arXiv:2602.14171v1 [math.RT] 15 Feb 2026

关于根基平方为零代数的表示

YURIY A. DROZD

Abstract. 我们考察根基平方为零代数的表示与物种的表示之间一种新的对应关系。我们证明，这类代数的表示稳定范畴嵌入相应物种的表示范畴，并说明如何根据物种的 Auslander-Reiten 箭图重构该代数的 Auslander-Reiten 箭图。

许多研究者都研究过根基平方为零代数，因为它们是检验表示论新方法和新思路的理想场所。关于这类代数表示的首批结果由 Yoshii 得出 [15, 14]，他找到了判定这类代数表示有限的条件。Kruglyak [11] 将这类代数的表示与偏序集的表示联系起来（实际上是与箭图的表示联系起来，只是当时尚未使用这一术语），并以此重新得到了 Yoshii 的结果，且作了少量改进。随后，一系列论文 [5, 6, 13] 沿用这一思路研究这类代数的导出范畴。Auslander 和 Reiten [1] 建立了根基平方为零代数与某个特定物种（或按照 [8]的定义对赋值图的实现）之间的稳定等价。本文考察根基平方为零代数与物种之间另一种对应方式。我们证明，这类代数的稳定范畴嵌入相应物种的表示范畴，并说明如何根据相应物种的 Auslander-Reiten 箭图重构该代数的 Auslander-Reiten 箭图。

1. Species

s1

回顾物种及其表示的概念。

d11

定义 1.1. (1) 一个物种 Σ 由以下部分组成：

2020 数学主题分类。 16G70,16G10,16G20,16D90.关键词和短语。 代数的表示、物种、箭图、Auslander-Reiten 箭图、不可约态射。

- 一组顶点 $\operatorname{ver}\Sigma$。
- 对每个顶点 i，都有一个斜域 F_i。
- 对每一对顶点 (i,j)，都有一个 F_i-F_j-双模（左作用于 F_i，右作用于 F_j）$B(i,j)$。

(2) 一个 Σ-模（或物种的表示 Σ）$\mathbf{V}$ 是一个集合（V_i，φ_{ij}），其中每个 V_i 都是 F_i 上的向量空间，且 φ_{ij} 是一个F_i-态射 $B(i,j)\otimes_{F_j}V_j\to V_i$。

(3) 表示的态射 $\boldsymbol{\alpha}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$，其中 $\mathbf{W}=(W_i,\psi_{ij})$ 是一组 F_i-态射 $\alpha_i:V_i\to W_i$，满足对每一对 (i,j)，图表

$$\begin{array}{ccc} B(i,j)\otimes_{F_j}V_j & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & V_i \\ {\scriptstyle 1\otimes\alpha_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_i} \\ B(i,j)\otimes_{F_j}W_j & \xrightarrow{\psi_{ij}} & W_i \end{array}$$

是交换的。

如果所有 F_i 都与一个固定域 $\Bbbk$重合，并且 $\lambda x=x\lambda$ 对每个 $x\in B(i,j)$ 以及 $\lambda\in\Bbbk$成立，则只要我们固定 $d_{ij}=\dim_{\Bbbk}B(i,j)$，该物种便完全确定。然后，他们通常将物种 Σ 等同于以$\operatorname{ver}\Sigma$ 为顶点集、并以 d_{ij} 为箭、源为 j、靶为 i的箭图（有向图）。Σ 的表示与该箭图在 [9]意义下的表示相同。在一般情形下，物种及其表示是赋值图的实现及其在 [7, 8]意义下的表示。

Σ-模构成一个阿贝尔范畴 Σ-Mod（或$\operatorname{Rep}\Sigma$）。若$\operatorname{ver}\Sigma$有限，则它可以等同于张量代数 $T_{\mathbf{F}}(\mathbf{B})=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathbf{B}^{\otimes k}$上的模范畴，其中$\mathbf{F}=\prod_i F_i$与$\mathbf{B}=\bigoplus_{i,j}B_{ij}$带有$\mathbf{F}$的自然作用，但我们更倾向于使用物种的语言。

设 $\mathscr{A}$ 是一个局部范畴，即满足以下条件：

(1) $\mathscr{A}$ 是预加性的，即所有态射集 $\mathscr{A}(X,Y)$ 都是阿贝尔群，且乘法对加法满足分配律。(2) 每个对象都是有限个局部对象的直和，即其自同态环为局部环的对象。

众所周知，这种分解在同构意义下是唯一的。此外，局部范畴中的每个幂等元都可分裂，也就是说，它来自一个直和分解（例如参见 [4, 第1章，第3]节）。如果一个局部范畴只有有限个对象，就可以将其视为半完美环 $A=\sum_{X,Y\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}}\mathscr{A}(X,Y)$ 上有限投射模的范畴A-proj。

设 X,Y是局部范畴 $\mathscr{A}$中的对象。固定它们分解为局部对象直和的分解，并将 $\mathrm{Rad}(X,Y)$ 记为从 $\mathscr{A}(X,Y)$ 出发的态射集合，其中所有态射相对于这些分解的分量均不可逆（该集合不依赖于所选分解）。由此得到 $\mathscr{A}$中的一个理想，称为范畴 $\mathscr{A}$的根基 $\mathrm{Rad}\,\mathscr{A}$。我们可以考虑它的幂 $\mathrm{Rad}^k(\mathscr{A})$ 和 $\mathrm{Rad}^\infty(\mathscr{A}) = \cap_{k=1}^\infty \mathrm{Rad}^\infty(\mathscr{A})$。令 $\mathrm{Irr}(X,Y) = \mathrm{Rad}(X,Y)/\mathrm{Rad}^2(X,Y)$。我们将该集合中的元素以及它们在 $\mathrm{Rad}(X,Y)$ 中的代表元称为从 X 到 Y的不可约态射 。

d12 **定义 1.2.** 设 $\mathscr{A}$ 是一个局部范畴。其物种 $\Sigma = \Sigma(\mathscr{A})$定义如下:

- $\mathrm{ver}\,\Sigma = \mathrm{ind}\,\mathscr{A}$，即局部对象的同构类代表元集合。
- $F_X = \mathscr{A}(X, X)/\mathrm{Rad}(X, X)$。
- $B(X,Y) =$不可约表示(Y,X)。

如果 A 是一个半完美环，他们用 $\Sigma(A)$代替 $\Sigma(A\text{-proj})$。这称为 A 的***Gabriel*** 物种（如果该物种与一个箭图相对应，则称为***Gabriel*** 箭图）。实际上，它已在 [10]中引入。

若 A 是 Hensel 诺特交换环上的有限代数，且 $\mathscr{A}$ 是有限 A-模所成范畴 A-mod 的一个满子范畴，并且对直和与直和项封闭，则它是一个局部范畴。于是，范畴 $\mathscr{A}$ 的物种 $\Sigma(\mathscr{A})$ 称为该范畴的 ***Auslander-Reiten*** 物种。若 $\mathscr{A} = A$-mod，则它也称为代数 A 的 ***Auslander-Reiten*** 物种，并记为 $\mathrm{AR}(A)$。

若 $\mathrm{ver}\ \Sigma = \mathrm{ver}^+ \sqcup \mathrm{ver}^-$ 且 $H(i,j) = 0$，则称物种 Σ 二部的。若 $i \notin \mathrm{ver}^-$ 或 $j \notin \mathrm{ver}^+$。对于一个顶点 i，令 $\mathbf{S}_i$ 为满足下列条件的 Σ-模: $\mathbf{S}_i(i) = F_i$，且当 $j \neq i$时，$\mathbf{S}_i(j) = 0$。

p13 **命题 1.3**。设 Σ 是一个二部种。我们用 $\Sigma\text{-Mod}^\flat$ 表示 $\Sigma\text{-Mod}$ 的满子范畴，它由所有不含单直和项的模组成。

(1) $\mathbf{S}_i$ 都是单 Σ-模。(2) $\mathbf{S}_i$ 是投射的，当且仅当 $i \in \mathrm{ver}^+$；是内射的，当且仅当 $i \in \mathrm{ver}^-$。(3) Σ-模$^\flat \simeq \Sigma$-模$/\mathscr{S}$，其中 $\mathscr{S}$ 是所有经由半单模分解的态射所构成的理想。

证明显而易见。 □

注。如果 Σ 不是二部的，则可能存在其他单 Σ-模。例如，若 Σ 由箭图 $1 \leftrightarrows 2$ 和域$\Bbbk$给出，则所有满足 $V_1 = V_2 = \Bbbk$、$\varphi_{12} =$ 恒等映射且 $\varphi_{21} = \lambda \cdot$ 恒等映射（$\lambda \in \Bbbk\backslash\{0\}$）的模$\mathbf{V}$ 都是单的。此外，若 $f(t) \neq t$ 是$\Bbbk$上的不可约多项式，则 φ 是

特征多项式为 $f(t)$的矩阵，则模$\mathbf{V}$ 满足$V_1 = V_2 = \Bbbk^d$，其中 $d = \deg\ f(x)$，$\varphi_{12} =$恒等映射且 $\varphi_{21} = \varphi$ 也是单的。

注意，若 Σ 是二部的且 $\operatorname{ver}\Sigma$ 有限，则张量代数$T_{\mathbf{F}}(\mathbf{B})$ 同构于三角矩阵代数

eq0eq0
$$\Bbbk[\Sigma] = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+ & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{F}^- \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{F}^{\pm} = \prod_{i\in\operatorname{ver}_{\pm}} F_i$。它是一个半初等环，且 $\operatorname{rad}^2 T_{\mathbf{F}}(\mathbf{B}) = 0$；当且仅当对所有 $i \in \operatorname{ver}^+$, $j \in \operatorname{ver}^-$，$\dim_{F_i} B(i,j) < \infty$（相应地，$\dim_{F_j} B(i,j) < \infty$）时，它是左（右）阿廷的。

2. Representations

s2

本节中，A 表示一个半初等环，满足 $\mathfrak{r}^2 = 0$，其中 $\mathfrak{r} =\operatorname{rad} A$。按照 [3], 的意义，这样的环是完全的，因此对每个 A-模M，都存在一个极小投射表示，即投射模之间的一个态射 $\varphi\colon P^- \to P^+$，满足 $\operatorname{im}\varphi \subseteq \mathfrak{r}P^+, \ker\varphi \subseteq \mathfrak{r}P^-$且 $\operatorname{coker}\varphi \simeq M$。这样的表示在同构意义下唯一。用 A-模表示商范畴 A-模$/\mathscr{P}$，其中 $\mathscr{P}$ 是由经过投射模的态射构成的理想。

设 P_1、P_2、.....、P_n是不可分解投射 A-模的同构类代表。对于投射 A-模 P，记其 $P(i)$ 为 P_i-部分，即 P 的一个直和项，使得$P = P(i)\oplus Q$，其中 $P(i) \simeq P_i^k$，且 Q 没有与 P_i同构的直和项。于是 $P = \bigoplus_{i=1}^n P(i)$。物种 $\Sigma(A)$由顶点P_1、P_2、.....、P_n、斜域 $F_i = \operatorname{End}_A P_i/\operatorname{rad}\operatorname{End}_A P_i$ 以及双模$B_{ij} = \operatorname{Hom}_A(P_j, \mathfrak{r}P_i)$构成。

我们还考虑另一种物种 $\Gamma = \Gamma(A)$，有时称为代数 A 的双物种。它是二部的，其顶点为 $\operatorname{ver}^{\pm}\Gamma =\{i^{\pm} \mid 1 \le i \le n\}$，斜域为 $F_{i^{\pm}} = F_i$，双模为 $H_{i^+j^-} = \operatorname{Hom}_A(P_j, \mathfrak{r}P_i)$。对于一个 Γ-模$\mathbf{V}$，我们用 $V_i^{\pm}$ 代替 $V_{i^{\pm}}$。如上所述，我们将 Γ-Mod$^\flat$ 记为 Γ-Mod 的满子范畴，它由所有没有单直和项的模$\mathbf{V}$ 组成。它等价于商 Γ-Mod$/\mathscr{S}$，其中 $\mathscr{S}$ 是那些可经由半单模分解的态射所构成的理想。

下文中，我们用 H_{ij} 代替 $H_{i^+j^-}$。

t21
定理 2.1. 存在一个等价 Φ： A-模 $\xrightarrow{\sim}\Gamma$-模$^\flat$。

证明。对于一个 $M \in A$-模，令 $\varphi\colon P^- \to P^+$为其极小投射表示。由于 $\mathfrak{r}^2 = 0$，它可以识别为诱导映射 $\bar\varphi\colon P^-/\mathfrak{r}P^- \to \mathfrak{r}P^+$。我们如下定义相应的 Γ-模$\mathbf{V} = \Phi(M)$:

- $V_i^+ = \mathfrak{r}P^+(i)$,
- $V_j^- = P^-(j)/\mathfrak{r}P^-(j)$,
- morphisms $\varphi_{i^+j^-} : H_{ij} \otimes_{F_j} V_j^- \to V_i^+$ are induced by $\bar{\varphi}$.

下文中，我们用 φ_{ij} 代替$\varphi_{i^+j^-}$。

注意，$\mathbf{V}$ 没有形如$\mathbf{S}_j^-$ 的直和项。事实上，这样的直和项给出某个 V_j^- 的一个子空间 V'，使得 $\bar{\varphi}(V') = 0$。这意味着 $\ker\ \varphi \cap P^-(j) \not\subseteq \mathfrak{r}P^-(j)$，而这是不可能的。若 M是投射的，则 $P^- = 0$，因此$\mathbf{V}$ 是形如$\mathbf{S}_i^+$ 的简单模的直和。反之，若$\mathbf{V}$ 有一个形如$\mathbf{S}_i^+$ 的直和项，则某个空间V_i^+ 分解为 $V' \oplus V''$，其中 $\mathrm{im}\ \bar{\varphi} \cap V_i^+ \subseteq V''$。于是 $P^+(i) = P' \oplus P''$，其中 $\mathrm{im}\ \varphi \cap P^+(i) \subseteq P''$，从而 $M \simeq P' \oplus M'$。因此，M没有投射直和项当且仅当 $\Phi(M) \in \Gamma\text{-}\mathbf{Mod}^\flat$。

反之，设 $\mathbf{V} = \{V_i^\pm, \varphi_{ij}\}$为 Γ 的一个表示。令 $P^\pm(i) = P_i^{d_i^\pm}$，其中 $d_i^\pm = \dim_{F_i} V_i^\pm$，且 $P^\pm = \bigoplus_{i=1}^n P^\pm(i)$。则$\varphi_{ij}$可视为态射 $P^-(j)/\mathfrak{r}P^-(j) \to \mathfrak{r}P^+(i)$，从而 $\mathbf{V}$ 定义了一个态射 $\varphi\colon\ P^- \to P^+$，其像为 $\mathrm{im}\ \varphi \subseteq \mathfrak{r}P^+$。若 $\mathbf{V}$ 没有形如 $\mathbf{S}_j^-$ 的直和项，则 $\ker\ \varphi \subseteq \mathfrak{r}P^-$，从而我们得到 A-模 $M = \mathrm{coker}\,\varphi$ 的一个极小投射表现。显然，$\Phi(M) \simeq \mathbf{V}$，且 M 具有投射直和项当且仅当 $\mathbf{V}$ 具有同构于 $\mathbf{S}_i^+$ 的直和项。因此 Φ 在无投射直和项的 A-模的同构类与来自 $\Gamma\text{-}\mathbf{Mod}^\flat$的 Γ-模之间定义了一个双射。

设 $\psi\colon\ Q^- \to Q^+$ 是 N 和 $\Phi(N) = \{W_j^-, W_i^+, \psi_{ij}\}$ 的极小投射表示。若 $f\colon\ M \to N$，则它有一个提升 (α^+, α^-)，使之成为一个交换图（实线箭头）。

e11e11

$$\begin{array}{ccccccc} P^- & \xrightarrow{\varphi} & P^+ & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\alpha^-}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\xi} & \downarrow{\scriptstyle\alpha^+} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ Q^- & \xrightarrow{\psi} & Q^+ & \xrightarrow{\theta} & N & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{2.1}$$

于是 $\alpha^\pm$ 诱导态射 $\bar{\alpha}_i^\pm\colon\ V_i^\pm \to W_i^\pm$，它们构成 Γ-模的一个态射 $\bar{\alpha} = \Phi(f)\colon\ \Phi(M) \to \Phi(N)$。若 $f = 0$，则 α^+通过 $\psi\colon\ \alpha^+ = \psi\xi$分解，从而 $\alpha^+(\mathfrak{r}P^+) = 0$，故 $\psi\alpha^- = 0$ 且$\mathrm{im}\ \alpha^- \subseteq \ker\psi \subseteq \mathfrak{r}Q^-$。因此两者皆 $\bar{\alpha}^\pm = 0$。这表明 $\bar{\alpha}$ 不依赖于 α的提升，故可令 $\bar{\alpha} = \Phi(f)$。反之，每个态射 $\bar{\alpha} = \{\alpha_i^\pm\}\colon\ \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ 定义态射 $\alpha^\pm$，使图(2.1)的左方框交换，从而定义一个态射 $f\colon\ M \to N$，使得 $\Phi(f) = \bar{\alpha}$。于是我们得到一个充满函子$\Phi\colon\ A\text{-}\mathbf{Mod} \to \Gamma\text{-}\mathbf{Mod}$。

注意，若 $P^+ = U \oplus P'$，其中 U是单的，则im φ =ker $\pi \subseteq P'$，故 $M \simeq U \oplus P'/\ker\ \pi$。因此，若 M没有投射直和项，则soc $P^+ = \mathfrak{r}P^+$。设 $f\colon\ M \to N$，其中 M与 N均无投射直和项，且 $\bar{\alpha} = \Phi(f) = 0$。则特别地，$\alpha^+(\mathfrak{r}P^+) = 0$，从而im $\alpha^+ \subseteq$soc $Q^+ = \mathfrak{r}Q^+$。由于 θ将 $\mathfrak{r}Q^+$映到$\mathfrak{r}N$上，故im f =im $\theta\alpha^+ \subseteq \mathfrak{r}N$，从而 $f(\mathfrak{r}M) = 0$，且 f实际上是一个态射 $M/\mathfrak{r}M \to \mathfrak{r}N$。由于模 $M/\mathfrak{r}M$、 $\mathfrak{r}Q^+$与 $\mathfrak{r}N$ 是半单的，且 $\mathfrak{r}Q^+ \to \mathfrak{r}N$ 是满射，该态射通过 $\mathfrak{r}Q^+$分解，即 f 通过投射模Q^+分解。因此，函子 Φ诱导一个全忠实函子 A-Mod $\to\Gamma$-Mod$^\flat$，我们也将其记为 Φ。由于我们已经知道它是稠密的，故它是一个范畴等价。□

我们还可以考虑范畴 A-模 $= A$-模$/\mathscr{I}$，其中 $\mathscr{I}$是那些可经由内射模分解的态射所构成的理想，以及模 M的极小内射余表示，即态射φ： $E^- \to E^+$ 是内射模，且 $M \simeq \ker\varphi \supseteq \operatorname{soc} E^-$，im $\varphi \supseteq$soc E^-。令 E_1，E_2，.....，E_n为不可分解内射模同构类的代表（它们是简单模的内射包）。考虑二部种 Γ_*，使得 ver $\Gamma_*^\pm = \{i_\pm \mid 1 \le i \le n\}$，$F_{i_\pm} =End_A E_i/$ rad End$_A E_i$，且$H($ $i_+j_-) =$Hom$_A(E_j/\operatorname{soc} E_j,$ soc $E_i)$。假设 A是左阿廷的，即内射 A-模都是不可分解模的直和 [12,（定理 3.46]）。那么，按照定理 2.1 的证明，可以证明对偶结果。

t21a **定理 2.1a.** 如果环 A 是左阿廷的，则存在一个等价Φ_*： A-模 $\xrightarrow{\sim} \Gamma_*$-模$^\flat$。

3. Irreducible morphisms

s3 从现在起，我们假设 A 是一个阿廷代数，也就是说，它是交换阿廷环 K 上的有限代数。我们还假设 A 是连通 的（不能分解为环的直积），因此可以假设 K 是局部的。令 $\mathfrak{m} = \operatorname{rad} K$，且 $\Bbbk = K/\mathfrak{m}$。我们用 A-mod 表示有限（因而是阿廷的） A-模所成的范畴。所有态射集 Hom$_A(M, N)$（其中 $M, N \in A$-mod）都是有限的 K-模。特别地，所有自同态环 End$_A M$ 都是有限 K-代数。这意味着不可分解模的自同态环都是局部的，因此 A-mod 是一个局部范畴，其物种 $\Sigma(A$-mod) 因而有定义。它称为代数 A 的*Auslander-Reiten* 物种 AR(A)（如果该物种与某个箭图相对应，则称为 A 的*Auslander-Reiten* 箭图，

例如，当 $\Bbbk$ 是代数闭域时）。所有斜域 F_M 以及所有双模 $\mathrm{Irr}(N, M)$ 都是 $\Bbbk$ 上的有限维向量空间。

令 K^* 表示 K-模 $\Bbbk$的内射包。对于一个 K-模 M，令 $M^* = \mathrm{Hom}_K(M, K^*)$。若 M是左（右） A-模，M^*是右（左） A-模，则函子 $\mathrm{D}: M \mapsto M^*$在左有限生成 A-模范畴与右有限生成 A-模范畴之间定义了一个精确对偶。注意，它同构于函子 $\mathrm{Hom}_A(M, A^*)$，通常我们将它们视为同一个函子。我们还定义了一个连接左、右有限生成模的函子 $^\vee$，令 $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$。注意，若 A不是自内射的，它就不是等价，甚至不是正合的，尽管它在 A上的左、右有限投射模范畴之间建立了对偶。令 $P^- \xrightarrow{\varphi} P^+$为非投射模 M的一个极小投射表示。我们称 M的转置模为转置模，并将其记为 $\mathrm{Tr}\, M$；它是右模 $\mathrm{coker}\ \varphi^\vee$。

以下总结了我们后续将使用的 Auslander-Reiten理论，参见 [1, 2]。我们记作 $\mathscr{M} = A$-模。根据定义，左（右） $\mathscr{M}$-模是从 $\mathscr{M}$ 到阿贝尔群范畴的加性协变（反变）函子。

定理与定义 (TD)。 设 M 和 N 为不可分解有限 A-模。

(1) *$\mathscr{M}$-模 $\mathrm{Rad}_A(N, -)$ 和 $\mathrm{Rad}_A(-, M)$ 均为有限生成的。若态射 $\alpha: N \to X$ （相应地， $\beta: X \to M$）生成 $\mathscr{M}$-模 $\mathrm{Rad}_A(N, -)$ （相应地，$\mathrm{Rad}_A(-, M)$），且 X不存在非平凡分解 $X = X' \oplus X''$ 使得 $\mathrm{im}\,\alpha \subseteq X'$ （相应地，$\beta(X'') = 0$），则称该态射 α 为左几乎分裂且源为 N （相应地，称该态射 β 为右几乎分裂且靶为 M）。*[1] ***(2)*** *源（靶）给定的左（右）几乎分裂态射在同构意义下唯一。*

td3 (3) 对于态射 $\varphi: N \to M$，以下条件等价：(a) φ是不可约的。(b) 存在一个左几乎分裂态射 $\alpha: N \to M \oplus M'$，使得 $\varphi = \pi\alpha$，其中 π 是到 M上的投影。(c) 存在一个右几乎分裂态射 $\beta: N \oplus N' \to M$，使得 $\varphi = \beta\iota$，其中 ι 是 N的嵌入。

td4 (4) 如果 M 是投射的，那么嵌入 $\mathfrak{r}M \to M$ 是右几乎分裂的。

[1]事实上，按照 [2] 的说法，这就是极小左（或右）几乎分裂态射的定义，但我们从不考虑非极小的情形。

(5) 如果 N 是内射的，那么满射 $N \to N/\operatorname{soc} N$ 是左几乎分裂的。

td6 （6）对于一个正合列 $0 \to N \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} M \to 0$，以下条件等价：（a） α 是左几乎分裂的。（b） β 是右几乎分裂的。若这些条件成立，则称此序列为以 N 为源、以 M为靶的几乎分裂序列。（7）具有固定源或固定靶的几乎分裂序列在同构意义下是唯一的。（8）若 M 不是投射的，则存在一个以 M为靶、以 $\tau M = \mathrm{D}\operatorname{Tr} M$为源的几乎分裂序列。$\tau M$称为 M的 ***Auslander-Reiten*** 变换。（9）若 N 不是内射的，则存在一个以 N为源、以 $\tau^{-1}N = \operatorname{Tr}\mathrm{D}N$为靶的几乎分裂序列。$\tau^{-1}N$称为 M的逆 ***Auslander-Reiten*** 变换。

显然， τ 在不可分解的非投射模和非内射模的同构类之间诱导出一个一一对应，而 τ^{-1} 确实是其逆映射。

从现在起，我们假设 $\mathfrak{r}^2 = 0$。在这种情况下，我们可以描述源或靶为投射模的不可约态射。沿用上一节的记号，并用 U_i 表示简单模 $P_i/\mathfrak{r}P_i$。另设 $h_{ij} = \dim_{F_i} H_{ij}$。

l21 **引理 3.1.** 设 U 是一个非内射 A-模。以 U 为源且靶不可分解的不可约态射，恰为所有可能的嵌入 $U \to P_i$，其中 P_i 不是简单模。

证明。 根据 TD(4) 和 TD(3b)，它们全都是不可约的。设 $U \xrightarrow{\alpha} M$ 是不可约的，且 M 是不可分解的。我们可以假设 α 是子模 $U \subset M$ 的嵌入。那么 $U \subseteq \mathfrak{r}M$，否则 U 是 M 的一个直和项。存在一个满同态 $\pi\colon P \to M$，它诱导出一个满同态 $\mathfrak{r}P \to \mathfrak{r}M$。因此， $\mathfrak{r}P$ 包含一个同构于 U 的子模，并且 α 通过 π 分解。由于 α 是不可约的， π 必须分裂，也就是说 M 是投射的。□

p22 **命题 3.2**。 如果 P_i 不是单， M 是不可分解的，并且 $\alpha : P_i \to M$ 是不可约的，那么 M 不是投射的。

证明。 假设 M 是投射的。那么 α 不是满同态。由于$\mathfrak{r}M$是半单的，且是 M的唯一极大子模，因此，$\operatorname{im}\alpha \simeq U_i \subseteq \mathfrak{r}M$。于是， α 可分解为 $P_i \to U_i \to M$，故不是不可约的。□

对于每一对指标 i, j，选取 $\mathfrak{r}P_i$ 的一个子模，它是直和 $\bigoplus_{k=1}^{h_{ij}} T_{ijk}$，其中 $T_{ijk} \simeq U_j$ 对所有 k均成立。定义态射θ_{ijk}：$U_j \to P_i$，使得 $\operatorname{im} \theta_{ijk} = T_{ijk}$。注意，若 U_j 是内射的，则 $h_{ij} = 0$。

l23 **引理 3.3.** 设 U_j 是非内射的，$\theta_j \colon U_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} P_i^{h_{ij}}$ 具有~分量 θ_{ijk} 和 $U_j =$ 余核θ_j。那么

e21e21
$$0 \to U_j \xrightarrow{\theta_j} \bigoplus_{i=1}^{n} P_i^{h_{ij}} \xrightarrow{\eta_j} \tilde{U}_j \to 0 \tag{3.1}$$

是一个几乎分裂序列。特别地，$\tilde{U}_j = \tau^{-1}U_j$。

~我们用 $\eta_{ijk} \colon P_i \to U_j$ $(1 \le k \le h_{ij})$ 表示 η_j的分量。

证明。 θ_j 的所有分量 $\theta_{ijk} \colon U_j \to P_i$ 都是不可约的，并且每个不可约态射 $U_j \to P_i$ 都是θ_{ijk}的分量的线性组合，因此可经由 θ_j分解。由引理 3.1，所有源为 U_j 的不可约态射都是 θ_j的分量。因此，该结论由 TD(3) 和 TD(6) 得出。□

注意，θ_{ijk} 可视为一个映射 $P_j/\mathfrak{r}P_j \to P_i$；如果我们将它们~认同，它们就构成 H_{ij}的一组基。我们用 H_{ji} 表示以 $\{\eta_{ijk}\}$为基的空间。

c24 **推论 3.4**。每个源为（靶为） P_i 的不可约态射，都是某个固定 j上的右（分别为左）线性组合：右侧为 η_{ijk} （分别为 θ_{ijk}），其中 F_i。

当然，关于内射模也有对偶的结果。我们用 E_i 表示 U_i 的内射包，并且 $h'_{ji} =$ 维 $_{F_j}\operatorname{Hom}_A(E_i, U_j)$。于是 $E_i/\operatorname{soc} E_i \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} U_j^{h'_{ji}}$。

l31a **引理 3.1a**。设 U 是一个单非投射 A-模。靶为 U 且源不可分解的不可约态射，恰好是所有可能的满射 $E_j \to U$，其中 E_i 不是单模。

p32a **命题 3.2a.** 如果 E_i 不是单对象，N 是不可分解的，且 $\alpha \colon N \to E_i$ 是不可约的，那么 N 不是内射对象。

对于每一对指标 i, j，选取 E_i/U_i 的一个子模，它是一个直和 $\bigoplus_{k=1}^{h'_{ji}} S_{jik}$，其中 $S_{jik} \simeq U_j$ 对所有 k 均成立。定义态射τ_{jik}：$E_i \to U_j$，它们是复合映射 $E_i \to S_{jik} \xrightarrow{\sim} U_j$。注意，$h'_{ji} = 0$ 若 U_j 是投射的。

l23a **引理 3.3a.** 设 U_j 是非投射的，$\tau_j: \bigoplus_{i=1}^n E_i^{h'_{ji}} \to U_j$ 具有˜分量 τ_{jik}，且 $U'_j = \ker \tau_j$。那么

$$0 \to \tilde{U}'_j \xrightarrow{\sigma_j} \bigoplus_{i=1}^{n} E_i^{h_{ji}} \xrightarrow{\tau_j} U_j \to 0$$

˜是一个几乎分裂序列。特别地，$U'_j = \tau U_j$。

˜我们用 σ_{jik} 表示：$U'_j \to E_i$ σ_j 的各个分量。

c34a **推论 3.4a.** 每个以 E_i 为源（以 E_i 为靶）的不可约态射，都是 F_i 上某个固定 j 的 τ_{ijk} 的右线性组合（相应地，是 σ_{ijk} 的左线性组合）。

对于源和靶均非投射的不可约态射，我们有如下结果。

l25 **引理 3.5.** 设 M, N 是不可分解的非投射模。态射 $\varphi: N \to M$ 在 A-模 中不可约，当且仅当 $\Phi(\varphi)$ 在 Γ-模中不可约。因此，Φ 诱导一个同构 $\mathrm{Irr}(M, N) \simeq \mathrm{Irr}(\Phi(M)\ \Phi(N))$。

证明。设 $\Phi(\varphi)$ 为非不可约，即对某些非可逆态射 u_k，v_k 有 $\Phi(\varphi) = \sum_k u_k v_k$。由定理 2.1，我们可以假设 u_k 与 v_k 来自 Γ-$\mathsf{mod}^\flat$，因此 $u_k = \Phi(u'_k)$ $v_k = \Phi(v'_k)$，且 $\varphi = u'_k v'_k$ 也是非不可约的。另一方面，设 φ 为非不可约，$\varphi = \sum_k u_k v_k$ 对某些不可逆的 u_k 与 v_k。若所有 $u_k v_k$ 都经由射影模分解，则 $\Phi(\varphi) = 0$，因而不是不可约的。否则，它是这样一些 $\Phi(u_k)\Phi(v_k)$ 之和，其中 $u_k v_k$ 不经由射影模分解，因而为非不可约。□

对于物种 Γ^*，我们有一个类似的结果及类似的证明。

l25a **引理 3.5a.** 设 M、N 是不可分解非单射模。态射 $\varphi: N \to M$ 在 A-模 中不可约，当且仅当 $\Phi_*(\varphi)$ 在 Γ_*-模中不可约。因此，Φ 诱导出一个同构 $\mathrm{Irr}(M, N) \simeq \mathrm{Irr}(\Phi_*(M)\ \Phi_*(N))$。

4. Auslander-Reiten species

s4

现在，我们能够从 AR(Γ) 出发重建 Auslander-Reiten 物种 AR(A)。请注意，后者已在 [7] 中描述。

首先，我们考虑物种 Γ 或等价地，考虑由 (1.1) 给出的代数 $A[\Sigma]$ 上的投射模和内射模。对于每个双模 $H_{ij} = \mathsf{Hom}_A(P_j, \mathfrak{r}P_i)$，我们考虑其对偶双模

$$H'_{ji} = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H_{ij}, \Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{F_i}(H_{ij}, F_i) \simeq \mathrm{Hom}_{F_j}(H_{ij}, F_j)$$

（回想一下，我们的代数在 $\Bbbk$ 上是有限维的）。我们定义 Γ- 模 P_j^- 和 E_j^+ 如下：

$$P_j^-(i^-) = \begin{cases} F_j & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$P_j^-(i^+) = H_{ij} \text{ if } j \neq i.$$
$$E_j^+(i^+) = \begin{cases} F_j & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$E_j^+(i^-) = H'_{ij} \text{ if } j \neq i.$$

容易看出，$E_j^+ \simeq \Phi(U_j)$ 和 $P_i^- \simeq \Phi(\tilde{U}_i)$。

p41 **命题 4.1.** P_j^- 是一个不可分解投射 Γ-模，而每个不可分解投射模都同构于 S_j^+ 或 P_j^-，其中 j。

p41a **命题 4.1a.** E_j^+ 是一个不可分解内射 Γ-模，而每个不可分解内射模都同构于 S_j^- 或E_j^+，其中 j。

命题 4.1 和 4.1a 的证明可由定义以及代数$\Bbbk[\Gamma]$的描述 (1.1) 立即得出。

t42 **定理 4.2.** *Auslander-Reiten* 物种$\mathrm{AR}(A)$可由 *Auslander-Reiten* 物种 $\mathrm{AR}(\Gamma)$ 通过以下步骤得到：

(1) 删除简单对象 $\mathbf{S}_i^+$ 和 $\mathbf{S}_i^-$，并将每个非简单对象 $\mathbf{V}$ 替换为 $\Phi^{-1}(\mathbf{V})$。(2) 添加对象 P_i 以及相应的斜域 $F_{P_i} = F_i$。(3) 定义双模

$$B(M, P_i) = \begin{cases} H_{ij} & \textit{if } M = U_j, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$
$$B(P_i, M) = \begin{cases} \tilde{H}_{ji} & \textit{if } M = \tilde{U}_j, \\ 0 & \textit{otherwise.`} \end{cases}$$

证明。它直接由引理 3.3 和 3.5 得出。 □

例子。1. 设 $A = \Bbbk[x, y]/(x, y)^2$。那么 Γ 是 Kronecker 箭图 $1^- \rightrightarrows 1^+$。AR(Γ) 由预投射分支

$$S_1^+ \rightrightarrows P_1^- \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows \cdots,$$

预内射分支

$$\cdots \rightrightarrows Y_1 \rightrightarrows E_1^+ \rightrightarrows S_1^-$$

以及由齐次管构成的正则分支。根据定理4.2，AR(A)由相同的正则分支，以及将预内射分支和预投射分支与投射模 A粘合而成的分支构成：

$$\cdots \rightrightarrows M \rightrightarrows U \rightrightarrows A \rightrightarrows \tilde{U} \rightrightarrows N \rightrightarrows \cdots$$

注意，根据引理 3.1a，$M \simeq A^*$，且 $N \simeq \tau^{-1}A$，因为 $\tilde{U} = \tau^{-1}U$。

2. 现在设 A 由以下箭图给出

$$1 \overset{a_2}{\underset{b}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}}} 2$$

其关系为 $a_i b = b a_i = 0$ ($i = 1,\ 2$)。那么 Γ 由两个分支构成

$$1^- \longrightarrow 2^+ \quad \text{and} \quad 2^- \rightrightarrows 1^+ .$$

第二个分支是 Kronecker 箭图，因此相应的 Auslander-Reiten 分支与上文相同，只需将其中的 1^- 替换为2^-。第一个分支的 Auslander-Reiten 箭图为

$$S_2^+ \longrightarrow P_1^- \longrightarrow S_1^- \quad (P_1^- = E_2^+).$$

因此，AR(A)由正则分支组成，如 Kronecker 箭图的正则分支；此外还有一个分支，它是将 AR(Γ)中剩余的三个分支与投射模 P_1 和 P_2粘合而成的：

$$\cdots \rightrightarrows E_2 \rightrightarrows U_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow U_2 \rightrightarrows P_1 \rightrightarrows \tilde{U}_2 \rightrightarrows \tau^{-1}P_1 \rightrightarrows \cdots$$

注意，$P_2 \simeq E_1$ 和 $U_2 \simeq U_1$。

当然，利用箭图 Γ_*、定理 2.1a 以及引理 3.3a 和 3.5a，也可以得到类似的结果。其表述留给读者。

References

[1] Auslander, M., and Reiten, I. Artin 代数表示论。III. 几乎分裂序列。《代数通讯》*3* (1975), 239–294.[2] Auslander, M., Reiten, I., and Smalø, S. O.*Artin* 代数表示论，《剑桥高等数学研究》第36卷。剑桥：剑桥大学出版社，1995年。[3] Bass, H. 有限维数与半初等环的同调推广。《美国数学会汇刊》*95* (1960), 466–488.[4] Bass, H.代数 K-理论。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1968年。

[5] Bautista, R., and Liu, S. 根基平方为零代数的有界导出范畴。《代数杂志》482 (2017), 303–345。[6] Bekkert, V., and Drozd, Y. 根基平方为零代数的导出范畴。载于《代数、表示与应用》，《当代数学》第483卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009年，第55–62页。[7] Dlab, V. 赋值图的表示，《高等数学研讨班》丛书第73卷。蒙特利尔大学出版社，蒙特利尔，魁北克省，1980年。[8] Dlab, V., and Ringel, C. M. 图与代数的不可分解表示。《美国数学会回忆录》173 (1976), 1–57。[9] Gabriel, P. 不可分解表示。I.《数学手稿》6 (1972), 71–103。[10] Gabriel, P.不可分解表示。II.载于《数学讨论会》第XI卷。学术出版社，伦敦—纽约，1973年，第81–104页。[11] Krugljak, S. A. 根基的平方等于零的代数的表示。《列宁格勒数学研究所（LOMI）科学研讨会记录》28 (1972), 60–68。[12] Lambek, J. 《环与模讲义》。第2版。切尔西出版公司，纽约州纽约市，1976年。[13] Yang, D. 根基平方为零代数的导出范畴。《代数通讯》46, 2 (2018), 727–739。[14] Yoshii, T. 关于有界表示型代数的注记。《日本学士院院刊》32 (1956), 441–445。[15] Yoshii, T. 论有界表示型代数。《大阪数学杂志》8 (1956), 51–105。

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereschernkivska str. 3, Kyiv 01026, Ukraine电子邮箱地址:
y.a.drozd@gmail.com, drozd@imath.kiev.ua