算子理论中的一个应用. 《泛函分析杂志》, 16:83–100, 1974.[31] Nicholas Th. Varopoulos. 关于冯·诺依曼的一个不等式（Sur une in´egalit´e de von Neumann）. 《巴黎科学院院报》S´er. A-B, 277:A19–A22, 1973.[32] 约翰·冯·诺依曼. 酉空间中一般算子的谱理论（Eine Spektraltheorie f¨ur allgemeine Operatoren eines unit¨aren Raumes）. 《数学通讯》, 4:258–281, 1951.[33] Klemen ˇSivic. 关于交换三元组簇III. 《线性代数及其应用》, 437(2):393–460, 2012.[34] Fei Xue、Yanlu Lian与Yuqin Zhang. 关于单纯形与交叉多胞形的Hadwiger覆盖泛函. 2021年. arXiv:2108.13277.