arXiv:2602.14090v1 [math.MG] 15 Feb 2026

球体的对称化

S. Artstein-Avidan* D.I. Florentin*

摘要

我们研究球体类中的对称化过程 $\mathcal{S}_n$，即单位欧几里得球的交集（等价地说，是欧几里得单位球的加项，或通过 c对偶性 $A \mapsto A^c$定义的 c-凸集）。我们首先考察通过以 c凸包A^{cc}取代通常的凸包而得到的线性参数系统，并推导这些 c路径上的体积性质。特别地，我们在一些特殊情形及二维情形下得到了凸性结论，并通过例子说明，对 $n \geq 3$而言，这种凸性一般并不成立。随后，我们重点研究施泰纳对称化。我们证明，施泰纳对称化会增大对偶体积，且在平面情形下，球体的施泰纳对称化体仍为球体。与此相反，我们给出了一个 $\mathbb{R}^3$ 中的明确例子，表明球体的施泰纳对称化体未必属于 $\mathcal{S}_n$；并证明存在曲率任意大的此类反例。

1 引言与预备知识

$\mathcal{S}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$中的球体类（见 [1], ）可以用多种等价形式定义。它由在每个边界点的广义截面曲率都至少为 1 的凸体组成；这等价于这些集合是欧几里得球 $B(0,\ 1)$的加数。换言之，对于每个 $K \in \mathcal{S}_n$，都存在某个$L \in \mathcal{S}_n$，使得 $K + L = B(0,\ 1)$。等价地，该类也可以定义为 $\mathbb{R}^n$子集上的保序反转拟对合的像类；该拟对合将集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 映射为所谓的“c-对偶集”，其定义如下：

$$A^c = \bigcap_{x \in A} B(x, 1).$$

*本研究得到以色列科学基金会（ISF）第 1626/25 号资助的支持。

近年来，这一类受到了广泛关注，并与一系列问题和猜想相关，例如 Borisenko猜想 [10, 12, 13, 14]和 Blaschke-Lebesgue问题 [9, 16, 18], 。更多详情见 [1] 。

不难证明（见 [1]），对于任意 $A \subset \mathbb{R}^n$，我们有 $A \subseteq A^{cc}$；这（连同序反转）尤其意味着，在其像上，也就是在由欧几里得单位球的平移副本相交而成的集合上，映射$A \mapsto A^c$ 是一个反序对合（见 [3]）。它还是关于 Hausdorff度量的等距变换；除恒等变换外，在刚性运动意义下不存在其他等距变换 [5, 4]。我们称 $\mathcal{S}_n$ 中包含集合 A 的最小元素为 A的 c-包，并注意到它由 $\mathrm{conv}_c(A) = A^{cc}$ 简单给出。我们将利用 c-对偶性的以下近线性性质；当注意到对于 $K \in \mathcal{S}_n$，其c-对偶集为 $K^c = -L$，其中 $K+L = B(0,1)$，这一性质便显而易见。令 $K, T \in \mathcal{S}_n \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$，并令 $\lambda \in (0,1)$。则 $(1-\lambda)K + \lambda T \in \mathcal{S}_n$，且

$$((1-\lambda)K + \lambda T)^c = (1-\lambda)K^c + \lambda T^c. \tag{1}$$

此外，即使不假设 K，$T \subset \mathbb{R}^n$ 属于 $\mathcal{S}_n$，我们仍有

$$(1-\lambda)K^c + \lambda T^c \subseteq ((1-\lambda)K + \lambda T)^c, \tag{2}$$

这由对偶的定义可得，因为 $K \subseteq B(x, 1)$ 和 $T \subseteq B(y, 1)$ 蕴含 $(1-\lambda)K + \lambda T \subseteq B((1-\lambda)x + \lambda y, 1)$。

施泰纳对称化这一工具，以及更一般的线性参数系统，在凸性研究中非常有用，参见例如 [2, 第 1.1 节7]。本文汇集了有关将这一过程应用于 $\mathcal{S}_n$ 背景下的信息。需要指出的是，对称化存在许多变体，特别是 Minkowski对称化 以及介于两者之间的一些混合形式，参见 [8]。本文中的部分结果同样适用于这些变体，但我们主要讨论其中的极端情形——闵可夫斯基对称化，以及主要的施泰纳对称化。

在回顾一些作为预备知识的工具之后，我们讨论线性参数系统的概念，即用 c-凸包替代通常的凸包。我们展示体积在特殊情形下以及在 $n = 2$ 维中的一些凸性性质，并说明在 $n \geq 3$ 维中，c-凸包的体积一般不具有凸性。

在第4节中，我们转而讨论 $\mathcal{S}_n$中的施泰纳对称化：我们证明它会增大对偶体积，证明在平面情形下施泰纳对称化保持 $\mathcal{S}_2$这一类，随后给出 $\mathbb{R}^3$ 中的一个明确透镜体例子，说明施泰纳对称化未必保持 $\mathcal{S}_3$（等价地说，它可能产生截面曲率为 < 1 的边界点）。接下来我们将证明，事实上，即使在这一子类中，

在 $\mathbb{R}^n$ $n \geq 3$ 中由半径任意小的 $r > 0$个 r-球的交集构成的凸体里，我们也能找到一个元素及一种施泰纳对称化，将其映射为一个非球体。

2 球体的对称化

对于某一类对象，自然会尝试寻找作用于该类对象的简单操作；例如，依次应用这些操作，使集合变得更加对称。这可能意味着集合在某些线性变换下保持不变，或者通常意味着它更接近一个球。

对于球体而言，一个非常简单的例子是 Minkowski 对称化操作（见 [2, 第 1.5 节5]）。对于 $K \subset \mathbb{R}^n$ 和 $u \in S^{n-1}$，K 关于超平面 $u^\perp$ 的反射记作 $R_u K$。$M_u K$ 关于 u 的闵可夫斯基对称体 $M_u K$ 定义为 K 与其反射的闵可夫斯基平均，即 $M_u K = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}R_u K$。显然，布伦-明可夫斯基不等式蕴含 Vol($M_u K$) ≥Vol($K$)。Minkowski 对称化与 c-对偶运算可交换，尤其会保持球体这一类，即

引理 2.1。设 $u \in S^{n-1}, K \in \mathcal{S}_n$。则 $M_u K \in \mathcal{S}_n$，且 $M_u(K^c) = (M_u K)^c$。因此，记号 $M_u K^c$ 没有歧义；此外，体积($M_u K^c$) ≥体积(K^c)。

特别地，可以用引理 2.1 证明：在所有平均宽度为 $w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(u) d\sigma(u)$ 的凸体 $K \in \mathcal{S}_n$ 中（这里，σ 是球面 S^{n-1}上的归一化的哈尔测度），体积最大的凸体是欧几里得单位球，而对偶体积最大的凸体也是欧几里得单位球。由于乌雷松不等式，这两个结论中的第一个对于任意 $K \in \mathcal{K}^n$ （所有凸体）也成立，

$$(\mathrm{Vol}(K)/\mathrm{Vol}(B_2^n))^{1/n} \leq w(K)/w(B_2^n).$$

然而，对偶体积的不等式仅适用于这一类凸体，原因有二：一是 c-对偶性只与这一类凸体有关；二是根据线性性，$w(K^c) = 1 - w(K)$，而通常的极性远非如此。

推论 2.2。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的外半径至多为1，且令 $B(0, r)$ 为与$\mathrm{conv}_c(A)$具有相同平均宽度的欧几里得单位球。则

$$\mathrm{Vol}(A^c) \leq \mathrm{Vol}(B(0, 1-r)) = (1-r)^n \kappa_n. \tag{3}$$

闵可夫斯基对称化是一种有用的运算，但对于许多应用来说，它多少有些“过于线性”。施泰纳对称化（见 [2, 第1.1节.7]）则

主要应用于渐近凸几何。我们在此回顾其定义，并展示一些普遍成立的简单性质，之后将在第4节继续讨论。固定一个单位向量 $u \in S^{n-1}$。凸体 K 关于超平面 $u^\perp$ 的施泰纳对称化 $S_u(K)$ 定义如下。对于 K 在 $u^\perp$ 上的投影 $P_{u^\perp}(K)$ 中的任意 x，记 $K \cap (x + \mathbb{R}u) = [x + a(x)u, x + b(x)u]$ 为“位于x上方的线段”，其长度为 $|b(x) - a(x)|$。K 关于 u 的施泰纳对称化体定义为

$$S_u(K) = \left\{ (x, y) \in u^\perp \times \mathbb{R} : x \in P_{u^\perp}(K),\, |y| \le \frac{|b(x) - a(x)|}{2} \right\}.$$

定理2.3。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是凸的，且 $u \in S^{n-1}$。那么

$$S_u(K^c) \subseteq \mathrm{conv}_c(S_u(K^c)) \subseteq (S_u K)^c.$$

特别地，施泰纳对称化会增大 c-对偶体积；体积$(K^c) \le$ 体积$((S_u K)^c)$。

证明。我们将使用闵可夫斯基对称化，首先注意到，对于任意凸 K，都有 $S_u(K) \subseteq M_u(K)$。事实上，在 $S_u(K)$ 中，给定 $x \in P_{u^\perp}(K)$ 上方的线段，是 K 的 x及其反射所对应线段的闵可夫斯基平均，而这属于 $M_u(K)$。其次，利用 (2) 可得

$$M_u(K^c) = \frac{K^c + R_u(K^c)}{2} = \frac{K^c + (R_u K)^c}{2} \subseteq \left(\frac{K + R_u K}{2} \right)^c = (M_u K)^c$$

（在第二个等式中，我们用到对于任意等距变换 U，都有 $(UA)^c = U(A^c)$。）结合这两个事实，以及 c-对偶性会反转包含关系这一事实，可得

$$S_u(K^c) \subseteq M_u(K^c) \subseteq (M_u K)^c \subseteq (S_u K)^c.$$

由于右侧属于 $\mathcal{S}_n$，对左侧取 c-包络后仍保持包含关系，从而完成证明。

□

我们可以推导出一个 Santal´o 型不等式，尽管其形式上弱于推论 2.2。

推论 2.4。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的外半径至多为 1，且令 $B(0, r)$ 为与 $\mathrm{conv}(A)$体积相同的欧几里得单位球。那么

$$\mathrm{Vol}(A^c) \le \mathrm{Vol}(B(0, 1 - r)) = (1 - r)^n \kappa_n. \tag{4}$$

证明。可以找到一列对 conv(A) 进行的施泰纳对称化，使其收敛到一个体积相同的球（例如参见 [2, 定理 1.1.16]）。根据定理2.3，沿着这一序列，体积积不断增加，从而完成证明。 □

在转向线性参数系统之前（特别是借此可以更深入地研究施泰纳对称化），我们还要提及文献中使用过的另一种对称化，它同样适用于类 $\mathcal{S}_n$。在 [7]Bezdek 通过一种称为“两点对称化”的对称化，证明了一个与推论 2.4 类似的结论。为描述这种对称化，对于仿射超平面 H，定义关于 H 的反射运算为 R_H。K 关于 H 的两点对称体为

$$\tau_H(K) = (K \cap R_H(K)) \cup ((K \cup R_H(K)) \cap H^+).$$

容易验证，K 和 τ_H（K）具有相同的体积（但凸性以及 c-凸性不一定能保持）。

定理 2.5（Bezdek）。若 $K \subset \mathbb{R}^n$，$n > 1$ 则

$$\tau_H(K^c) \subseteq \mathrm{conv}_c\left(\tau_H(K^c)\right) \subseteq (\tau_H(K))^c.$$

特别地，在所有体积给定的紧集之中，球的 c-对偶（按体积计）最大。

Bezdek 利用该定理证明了 Knesser-Poulsen 猜想的一个特殊情形（见 [6]）。

3 线性参数系统

施泰纳对称化可以看作一族参数化凸体在时间 1 时的映射。对此，最好的表述方式是借助“影子系统”（设想太阳移动时，物体投下的影子随时间变化的函数）或“线性参数系统”。我们将在经典情形和球体情形下分别描述这些系统。

对于集合 $A \subset \mathbb{R}^n$、向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 和“速度函数” $\alpha : A \to \mathbb{R}$，我们令

$$A_t = \{x + t\alpha(x)v : x \in A\}, \qquad K_t = \mathrm{conv}(A_t),$$

and

$$L_t = \mathrm{conv}_c(A_t).$$

在经典凸性理论中，集合 K_t 被称为线性参数系统，Rogers and Shephard 对其进行了深入研究 [21, 19]，；例如，他们证明了 Vol(K_t) 是 t 的凸函数（K_t 的所有其他拟体积积分也如此，参见例如 [20, 定理 10.4.1]）。下面的命题可视为与以下事实类似：$1/\mathrm{Vol}(K_t^\circ)$ 是 t 的凸函数（采用通常的极体），这一结果由 Campi 和 Gronci 在 [11]中证明。

命题 3.1。 设 $n \in \mathbb{N}$、 $A \subset \mathbb{R}^n$、 $v \in \mathbb{R}^n$ 以及 α： $A \to \mathbb{R}$。对于 $t_\lambda = (1-\lambda)t_0 + \lambda t_1$, 有

$$L_{t_\lambda} \subseteq (1-\lambda)L_{t_0} + \lambda L_{t_1} \qquad \text{and} \qquad (1-\lambda)L^c_{t_0} + \lambda L^c_{t_1} \subseteq L^c_{t_\lambda}.$$

特别地，$\mathrm{Vol}(L^c_t)^{1/n}$关于 t 是凹函数，拟体积积分 $V_k(L^c_t)^{1/k}$ 也是如此。

证明。 记 $A_\lambda = A_{t_\lambda}$ 和 $L_\lambda = L_{t_\lambda}$。由定义， $A_\lambda \subseteq (1-\lambda)A_0 + \lambda A_1$，因此有 $A_\lambda \subseteq (1-\lambda)L_0 + \lambda L_1$，且由 (1) 可知，右侧属于 $\mathcal{S}_n$。所以我们还有 $L_\lambda \subseteq (1-\lambda)L_0 + \lambda L_1$，这就证明了第一个包含关系。

对两边应用 c-对偶性，并再次利用 (1)，得到 $(1-\lambda)L^c_0 + \lambda L^c_1 \subseteq L^c_{t_\lambda}$，如所述。相应的凹性由布伦-明可夫斯基不等式推出。

□

很自然会想到，类比 Rogers 和 Shephard 的经典定理，函数 $\mathrm{Vol}(L_t)$ 是否为凸函数。这个问题与施泰纳对称化是否保持类 $\mathcal{S}_n$ 密切相关。正如我们很快将要证明的（见定理 3.7 和第 4.2 节），在 $n \le 2$ 维时答案是肯定的，而在更高维时则是否定的。不过，若考虑的系统只有两个点，那么无论维数如何，答案都是肯定的，正如下面的命题所述。

命题 3.2. 设 $n \ge 2$。对于任意 $y_0 \in \mathbb{R}^n$，由 $F(x) = \mathrm{Vol}\left(\mathrm{conv}_c(x, y_0)\right)$ 给出的函数 $F\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ 是凸的。

证明。 令 $d = \|x - y_0\|/2$，1-透镜体 $\mathrm{conv}_c(x, y_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ 的体积（相差一个乘法常数 $2\kappa_{n-1}$）由以下函数给出

$$F_n(d) = \int_0^d \left(\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-d^2}\right)^{n-1} dt \tag{5}$$

当 $d \le 1$时，而其他情况下为 $F_n(d) = \infty$。要证明 F_n 是凸的，只需验证对 $d_i \in (0,1)$，有$F_n((1-\lambda)d_0 + \lambda d_1) \le (1-\lambda)F_n(d_0) + \lambda F_n(d_1)$。为此，对其求导

$$\begin{aligned} F_n'(d) &= \int_0^d (n-1)\left(\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-d^2}\right)^{n-2} \cdot (d(1-d^2)^{-1/2})dt + 0 \\ &= (n-1)d(1-d^2)^{-1/2}F_{n-1}(d) > 0 \end{aligned}$$

（此处 $n \ge 2$ 和 $F_1(d) = d$）。由于 F_n' 是两个（或三个）正的递增函数的乘积，因此它是递增的，这意味着 F_n 是凸的。由于函数$F(x) = F_n(\|x - y_0\|/2)$ 是凸函数 $x \mapsto \|x - y_0\|/2$与递增凸函数 F_n的复合函数，因此它是凸的，证明完毕。

□

命题 3.2 表明，对于两个点的 c-影系统，体积确实是一个凸函数。更准确地说，

花冠 **理 3.3.** 设 $n \geq 2$, $v \in S^{n-1}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，并对每个 $t \in \mathbb{R}$ 令

$$L_t = \mathrm{conv}_c\{x_0 + t\alpha v, y_0 + t\beta v\}.$$

则函数 $f(t) :=$ 体积$_n(L_t)$ 是凸函数。

证明。 与命题 3.2 中一样，我们用以下符号表示 1-透镜体 L_t 的半径

$$d(t) := \|x(t) - y(t)\|/2,$$

其中 $x(t) = x_0 + t\alpha v$ 且 $y(t) = y_0 + t\beta v$。函数 $F_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty]$（来自命题 3.2）是凸且单调递增的，而函数 $d\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 是凸的，因此复合函数 $f = F_n \circ d$ 是凸的。 □

3.1 平面情形

本节将证明，在维数为 $n = 2$ 时，线性参数系统的 c-凸包的体积确实是凸函数。

定理 3.4. 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集，设 $v \in S^1$ 且设 $\alpha\colon A \to \mathbb{R}$。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，令 $L_t =$ 凸$_c\{x + t\alpha(x)v\colon x \in A\}$。则函数 $F(t) =$ 体积(L_t) 是凸函数。

定理 3.4 的证明可由有限集 A 的情形（定理 3.7）结合极限论证得出。对于有限 A 的情形，我们将对点的个数使用归纳法，并结合下面这个关于凸函数“局部凸扩张”的技术引理。

引理 *3.5.* 设 $g\colon \mathbb{R} \to (-\infty,\infty]$ 为凸函数，且设 $f\colon T \to (-\infty,\infty]$，其中 $T \subset \mathbb{R}$ 为开集，即 T 是两两不相交区间的可数并$\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$。假设对于每个这样的区间 (a_n, b_n)，限制 $f|_{(a_n,b_n)}$ 是一个凸函数，并且在区间端点处与 g 一致，即 $\lim_{t\to a_n^+} f(t) = g(a_n)$，且 $\lim_{t\to b_n^-} f(t) = g(b_n)$。那么函数

$$h(t) = \begin{cases} \max\{f(t), g(t)\} & t \in T \\ g(t) & t \notin T \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 中是凸的。

证明。 Deonte $T_n = \cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$，并令

$$h_n(t) = \begin{cases} \max\{f(t), g(t)\} & t \in T_n \\ g(t) & t \notin T_n \end{cases}$$

显然， h是（h_n）$_{n=1}^{\infty}$的逐点极限，因此只需证明 h_n 是凸的。由于凸性是局部性质，且它在开集 T_n 上以及其补集的开子集上都成立，我们只需在 ∂T_n处检验。由于 $\partial T_n = \{a_k, b_k\}_{k\le n}$ ，不失一般性，我们可以检验点 $t = a_1$附近的凸性。 h_n 在 a_1 处的右导数存在，且等于 $\max(f,\ g)$（这是定义在（a_1，b_1）上的凸函数）在 a_1处的右导数。对某个 $\varepsilon > 0$，有（$a_1 - \varepsilon$，a_1）$\subset \mathbb{R} \setminus T_n$且（$a_1$，$a_1 + \varepsilon$）$\subset T_n$，因此 $h_n = g$在（$a_1 - \varepsilon$，a_1）上成立，从而得到

$$\begin{aligned} h_n'(a_1^-) &= g'(a_1^-) \le g'(a_1^+) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{g(a_1+\delta) - g(a_1)}{\delta} \\ &\le \lim_{\delta\to 0^+} \frac{h_n(a_1+\delta) - g(a_1)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{h_n(a_1+\delta) - h_n(a_1)}{\delta} = h_n'(a_1^+), \end{aligned}$$

从而完成证明。 □

球体的边界结构可以采用与研究 $\mathbb{R}^n$中的凸体类似的方式进行研究和分析，只需将凸包替换为 c-包。关于这一主题的详细讨论，以及对相似之处和差异的阐释，请参见 [1]。就本文而言，我们只需要关于 c-极端点 （ c-包版本的极端点）的一条简单观察，即 c-c-包 $\mathrm{conv}_c(A)$ 的极端点必属于原集合 A。

在命题 3.6 中，我们给出 c-极点的定义，以及上述陈述。其证明请参阅 [1]（不过我们只会在平面情形中用到它，此时证明非常简单）。

命题 3.6. 设 $n \ge 2$ 和 $K \in \mathcal{S}_n$。若对 $y, z \in K$ ， $x \in K$ 成立 $x \in \mathrm{conv}_c(y, z)$ 蕴含 $y = x$ 或 $z = x$，则称点 $x \in K$ 是K 的 c-极点。我们用$\mathrm{ext}_c(K)$表示 K 的 c-极点集。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集，且$\mathrm{Outrad}(A) < 1$。那么

$$\mathrm{ext}_c(\mathrm{conv}_c(A)) \subseteq A.$$

有了这些准备，我们就可以证明定理 3.4 的以下球-多胞体情形。

定理 3.7. 设 $v \in S^1$, $A = \{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^2$ 和 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$。对每个 $t \in \mathbb{R}$ ， t

$$L_t = \mathrm{conv}_c\{x_i + t\alpha_i v : i = 1, \dots m\}.$$

那么函数 $h(t)$ =$\mathrm{Vol}(L_t)$ 是凸函数。

证明。 我们对点的数量 m进行归纳法，其中基础情形 $m = 2$已在推论 3.3 中处理。对于每个真子集 $I \subsetneq \{1, \dots, m\}$，我们定义$f_I\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$ by $f_I(t) = \mathrm{Vol}(\mathrm{conv}_c\{x_i + t\alpha_i v\colon\ i \in I\})$，并定义 $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$by $g = \sup_I\{f_I\}$，其中上确界取遍 $\{1, \dots, m\}$的所有真子集。根据归纳假设， f_I 在 $\mathbb{R}$上是凸函数，因此 g 也为凸函数。

根据命题 3.6，我们有 $\mathrm{ext}_c(L_t) \subseteq \{x_i + t\alpha_i v\}_{i=1}^m$ 对每个 $t \in \mathbb{R}$都成立，并将集合 $T \subset \mathbb{R}$ 定义为在此包含关系中取等号的所有 $t \in \mathbb{R}$组成的集合，即 $\mathrm{ext}_c(L_t) = \{x_i + t\alpha_i v\}_{i=1}^m$。集合 T是开集，也可能为空。若它为空，则根据归纳假设，我们已得到所需结论，因为 $h = g$ 处处成立。假设 T 非空，并定义函数 $f\colon T \to [0, \infty]$，使得 $f(t) = \mathrm{Vol}(L_t)$，即 $f = h|_T > g|_T$。考虑区间 $(a, b) \subset T$。由于在此区间上 $\mathrm{ext}_c(L_t) = \{x_i + t\alpha_i v\}_{i=1}^m$，集合 L_t 是一个圆盘多边形，也就是说，它由多边形 $\mathrm{conv}\{x_i + t\alpha_i v\}_{i=1}^m$ 以及相邻顶点之间 1-透镜体的 m 个半部组成。这些集合的体积都是关于 t 的凸函数，因此它们的并集的体积也是关于 t 的凸函数。换言之，在区间 (a, b) 上，函数 f 是凸函数。因此，我们满足引理 3.5 的条件，并得出结论： $h(t) = \mathrm{Vol}(L_t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数。

□

显然， c-多面体在球体中关于 Hausdorff度量是稠密的（因为对于一个凸 K，可以找到一个与其在 Hausdorff度量下任意接近的多面体 $P \subseteq K$，而当 $K \in \mathcal{S}_n$ 时，其 c-凸包仍是 K 的子集，从而得到一个至少同样接近的 c-多面体）。由此可知，对于维数为 $n = 2$ 的情形，一般 c-线性参数系统的体积具有凸性（当维数为 $n \geq 3$ 时，$\mathrm{Vol}(L_t)$可能不再具有凸性，这一点将在第 4.2 节中说明）。唯一缺少的工具是以下关于 c-凸包相对于 Hausdorff度量的连续性的命题。这一点相当直观，且已在 [1, 推论 2.11]中证明。

命题 3.8。 设 $n \in \mathbb{N}$，考虑外半径至多为1的 $\mathbb{R}^n$ 非空子集类。在此类上，映射 $K \mapsto K^{cc} =$凸包$_c(K)$ 关于 ***Hausdorff***度量是连续的。

定理 *3.4* 的证明。 回忆 $A_t = \{x + t\alpha(x)v\colon\ x \in A\}$。首先注意，函数$R_t = \mathrm{Outrad}(A_t)$是凸的。事实上，根据定义，对于 $t_\lambda = (1-\lambda)t_0 + \lambda t_1$，包含关系 $A_{t_\lambda} \subseteq (1-\lambda)A_{t_0} + \lambda A_{t_1}$ 显然成立；又由于集合的外半径关于闵可夫斯基加法是凸的，因此我们看到 R_t 是凸的。因此，存在一个区间 $[t_{\min}, t_{\max}]$，使得 $(A_t)^{cc} \neq \mathbb{R}^n$，且 $L_{t_{\min}}, L_{t_{\max}}$是单位欧几里得球（只有一种情形下 $t_{\min} = -\infty$ 和 $t_{\max} = +\infty$，即当 α 是常函数时；在其他所有情形中，都有两个点以不同的速度移动，

也就是说，对于足够大的 $|t|$，A_t 的外半径大于 1）。因此，我们可以将时间限制在 $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$内，因为在该区间之外，$F(t) = +\infty$。

取 $t_0, t_1 \in [t_{\min}, t_{\max}]$ 和 $\lambda \in (0,1)$，并令 $t_\lambda = (1-\lambda)t_0 + \lambda t_1$。令 D_0, D_1, D_λ 为 A 的可数子集，使得 $(D_i)_t \subseteq A_{t_i}$ 在 $i = 0, 1, \lambda$ 中稠密，并考虑 $D_0 \cup D_1 \cup D_\lambda \equiv D \subseteq A$。令 $(A_m)_{m=1}^\infty$ 为递增序列，使得 $A_m \subseteq D$ 由 m 个点组成，且 $\cup_{m=1}^\infty A_m = D$。根据构造，对于 $t = t_0, t_1, t_\lambda$，当 $m \to \infty$ 时，$(A_m)_t \to A_t$，其中此极限是在豪斯多夫意义下取得的。

根据命题 3.8，并利用 $\mathrm{Outrad}((A_m)_t) \leq \mathrm{Outrad}(A_t) \leq 1$，我们可知，对于 $t = t_0, t_1, t_\lambda$，$\mathrm{conv}_c((A_m)_t) \to \mathrm{conv}_c(A_t)$。我们使用定理 3.7，它意味着

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{conv}_c(A_m)_{t_\lambda}) \leq (1-\lambda)\mathrm{Vol}(\mathrm{conv}_c(A_m)_{t_0}) + \lambda \mathrm{Vol}(\mathrm{conv}_c(A_m)_{t_1}).$$

取极限 $m \to \infty$，并利用体积在类 $\mathcal{S}_2$ 上的连续性（相对于 Hausdorff 距离），即可得到所需的不等式。 □

4 施泰纳对称化与类 $\mathcal{S}_n$

众所周知，按照第 3 节中的记号，施泰纳对称体 $S_u(K)$ 可通过沿方向 $v = u$ 的线性参数系统实现，具体如下。令 $A = K$，并赋予所有满足 $y \in [a(x), b(x)]$, 的点 (x, y) 速度 $\alpha((x,y)) = -(a(x) + b(x))/2$，则有 $K_0 = K$、$K_1 = S_u(K)$ 和 $K_2 = R_u K$。

由于对任意 $t \in [0,2]$，都有 $A_t = K_t$，线段 $K_t \cap (x + \mathbb{R}u)$ 的长度对任意 $x \in P_{u^\perp}(K)$ 都是常数，因此根据 Fubini 定理，K_t 的体积对 $t \in [0,2]$ 为常数。显然 $K_t \subseteq L_t$，这使施泰纳对称化是否保持类 $\mathcal{S}_n$ 的问题与 $\mathrm{Vol}(L_t)$ 的凸性问题密切相关。事实上，若 $S_u(K) \notin \mathcal{S}_n$，则 $K_1 \subsetneq L_1$，这意味着

$$\mathrm{Vol}(L_1) = \mathrm{Vol}(\mathrm{conv}_c(S_u(K))) > \mathrm{Vol}(S_u(K)) = \mathrm{Vol}(L_0) = \mathrm{Vol}(L_2).$$

我们将在第 4.1 节和第 4.2 节看到，只有当 $n \leq 2$ 时，施泰纳对称化才保持类 $\mathcal{S}_n$。特别是，这意味着对于 $n \geq 3$，$\mathrm{Vol}(L_t)$ 一般而言不可能是凸的（甚至不是拟凸的）。

4.1 平面内球体的施泰纳对称化

本节证明以下定理。

定理 4.1。设 $K \in \mathcal{S}_2$ 且设 $u \in S^1$。K 沿方向 u 的施泰纳对称体 $S_u(K)$ 也属于 $\mathcal{S}_2$。

我们将给出该定理的两种证明。第一种依据上一节关于线性参数系统的结果，第二种则采用分析方法，并将帮助我们构造三维中的反例。

定理 *4.1* 的第一种证明。考虑上文所述的线性参数系统，其中 $A = K$, $v = u$, $\alpha($ $x + tu) = -(a(x) + b(x))/2$ 对所有满足$x \in P_{u^\perp}K$ 且 $t \in [a(x)\ b(x)]$的点 $x + tu \in K$ 成立。通过这一构造，我们有 $K_0 = K, K_1 = S_u(K)$，以及 $K_2 = R_u($ $K)$。注意，根据定理 3.4，在 $\mathbb{R}^2$ 中，函数 $\mathrm{Vol}(L_t)$ 是凸的；另一方面，$\mathrm{Vol}(L_t) \geq$ $\mathrm{Vol}(K_t) = \mathrm{Vol}(K)$。因此，函数 $\mathrm{Vol}(L_t)$ 在区间 $[0, 2],$ 上必定为常数，特别是凸体 L_1 与 K_1 重合，故 $S_u(K) = L_1 \in \mathcal{S}_2$。

□

定理 *4.1* 的第二个证明。除 $\emptyset$、$\mathbb{R}^2$ 和单点集之外，$\mathcal{S}_2$ 中的集合被刻画为这样的闭凸集：在所有边界点处，其广义曲率都至少为 1。不妨设 $u = e_2$。我们首先证明 K 光滑时的情形，此时边界由两个二阶连续可微的凹函数 f 和 $-g$ 的图像给出，并具有某个支撑集$[a, b]$，即 $K = \{(x、\ y)\colon\ x \in [a, b]、\ y \in [f(x)\ -g(x)]\}$。由于 $\mathcal{S}_2$ 中的集合的边界上不存在任何线段，我们看到 $f(a) = -g(a)$，以及 $f(b) = -g(b)$。

对于 $x \in (a, b)$，点 $(x, f(x))$ 和 $(x, -g(x))$ 处的曲率分别为$\kappa_f(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$ 以及 $\kappa_g(x) = \frac{|g''(x)|}{(1+(g'(x))^2)^{3/2}}$（一般维数情形见下文的 (7)）。令 $h(x) = (f(x) + g(x))/2$，则 K 的施泰纳对称化体为 $S_u(K) = \{(x, y)\colon$ $x \in [a, b], y \in [h(x)\ -h(x)]\}$，且点 $(x, \pm h(x))$ 处的曲率满足

$$\begin{aligned} \kappa_h(x) &= \frac{|h''(x)|}{(1+(h'(x))^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2}|f''(x)+g''(x)|}{\left(1+\left(\frac{f'(x)+g'(x)}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \geq \qquad (6) \\ &\geq \frac{\frac{1}{2}|f''(x)+g''(x)|}{\frac{1}{2}\left(1+f'(x)^2\right)^{3/2}+\frac{1}{2}\left(1+g'(x)^2\right)^{3/2}} = \frac{|f''(x)|+|g''(x)|}{|f''(x)|/\kappa_f(x)+|g''(x)|/\kappa_g(x)} \geq 1. \end{aligned}$$

第一个不等式成立，是因为函数 $t \mapsto (1 + t^2)^{3/2}$ 是（严格）凸的；第二个不等式成立，是因为 $\kappa_f,\ \kappa_g \geq 1$。

我们还需要考虑点 $x = a$ 和 $x = b$。先看后者。由光滑性可知，在（$b,\ f(b)$）处，K的法向量方向为 e_1，而根据假设，

球 B（$(b-1,\ f(b)),\ 1$）包含 K。因此，$S_u(K) \subset S_u(B((b-1,\ f(b)),\ 1)) = B((b-1,\ 0),\ 1)$。这是一个1-球，它在（$b,\ h(b)$）处支撑 $S_u(K)$，且 $=(b,\ 0)$。对 $x = a$也可以用同样的论证。这就完成了充分光滑K情形下的证明。

为完成一般情形下的证明，我们利用施泰纳对称化在内部非空的凸体上是连续的这一事实（例如见 [2, 命题 A.5.1.]），以及光滑体在 $\mathcal{S}_n$ 中稠密这一事实。后一性质已在 [1], 中证明；为求完整起见，我们将其列于附录，作为定理 4.10。利用这些结果，对于给定的凸体 $K \in \mathcal{S}_2$，取 $K_m \to K$，使得 $K_m \in \mathcal{S}_2$ 足够光滑；根据证明的第一部分可得，对所有 m，$S_u(K_m) \in \mathcal{S}_2$；再利用 S_u 的连续性，得到 $S_u(K_m) \to S_u(K)$。我们利用 $\mathcal{S}_2$ 在 Hausdorff度量下是闭集这一点，这很容易验证：例如，利用存在某个 T_m，使得 $S_u(K_m) + T_m = B(0,\ 1)$，而 T_m 会有某个极限 T，因为 $S_u(K_m)$ 有极限；根据定义，$S_u(K) + T = B(0,\ 1)$，因此 $S_u(K) \in \mathcal{S}_2$，如所要证明的。

□

注 4.2。 定理 *4.1* 有许多直接的应用。我们提及一个颇有意义的应用，即 *[17]* 中关于内接最佳逼近的 ***Macbeath*** 定理的类比。在所有面积为 V 的凸体 $K \in \mathcal{S}_2$ 中，面积为 V 的欧几里得圆盘最难逼近，具体而言：固定顶点数 N，考虑一个包含于 K 中且有 N 个顶点的圆盘多边形 P_N，使得 体积(P_N) 最大。当 K 是欧几里得球时，这个面积最小。形式化地说：

定理 4.3。 对于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $K \in \mathcal{S}_2$ 令

$$V_N(K) = \max\{\mathrm{Vol}(P_N) : P_N \text{ has at most } N \text{ vertices}\}.$$

令 $K \in \mathcal{S}_2$，并令 $r = (\text{体积}(K)/\pi)^{1/2}$，也就是说 体积$(rB_2^2)$ $=$ 体积(K)。那么

$$V_N(rB_2^2) \le V_N(K), \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}.$$

证明只需沿用 ***Macbeath*** 在 *[17],* 中的证明，并利用这样一个事实：上包络 g 与下包络 $-f$ 的平均所得到的凸体也必定属于 $\mathcal{S}_2$，因此一旦它包含所有顶点，也就包含了它们的 c-凸包。这一观察以及其他更复杂的观察，将在未来的工作中完整呈现。

4.2 三维中的一个反例

上一节的内容使人很自然地认为，施泰纳对称化在任意维数下都会保持类 $\mathcal{S}_n$，因为它保持与球的包含关系。然而，

正如我们将在本节中看到的，即使在三维中， $\mathcal{S}_3$ 中一个集合的对称化体也可能具有小于 1 的截面曲率。

事实上，我们的反例将是一个 $(n-1)$ 透镜体，即两个欧几里得单位球的交集。一旦存在反例，如此简单的集合便可作为反例；这一事实可由以下命题推出。该命题的实质是：若给定某个集合 $K \in \mathcal{S}_n$ 和某个方向 $u \in S^{n-1}$，且针对 K 的支撑透镜族 L_x 满足这些透镜全都满足 $S_u(L_x) \in \mathcal{S}_n$，那么 $S_u(K) \in \mathcal{S}_n$。特别地，一旦我们知道反例存在，就必定存在一个由透镜体给出的反例。我们本可以直接写出这个透镜体反例，而不附上该命题；不过我们仍将其列出，因为在某些情况下，它有助于确定对于给定的 K， $S_u(K) \in \mathcal{S}_n$。

命题 4.4. 设 $K \in \mathcal{S}_n$ 和 $u \in S^{n-1}$。假设对于每个 $x \in P_{u^\perp}(K)$，令 $t, s \in \mathbb{R}$ 满足 $[x+su, x+tu] = K \cap (x+\mathbb{R}u)$，则存在一个支撑透镜 $L = (z+B_2^n) \cap (w+B_2^n)$，使得 $K \subseteq L$ 和 $x+tu \in \partial L$, $x+su \in \partial L$ 满足 $S_u(L) \in \mathcal{S}_n$。那么 $S_u(K) \in \mathcal{S}_n$。

注 4.5. 注意，至少存在一个支撑透镜 $L = (z+B_2^n) \cap (w+B_2^n)$，满足 $K \subseteq L$ 和 $x+tu \in \partial L$, $x+su \in \partial L$。定理中的条件表述为存在一个对称化体属于 $\mathcal{S}_n$ 的透镜，这是因为在 $x+tu$ 和 $x+su$ 处可能存在多个支撑透镜，只需其中一个透镜的对称化体属于 $\mathcal{S}_n$ 即可。

命题 *4.4* 的证明. 假设命题陈述中的条件成立，并令 $x \in P_u K$。那么 $S_u(K)$ 有两个边界点 $x \pm ru$，满足 $r = \frac{(t-s)}{2}$。只需证明集合 $S_u(K)$ 在这些边界点处有一个支撑单位欧氏球。考虑透镜 $L_x = (z(x) + B_2^n) \cap (w(x) + B_2^n)$，其中 $K \subseteq L_x$ 和 $x+tu \in \partial L_x$, $x+su \in \partial L_x$，这是由命题中的假设给出的。那么 $K \cap (x+\mathbb{R}u) = [x+su, x+tu] = L_x \cap (x+\mathbb{R}u)$。因此

$$S_u(K) \cap (x+\mathbb{R}u) = [x-ru, x+ru] = S_u(L_x) \cap (x+\mathbb{R}u).$$

此外，根据施泰纳对称化的单调性， $S_u(K) \subseteq S_u(L_x)$。假设 $S_u(L_x) \in \mathcal{S}_n$ 意味着可以为 $S_u(L_x)$ 在 $x+ru$ 和 $x-ru$ 处找到支撑单位欧氏球；这些球也将是在这些点处支撑 $S_u(K)$ 的单位欧氏球，正如所要求的。

□

定理 4.6。 $\mathbb{R}^3$ 中的透镜体由下式给出

$$L = B(c_0, 1) \cap B(-c_0, 1), \quad c_0 = (-0.2794, 0.2451, 0.36)$$

满足 $S_{e_3}(L) \notin \mathcal{S}_3$。更具体地说，点 $(0.4154, 0.7262, \pm z) \in \partial S_{e_3}(L)$ 处沿方向 e_1 的截面曲率小于 1。

证明。记 $c_0 = (x_0, y_0, z_0)$。则 $B(c_0, 1) = \{(x, y, z) : -f_d(x, y) \leq z \leq f_u(x, y)\}$，同理 $B(-c_0, 1) = \{(x, y, z) : -g_d(x, y) \leq z \leq g_u(x, y)\}$，其中函数$f_d, f_u : B((x_0, y_0), 1) \to \mathbb{R}$ 以及 $g_d, g_u : B(-(x_0, y_0), 1) \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$\begin{aligned} f_u(x, y) &= z_0 + \sqrt{1 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \\ -f_d(x, y) &= z_0 - \sqrt{1 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \\ g_u(x, y) &= -z_0 + \sqrt{1 - (x + x_0)^2 - (y + y_0)^2} \\ -g_d(x, y) &= -z_0 - \sqrt{1 - (x + x_0)^2 - (y + y_0)^2}. \end{aligned}$$

这意味着 $L = \{(x,\ y,\ z) : \max(-f_d(x,\ y)\ -g_d(x,\ y)) \leq z \leq \min(f_u(x,\ y)\ g_u(x,\ y))\}$。（见图1。）

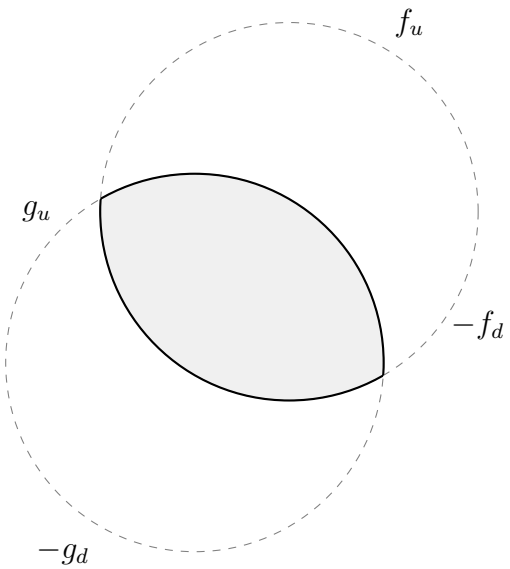


图1： 函数示意图

在给出 x_0，y_0，z_0 的取值之前，我们先说明，通常 $P_{e_3}(L)$ 中的点 $(x,\ y)$ 可能有两种不同的形式。可能有 $-g_d \leq -f_d \leq f_u \leq g_u$（或类似地 $-f_d \leq -g_d \leq g_u \leq f_u$），此时 $(x,\ y)$ 上方的纤维就是 $(x,\ y,\ 0) + \mathbb{R}e_3$ 与其中一个球的交集（如图2b中的某些点）。在这种情况下，曲率不会受到影响，因为我们讨论的是被对称化的集合局部为球的区域。

第二种情况更有趣，即当 $-g_d \leq -f_d \leq g_u \leq f_u$（或类似地

$-f_d \le -g_d \le f_u \le g_u$）时。在这种情况下，位于 $(x,\ y)$ 上方的纤维，一端位于 $\partial B(c_0,\ 1)$，另一端位于 $\partial B(-c_0,\ 1)$；图2a 中的所有点都是如此。

我们对参数（$x_0,\ y_0,\ z_0$）的选择对应于后一种情况，这意味着 $-g_d \le -f_d \le g_u \le f_u$在点（$x,\ y$）$=$（0。4154，0。7262）处成立；事实上，这对 $P_{e_3}(L)$ 中的所有点都成立（尽管证明并不依赖于此）。确实，

$$-g_d(x,y) \approx -0.56 \ < \ -f_d(x,y) \approx -0.175 \ < \ g_u(x,y) \approx -0.165 \ < \ f_u(x,y) \approx 0.89$$

这也表明我们的点（x, y）位于透镜的投影中。事实上，（$x, y, 0$）非常接近 $\partial P_{e_3}(L)$；注意 g_u 与 $-f_d$之间的微小差异，这意味着纤维 $((x, y, 0) + \mathbb{R}e_3) \cap L = [(x, y, -f_d(x, y)), (x, y, g_u(x, y))]$ 非常短。施泰纳对称体中的相应纤维 $S_{e_3}(L)$ 为 $[(x, y, -h(x, y)), (x, y, h(x, y))]$，其中 $h = \frac{f_d+g_u}{2}$。

图像上函数$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在点$(w,\ H(w))$处沿 e_1方向的截面曲率（见 [20]）为

$$\kappa_H(w, e_1) = \frac{|(\nabla^2 H(w))_{1,1}|}{\sqrt{1 + \|\nabla H(w)\|_2^2}\,(1 + \langle e_1, \nabla H(w)\rangle^2)} = \frac{|(\nabla^2 H(w))_{1,1}|}{\psi(\nabla H(w))}, \tag{7}$$

其中函数 $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ 由 $\psi(s,\ t) = \sqrt{1 + s^2 + t^2}(1 + s^2)$定义。（这是众所周知的结果，参见例如 [15, 第4节-3] 或 [22, 第3卷，第 38]页。）由于 g_u 和 f_d 对应于（平移后的）球面，这些情况下该表达式必须等于1，因此我们只需在 $H = h$的情形下使用（7）。我们可以轻易计算得出

$$\begin{aligned}
\nabla f_d(x,y) &= -\frac{((x-x_0),(y-y_0))}{\sqrt{1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} \approx -(1.300, 0.900)\\
\nabla g_u(x,y) &= -\frac{((x+x_0),(y+y_0))}{\sqrt{1-(x+x_0)^2-(y+y_0)^2}} \approx -(0.697, 4.977)
\end{aligned}$$

其中我们用 $\approx$ 表示将数值四舍五入到所显示的小数位。对于 $h = (f_d + g_u)/2$，有 $\nabla h = (\nabla f_d + \nabla g_u)/2$ 和 $\nabla^2 h = (\nabla^2 f_d + \nabla^2 g_u)/2$，因此可以使用（7）得到

$$\kappa_h(w, e_1) = \frac{|(\nabla^2 h(w))_{1,1}|}{\psi(\nabla h(w))} = \frac{\frac{1}{2}\left|(\nabla^2 f_d(w))_{1,1} + (\nabla^2 g_u(w))_{1,1}\right|}{\psi\left(\frac{\nabla f_d(w)+\nabla g_u(w)}{2}\right)}.$$

最后，我们得出了主要观察结果，即 ψ 在 $\mathbb{R}^2$上不是凸的（这解释了为什么类似于定理 4.1 的证明在 $\mathbb{R}^3$中会失败；将其与 (6) 比较，其中分母的凸性至关重要）。特别地，我们选择参数，使得在点 $w = (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ 处有

$$\psi\left(\frac{\nabla f_d(w) + \nabla g_u(w)}{2}\right) \approx 6.51 > 6.32 \approx \frac{\psi(\nabla f_d(w)) + \psi(\nabla g_u(w))}{2}. \tag{8}$$

将此与凹函数 $H = g_u$ 和 $H = f_d$ 的 (7) 式结合起来（连同$\kappa_{g_u}(w,\ e_1) = \kappa_{f_d}(w,\ e_1) = 1$），我们看到

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\frac{1}{2}\left|(\nabla^2 f_d(w))_{1,1} + (\nabla^2 g_u(w))_{1,1}\right|}{\frac{1}{2}\left|(\nabla^2 f_d(w))_{1,1} + (\nabla^2 g_u(w))_{1,1}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\left|(\nabla^2 f_d(w))_{1,1} + (\nabla^2 g_u(w))_{1,1}\right|}{\frac{1}{2}\left(\psi(\nabla f_d(w)) + \psi(\nabla g_u(w))\right)} \\ &= \kappa_h(w, e_1) \cdot \frac{\psi\left(\frac{\nabla f_d(w) + \nabla g_u(w)}{2}\right)}{\left(\frac{\psi(\nabla f_d(w)) + \psi(\nabla g_u(w))}{2}\right)} \approx \frac{6.51}{6.32} \cdot \kappa_h(w, e_1) > \kappa_h(w, e_1), \end{aligned}$$

正如所声称的。

□



(a) **(b)**

图 2： 两个平面透镜

4.3 在维数 $n \geq 3$ 中，反例能有多扁?

在我们给出的显式例子中，对称化透镜的曲率半径变为约 1。03。因此，人们可能会想，是否存在某种近似凸性，尤其是因为乍看之下，先前定义的 $\psi(s,\ t) = \sqrt{1 + s^2 + t^2(1 + s^2)}$ 的示意图似乎“几乎”是凸的。然而事实并非如此；正如下一个引理所示，对于特定的 $(s,\ t)$，其凸性可能会严重失效。

引理 4.7 。设 $\psi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ 由 $\psi(s,t) = \sqrt{1 + s^2 + t^2(1 + s^2)}$ 如上定义。

对任意 $R>0$，存在 $P_0=(t_0,s_0)$ $P_1=(t_1,s_1)$，满足

$$\psi\left(\frac{P_0+P_1}{2}\right)\geq R\cdot\left(\frac{\psi(P_0)+\psi(P_1)}{2}\right). \tag{9}$$

证明。固定 $k>1$，对任意 $t>0$，令 $P_0=(2t,\ 0)$ 和 $P_1=(0,\ 2t^k)$，使得$_{1\,2}(P_0+P_1)=(t,\ t^k)$。接下来定义

$$R(t):=\frac{\psi\left(\frac{P_0+P_1}{2}\right)}{\frac{\psi(P_0)+\psi(P_1)}{2}}=\frac{2\sqrt{1+t^2+t^{2k}}(1+t^2)}{(1+4t^2)^{3/2}+\sqrt{1+4t^{2k}}}.$$

当 $k\in(1,\ 3]$, $R(t)$ 的增长阶为 t^{k-1} 时，对于 $k\geq 3,\ R(t)$ 的增长阶为 t^2。两种情况下都有

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{1+t^2+t^{2k}}(1+t^2)}{(1+4t^2)^{3/2}+\sqrt{1+4t^{2k}}}=\infty.$$

因此，取 $k>1$ 并令 t 足够大，我们便得到满足 (9) 的点。 □

为了利用这一事实并构造更多“坏透镜体”，接下来我们证明，可以找到在给定点具有任意指定外法向量的透镜体。更精确地说。

引理 4.8。设 $p,u,v\in\mathbb{R}^{n-1}$。记 P 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的投影，则存在一个形如 $\{(x,z):\ x\in P(L)\ \ f(x)\leq z\leq g(x)\}$ 的透镜体 $L\in\mathcal{S}_n$，使得 $p\in P(L)$、$u=\nabla f(p)$ 以及 $v=\nabla g(p)$。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $p=0\in\mathbb{R}^{n-1}$。和之前一样，以 (x_0,z_0) 为球心的单位球 $\in\mathbb{R}^n$ 由 $\{(x,z):\ -f_d(x)\leq z\leq f_u(x)\}$ 给出，其中函数$f_d,f_u,S:\ B(x_0,1)\to\mathbb{R}$ 由 $f_d(x)=-z_0+S(x)$ 和 $f_u(x)=z_0+S(x)$ 给出，其中 $S(x)=\sqrt{1-\|x-x_0\|^2}$ 是弦长的一半。映射 ∇S 从 $\mathrm{int}(B(x_0,1))\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 是一个双射，因此我们可以找到 x_0，使得对每个z_0 都有 $-\nabla f_d(0)=u$。

类似地，我们考虑第二个球，其球心为 $(y_0,\ 0)\in\mathbb{R}^n$，它由$\{(x,\ z):\ -g_d(x)\leq z\leq g_u(x)\}$ 给出，其中 $g_d(x)=g_u(x)=\sqrt{1-\|x-y_0\|^2}$。同样，我们可以找到 y_0，使得 $\nabla g_u(0)=v$。显然，$0\in\mathrm{int}(B(x_0,\ 1)\cap B(y_0,\ 1))\subset\mathbb{R}^{n-1}$。

我们剩下要选取 z_0，使得透镜体 $L=B((x_0,z_0),1)\cap B((y_0,0),1)$的边界上有$(0,-f_d(0))$和$(0,g_u(0))$。显然，$L$ 与纤维 $\mathbb{R}e_n$ 的交由 $\{(0,z):\max(-f_d(0)\ -g_d(0))\leq z\leq\min(f_u(0)\ g_u(0))\}$给出。

由于 $0\in\mathrm{int}(B(y_0,\ 1))$，线段 $\mathbb{R}e_n\cap B((y_0,\ 0),\ 1)=[-g_d(0)\ g_u(0)]e_n$ 具有正长度。同样，线段 $\mathbb{R}e_n\cap B((x_0,\ z_0),\ 1)=[-f_d(0)\ f_u(0)]e_n$ 也具有正长度；事实上，后者也由 $[z_0-S(0)\ z_0+S(0)]e_n$给出。通过选择 z_0

为某个正值（例如 $z_0 = \max(S(0)\ g_u(0)) = \sqrt{1 - \min(\|x_0\|^2,\ \|y_0\|^2)}$），我们可以同时满足 $-g_d(0) < -f_d(0)$ 和 $g_u(0) < f_u(0)$，从而确保透镜体 L 的边界上有 $(0,\ -f_d(0))$ 和 $(0,\ g_u(0))$，如所需。 □

有了这两个引理，我们便可以证明，施泰纳对称化并不保持球体这一类，具体而言：对于球体 K，无论对其大曲率作何假设，都不足以推断其施泰纳对称化体 $S_u(K)$是球体。

固定某个较大的 κ，并考虑 $\mathcal{S}_n$ 的一个子类，其中的凸体都具有极大的曲率，也就是说，所有截面曲率都大于 κ。然而，我们仍能找到这样的凸体 K 和一个方向 u，使得施泰纳对称化体 $S_u(K)$ 不是球体。

由于曲率是 1 次齐次的，这相当于要证明：对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个球体 K，其对称化体 $S_u(K)$ 的截面曲率小于 ε。我们用一个透镜体来实现这一点（因此，上文提到的“极大曲率”凸体将是两个半径为 $\varepsilon \in (0,\ 1)$ 的小球的交集）。

命题 4.9。对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个透镜体 $L \in \mathcal{S}_n$，使得施泰纳对称化体 $S_{e_n}(L)$ 上有一点，其某个截面曲率小于 ε。

证明。由引理 4.7，存在 $t > 0$，使得点 $P_0 = (2t, 0)$ $P_1 = (0, 2t^2)$ 满足 $\psi(P_0) + \psi(P_1) < \varepsilon \cdot \psi\left(\frac{P_0+P_1}{2}\right)$。令 $u = (2t, 0, \ldots, 0)$ $v = (0, \ldots, 0, 2t^2) \in \mathbb{R}^{n-1}$。由引理 4.8，存在定义在某个凸 $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的凹函数 f, g，以及一个透镜体 $L = \{(x, z) :\ x \in T, -f(x) \le z \le g(x)\}$，使得 $0 \in T$, $-\nabla f(0) = -u$，且 $\nabla g(0) = v$。

施泰纳对称体 $S_{e_n}(L)$ 定义为 $\{(x, z) :\ x \in T,\ -h(x) \le z \le h(x)\}$，其中 $h = \frac{f+g}{2}$。与（7）类似，$S_{e_n}(L)$ 在点 $(x, \pm h(x))$ 处沿方向 e_1 的截面曲率为

$$\kappa_h(x, e_1) = \frac{|(\nabla^2 h(x))_{1,1}|}{\psi\left(\langle e_1, \nabla h(x)\rangle, \sqrt{\|\nabla h(x)\|^2 - \langle e_1, \nabla h(x)\rangle^2}\right)}.$$

在点 $x = 0$ 处，我们得到

$$\kappa_h(0, e_1) = \frac{|(\nabla^2 h(0))_{1,1}|}{\psi(t, t^2)},$$

因为 $\nabla h(0) = \frac{u+v}{2} = (t,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ t^2)$（回想一下，$\nabla f(0) = u$，且 $\nabla g(0) = v$）。与定理 4.6 的证明相同，球面 f，g 的曲率等于 1，因此我们有

$$|(\nabla^2 f(0))_{1,1}| = \psi\left(\langle e_1, \nabla f(0)\rangle, \sqrt{\|\nabla f(0)\|^2 - \langle e_1, \nabla f(0)\rangle^2}\right) = \psi(P_0),$$

$$|(\nabla^2 g(0))_{1,1}| = \psi\left(\langle e_1, \nabla g(0)\rangle, \sqrt{\|\nabla g(0)\|^2 - \langle e_1, \nabla g(0)\rangle^2}\right) = \psi(P_1).$$

综合以上结果，我们得到

$$\kappa_h(0, e_1) = \frac{|(\nabla^2 h(0))_{1,1}|}{\psi\left(t, t^2\right)} = \frac{\frac{|(\nabla^2 f(0))_{1,1}| + |(\nabla^2 g(0))_{1,1}|}{2}}{\psi\left(\frac{P_0+P_1}{2}\right)} = \frac{\frac{\psi(P_0)+\psi(P_1)}{2}}{\psi\left(\frac{P_0+P_1}{2}\right)} < \varepsilon.$$

□

附录

本节旨在证明下面的技术性结论。该结论在研究球体不等式时可能会派上用场，而且我们在定理 4.1 的第二个证明中也用到了它。

命题 4.10 (光滑体在 $\mathcal{S}_n$ 中的稠密性)。 设 $n \in \mathbb{N}$。对于任意 $K \in \mathcal{S}_n$，存在一个序列 $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$，其中 $K_m \in \mathcal{S}_n$ 是满足 $h_K \in C^\infty$ 的光滑凸体，且 $d_H(K_m, K) \to_{m\to\infty} 0$。

为证明该命题，我们采用标准逼近技术，这些技术在 [20, 第 3 节4] 中有清楚的说明。

定理 *4.10* 的证明。 给定 $K \in \mathcal{S}_n$，不失一般性，我们可以假设 $K \subseteq B_2^n$。我们采用 [20, 定理 3.41], 中描述的逼近过程，其中 $\varepsilon_m > 0$ 是满足 $\varepsilon_m \to 0$ 的某个序列。为此，对每个 m，我们固定一个φ_m： $[0,\infty) \to [0,\infty)$，它是光滑的，满足 $\int \varphi_m(\|z\|)\, dz = 1$，且支撑于 $[\varepsilon_m/2, \varepsilon_m)$，并定义映射

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \|x\| z\right) \varphi_m\left(\|z\|\right) dz.$$

[20] 中的定理 3.4.1 表明， $T_m(h_K)$ 是某个凸体的支撑函数，我们将该凸体称为 K'_m; 此外， $h_{K'_m}$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上是 C^∞。此外（将映射 T_m 在支撑函数和凸体上的作用视为相同），由 [20, 中定理 3.4.1] 的性质 (c)，我们有 $d_H(K, T_m K) \le \varepsilon_m$，对所有 $K \in \mathcal{S}_n$ 均成立，因为 Outrad$(K) \le 1$。我们还看到，根据定义， $T_m(K + L) = T_m K + T_m L$ （这就是 [20, 中定理 3.4.1] 的 (a)），并且 $T_m(B_2^n)$ 是一个欧几里得球，因为根据同一定理的性质 (b)，它在刚性运动下保持不变。记 $T_m(B_2^n)$ 为 $= \alpha_m B_2^n$，我们看到 $\alpha_m \in$

[1]我们谨感谢 Daniel Hug 与我们讨论近似问题，并为我们指出了 [20]中最相关的定理

$[1-\varepsilon_m, 1+\varepsilon_m]$，因为 $d_H(\alpha_m B_2^n,\ B_2^n) \le \varepsilon_m$。特别地，若 $K+L=B_2^n$，则有 $K'_m + T_m(L) = \alpha_m B_2^n$，因此 $\frac{1}{\alpha_m} K'_m + \frac{1}{\alpha_m} T_m(L) = B_2^n$。令 $K''_m = \frac{1}{\alpha_m} K'_m$，于是 $d_H(K''_m,\ K'_m) = |1-\frac{1}{\alpha_m}| \sup_{u\in S^{n-1}} |h_{K'_m}(u)| \le |1-\frac{1}{\alpha_m}| \le 2\varepsilon_m$，假设 $\varepsilon_m < 1/2$；这一假设是可以成立的。我们看到，K''_m 是 B_2^n 的一个加项，其支撑函数为 C^∞，因为 K'_m 也具有这一性质。构造的最后一步是确保该凸体没有奇异点。这样便可保证该凸体是 C^∞；关于支撑函数的光滑性与凸体的光滑性之间关系的讨论，参见 [20, 第 2.5] 节，其中讨论了 C^2_+ 情形，但证明适用于任意阶的光滑性。另请参阅同一本书中定理 3.4.1 之后的讨论。为此，我们令

$$K_m = (1-\varepsilon_m)K''_m + \varepsilon_m B_2^n,$$

因此

$$d_H(K''_m, K_m) = \sup_{u\in S^{n-1}} |h_{K_m}(u) - h_{K''_m}(u)| = \varepsilon_m d_H(K''_m, B_2^n) \le \varepsilon_m.$$

显然，K_m 是 B_2^n的一个加项，它是 C^∞_+，其支撑函数也为 C^∞。于是

$$d_H(K_m, K) \le d_H(K_m, K''_m) + d_H(K''_m, K'_m) + d_H(K'_m, K) \le 4\varepsilon_m$$

证明至此完成。 □

参考文献

[1] S. Artstein-Avidan 和 D. Florentin。《球体的深入研究》。*arXiv*，2025。

[2] S. Artstein-Avidan、A.Giannopoulos 和 V. D.Milman。《渐近几何分析：第一部分》，第 202 卷，数学调查与专著。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。

[3] S. Artstein-Avidan、S. Sadovsky 和 K. Wyczesany。对偶性的动物园。《几何分析杂志》，33(238)，2023。

[4] Shiri Artstein-Avidan、Arnon Chor 和 Dan I. Florentin。球体类等距变换的完整分类。《伦敦数学会通报》，(12):3691–3698，2025。

[5] Shiri Artstein-Avidan、Arnon Chor 和 Dan I. Florentin。球体类的等距变换。《*Colloquium Mathematicum*》，178(2):231–239，2025。[6] K. Bezdek。从 Kneser–Poulsen 猜想到球多面体。《欧洲组合学杂志》，29(8):1820–1830，2008。[7] K. Bezdek。从 r对偶集到一致压缩。《数学方程》，92:123–134，2018。[8] Gabriele Bianchi、Richard J. Gardner 和 Paolo Gronchi。几何中的对称化。《数学进展》，306:51–88，2017。[9] W. Blaschke。给定定宽的凸域及其最小内容。《数学年刊》，76:504–513，1915。[10] A. Borisenko 和 K. Drach。曲率下界受限曲线的等周不等式。《数学札记》，95(5):590–598，2014。[11] S. Campi 和 P. Gronchi。关于凸集的体积乘积不等式。《美国数学会会刊》，134:2393–2402，2006。[12] R. Chernov、K. Drach 和 K. Tatarko。香肠体是反等周问题的唯一解。《数学进展》，353:431–445，2019。[13] K. Drach。黎曼空间中完备超曲面的极值界。博士论文，乌克兰国家科学院 B. Verkin 低温物理与工程研究所，哈尔科夫，2016。（俄文）。[14] K. Drach 和 K. Tatarko。曲率约束下的反等周问题。*arXiv* 预印本，2023。[15] Manfredo P. do Carmo。《曲线与曲面的微分几何》。Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1976。[16] H. Lebesgue。关于等周问题及定宽域。法国数学学会通报，《会议记录》，第72–76页，1914。[17] Alexander M. Macbeath。超球面的一个极值性质。《剑桥哲学学会会刊》，47:245–247，1951。[18] H. Martini、L. Montejano 和 D. Oliveros。《定宽体：凸几何及其应用导论》。Birkhäuser，2019。

[19] C. A. Rogers 和 G. C. Shephard。关于凸体的一些极值问题。*Mathematika*，5:93–102，1958年。[20] R. Schneider。凸体：布伦-明可夫斯基理论，第151卷，收录于数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，2013年。[21] G. C. Shephard。凸集的影子系统。以色列数学杂志，2:229–236，1964年。[22] Michael Spivak。微分几何综合导论，第*3*卷。Publish or Perish，休斯敦，德克萨斯州，第2版，1979年。S. Artstein-Avidan，特拉维夫大学数学科学学院，拉马特阿维夫，特拉维夫，69978，以色列。电子邮箱：shiri@tauex.tau.ac.il。D.I. Florentin，巴伊兰大学数学系，拉马特甘，52900，以色列。电子邮箱：dan.florentin@biu.ac.il。