arXiv:2602.14075v1 [math.RA] 15 Feb 2026

相似代数：一种将近似代数结构与李结构坍缩为经典代数的框架

Benyamin Ghojogh，Golbahar Amanpour

加拿大安大略省滑铁卢 两位作者对本文贡献相同。
联系邮箱：bghojogh@uwaterloo.ca

摘要。经典代数结构要求其定义公理得到精确满足。我们提出相似代数这一框架，将代数结构与李结构拓展到运算在容差 ε 范围内满足定量界限的情形。我们不再要求严格满足结合律、逆元或分配律，而是研究由明确的 ε 估计控制的运算族，并分析它们在极限坍缩下的行为。

在一致误差控制和结构映射的 C^1_{loc} 收敛条件下，我们证明了一个一般性的坍缩定理，表明相似结构在 $\varepsilon \to 0$ 时收敛到经典代数对象。我们构建了一套近似结构层级，包括相似群、环、域、向量空间和李群，并通过在度量距离 ε 范围内满足的公理将其形式化。我们还定义了相似代数范畴，用以刻画近似系统之间的态射。此外，我们阐明了相似代数与模糊代数之间的关系，并说明前者是后者的推广。所提出的相似代数可用于模拟运算或关系本质上具有近似性的现实现象。

关键词——相似代数、相似群、相似环、相似域、相似模、相似向量空间、相似李代数、相似李群、相似代数范畴、模糊代数

1. 引言

经典代数结构，如群、环、域、模、向量空间和李代数，是数学中的基础工具。然而，在许多现实应用中，运算往往是近似的，而非精确的。例如，在机器学习中，相似性度量或核函数常常取代精确算术 [SS18]（例如，参见[AG26]）；在数据科学中，汇总含噪或近似的相似度分数需要灵活的代数推理 [IM98]；在网络理论中，连通性和邻接运算可能仅近似成立 [Bar13]；而在数学的其他领域，如泛函分析或基于度量的代数系统，经典公理可能过于僵化，无法对实际现象进行建模 [Hye41，Ras78，Gro07]。

为解决这一问题，我们提出了相似代数，这是一个用于近似代数结构和李结构的框架。该框架将近似结合性、逆元、分配律和李括号形式化，同时提供坍缩定理，以确保随着近似误差趋于零，结构收敛到经典结构。由此，相似代数使得在运算本质上具有近似性的情境中也能够进行数学上严谨的推理，从而弥合经典代数理论与实际计算或建模之间的差距。

近似代数结构的形式化源自几种不同的数学传统，其中最重要的是函数方程稳定性理论。*Hyers-Ulam-Rassias* 稳定性 框架由 Hyers 开创 [Hye41] 并由 ..... 大幅推广

由 Rassias [Ras78], 提出，它考察一个“几乎”满足代数恒等式（例如柯西函数方程）的函数是否必然接近一个精确解。这一视角为我们的 ε有界公理奠定了历史与逻辑基础，并表明近似的代数行为并非只是噪声，而是偏离经典规范的一种有结构的形式。

沿着这种基于度量的方法进一步推进，Gromov [Gro07] 对超越刚性经典代数的度量结构提出了深刻见解，展示了代数和几何性质如何在极限条件下得以保留或转变。在算子理论领域，Pisier [Pis98] 探讨了算子代数的相似度，量化了有界同态与更为刚性的 *-同态之间的距离。Arora 等人 [ABSS98],的研究补充了这一探究方向，关注求解代数问题近似解的计算复杂性，凸显了建立形式化相似性框架的实际必要性。

我们的工作也与加法组合学的现代研究相交。Tao [Tao08]将近似群的概念形式化。这类集合在乘法下“近乎”封闭，即元素的乘积仍处于原集合的受控扩张范围内。近似群主要关注集合论意义上的增长，而我们的相似代数将这些概念扩展到完整的结构层级，包括环、模和李代数，并通过度量收敛将它们统一起来，确保当容差参数趋于零时严格退化为经典代数。

区分相似代数与已确立的模糊代数 [MN01、Ros71]也很重要。模糊代数使用隶属函数来定义元素属于某个集合或满足某项性质的程度，而相似代数则依赖度量 d 和容差参数 ε 来衡量公理是否近似成立。这些系统在极限情况下的行为有一个关键区别：模糊结构代表对隶属关系的永久性放宽，而相似代数则专门设计了坍缩定理。这些定理确保，随着近似误差 ε 趋于零，从群到李代数的相似结构在数学上收敛到其精确的经典对应项，恢复标准代数的严格公理。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍相似代数 的基本定义，并构建近似结构的层级体系，包括相似半群、幺半群、群、环、域和向量空间。第3 节将这一框架扩展至相似李代数和相似李群，并定义近似李括号及光滑流形的要求。第 4 节阐述本文的核心理论贡献，即坍缩定理以及近似相等的极限原理。在第 5 节中，我们给出相似代数的两个实际示例：一个关于相似域，另一个关于相似扰动矩阵李群。第6 节介绍相似代数范畴，探讨近似系统之间的态射和结构映射。第7 节对所提出的相似框架与模糊代数进行严格比较，着重说明我们模型独特的收敛性质。最后，第 8 节总结全文，并讨论该框架对机器学习和计算建模的影响。

2. 相似代数及其结构

本节通过引入近似代数结构的层级体系，确立相似代数的形式化基础。我们从最基本的构建单元——相似半群和幺半群——开始，逐步构建更复杂的系统，包括相似群、环、域和向量空间。不同于在运算中假设绝对精确的经典

代数，我们的框架承认度量空间（A， d）内存在容差 ε。通过将结合律、单位元和分配律等核心公理重新定义为受 ε 限制的约束，我们构建了一个灵活而又具备严格数学性的环境。这种层级化方法使我们能够将“近似相等”的概念推广到多样化的代数领域，确保每种结构都通过共享的度量基础，与其经典对应项保持明确定义的关系。

定义 1（相似代数）。 相似代数是一个元组：

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (A, \{\circ_i^\varepsilon\}_{i\in I}, d, \varepsilon), \tag{1}$$

其中 A 是一个非空集合，每个 $\circ_i^\varepsilon \colon A^{n_i} \to A$ 都是一个 n_i元运算， I 是运算符的指标集，d 是 A上的度量，而 ε 是一个较小的非负容差（近似误差）：

$$\varepsilon \gtrsim 0, \tag{2}$$

并且每个运算都是一致利普希茨的：

$$d(\circ_i^\varepsilon(\boldsymbol{x}), \circ_i^\varepsilon(\boldsymbol{y})) \le L_i \sum_j d(x_j, y_j), \quad \forall x_j, y_j \in A, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别表示两个向量或集合，x_j 和 y_j 分别是它们的第 j个元素，而 L_i 是运算 $\circ_i^\varepsilon$的利普希茨常数。

备注 1。 度量或相似度函数 d 控制经典代数公理的“近似满足”。假设 $f_\varepsilon(x)$ 和 $g_\varepsilon(x)$ 是 x 的近似函数，容差为 ε。那么：

$$f_\varepsilon(x) \approx_\varepsilon g_\varepsilon(x) \iff d\big(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\big) \le \varepsilon. \tag{4}$$

当 $\varepsilon \to 0$时，距离趋于零：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d\big(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\big) = 0 \implies f(x) = g(x). \tag{5}$$

作为式（4）的一个特例，我们有：

$$x \approx_\varepsilon y \iff d\big(x, y\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y \in A. \tag{6}$$

定义 2（相似半群）。 相似半群是一个元组：

$$\mathcal{G}_\varepsilon := (A, *_\varepsilon, d, \varepsilon), \tag{7}$$

其中 $*_\varepsilon \colon \ A \times A \to A$ 是一个近似算子：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} *_\varepsilon = *, \tag{8}$$

and:

- 存在近似封闭性：

$$x *_\varepsilon y \in_\varepsilon A, \quad \forall x, y \in A, \tag{9}$$

  也就是说：

$$\forall x, y \in A, \quad \exists z \in A, \quad \textit{such that} \quad d(z, x *_\varepsilon y) \in A, \tag{10}$$

- 存在近似结合性：

$$d\big((x *_\varepsilon y) *_\varepsilon z,\, x *_\varepsilon (y *_\varepsilon z)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y, z \in A, \tag{11}$$

- 存在稳定性：

$$d(x *_\varepsilon y, x' *_\varepsilon y') \le L\big(d(x, x') + d(y, y')\big), \quad \forall x, y, x', y' \in A, \tag{12}$$

  其中， L是利普希茨常数。

定义 3（相似幺半群）。相似幺半群是一个元组：

$$\mathcal{M}_\varepsilon := (A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, d, \varepsilon), \tag{13}$$

它是一个相似半群，并带有近似单位元 $e_\varepsilon \in A$，满足：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e_\varepsilon = e, \tag{14}$$

并且存在近似单位元，使得：

$$d(x *_\varepsilon e_\varepsilon, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A, \tag{15}$$

$$d(e_\varepsilon *_\varepsilon x, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A. \tag{16}$$

定义 4 (相似阿贝尔／交换幺半群**)**。相似阿贝尔（或交换）幺半群是一个相似幺半群 $(A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, d, \varepsilon)$，满足：

- 满足近似交换性：

$$d\big((x *_\varepsilon y), (y *_\varepsilon x)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y \in A. \tag{17}$$

定义 5 (相似性群**)**。相似性群是一个元组：

$$\mathcal{G}_\varepsilon := (A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon), \tag{18}$$

它是一个满足近似结合性（*11*）、近似单位元（*15*）、（*16*）以及其他特征的相似幺半群：

- 每个 $x \in A$ 都有一个近似逆元 $x_\varepsilon^{-1} \in A$，满足：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (x_\varepsilon)^{-1} = x^{-1}, \tag{19}$$

$$d(x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, e_\varepsilon) \le \varepsilon, \tag{20}$$

$$d(x_\varepsilon^{-1} *_\varepsilon x, e_\varepsilon) \le \varepsilon, \tag{21}$$

- 并且满足逆元稳定性：

$$d(x_\varepsilon^{-1}, y_\varepsilon^{-1}) \le C d(x, y), \tag{22}$$

  其中 C 是利普希茨常数。

定义 6 (相似阿贝尔/交换群**)**。相似阿贝尔群（或相似交换群）是一种相似性群，同时还满足乘法的近似交换性（*17*）。

定义 7 (相似半环**)**。相似半环是一个元组：

$$\mathcal{R}_\varepsilon := (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, d, \varepsilon), \tag{23}$$

具有两个运算，即近似加法 $+_\varepsilon$ 和近似乘法 $*_\varepsilon$，使得$(A, +_\varepsilon)$ 在近似加法下构成一个相似阿贝尔幺半群，并满足：

- 近似交换性：

$$d\big((x +_\varepsilon y), (y +_\varepsilon x)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y \in A, \tag{24}$$

- 近似结合性：

$$d\big((x +_\varepsilon y) +_\varepsilon z, x +_\varepsilon (y +_\varepsilon z)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y, z \in A, \tag{25}$$

- 存在近似加法单位元 $0_\varepsilon \in A$，使得：

$$d(x +_\varepsilon 0_\varepsilon, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A, \tag{26}$$

$$d(0_\varepsilon +_\varepsilon x, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A, \tag{27}$$

- 存在加法的近似交换性：

$$d\big((x +_\varepsilon y), (y +_\varepsilon x)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y \in A. \tag{28}$$

并且 $(A, *_\varepsilon)$ 在近似乘法下构成一个相似幺半群，满足：

- 近似结合性：

$$d\big((x *_\varepsilon y) *_\varepsilon z, x *_\varepsilon (y *_\varepsilon z)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y, z \in A, \tag{29}$$

- 存在近似乘法单位元 e_ε ，使得：

$$d(x *_\varepsilon e_\varepsilon, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A, \tag{30}$$

$$d(e_\varepsilon *_\varepsilon x, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A. \tag{31}$$

并且近似乘法对近似加法满足近似分配律：

$$d\big(x *_\varepsilon (y +_\varepsilon z), (x *_\varepsilon y) +_\varepsilon (x *_\varepsilon z)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y, z \in A. \tag{32}$$

定义 8 (相似环**)**。 相似环是一个元组：

$$\mathcal{R}_\varepsilon := (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, d, \varepsilon), \tag{33}$$

它是一个相似半环，其中：

- $(A, +_\varepsilon)$ 在近似加法下构成一个相似阿贝尔群，满足公式（*24*）、（*25*）、（*26*）、（*27*）和（*28*），并且对每个 $(-x)_\varepsilon \in A$，都存在近似加法逆元 $x \in A$：

$$d\big(x +_\varepsilon (-x)_\varepsilon, 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon, \tag{34}$$

$$d\big((-x)_\varepsilon +_\varepsilon x, 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon, \tag{35}$$

  其中， 0_ε 是满足以下条件的近似零元：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 0_\varepsilon = 0, \tag{36}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (-x)_\varepsilon = -x. \tag{37}$$

- $(A, *_\varepsilon)$ 在近似乘法下构成一个相似幺半群，满足公式（*29*）、（*30*）和（*31*）。
- 近似乘法对近似加法满足近似分配律，如公式（*32*）所示。

定义 9 （相似域）。 相似域是一个元组：

$$\mathcal{F}_\varepsilon := (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon), \tag{38}$$

它是一个相似环，其中：

- $(A, +_\varepsilon)$ 是一个相似阿贝尔群，满足方程（*24*）、（*25*）、（*26*）、（*27*）和（*35*）。*(34)*,
- $(A \backslash \{0_\varepsilon\}, *_\varepsilon)$ 是一个相似阿贝尔群，满足方程（*29*）、（*30*）和（*31*），并且存在近似乘法逆元（*20*）和（*21*）。
- 存在近似乘法对近似加法满足近似分配律，如方程（*32*）所示。

定义 10 (相似模**)**。 设 $\mathcal{R}_\varepsilon = (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, d, \varepsilon)$ 是一个相似环。相似 $\mathcal{R}_\varepsilon$-模是相似环 $\mathcal{R}_\varepsilon$上的一个模，定义为如下元组：

$$\mathcal{M}_\varepsilon := (M, +_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, d), \tag{39}$$

使得：

- $(M, +_\varepsilon)$ 是一个相似阿贝尔群，
- $\cdot_\varepsilon$： $A \times M \to M$，
- 存在近似标量分配律（近似模公理）：

$$d\big(r \cdot_\varepsilon (x +_\varepsilon y), (r \cdot_\varepsilon x) +_\varepsilon (r \cdot_\varepsilon y)\big) \le \varepsilon, \tag{40}$$

其中 r 是一个标量。

定义11 (相似向量空间**)**。 相似向量空间 $\mathcal{V}_\varepsilon = (V, +_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, d)$ 是相似域 $\mathcal{F}_\varepsilon$上的相似模。

3. 相似李代数与相似李群

基于上一节确立的离散相似结构，我们现在通过定义相似李群和相似李代数，将这一框架扩展到连续域。经典李理论依赖于光滑流形严格的微分结构，以及雅可比恒等式的精确满足；而许多物理和计算系统所呈现的对称性仅能近似保持。在本节中，我们通过引入相似李括号来形式化这些现象；该括号在 ε 容差范围内满足反对称性和雅可比恒等式。我们还将探讨这些结构的几何含义，定义相似李群的局部性质——由流形上的近似群运算所支配——如何与其对应的相似李代数相关联。这一扩展提供了必要的数学语言，使我们能够以处理基本相似群和环时同等严谨的基础方式，研究近似连续对称性。

定义12 (相似李代数**)**。 相似李代数是在相似域 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 上的向量空间 $\mathfrak{g}$ ，其构成如下：

$$\mathcal{L}_\varepsilon := (\mathfrak{g}_\varepsilon, +_\varepsilon, [\cdot,\cdot]_\varepsilon, 0_\varepsilon, -_\varepsilon, d), \tag{41}$$

其中，$(\mathfrak{g}_\varepsilon, +_\varepsilon, 0_\varepsilon, -_\varepsilon)$ 是在近似加法 $+_\varepsilon$、近似加法逆元 $-_\varepsilon$和数乘下的相似向量空间 $\mathfrak{g}_\varepsilon$，并配有度量 d。 $[\cdot,\cdot]_\varepsilon$:$\mathfrak{g}_\varepsilon \times \mathfrak{g}_\varepsilon \to \mathfrak{g}_\varepsilon$ 是一个相似李括号，满足以下近似公理：

- 近似双线性：

$$d([ax +_\varepsilon by, z]_\varepsilon, a[x,z]_\varepsilon + b[y,z]_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}_\varepsilon, \forall a,b \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

$$d([z, ax +_\varepsilon by]_\varepsilon, a[z,x]_\varepsilon + b[z,y]_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}_\varepsilon, \forall a,b \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

- 近似反对称性：

$$d([x,y]_\varepsilon - [y,x]_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}_\varepsilon, \tag{44}$$

- 近似雅可比恒等式：

$$d\big([x,[y,z]_\varepsilon]_\varepsilon +_\varepsilon [y,[z,x]_\varepsilon]_\varepsilon +_\varepsilon [z,[x,y]_\varepsilon]_\varepsilon, 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}_\varepsilon. \tag{45}$$

定义13 (相似李群**)**。 相似李群是一个元组：

$$\mathfrak{L}_\varepsilon := (G_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d), \tag{46}$$

其中 G_ε 是带有度量 d 的光滑流形，而 $\cdot_\varepsilon$： $G_\varepsilon \times G_\varepsilon \to G_\varepsilon$ 是满足以下条件的近似群乘法：

- 近似结合性：

$$d((g \cdot_\varepsilon h) \cdot_\varepsilon k, g \cdot_\varepsilon (h \cdot_\varepsilon k)) \le \varepsilon, \quad g,h,k \in G_\varepsilon, \tag{47}$$

- 近似单位元：

$$d((g \cdot_\varepsilon e_\varepsilon), g) \le \varepsilon, \quad \forall g \in G_\varepsilon, \tag{48}$$
$$d((e_\varepsilon \cdot_\varepsilon g), g) \le \varepsilon, \quad \forall g \in G_\varepsilon, \tag{49}$$

- 近似逆元：

$$d((g \cdot_\varepsilon g_\varepsilon^{-1}), e_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall g \in G_\varepsilon, \tag{50}$$
$$d((g_\varepsilon^{-1} \cdot_\varepsilon g), e_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall g \in G_\varepsilon. \tag{51}$$

此外，假设对于每个 $\varepsilon \ge 0$， G_ε 都是 C^1 光滑流形。乘法映射：

$$m_\varepsilon : G_\varepsilon \times G_\varepsilon \to G_\varepsilon, \tag{52}$$

以及求逆映射：

$$\iota_\varepsilon : G_\varepsilon \to G_\varepsilon, \tag{53}$$

均为 C^1 光滑。我们假设，当 $\varepsilon \to 0$ 时，结构映射在 C^1 拓扑下于紧子集上一致收敛，即

$$m_\varepsilon \to m, \quad \iota_\varepsilon \to \iota, \tag{54}$$

在 C^1_{loc} （局部连续可微）。

4. 坍缩定理

相似代数的基本前提是，经典代数恒等式在相似容差 ϵ 范围内成立。形式上，对于任意 n 元运算，相似定律与经典定律之间的关系可表示为：

$$\mathcal{L}_\epsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx_\varepsilon \mathcal{L}_0(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{or} \tag{55}$$
$$d\left(\mathcal{L}_\epsilon(x_1, \ldots, x_n), \mathcal{L}_0(x_1, \ldots, x_n)\right) \le \varepsilon, \tag{56}$$

其中， $\mathcal{L}_\epsilon$ 表示相似代数定律， $\mathcal{L}_0$ 表示其经典对应项。这种近似由度量 d 控制，使得两个表达式之间的距离不超过 ε。

下文介绍的各种坍缩定理都是统一极限原理的具体实例：度量稳定代数恒等式在零容差极限下变为精确相等。该原理保证，随着近似误差 $\varepsilon \to 0$，相似结构——包括相似李群的复流形性质——会在数学意义上坍缩为其经典对应项。这一过程确保恢复刚性经典结构，证实相似代数是经典代数理论的一种一致扩展。

引理1 (近似相等的极限**)**。 设(X, d) 为度量空间，且 $\varepsilon \ge 0$。所有运算均一致利普希茨且一致收敛。若对所有 $\varepsilon \ge 0$,

$$d\big(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\big) \le \varepsilon \quad or \quad f_\varepsilon(x) \approx_\varepsilon g_\varepsilon(x), \tag{57}$$

and

$$f_\varepsilon \to f, \quad g_\varepsilon \to g, \tag{58}$$

一致地，当 $\varepsilon \to 0$ 时，则：

$$f(x) = g(x), \quad \forall x. \tag{59}$$

证明。 使用两次三角不等式，我们得到：

$$\begin{aligned} d\big(f(x),g(x)\big) &\le d\big(f(x),f_\varepsilon(x)\big)+d\big(f_\varepsilon(x),g(x)\big)\\ &\le d\big(f(x),f_\varepsilon(x)\big)+d\big(f_\varepsilon(x),g_\varepsilon(x)\big)+d\big(g_\varepsilon(x),g(x)\big)\\ &\overset{(57)}{\le} \|f(x)-f_\varepsilon(x)\|_\infty+\varepsilon+\|g_\varepsilon(x)-g(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon\to 0$，我们有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d\big(f(x),g(x)\big) \overset{(58)}{\le} \|f(x)-f(x)\|_\infty+0+\|g(x)-g(x)\|_\infty=0.$$

由于度量的性质，$d\big(f(x),g(x)\big)\ge 0$，因此 $d\big(f(x),g(x)\big)=0$，从而得到$f(x)=g(x)$，这就是式（59）。度量空间中的极限和一致收敛可依据 [Bou89、Ras78、Hye41、For95] 得到证明。□

命题 1 （相似代数的坍缩）。 设 $\mathcal{A}_\varepsilon=(A,\{\circ_i^\varepsilon\}_{i\in I},d,\varepsilon)$ 是一个相似代数，满足：

- 在紧集上一致，且
- 所有定义代数恒等式的误差均不超过 ε。

那么，当误差趋于零时，即 $\varepsilon\to 0$，我们有：

$$\mathcal{A}_\varepsilon\to\mathcal{A}_0=(A,\{\circ_i^\varepsilon\}_{i\in I},d), \tag{60}$$

其中 $\mathcal{A}_0$ 是满足所有恒等式的经典代数。

证明。 相似代数由满足以下恒等式的运算 $\{\circ_i^\varepsilon\}_{i\in I}$ 构成：

$$P(\circ_1^\varepsilon,\dots,\circ_n^\varepsilon)(x)\approx Q(\circ_1^\varepsilon,\dots,\circ_n^\varepsilon)(x).$$

也就是说：

$$d\big(P_\varepsilon(x),Q_\varepsilon(x)\big)\le\varepsilon.$$

假设一致收敛：

$$\circ_i^\varepsilon\to\circ_i.$$

那么根据引理 1，当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们有：

$$P(x)=Q(x).$$

因此，所有定义恒等式在极限中都严格成立。 □

命题 2 (相似半群的坍缩**)**。 设 $\mathcal{G}_\varepsilon=(A,*_\varepsilon,d,\varepsilon)$ 是一个满足近似结合性的相似半群：

$$d\big((x*_\varepsilon y)*_\varepsilon z,\ x*_\varepsilon(y*_\varepsilon z)\big)\le\varepsilon,\quad\forall x,y,z\in A.$$

若 $*_\varepsilon\to *$ 一致收敛，则当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$(A,*_\varepsilon,d,\varepsilon)\to(A,*), \tag{61}$$

其中 $(A,*)$ 是一个经典半群。

证明。 我们定义：

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x,y,z)&:=(x*_\varepsilon y)*_\varepsilon z,\\ g_\varepsilon(x,y,z)&:=x*_\varepsilon(y*_\varepsilon z). \end{aligned}$$

根据近似结合性：

$$d\big((x*_\varepsilon y)*_\varepsilon z,\ x*_\varepsilon(y*_\varepsilon z)\big)\le\varepsilon,$$

我们有：

$$d(f_\varepsilon(x,y,z), g_\varepsilon(x,y,z)) \le \varepsilon.$$

当 $\varepsilon \to 0$时，我们有 $*_\varepsilon \to *$ 一致成立。于是根据引理 1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有：

$$(x * y) * z = x * (y * z),$$

这就是精确结合律。因此，$(A, *)$ 是一个经典半群。 □

命题3 (相似幺半群的坍缩)。 设 $\mathcal{M}_\varepsilon = (A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, d, \varepsilon)$ 是一个相似幺半群，具有近似单位元 e_ε，且满足：

$$d(x *_\varepsilon e_\varepsilon, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$
$$d(e_\varepsilon *_\varepsilon x, x) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

若 $e_\varepsilon \to e$ 和 $*_\varepsilon \to *$ 一致成立，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$(A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, d, \varepsilon) \to (A, *, e), \tag{62}$$

其中 $(A, *, e)$ 是一个以 e 为单位元的经典幺半群。

证明。 我们定义：

$$f_\varepsilon(x) = x *_\varepsilon e_\varepsilon.$$

根据近似单位元：

$$d(x *_\varepsilon e_\varepsilon, x) \le \varepsilon,$$

我们有：

$$d(f_\varepsilon(x), x) \le \varepsilon.$$

As $\varepsilon \to 0$，我们有 $e_\varepsilon \to e$ 且 $*_\varepsilon \to *$ 一致成立。然后根据引理1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有：

$$x * e = x,$$

这就是精确单位元。同样，可以证明对于 $d(e_\varepsilon *_\varepsilon x, x) \le \varepsilon$ 坍缩为 $e * x = x$ 的情形也成立。因此，$(A, *, e)$ 是一个经典幺半群。□

命题4 (相似群的坍缩)。 设 $\mathcal{G}_\varepsilon = (A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon)$ 是一个相似性群，具有近似逆元$(\cdot)_\varepsilon^{-1}$，满足：

$$d(x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, e_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$
$$d(x_\varepsilon^{-1} *_\varepsilon x, e_\varepsilon) \le \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

若 $x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1} \to e$ 、 $x_\varepsilon^{-1} *_\varepsilon x \to e$ 和 $*_\varepsilon \to *$ 一致成立，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$(A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon) \to (A, *, e, (\cdot)^{-1}), \tag{63}$$

其中 $(A, *, e, (\cdot)^{-1})$ 是一个经典群，其逆元为 $(\cdot)^{-1}$。

证明。 我们定义：

$$f_\varepsilon(x) = x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, \quad g_\varepsilon = e_\varepsilon.$$

根据近似逆元：

$$d(x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, e_\varepsilon) \le \varepsilon,$$

我们有：

$$d(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

当 $\varepsilon \to 0$时，我们有 $e_\varepsilon \to e$ 且 $*_\varepsilon \to *$ 一致成立。然后根据引理 1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有：

$$x * x^{-1} = e,$$

这就是精确逆元。同样，可以证明 $d(x_\varepsilon^{-1} *_\varepsilon x,\ e_\varepsilon) \le \varepsilon$ 塌缩为$x^{-1} * x = e$。因此，$(A,\ *,\ e,\ (\cdot)^{-1})$ 是一个经典群。□

命题 5 (相似半环的坍缩)。 设 $\mathcal{R}_\varepsilon = (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, d, \varepsilon)$ 是一个满足近似分配律的相似半环：

$$d\big(x *_\varepsilon (y +_\varepsilon z),\ (x *_\varepsilon y) +_\varepsilon (x *_\varepsilon z)\big) \le \varepsilon, \quad \forall x, y, z \in A.$$

若 $+_\varepsilon \to +$ 和 $*_\varepsilon \to *$ 一致成立，则当 $\varepsilon \to 0$时，

$$(A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, d, \varepsilon) \to (A, +, *), \tag{64}$$

其中 $(A, +, *)$ 是一个经典半环。

证明。 我们定义：

$$f_\varepsilon(x) = x *_\varepsilon (y +_\varepsilon z), \quad g_\varepsilon(x) = (x *_\varepsilon y) +_\varepsilon (x *_\varepsilon z).$$

根据近似分配律：

$$d\big(x *_\varepsilon (y +_\varepsilon z),\ (x *_\varepsilon y) +_\varepsilon (x *_\varepsilon z)\big) \le \varepsilon,$$

我们有：

$$d(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)) \le \varepsilon.$$

当 $\varepsilon \to 0$时，我们有 $*_\varepsilon \to *$ 和 $+_\varepsilon \to +$ 一致成立。于是由引理1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有：

$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z),$$

这就是精确分配律。加法结合律和乘法结合律由前面的命题得出。因此，$(A,\ +,\ *)$ 是一个经典半环。□

命题 6 （相似环的坍缩）。设 $\mathcal{R}_\varepsilon$ = （$A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, d, \varepsilon$）是一个相似环。如果近似加法逆元：

$$d\big(x +_\varepsilon (-x)_\varepsilon, 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon, \tag{65}$$

$$d\big((-x)_\varepsilon +_\varepsilon x, 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon, \tag{66}$$

且近似分配律一致收敛，那么当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$(A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, d, \varepsilon) \to (A, +, *, -, 0), \tag{67}$$

其中（$A, +, *, -, 0$）是一个经典环。

证明。我们定义：

$$f_\varepsilon(x) = x +_\varepsilon (-x)_\varepsilon, \quad g_\varepsilon(x) = 0_\varepsilon.$$

根据近似加法逆元：

$$d\big(x +_\varepsilon (-x)_\varepsilon, 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon,$$

我们有：

$$d(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)) \le \varepsilon.$$

当 $\varepsilon \to 0$时，我们有 $+_\varepsilon \to +$ 且 $(-x)_\varepsilon \to -x$ 一致地。然后由引理 1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有：

$$x + (-x) = 0,$$

这就是精确加法逆元。同样，可以证明 $d\big((-x)_\varepsilon +_\varepsilon x,\ 0_\varepsilon\big) \le \varepsilon$坍缩为 $(-x) + x = 0$。分配律也可由前面的命题推出。因此，$(A,\ +,\ *,\ -,\ 0)$ 是一个经典环。□

命题7 (相似域的坍缩**)**。 设 $\mathcal{F}_\varepsilon = (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon)$ 是一个相似域。如果乘法逆元:

$$d(x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, e_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$
$$d(x_\varepsilon^{-1} *_\varepsilon x, e_\varepsilon) \leq \varepsilon, , \quad \forall x \in A.$$

在极限中对所有非零元素都存在，则作为 $\varepsilon \to 0$,

$$(A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon) \to (A, +, *, -, 0, e, (\cdot)^{-1}), \tag{68}$$

其中 $(A, +, *, -, 0, e, (\cdot)^{-1})$ 是一个经典域。

证明。 我们定义:

$$f_\varepsilon(x) = x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, \quad g_\varepsilon = e_\varepsilon.$$

根据近似逆元:

$$d(x *_\varepsilon x_\varepsilon^{-1}, e_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

我们有:

$$d(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

As $\varepsilon \to 0$，我们有 $e_\varepsilon \to e$ 和 $*_\varepsilon \to *$ 一致地成立。于是根据引理 1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有 :

$$x * x^{-1} = e,$$

这就是精确逆元。同理，可以证明 $d(x_\varepsilon^{-1} *_\varepsilon x, e_\varepsilon) \leq \varepsilon$ 坍缩为$x^{-1} * x = e$。域的其他性质也可由前面的命题推出。因此，$(A, +, *, -, 0, e, (\cdot)^{-1})$ 是一个经典域。□

命题8 (相似模的坍缩**)**。设 $\mathcal{M}_\varepsilon = (M, +_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, d)$ 是相似环 R_ε 上的相似模。若 $R_\varepsilon \to R$ 和模作用均一致收敛，则当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$\mathcal{M}_\varepsilon \to \mathcal{M}, \tag{69}$$

其中 $\mathcal{M}$是环 R上的经典模。

证明。我们定义:

$$f_\varepsilon(x) = r \cdot_\varepsilon (x +_\varepsilon y), \quad g_\varepsilon(x) = (r \cdot_\varepsilon x) +_\varepsilon (r \cdot_\varepsilon y).$$

其中 r 是一个标量。根据近似标量分配律:

$$d\big(r \cdot_\varepsilon (x +_\varepsilon y), (r \cdot_\varepsilon x) +_\varepsilon (r \cdot_\varepsilon y)\big) \leq \varepsilon,$$

我们有:

$$d(f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)) \leq \varepsilon.$$

当 $\varepsilon \to 0$时，我们有 $+_\varepsilon \to +$ 并且 $\cdot_\varepsilon \to \cdot$ 一致收敛。由引理 1，当 $\varepsilon \to 0$时，我们有:

$$r \cdot (x + y) = (r \cdot x) + (r \cdot y),$$

这就是精确标量分配律（精确模公理）。因此， $\mathcal{M}$ 是一个经典模。□

命题 9 （相似向量空间的坍缩）。设 $\mathcal{V}_\varepsilon = (V, +_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, d)$ 是域 $\mathcal{F}_\varepsilon$上的一个相似向量空间。若数乘和向量加法一致收敛，则当 $\varepsilon \to 0$时,

$$\mathcal{V}_\varepsilon \to \mathcal{V}, \tag{70}$$

其中 $\mathcal{V}$ 是一个经典向量空间。

证明。 它与模相同，只不过使用域标量。根据引理，所有向量空间公理都可由近似恒等式的精确极限推出1。 □

命题10 (相似李代数的坍缩)。 设 $\mathcal{L}_\varepsilon = (\mathfrak{g}_\varepsilon, +_\varepsilon, [\cdot,\cdot]_\varepsilon, 0_\varepsilon, -_\varepsilon, d)$ 是相似域 $\mathcal{F}_\varepsilon$上的相似李代数，满足：

- 近似加法 $+_\varepsilon$ 具有单位元 0_ε 和加法逆元 $-_\varepsilon$，
- 且近似李括号 $[\cdot,\cdot]_\varepsilon$ 满足近似双线性、反对称性和雅可比恒等式，

并假设所有运算都一致收敛：

$$+_\varepsilon \to +, \quad -_\varepsilon \to -, \quad [\cdot,\cdot]_\varepsilon \to [\cdot,\cdot], \quad 0_\varepsilon \to 0. \tag{71}$$

那么，在极限 $\varepsilon \to 0$下，我们有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathfrak{g}_\varepsilon, +_\varepsilon, [\cdot,\cdot]_\varepsilon, 0_\varepsilon, -_\varepsilon, d) = (\mathfrak{g}, +, [\cdot,\cdot], 0, -), \tag{72}$$

这是域 $\mathcal{F}$上的经典李代数。近似双线性坍缩为精确的双线性，近似反对称性和雅可比恒等式坍缩为精确形式。

证明。 步骤 1 — 向量空间的坍缩：

- $(\mathfrak{g}_\varepsilon, +_\varepsilon, 0_\varepsilon, -_\varepsilon)$ 满足近似加法：
$$x +_\varepsilon (y +_\varepsilon z) \approx_\varepsilon (x +_\varepsilon y) +_\varepsilon z, \quad x +_\varepsilon 0_\varepsilon \approx_\varepsilon x, \quad x +_\varepsilon (-x)_\varepsilon \approx_\varepsilon 0_\varepsilon.$$
- 一致收敛：根据假设，我们有 $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}_\varepsilon$：
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(x +_\varepsilon y) = x + y, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} 0_\varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}(-x)_\varepsilon = -x.$$
- 推论：根据引理 1，取 $\varepsilon \to 0$ 的极限：
$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad x + 0 = x, \quad x + (-x) = 0.$$
因此，经典向量空间加法公理严格成立。

步骤 2 — 李括号的坍缩：

近似李括号满足：

- 近似双线性：
$$[x +_\varepsilon y, z]_\varepsilon \approx_\varepsilon [x, z]_\varepsilon + [y, z]_\varepsilon, \quad [x, y +_\varepsilon z]_\varepsilon \approx_\varepsilon [x, y]_\varepsilon + [x, z]_\varepsilon.$$
- 近似反对称性：
$$[x, y]_\varepsilon \approx_\varepsilon -[y, x]_\varepsilon.$$
- 近似雅可比恒等式：
$$[x, [y, z]_\varepsilon]_\varepsilon +_\varepsilon [y, [z, x]_\varepsilon]_\varepsilon +_\varepsilon [z, [x, y]_\varepsilon]_\varepsilon \approx_\varepsilon 0_\varepsilon.$$
- 一致收敛：当 $\varepsilon \to 0$：
$$\lim_{\varepsilon\to 0}[x +_\varepsilon y, z]_\varepsilon = [x + y, z], \quad \lim_{\varepsilon\to 0}[x, y +_\varepsilon z]_\varepsilon = [x, y + z],$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}[x, y]_\varepsilon = [x, y], \quad \lim_{\varepsilon\to 0} 0_\varepsilon = 0.$$
- 推论：由引理1，令 $\varepsilon \to 0$：
  - 双线性：
  $$[x + y, z] = [x, z] + [y, z], \quad [x, y + z] = [x, y] + [x, z].$$
  - 反对称性：
  $$[x, y] = -[y, x].$$

– 雅可比恒等式:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$$

因此，所有经典李代数公理均得到满足。

根据步骤1和步骤2，我们在极限下得到:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathfrak{g}_\varepsilon=(\mathfrak{g},+,[\cdot,\cdot],0),$$

它恰好满足所有向量空间和李代数公理。因此， $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathcal{F}=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_\varepsilon$上的经典李代数。□

引理2 (C^1 李群结构的极限)。 设 $(G_\varepsilon,m_\varepsilon,\iota_\varepsilon,e_\varepsilon)$ 是 C^1 李群，使得:

- $m_\varepsilon\to m$ 属于 C^1_{loc},
- $\iota_\varepsilon\to\iota$ 属于 C^1_{loc},
- $e_\varepsilon\to e$,
- 结合律、单位元和逆元恒等式在误差项 R_ε 的意义下成立；这些误差项在紧子集上一致收敛于零。

那么，极限 (G,m,ι,e) 定义了一个经典的 C^1 李群。

证明。 由于 $m_\varepsilon\to m$ 属于 C^1_{loc}，极限映射 $m:G\times G\to G$ 是 C^1。类似地， ι 是 C^1。下面验证群公理:

- 结合律：对每个 ε，有:

  $$m_\varepsilon(m_\varepsilon(x,y),z)=m_\varepsilon(x,m_\varepsilon(y,z))+R_\varepsilon(x,y,z),$$

  其中 $R_\varepsilon\to 0$ 在紧集上一致成立。令 $\varepsilon\to 0$ 趋于极限，并利用 m_ε 的C^0 收敛性，可得:

  $$m(m(x,y),z)=m(x,m(y,z)).$$

  Thus, m是结合的。
- 单位元：由于 $e_\varepsilon\to e$ 且:

  $$m_\varepsilon(x,e_\varepsilon)=x+r_\varepsilon(x),$$

  当 $r_\varepsilon\to 0$ 时，取极限得到:

  $$m(x,e)=x.$$

  类似地， $m(e,x)=x$.
- 逆元：由于 $\iota_\varepsilon(x)$ 是 x 的求逆映射，我们有:

  $$m_\varepsilon(x,\iota_\varepsilon(x))=e_\varepsilon+s_\varepsilon(x),$$

  当 $s_\varepsilon\to 0$ 时。取极限，当 $\varepsilon\to 0$ 时，得到:

  $$m(x,\iota(x))=e.$$

  因此， ι 是一个双侧逆元。

因此 (G,m,ι,e) 满足群公理，并且由于结构映射是 C^1，它是一个 C^1 李群。□

命题 11 (相似李群的坍缩)。设 $\mathfrak{L}_\varepsilon=(G_\varepsilon,\ \cdot_\varepsilon,\ e_\varepsilon,\ (\cdot)_\varepsilon^{-1},\ d)$ 是一个相似李群，即一个带有以下结构的光滑流形:

- 近似乘法$\cdot_\varepsilon$ 满足结合律，误差至多为 ε,
- 近似单位元 e_ε 和近似逆元 $(\cdot)_\varepsilon^{-1}$,

- 和近似光滑结构（坐标图 ϕ_ε 满足带有误差的利普希茨条件$\leq \varepsilon$。

假设所有运算均一致收敛：

$$\cdot_\varepsilon \to \cdot, \quad (\cdot)_\varepsilon^{-1} \to (\cdot)^{-1}, \quad e_\varepsilon \to e. \tag{73}$$

那么，在极限 $\varepsilon \to 0$ 中，我们有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(G_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d) = (G, \cdot, e, (\cdot)^{-1}), \tag{74}$$

它是一个经典李群，其单位元处的切空间是一个经典李代数。近似群公理退化为精确的群公理，光滑流形近似退化为经典光滑结构，而G_ε 的相应李代数则通过单位元处的切空间退化为经典李代数。

证明。令 d 为如式（6）所示的控制相似性的度量。设坐标图 $\phi_\varepsilon : U_\varepsilon \subset G_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$满足近似利普希茨光滑性：

$$\|\phi_\varepsilon(g \cdot_\varepsilon h) - \phi_\varepsilon(g) - \phi_\varepsilon(h)\| \leq L\varepsilon,$$

其中， L 是利普希茨常数。

步骤 1 — 近似结合性的退化：

- 近似结合性：

$$(g \cdot_\varepsilon h) \cdot_\varepsilon k \approx_\varepsilon g \cdot_\varepsilon (h \cdot_\varepsilon k).$$

- 一致收敛，当 $\varepsilon \to 0$时，意味着：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}((g \cdot_\varepsilon h) \cdot_\varepsilon k) = (g \cdot h) \cdot k,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(g \cdot_\varepsilon (h \cdot_\varepsilon k)) = g \cdot (h \cdot k).$$

- 推论：由引理 1，取极限当 $\varepsilon \to 0$：

$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k).$$

  因此，近似结合性精确地坍缩。

步骤 2 — 单位元的坍缩：

- 近似单位元：

$$g \cdot_\varepsilon e_\varepsilon \approx_\varepsilon g, \quad e_\varepsilon \cdot_\varepsilon g \approx_\varepsilon g.$$

- 一致收敛，当 $\varepsilon \to 0$ 时，意味着：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g \cdot_\varepsilon e_\varepsilon = g \cdot e, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e_\varepsilon \cdot_\varepsilon g = e \cdot g.$$

- 推论：根据引理1，令 $\varepsilon \to 0$：

$$g \cdot e = e \cdot g = g.$$

  因此，单位元精确地坍缩。

步骤 3 — 逆元的坍缩：

- 近似逆元：

$$g \cdot_\varepsilon g_\varepsilon^{-1} \approx_\varepsilon e_\varepsilon, \quad g_\varepsilon^{-1} \cdot_\varepsilon g \approx_\varepsilon e_\varepsilon.$$

- 当 $\varepsilon \to 0$ 时，一致收敛意味着：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g \cdot_\varepsilon g_\varepsilon^{-1} = g \cdot g^{-1} = e,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon^{-1} \cdot_\varepsilon g = g^{-1} \cdot g = e.$$

- 推论：根据引理1，令 $\varepsilon \to 0$取极限：

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e.$$

因此，近似逆元恰好退化。

步骤 4——光滑结构的退化：

对于每个 ε， G_ε 都是一个 C^1 流形，且乘法 m_ε 和求逆 ι_ε 都是 C^1 映射。根据假设，$m_\varepsilon \to m$ 和 $\iota_\varepsilon \to \iota$ 在 C^1_{loc} 中于紧集上一致收敛。因此，极限映射 m 和 ι是 C^1。

根据前述收敛假设，我们有：

$$m_\varepsilon \to m \quad \text{in } C^1_{\text{loc}},$$
$$\iota_\varepsilon \to \iota \quad \text{in } C^1_{\text{loc}},$$
$$e_\varepsilon \to e.$$

此外，结合律、单位元和逆元性质均在误差 ε范围内成立。因此，根据引理2 (C^1 李群结构的极限），极限结构$(G,\ m,\ \iota,\ e)$是一个C^1 李群。

步骤 5 — 切空间的坍缩：

令 $T_{e_\varepsilon}G_\varepsilon$ 表示单位元处的切空间。由于 $m_\varepsilon \to m$ 属于 C^1_{loc}，它们的微分在紧集上一致收敛，特别是在 $(e,\ e)$ 处。

切空间上的李括号通过左不变向量场的交换子定义，而这取决于乘法映射的一阶导数，并随其连续变化。因此，诱导出的李括号在紧子集上一致满足 $[\cdot,\cdot]_\varepsilon \to [\cdot,\cdot]$ 。因此，单位元处的切空间坍缩为经典李代数。

步骤 6 — 结论：相似李群的所有近似运算都恰好坍缩为 $\varepsilon \to 0$:

$$G_\varepsilon \to G,$$
$$T_{e_\varepsilon}G_\varepsilon \to \mathfrak{g}.$$

因此，李群公理和李代数恰好坍缩。 □

这将此前所有的坍缩定理（代数、模/向量、李代数、李群）统一为一个坍缩定理。根据该定理，近似运算——例如近似结合性、分配律、李括号性质和光滑性——在极限 $\varepsilon \to 0$ 下都坍缩为经典运算。

定理 1 (坍缩定理)。 令 $\mathcal{S}_\varepsilon$ 表示定义在相似域 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 上的相似性结构，其中 $\mathcal{S}_\varepsilon$ 可以是以下任意一种：

- 相似性半群 $\mathcal{G}_\varepsilon = (A, *_\varepsilon, d, \varepsilon)$
- 相似幺半群 $\mathcal{M}_\varepsilon = (A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, d, \varepsilon)$
- 相似性群 $\mathcal{G}_\varepsilon = (A, *_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon)$
- 相似半环 $\mathcal{R}_\varepsilon = (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, d, \varepsilon)$
- 相似环 $\mathcal{R}_\varepsilon = (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, d, \varepsilon)$
- 相似域 $\mathcal{F}_\varepsilon = (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon)$

- *Similarity module* $\mathcal{M}_\varepsilon = (M, +_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, d)$
- *Similarity vector space* $\mathcal{V}_\varepsilon = (V, +_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, d)$
- *Similarity Lie algebra* $\mathcal{L}_\varepsilon = (\mathfrak{g}_\varepsilon, +_\varepsilon, [\cdot,\cdot]_\varepsilon, 0_\varepsilon, -_\varepsilon, d)$
- *Similarity Lie group* $\mathfrak{L}_\varepsilon = (G_\varepsilon, \cdot_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d)$ *with smooth manifold charts* ϕ_ε

假设所有近似运算和元素均一致收敛于 $\varepsilon \to 0$ [Ras78,Hye41, Ula60]:

$$
\begin{aligned}
&+_\varepsilon \to +, \quad *_\varepsilon \to *, \quad -_\varepsilon \to -,\\
&(\cdot)_\varepsilon^{-1} \to (\cdot)^{-1}, \quad e_\varepsilon \to e, \quad 0_\varepsilon \to 0,\\
&[\cdot,\cdot]_\varepsilon \to [\cdot,\cdot], \quad \phi_\varepsilon \to \phi.
\end{aligned}
$$

对于相似李群，我们还假设乘法和求逆映射在紧子集上一致地收敛于 C^1 拓扑。

那么，在极限情况下，我们有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{S}_\varepsilon = \mathcal{S}, \tag{75}$$

其中， $\mathcal{S}$ 是相应的经典结构，即经典半群、幺半群、群、半环、环、域、模、向量空间、李代数或李群。

此外，相似李群在单位元处的切空间会坍缩为经典李代数：

$$T_{e_\varepsilon} G_\varepsilon \to \mathfrak{g}. \tag{76}$$

5. 相似代数的实际示例

虽然前几节奠定了相似代数的公理化与范畴论基础，但其主要用途在于对精确算术不可用或不适宜的系统进行建模。在许多计算和经验领域中，由于噪声、数值精度限制或数据的内在性质，运算并不遵循严格的经典定律。本节将通过相似域和相似李群的具体示例，展示相似代数如何在实践中得到应用。

5.1. **相似域的一个实际示例**。

我们构造一个简单的相似域示例，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它会退化为经典实数。

构造。 考虑相似域 $\mathcal{F}_\varepsilon = (\mathbb{R}, +_\varepsilon, *_\varepsilon, -_\varepsilon, 0_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)_\varepsilon^{-1}, d, \varepsilon)$，其中 $\varepsilon \geq 0$。定义扰动加法和乘法如下：

$$
\begin{aligned}
x +_\varepsilon y &= x + y + \varepsilon xy,\\
x *_\varepsilon y &= xy + \varepsilon x^2 y.
\end{aligned}
$$

近似域性质。 加法近似满足结合律：

$$
\begin{aligned}
(x +_\varepsilon y) +_\varepsilon z &= x + y + z + \varepsilon(xy + xz + yz) + O(\varepsilon^2),\\
x +_\varepsilon (y +_\varepsilon z) &= x + y + z + \varepsilon(xy + xz + yz) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

结合性误差为 $O(\varepsilon^2)$，尤其是在 ε 足够小时满足 ε-界假设。

乘法同样近似满足结合律:

$$(x *_\varepsilon y) *_\varepsilon z = xyz + O(\varepsilon),$$
$$x *_\varepsilon (y *_\varepsilon z) = xyz + O(\varepsilon).$$

分配律在 ε 阶精度下成立。
加法单位元是 0，因为:

$$x +_\varepsilon 0 = x.$$

乘法单位元在 ε 阶精度下是 1，因为:

$$x *_\varepsilon 1 = x + \varepsilon x^2.$$

坍缩到经典域。当 $\varepsilon \to 0$时，我们有:

$$x +_\varepsilon y \to x + y,$$
$$x *_\varepsilon y \to xy,$$

在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上一致成立。
因此，根据坍缩定理，$(F_\varepsilon,\ +_\varepsilon,\ *_\varepsilon)$ 坍缩为经典域 $(\mathbb{R},\ +,\ \times)$。

解释。 本例表明，相似域能够对经典代数结构的受控非线性扰动进行建模。当相似参数 ε 趋于零时，经典域结构便精确恢复。

5.2. **扰动矩阵李群的一个实际示例**。
在此，我们构造一族显式的相似李群，它们收敛到一个经典李群。

构造。 将相似李群 $\mathfrak{L}_\varepsilon = (\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \cdot_\varepsilon, e_\varepsilon, (\cdot)^{-1}_\varepsilon, d)$ 视为一个光滑流形，其中 $\varepsilon \geq 0$。

定义一个扰动矩阵乘法运算如下:

$$\boldsymbol{A} *_\varepsilon \boldsymbol{B} = \boldsymbol{AB} + \varepsilon\, \Phi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

这里，$\Phi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ 是一个固定的 C^1 双线性映射，满足:

$$\|\Phi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\| \leq C\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|,$$
$$\Phi(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}) = \Phi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) = 0,$$

对于某个常数 $C > 0$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。
我们将扰动单位元定义为 $e_\varepsilon = I$。求逆映射 ι_ε 通过求解以下方程隐式定义:

$$\boldsymbol{A} *_\varepsilon \boldsymbol{A}^{-1}_\varepsilon = \boldsymbol{I}.$$

近似群性质。直接计算可得:

$$(\boldsymbol{A} *_\varepsilon \boldsymbol{B}) *_\varepsilon \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} *_\varepsilon (\boldsymbol{B} *_\varepsilon \boldsymbol{C}) + O(\varepsilon).$$

因此，结合律在 ε 阶意义下成立。

同理:

$$\boldsymbol{A} *_\varepsilon \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} + O(\varepsilon),$$
$$\boldsymbol{I} *_\varepsilon \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + O(\varepsilon).$$

因此，$(G_\varepsilon,\ *_\varepsilon)$ 构成一个相似李群。

退化为经典矩阵李群。由于 $\varepsilon \to 0$，我们有:

$$\boldsymbol{A} *_\varepsilon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{B},$$

在紧子集上一致成立。

由于 Φ 是 C^1，乘法映射 $m_\varepsilon(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} *_\varepsilon \boldsymbol{B}$ 在 C^1_{loc} 中收敛到经典乘法。

根据命题 11，该结构退化为经典李群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$。

李代数的退化。 由扰动乘法诱导的李括号满足:

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_\varepsilon = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X} + O(\varepsilon).$$

因此，在极限 $\varepsilon \to 0$ 下，我们恢复经典李代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$，其李括号为:

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}.$$

解释。 该示例表明，相似李群描述了经典李群的小幅结-构化扰动。命题 11 保证了李群结构在受控的 C^1 扰动下保持稳定。

6. 相似代数范畴

虽然前几节详细阐述了单个相似结构的内部公理要求，但要构建一个完整的数学框架，还需要研究这些结构彼此之间的关系。本节将相似代数范畴形式化，相似代数范畴 以研究近似代数系统的整体性质。通过定义适当的态射——即保持对象之间 ε 有界运算的映射——我们将范畴论的原则扩展到相似域。这一范畴视角使我们能够在度量约束环境中分析结构变换和泛性质。此外，我们还将探讨相似范畴之间的函子在极限 $\varepsilon \to 0$ 下的行为，从宏观角度审视相似范畴向经典代数范畴的退化。

定义14 (相似度函数**)。** 相似度函数 $s\colon A \times A \to [0,1]$ 定义如下:

$$[0,1] \ni s(x,y) := 1 - d(x,y), \tag{77}$$

假设 $d(x,\ y)\ \in [0,1]$[1]。因此，我们有：

$$d(x,y) \leq \varepsilon \iff s(x,y) \geq 1-\varepsilon, \tag{79}$$

其中，$s(x,y)$ 越大表示相似性越高。

定义 15 (保结构函数**)**。 函数 $f:\ A \to B$ 是保结构的，当且仅当：

$$s_A(x,y) \leq s_B(f(x),f(y)), \tag{80}$$

其中，s_A 和 s_B 分别是集合 A 和 B中的相似度分数。换言之，保结构函数的映射不会破坏相似性。

定义 16 (近似同态**)**。 在近似同态$f(\cdot)$下，以下近似运算在相似性意义下得以保留：

$$s_B(f(x +_\varepsilon y), f(x) +_\varepsilon f(y)) \geq 1-\varepsilon, \tag{81}$$

$$s_B(f(x *_\varepsilon y), f(x) *_\varepsilon f(y)) \geq 1-\varepsilon. \tag{82}$$

定义 17 (相似代数态射**)**。 设：

$$\mathcal{A} := (A, +_\varepsilon, *_\varepsilon, s_A), \quad \mathcal{B} := (B, +_\varepsilon, *_\varepsilon, s_B). \tag{83}$$

相似代数态射：

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \tag{84}$$

是一个函数 $f : A \to B$ ，满足：

- $s_A(x,y) \leq s_B(f(A), f(B))$, *and*
- *operations are preserved up to similarity*

此定义是逐元素的，而非逐对象的。

引理 3 （相似代数中恒等态射的存在性）。 取任意相似代数$\mathcal{A} = (A,\ +_\varepsilon,\ *_\varepsilon,\ s_A)$ 其中 $s_A = 1 - d_A$。定义：

$$id_A : A \to A, \quad id_A(x) = x. \tag{85}$$

相似代数中存在恒等态射。

证明。 我们检查以下条件：

- 相似性：

$$s_A(x,y) \leq s_A(x,y). \tag{86}$$

- 运算：

$$\mathrm{id}(x +_\varepsilon y) = x +_\varepsilon y. \tag{87}$$

因此，相似代数中存在恒等态射。 □

引理4 （态射的复合在相似代数下封闭）。 考虑以下态射的复合：

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}. \tag{88}$$

[1]如果度量 $d(x,y)$ 无界，我们也可以定义：

$$[0,1] \ni s(x,y) := \frac{1}{1+d(x,y)}. \tag{78}$$

定义：

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{89}$$

态射的复合在相似代数下是封闭的。

证明。 我们验证 $g \circ f$ 保持相似性和运算。

步骤 1——相似性保持：由于 f 和 g 是态射，它们满足相似性单调性：

$$s_A(x, y) \overset{(17)}{\leq} s_B(f(x), f(y)), \tag{90}$$

and:

$$s_B(u, v) \leq s_C(g(u), g(v)). \tag{91}$$

将第二个不等式应用于 $u = f(x)$ 和 $v = f(y)$，得到：

$$s_B(f(x), f(y)) \leq s_C(g(f(x)), g(f(y))). \tag{92}$$

结合这些不等式，

$$s_A(x, y) \leq s_B(f(x), f(y)) \leq s_C(g(f(x)), g(f(y))). \tag{93}$$

因此，

$$s_A(x, y) \leq s_C\big((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)\big), \tag{94}$$

因此， $g \circ f$ 保持相似性。

步骤 2——运算的保持：假设 f 和 g 在相似意义下保持代数运算 $+_\varepsilon$：

$$f(x + y) \approx_B f(x) + f(y), \tag{95}$$

and:

$$g(u + v) \approx_C g(u) + g(v). \tag{96}$$

则：

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) &\approx_C g(f(x) + f(y)) \\ &\approx_C g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

因此，复合在相似意义下保持该运算。

由于相似性和运算都得以保持， $g \circ f$ 是相似代数中的一个态射。因此，态射的复合在相似代数下封闭。 □

引理5 (相似代数下复合的结合律)。 相似代数下的复合满足结合律：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \tag{97}$$

证明。设：

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{D} \tag{98}$$

是相似代数中的态射。

根据复合的定义：

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \tag{99}$$

$$(h \circ g)(y) = h(g(y)). \tag{100}$$

我们逐点证明相等。对于任意 $x \in \mathcal{A}$,

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big),$$

and:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\big(g(f(x))\big).$$

因此:

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = \big((h \circ g) \circ f\big)(x) \tag{101}$$

对所有 $x \in \mathcal{A}$。因此:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \tag{102}$$

由于两边定义了相同的映射，且态射的复合保持相似性和运算，因此相似代数中满足结合律。□

根据引理 3、4以及5，存在一个相似代数范畴，记作$\mathbf{SimAlg}_\varepsilon$ [ML98、Rie17]。

定理2 （相似代数与经典代数的范畴的关系）。 经典代数是相似代数的全子范畴。事实上，经典代数范畴忠实且满地嵌入相似代数范畴，并满足 $\varepsilon = 0$:

$$\boldsymbol{Alg} \hookrightarrow \boldsymbol{SimAlg}_0, \tag{103}$$

其中，$\boldsymbol{Alg}$ 表示经典代数范畴。

证明。令相似性为离散相似性（即将相等编码为相似性），如经典代数中所示:

$$s_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \neq y, \end{cases} \tag{104}$$

并令 $\varepsilon = 0$ 具有经典代数结构。这样，近似律就变成了精确律。
定义嵌入函子:

$$F : \mathbf{Alg} \to \mathbf{SimAlg}_0, \tag{105}$$

在对象上:

$$F(A, +, *) = (A, +, *, s_A), \tag{106}$$

在态射上 $F(f) = f$，即该函子不改变底层函数；它只将其重新解释为另一个范畴中的态射。

步骤 1 — 证明同态会变成相似性态射:
设 $f:\ A \to B$ 是一个同态。我们必须检查相似性态射条件。

- 运算保持：由于 f 是一个同态:

  $$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

  因此:

  $$s_B(f(x + y), f(x) + f(y)) = 1 \geq 1 - 0,$$

  满足方程（81）。同理，可以证明乘法满足方程（82）。因此，每个同态都是相似代数态射。

步骤 2 — 嵌入的忠实性:

假设 $F(f) = F(g)$。那么 $f(x) = g(x)\ \forall x$。因此， $f = g$。所以， F是忠实的（在态射上是单射）。

步骤 3 — 嵌入的满性:

Let:

$$f : F(A) \to F(B), \tag{107}$$

是**SimAlg**$_0$中的一个态射。那么:

$$s_B(f(x+y), f(x) + f(y)) = 1 \geq 1 - 0,$$

满足方程（81）。由于 s_B 是离散的（定义见方程（104））:

$$s_B(u, v) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad u = v.$$

因此:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

乘法的情形也可同样证明。因此， f 是一个经典同态。所以 F 是满的。

步骤 4——结论：我们已证明 F 是一个函子，且它是满的、忠实的。因此，**Alg** 是**SimAlg**$_0$的满且忠实子范畴。□

上述定理表明，当相似性变为相等时，相似代数态射就是同态。此外，经典代数可满且忠实地嵌入相似代数。这也与定理1相符。

7. 相似代数与模糊代数的比较

对非精确数学结构的研究历史悠久，其发展很大程度上始于模糊集和模糊逻辑的提出之后 [Zad65, KY95]。在这些基础之上，模糊代数领域应运而生 [MBR05, MN01], ，并推动了多种模糊代数结构的形式化 [KB78] ，例如模糊群 [Ros71, MBR05], 、模糊环 [Kum91],、模糊向量空间 [Kum92], 以及模糊李代数 [Akr18]。尽管一些文献探讨了模糊代数结构向其经典对应项的约化或坍缩 [Wei05], ，但我们提出的框架在其基于度量的底层逻辑方面有显著不同。

需要指出的是，某些研究，例如 [SS04、HB12], 使用“相似代数”一词来描述模糊关系演算中的具体应用；然而，它们的定义不同于本文提出的公理化与范畴论相似代数框架。模糊代数依靠隶属函数来量化真值程度，而我们的框架则利用度量 d 和容差参数 ϵ来控制公理的近似满足程度。本节将对这两种方法进行比较分析，并说明事实上，相似代数推广模糊代数。

设 A 为全集， $\mu : A \to [0, 1]$ 为隶属函数。模糊子集 A_μ表示元素的分级隶属。模糊代数结构（例如模糊群、模糊环）以 μ取代清晰隶属关系，其公理则通过涉及 t-范数（记作 T）和 t-余范数（记作 S）的不等式来表达。

定理 3（模糊到相似性的嵌入）。 设 (A, μ) 为一个模糊集。定义：

$$s(a,b) := T(\mu(a), \mu(b)), \tag{108}$$

$$d(a,b) := 1 - s(a,b). \tag{109}$$

那么，每个满足 *Rosenfeld* 模糊群公理的模糊代数 [Ros71] 都对应于一个具有以下性质的相似性半群： ε 由 $1 - T(\mu(a)\ \mu(b)\ \mu(c))$。

证明。 对于模糊结合律：

$$\mu((a*b)*c) \geq T(\mu(a*b), \mu(c)), \tag{110}$$

$$\mu(a*(b*c)) \geq T(\mu(a) * \mu(b,c)). \tag{111}$$

定义 $s(x,y) := T(\mu(x)\ \mu(y))$。那么：

$$\begin{aligned} d((a*b)*c, a*(b*c)) &\overset{(109)}{=} 1 - s((a*b)*c, a*(b*c)) \\ &\overset{(108)}{=} 1 - T(\mu((a*b)*c), \mu(a*(b*c))) \\ &\overset{(110),(111)}{\leq} 1 - T(T(\mu(a*b), \mu(c)), T(\mu(a) * \mu(b,c))). \end{aligned}$$

因此，令：

$$\varepsilon = 1 - T(T(\mu(a*b), \mu(c)), T(\mu(a) * \mu(b,c))), \tag{112}$$

可得 $d((a*b)*c, a*(b*c)) \leq \varepsilon$ 如式（4）所示。这就得到误差为 ε 的近似结合性。其他公理可类似推出。□

推论 1 (相似代数推广模糊代数)。 每个模糊代数都可以表示为具有以下性质的相似代数：

$$\varepsilon = 1 - T(membership\ degrees\ of\ participating\ elements), \tag{113}$$

但反过来不一定成立，因为相似性可能取决于成对几何，而非个体隶属度。

推论 1 表明相似代数推广模糊代数。以下定理进一步阐释了这一推广。根据以下定理（定理4），隶属度与距离之间存在对偶性；因此，模糊代数是受限于一个参考元素的相似代数。

定理 4（隶属度与距离的对偶性）。 设 (A, s) 是一个相似空间，其中 $d(a,b) := 1 - s(a,b)$。假设存在一个元素 $e \in A$，使得：

$$\mu(a) := s(a,e). \tag{114}$$

那么：

(1) μ 定义了 A上的一个模糊集。*(2)* (A, s) 上的任何相似代数都会导出 (A, μ)上的一个模糊代数。换言之，模糊代数是受限于一个参考元素 $e \in A$的相似代数。*(3)* 当 $\varepsilon \to 0$时，这两种结构都会退化为相同的经典代数。

证明。 步骤 1 — μ 是一个有效的模糊隶属度：

根据相似性的定义：

$$s(a,e) \in [0,1].$$

因此：

$$\mu : A \to [0,1],$$

是一个定义良好的隶属函数。

步骤 2 — 相似性诱导模糊闭包：

设 $*$ 为满足以下条件的相似性运算：

$$d(a * b, a \odot b) \leq \varepsilon,$$

其中 $\odot$ 是经典极限下的精确运算。根据利普希茨假设，我们有：

$$s(a * b, e) \geq s(a \odot b, e) - \varepsilon.$$

因此，根据公式（114），我们有：

$$\mu(a * b) \geq \mu(a \odot b) - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon \to 0$，我们有：

$$\mu(a * b) \geq \mu(a \odot b).$$

这重现了模糊闭包。

步骤 3 — 结合性对应：

相似性结合律：

$$d((a * b) * c, a * (b * c)) \leq \varepsilon.$$

因此，根据公式（109），我们有：

$$|s((a * b) * c, e) - s(a * (b * c), e)| \leq \varepsilon.$$

因此，根据公式（114），我们有：

$$|\mu((a * b) * c) - \mu(a * (b * c))| \leq \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon \to 0$，我们有：

$$\mu((a * b) * c) = \mu(a * (b * c)),$$

这就是清晰极限下的模糊结合律。

步骤 4 — 退化为经典代数：

如果另外 $\varepsilon \to 0$ and $\mu(a) \in \{0, 1\}$，那么：

- 相似性变为相等：

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

- 隶属关系变得清晰。
- 所有近似公理都变为精确公理。

Thu因此，模糊代数和相似代数都会退化为相同的经典代数。 □

总之，相似代数与模糊代数的比较如下：

- 在模糊代数中，不确定性存在于元素之中；而在相似代数中，不确定性存在于关系之中。换句话说，在模糊代数中，代数运算是精确的，模糊性影响元素隶属关系；而在相似代数中，运算是精确映射，但代数定律被放宽为度量约束。
- 定理 3和推论 1 表明，相似代数推广模糊代数。
- 定理 4 表明，模糊代数是受限于单个参考元素的相似代数。

8. 结论

本文提出了相似代数，这是一套严谨的数学框架，旨在弥合僵化的经典代数理论与实际计算近似性之间的鸿沟。通过将代数公理的精确要求放宽为度量空间中的 ε 有界约束，我们建立了一个完整的结构层级，涵盖相似半群、相似群、相似域以及向量空间。此外，我们还将这一框架拓展到微分几何领域，定义了相似李群和李代数，为近似连续对称性提供了一种形式化语言。

本工作的一项主要贡献是推导出坍缩定理。借助近似相等的极限原理，我们证明相似代数并非仅仅是一种启发式松弛，而是经典数学的一致推广：当容差参数 ε 趋于零时，每一个近似结构都一致收敛到其经典对应项。这包括一项重要的技术结果，即相似李群的切空间恰好坍缩到经典李代数上。

我们通过建立相似代数范畴对这些体系作了进一步形式化，并定义了研究近似结构之间关系所必需的态射。此外，我们与模糊代数的比较表明，尽管两个领域都处理非精确性，相似代数与模糊代数之间仍存在差异；具体而言，相似代数推广模糊代数。

该框架的效用涵盖多个领域。在机器学习和数据科学中，它为利用核函数和含噪相似度量进行推理提供了基础。在网络理论和泛函分析中，它为经典公理过于严格的系统建模提供了所需的灵活性。未来工作可以探索将相似代数与随机过程相结合，以建模概率容差，并将其应用于面向高维数据流形学习的“相似性感知”算法开发 [GCKG23]。

参考文献

[ABSS98] Sibel Adali、Piero Bonatti、Maria Luisa Sapino 和 VS Subrahmanian，《多相似性代数》，1998 年 ACM SIGMOD 数据管理国际会议论文集，1998 年，第 402–413 页。2[AG26] Golbahar Amanpour 和 Benyamin Ghojogh，《维特根斯坦家族相似性聚类算法》，arXiv 预印本 arXiv: 2601 01127 2026 1 。（）。Akr Muhammad Akram，《模糊李代数》，Springer，2018 年。22[Bar13] Albert-L´aszl´o Barab´asi，《网络科学》，《皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学、物理与工程科学》 **371** 2013 1987, 20120375 1 （），第 1 3, 1, [89] 期。Bou 尼古拉·布尔巴基，《李群与李代数：第 - 卷》，Springer Science & Business Media，1989 年。8[For95] Gian Luigi Forti，《多变量函数方程的 Hyers-Ulam 稳定性》，《数学方程》50（1995），第 1 期，143–190。8[GCKG23] Benyamin Ghojogh、Mark Crowley、Fakhri Karray 和 Ali Ghodsi，《降维与流形学习要素》，Springer，2023 年。25[Gro07] 米哈伊尔·格罗莫夫，《黎曼空间与非黎曼空间的度量结构》，Springer，2007 年。1、2[HB12] Melita Hajdinjak 和 Gavin Bierman，《用相似性扩展关系代数》，《计算机科学中的数学结构》22（2012），第 4 期，686–718。22[Hye41] Donald H Hyers，《论线性函数方程的稳定性》，《美国国家科学院院刊》27（1941），第 4 期，222–224。1、8、16[IM98] Piotr Indyk 和 Rajeev Motwani，《近似最近邻：迈向消除维数灾难》，第三十届 ACM 计算理论年会论文集，1998 年，第 604–613 页。1

[KB78] Abraham Kandel 和 William J Byatt，《模糊集、模糊代数与模糊统计》，IEEE 会议录 **66** 1978 12, 1619 1639 22 （），第 期，–。Kum Rajesh Kumar，[91]《环的模糊半主理想》，《模糊集与系统》42 2，263 1991 272 22（），第 期，–。[Kum92] ，《模糊向量空间与模糊陪集》，《模糊集与系统》45（1992），第 1 期，109–116。22[KY95] George J Klir 和 Bo Yuan，《模糊集与模糊逻辑：理论与应用》，Prentice Hall，1995 年。22[MBR05] John N Mordeson、Kiran Ravender Bhutani 和 Azriel Rosenfeld，《模糊群论》，第 182 卷，Springer，2005 22 。ML Saunders Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，第 5 卷，S[98]pringer Science & Business Media，1998 年。21[MN01] John N Mordeson 和 Premchand S Nair，《模糊抽象代数》，《模糊数学：工程师与科学家的入门指南》，Springer，2001， 219 290 2, 22 第 – 页。Pis[98]Gilles Pisier，《算子代数的相似度》，《Алгебра и анализ》10 1，132 1998 186 2（），第 期，–。[Ras78] Themistocles M Rassias，《论巴拿赫空间中线性映射的稳定性》，《美国数学会会刊》 **72** 1978 2, 297 300 1, 2, 8, 16 （），第 期，–。[17]Rie Emily Riehl，《语境中的范畴论》，Courier Dover Publications，。21[Ros71] Azriel Rosenfeld，《模糊群》，《数学分析与应用杂志》35（1971），第 3 期，512–517。2、22、23[SS04] Ingo Schmitt 和 Nadine Schulz，《相似关系演算及其向相似代数的约化》，信息与知识系统基础国际研讨会，Springer，2004 年，第 252–272 页。22[SS18] Bernhard Scholkopf 和 Alexander J Smola，《核方法学习：支持向量机、正则化、优化及其他》，MIT出版社，2018 年。1[Tao08] Terence Tao，《非交换群的乘积集估计》，《组合数学》28（2008），第 5, 547 594 2 期，–。Ula Stanislaw M Ulam，《数学问题[60]集》，Interscience Publishers，1960 年。16[Wei05] Arthur Weinberger，《将模糊代数化约为经典代数》，《新数学与自然计算》 **1** 2005 01, 27 64 22 （），第 期，–。Zad[65]Lotfi A Zadeh，《模糊集》，《信息与控制》8（1965），第 3 期，338–353。22