arXiv:2602.14176v1 [math.OA] 15 Feb 2026

共轭余可 amen 性

MEHRDAD KALANTAR 和 SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI

Abstract. 本文研究群包含的一种类似于余 amenability 的自然解析性质：在 $\ell^\infty(G)$内部考察由特征函数 $\{\mathbf{1}_{gHg^{-1}}\}_{g\in G}$ 生成的冯·诺伊曼代数上，群 G 的共轭作用存在一个非紧支撑不变态。我们证明了这一现象的一些有趣情形和例子。我们还讨论了一个与适当近端性相关的考量，这正是这一性质的动机。

1. Introduction

如果群在一个集合上的作用承认不变均值，则称其为可平均 。研究群作用的可平均性，是现代解析群论领域的重要方向。可数群 G自然作用于任意子群 $H < G$对应的陪集空间 G/H 。这一作用的可平均性等价于子群 $H < G$的余 *amenability* 这一概念。该概念最早由 Eymard 在 [Eym72] 中引入。事实证明，研究这一概念远比研究可平均性本身微妙得多，还会出现颇令人费解的例子 [MP03]。

我们在此考察包含关系的一种自然性质 $H < G$，它类似于余 amenability，同时考虑子群共轭像的结构。我们称这一性质为共轭余可 *amen* 性。为定义它，我们首先必须回顾：由 $\ell^\infty(G)$的一个子集生成的冯·诺伊曼代数，是指该子集在 $\ell^\infty(G)$内部生成的伴随封闭子代数（不一定含有单位元）在强算子拓扑下的闭包。还要回顾，含幺 C^*-代数上的态是一个正线性泛函，它在单位算子上的取值为 1。假设 $H < G$，我们将冯·诺伊曼代数 $\mathcal{A}_H(G)$定义为由投影族 $\mathbf{1}_{gHg^{-1}}$ 生成的冯·诺伊曼代数，其中$g \in G$。注意， G 通过共轭自然地作用于 $\mathcal{A}_H(G)$。我们用 $c_0(G)$表示 $\ell^\infty(G)$中由满足以下条件的函数 $f \in \ell^\infty(G)$构成的理想：对每个 $\epsilon > 0$ ，都存在一个有限子集 $F \subset G$ ，使得对每个 $g \notin F$，均有 $|f(g)| < \epsilon$。

现在我们给出如下定义：

定义 1.1. 设 $H < G$ 是可数群的一个包含关系。若存在一个定义在 $\mathcal{A}_H(G)$ 上的 G-共轭不变态 φ，使得对于所有 $f \in c_0(G) \cap \mathcal{A}_H(G)$，都有 $\varphi(f) = 0$，则称 $H < G$ 为共轭共顺从。

要求态在 $c_0(G)$ 上取零，只是出于惯例；从算子代数的角度来看，人们通常更倾向于采用这一惯例。当然，若不包含这一条件，就会得到一个必然不同的概念。显然，只要 $H < G$ 是正规子群，空间 $\mathcal{A}_H(G)$ 就是单位元处的原子。因此，这样的 $H < G$ 共轭共顺从。事实上，更一般地说，只要 H 在 G 中的正规化子是余 amenable， $H < G$ 就是共轭共顺从的（见例 2.10）。然而，反向结论并不成立。我们在第 2.1 节给出了若干更有趣的非共轭共顺从例子。

我们定义并研究这一概念的动机，是要解决这样一个问题：判断非柱面双曲群是否具有适当的近端性（见 [BIP21、DKEP23]）。一个典型的检验案例是融合自由积 $G = G_1 *_H G_2$，其中 H 是 G 的弱反正规子群。对于几乎自正规性，这一点已在 [DKE24a] 中得到证明（另见 [DKE24b]）。为了将其中的提升技巧（见 [DKE24a] 的引理 3.3）推广到更一般的弱自正规子群情形，共轭共顺从这一概念自然地出现了。有趣的是，我们能够处理论证中涉及证明这些例子不具共轭共顺从性的部分（见例 2.15）。然而，我们未能构造出一个到无穷远处小紧化的二次对偶的自然映射。我们的方法将在第 3 节阐述。

致谢。 本研究是在第二作者于2021年访问休斯顿大学期间完成的。他感谢第一作者、休斯顿大学及其工作人员的热情接待。我们感谢 D. Osin 和 B. Sun 就例2.12 进行的有益交流。我们也感谢 C. Ding 和 F. Fournier-Facio 的有益交流。
第一作者获得美国国家科学基金会 DMS-2155162 项目资助；第二作者获得美国国家科学基金会 DMS-2350049 项目资助。为实现开放获取，作者已将 CC-BY 许可应用于因本次投稿而产生的任何作者接受稿。

2. 共轭余可 amenable 性

设 G 是一个可数群。对于 $S \subset \ell^\infty(G)$，用 $W^*(S) \subset \ell^\infty(G)$ 表示由 S 生成的 $*$-代数在强算子拓扑下的闭包。注意， $W^*(S)$ 的单位元不一定与 $\ell^\infty(G)$ 的单位元相同。
如果 $H < G$ 是一个子群，则用 $\mathcal{W}(H)$表示由 H的共轭像的任意交构成的子群族。对每个元素 $X \in \mathcal{W}(H)$， $\tilde{}$定义$X = X \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{W}(H)\, Y \subsetneq X} Y$。

引理 2.1. 族 $\mathcal{X} := \{X : X \in \mathcal{W}(H)\}$ 两两不交，且 $X = \bigcup_{Y\in\mathcal{W}(H)\ Y\subseteq X} Y$ 对每个 $X \in \mathcal{W}(H)$。

证明。假设 $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ 对某个 X_1，$X_2 \in \mathcal{W}(H)$ 成立，并令 $g \in X_1 \cap X_2$。于是 $g \in X_1 \cap X_2$，因此可得 $X_1 \cap X_2 = X_1$ 和 $X_1 \cap X_2 = X_2$。故 $X_1 = X_2$。
为证明第二个断言，令 $g \in X$，并令 $K := \bigcap_{Y\in\mathcal{W}(H)\ g\in Y\subseteq X} Y$。则 $K \in \mathcal{W}(H)$，且对每个满足 $Y \subsetneq K$ 的 $Y \in \mathcal{W}(H)$，都有 $g \notin Y$. 因此 $g \in K$。□

引理 2.2。对于每个 $g \in G$ 和 $X \in \mathcal{W}(H)$，均有 $X^g = X^g$。特别地，在 中，G 通过共轭作用于集合 $\mathcal{X}$。

证明。这直接由以下事实得出：族 $\mathcal{W}(H)$ 在 G 中元素的共轭作用下保持不变，并且对于每个 X，$Y \in \mathcal{W}(H)$ 和 $g \in G$，都有 $Y \subsetneq X \iff Y^g \subsetneq X^g$。□

注意，$\mathcal{A}_H(G) = W^*(\{\mathbf{1}_{\widetilde{X}}\}_{X\in\mathcal{W}(H)}) = \ell^\infty(\mathcal{X})$，且 $\mathcal{X}$ 可分解为可数个两两不交的传递 G-空间的并。因此，存在 $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$、 和子群 $\{L_n \leq G : \ n \in \mathbb{A}\}$，使得 $\mathcal{X} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{A}} G/L_n$。
特别地，若对于某个 $n \in \mathbb{A}$，L_n 在 G 中余 amenable，那么 $H < G$ 在 G 中共轭共顺从。

我们将 $G_{\widetilde{X}} = \{g \in G : \ gX = X\}$ 记为 $X \in \mathcal{X}$ 的稳定子子群，并将 $\mathcal{N}_G(X)$ 记为子群 $X \leq G$ 在 G 中的正规化子。

引理 2.3. 对于每个满足 $X \neq \emptyset$ 的 $X \in \mathcal{W}(H)$，都有 $G_{\widetilde{X}} = \mathcal{N}_G(X)$。
特别地，若正规化子 $\mathcal{N}_G(H)$ 在 G 中是余 *amenable* 的，则 H 在 G 中是共轭共顺从的。

证明。设 $X \in \mathcal{W}(H)$ 且 $g \in \mathcal{N}_G(X)$。于是 $g\widetilde{X}g^{-1} \subset X$。若对于某个满足 $Y \subsetneq X$ 的 $Y \in \mathcal{W}(H)$ 有 $g\widetilde{X}g^{-1} \cap Y \neq \emptyset$，则 $\widetilde{X} \cap g^{-1}Yg \neq \emptyset$，这意味着 $\widetilde{X} \subseteq g^{-1}Yg$，从而 $X = g\widetilde{X}g^{-1} \subseteq Y \subsetneq X$，这就产生了矛盾。因此，$g\widetilde{X}g^{-1} = \widetilde{X}$，故 $g \in G_{\widetilde{X}}$。
反之，假设 $g \in G_{\widetilde{X}}$。那么 $\widetilde{X} = g\widetilde{X}g^{-1} \subset X \cap gXg^{-1}$，这意味着 $X \subset gXg^{-1}$。类似地，$X \subset g^{-1}Xg$，因此 $X = gXg^{-1}$，从而 $g \in \mathcal{N}_G(X)$。□

我们需要下面这个显然的辅助引理。若子集 $I \subset K < G$ 满足以下条件，则称其为自正规化的：对所有 $x \in I$，$g \notin K$，都有 $gxg^{-1} \notin K$。

引理 2.4。$X \in \mathcal{W}(H)$ 包含一个无限的自正规化子集 $I \subset X$ 当且仅当 $|X| = \infty$。

回顾一下，群 G 在集合 S 上的作用 $G \curvearrowright S$ 称为可平均的，如果存在一个 G-不变态作用于 $\ell^\infty(S)$。众所周知，这等价于存在一个网 $(\zeta_j) \in \ell^2(S)$，使得对每个 $g \in G$ 都有 $\lim_j \|g\zeta_j - \zeta_j\|_2 = 0$。

命题 2.5. 设 G 是一个群，$\{H_i : i \in I\}$ 是 G 的一个子群族。那么以下条件等价：

(1) 作用 $G \curvearrowright \sqcup_{i\in I} G/H_i$ 是可平均的。*(2)* 对每个有限集 $F \subset G$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $i \in I$ 和 $\xi_i \in \ell^2(G/H_i)$，使得对于每个 $g \in F$，都有 $\|g\xi_i - \xi_i\|_2 \leq \varepsilon\|\xi_i\|$。

证明。假设 (2) 不成立。那么存在一个有限集 $F \subset G$ 和 $\varepsilon > 0$，使得对于每个 $i \in I$ 和每个 $\xi_i \in \ell^2(G/H_i)$，都有 $\|g\xi_i - \xi_i\|_2 > \varepsilon\|\xi_i\|$，其中某个 $g \in F$ 满足这一条件。给定 $\eta = (\eta_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I}\ell^2(G/H_i) = \ell^2(\sqcup_{i\in I} G/H_i)$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{g\in F}\|g\eta - \eta\|_2^2 &= \sum_{g\in F}\sum_{i\in I}\|g\eta_i - \eta_i\|_2^2 \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{g\in F}\|g\eta_i - \eta_i\|_2^2 \\ &> \varepsilon^2 \sum_{i\in I}\|\eta_i\|^2 = \varepsilon^2\|\eta\|^2,\end{aligned}$$

这意味着对某个 $g \in F$ 有 $\|g\eta - \eta\|_2 > \varepsilon/|F|$。这意味着作用 $G \curvearrowright \sqcup_{i\in I} G/H_i$ 不是可平均的。

反之，假设(2)成立。于是，考虑到对每个 $i_0 \in I$ 的典范嵌入 $\ell^2(G/H_{i_0}) \subset \oplus_{i\in I}\ell^2(G/H_i)$，我们得出：对每个有限集 $F \subset G$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\xi_{F,\varepsilon} \in \oplus_{i\in I}\ell^2(G/H_i) = \ell^2(\sqcup_{i\in I} G/H_i)$，使得对每个 $g \in F$ 有 $\|g\xi_{F,\varepsilon} - \xi_{F,\varepsilon}\|_2 \leq \varepsilon\|\xi_{F,\varepsilon}\|$。显然，网 $(\xi_{F,\varepsilon}) \in \ell^2(\sqcup_{i\in I} G/H_i)$ 对每个 $g \in F$ 满足 $\|g\xi_{F,\varepsilon} - \xi_{F,\varepsilon}\|_2 \to 0$。由此可知，作用 $G \curvearrowright \sqcup_{i\in I} G/H_i$ 是可平均的。□

引理 2.6. 设 G 是一个群，且 $H \leq G$。若 G 有一个非 *amenable* 子群 $K \leq G$，使得对所有 $g \in G$ 都有 $K \cap gHg^{-1} = \{e\}$，则 H 在 G 中不是余 *amenable*。

证明. 由于 K 是非可平均的，存在一个有限集 $F \subset K$ 以及 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $\xi \in \ell^2$（K）都有 $\max_{t\in F}\|t\xi - \xi\|_2 \geq \varepsilon\|\xi\|$。

设 $S \subset G$ 是双陪集空间 $K/G\backslash H$ 的一组完备代表元（即 $G = \sqcup_{s\in S} KsH$）。注意，对于 k，$k' \in K$ 和 s，$s' \in S$，若 $ksH = k's'H$，则 $s = s'$ 且 $s^{-1}k^{-1}k's \in H$，这意味着 $k = k'$，因为 $K \cap sHs^{-1} = \{e\}$。

给定 $\eta \in \ell^2(G/H)$，对每个 $s \in S$，我们定义 $\eta_s \in \ell^2(K)$：$\eta_s(k) := \eta(ks)$，对每个 $k \in K$ 均如此。于是

$$\max_{t\in F} \|t\eta - \eta\|_2^2 = \max_{t\in F} \sum_{s\in S} \|t\eta_s - \eta_s\|_2^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{s\in S} \|\eta_s\|_2^2 = \varepsilon^2 \|\eta\|_2^2.$$

这表明 H 在 G中不是余 amenable。 □

值得注意的是，在上述证明中，我们只对所有 $s \in S$使用了 $K \cap sHs^{-1} = \{e\}$。同样的证明可得以下结论：

引理 2.7。设 G 是一个群，且 $\{H_i : i \in I\}$ 是G的子群族。若 G 有一个非 *amenable* 子群 $K \leq G$，使得对所有 $g \in G$、$i \in I$都有 $K \cap gH_ig^{-1} = \{e\}$，则作用 $G \curvearrowright \sqcup_{i\in I} G/H_i$ 不是可平均的。

现在我们得到一个有用的条件，可用于验证共轭共顺从性的否定：

命题 2.8。设 $H < G$，并假设存在一个非 *amenable* 子群 $K < G$，使得对每个 $g \in G$和 $1 \neq k \in K$都有 $gkg^{-1}H(gkg^{-1})^{-1} \cap H = \{e\}$。那么 H 在 G中不是共轭共顺从的。

证明。对每个 $X \in \mathcal{W}(H)$，根据假设以及 $X < g_0Hg_0^{-1}$对某个 $g_0 \in G$成立这一事实，我们有 $gkg^{-1} \notin \mathcal{N}_G(X)$。因此，由引理 2.7 可得所需结论。□

2.1. **一些（非）例子**。本节中，我们给出几个（非）共轭共顺从子群的例子。

例 2.9。如果 $H < G$ 是一个无限正规子群，那么总有 $H < G$ 是共轭共顺从的，因为 $\mathcal{A}_H(G)$ 只是单位元处的原子测度。

例 2.10。如引理 2.3 所述，如果 $H < G$ 满足其正规化子 $\mathcal{N}_G(H)$ 在 G中余 amenable，那么 H 在 G中共轭共顺从。然而，反过来并不成立。事实上，设 $H < G$ 满足其正规化子 $\mathcal{N}_G(H)$ 在 G 中并非余 amenable，且 $N := \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ 是无限的。

~ ~
因此，H 在 G中是共轭共顺从的，因为在此情况下，$N = N \in \mathcal{X}$ 是一个G不动点，因此 δ_N 是 $\mathcal{A}_H(G)$上的一个 G不变态，并且由于 N 是无限的，它在$c_0(G)$上为零。此类 $H < G$ 的一个例子是 $G = F_2 \times F_2$ 和$H = \mathbb{Z} \times F_2$。

例2.11。设 $H < G$ 在 G中几乎自正规。在这种情况下，假设 $H < G$ 是共轭共顺从的，那么商空间 $\mathcal{A}_H(G)/c_0(G)$上存在一个 G 不变态。几乎反正规性意味着，对于任意 $g \in G$、$g \notin H$，$gHg^{-1} \cap H$ 都是有限的。因此，G 在$\mathcal{A}_H(G)/c_0(G)$上的共轭作用，与陪集空间 $\ell^\infty(G/H)$上的 G左作用等变地同一。由此可知 $H < G$是余 amenable。注意，根据 [TD20]的引理 3.3，这不可能。

例2.12。 假设 $H < G$ 在 G中具有有限高度。根据定义，存在一个 $N > 0$ ，使得对于所有互不相同的 N-元组$g_i \in G/H$，$\cap_{i=1}^{N} H^{g_i}$ 都是有限的。定义映射 π_i ：$\ell^\infty(G/H) \to \mathcal{A}_H(G)/c_0(G)$，其中 $i = 1, \cdots, N-1$ 按如下方式定义： $\pi_{N-1}(\delta_g) = \sum_{\{g_1,\dots g_{N-1} | g_i \neq g\}} \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{1}_{H^{g_i}}$，且 $\pi_j(\delta_g) = \sum_{g_1, \cdots, g_j | g_i \neq g} \prod_{i=1}^{j} \left(\mathbf{1}_{H^{g_i}} - \mathbf{1}_{H^{g_i}}(\bigvee_{k=j+1}^{N-1} \pi_k(1)) \right)$。然后，映射可扩展如下：$\pi_j(\sum_{g \in G/H} \lambda_g \delta_g) = \bigvee_{g \in G/H} \lambda_g \pi_j(\delta_g)$。

我们声称，如上所定义的 π_i 均为 G-等变压缩单射 $*$-同态。首先注意到这些投影

$$\prod_{i=1}^{j} \left(\mathbf{1}_{H^{g_i}} - \mathbf{1}_{H^{g_i}}(\bigvee_{k=j+1}^{N-1} \pi_k(1)) \right)$$

根据构造，对于任意 j，上面的投影两两正交。此外，根据构造，$\bigvee_{j=1}^{N-1} \pi_j(1) = 1$ 是 $\mathcal{A}_H(G)/c_0(G)$ 的单位元。因此我们可以看出，只有当 $H < G$ 是余 amenable 时， $H < G$ 才是共轭共顺从。

在此背景下，(T) 性质群 G 的重要性显而易见。由谱隙可知，子群 $H < G$ 共轭共顺从，当且仅当对于某个满足 $X \neq \emptyset$ 的 $X \in \mathcal{W}$（H），其正规化子 $\mathcal{N}_G$（X）在 G 中具有有限指数。这一事实提供了大量非共轭余 amenable 子群 $H < G$ 的例子。

例2.13. 设 G 是一个 (T) 性质群，并设 $H < G$。
(i) 假设 G 的 amenable 根平凡，且 H 可平均。那么 H 在 G 中不是共轭共顺从的。事实上， G 的所有有限指数子群都具有平凡 amenable 根，因此对于每个非平凡的 $X \in \mathcal{W}$（H），正规化子 $\mathcal{N}_G$（X）在 G 中的指数都是无限的。

(ii) 假设 H 是自正规化的，且在 G 中具有无限指数，那么 H 在 G 中不是共轭共顺从的。此类 $H < G$ 的例子包括 $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$，其中 $n \geq 3$，以及 H $\mathrm{PSL}_{n-1}(\mathbb{Z})$ 的标准副本。

例 2.14. 设 G 是一个非顺从群，并具有如下性质： G 的每个非平凡可平均子群的正规化子也是可平均的。那么， G 中每个非平凡可平均子群 $H < G$ 都不是共轭余可平均的。

满足上一个例子中条件的群 G ，包括所有无挠双曲群。关于下面这个推广上述情形的例子，第二作者感谢 D. Osin 多年前与其进行的有益交流，也感谢 B. Sun 友好地解释了下面的论证。

例 2.15. 考虑 $H < G$ ，其中 H 是无挠群 G 的任意边稳定子。该群在一棵树上以非初等且边传递的方式作用，并且按照 [BF02] 的意义，该树容许一个斜驶 WPD元。我们声称

$H < G$ 不是共轭共顺从的。为此，只需运用命题 2.8 证明：存在一个自由群 $F_2 \leq G$，使得对于所有边 $e \in E(T)$ 以及所有 $1 \neq f \in F_2$，都有 $Stab(f \cdot e) \cap Stab(e) = 1$。

现在假设 a 是双曲型 WPD 元素，并令 $a^{\pm\infty}$ 表示 a 在 ∂T 上的不动点。由于我们假设该作用是非初等的，因此存在一个元素 $g \in G$ 不固定 $\{a^{\pm\infty}\}$。现在固定 $c = gag^{-1}$，并选取 x、$y \in V(T)$，使得对于每个 $z \in T$，$d(x, ax) \leq d(z, az)$，且 $d(y, cy) \leq d(z, cz)$。不失一般性，我们可以假设存在某个 $k \in G$，使得 $ky = x$。令 $b = k^{-1}ck$，便得到两个双曲型 WPD 元素 a、b，它们在 ∂T 中的不动点集合互不相交。通过一个标准论证，可以取足够大的幂 m、n，使得 a^m、b^n 生成一个自由群 F_2，且同时满足 WPD 条件，即 $Stab(x, a^{\pm m}x) = Stab(x, b^{\pm n}x) = 1$。令 π 为将 T 投影到子树上的结果，该子树由轨道 $F_2.x$ 中各点之间的所有测地线组成。现在任取一条边 $e \in E(T)$，并取 $z \in e$；通过平移，我们可以假设 $\pi(z) = x$。假设 $f \in G_2$，且 $t \in Stab(e) \cap Stab(fe)$。由于该作用由等距变换给出，整条测地线 $[z, fz]$ 都必须被固定。特别地，我们有 $[\pi(z)\ \pi(fz)] = [x, fx]$ 被固定。但这包含一段形如 $[x, a^{\pm m}x]$ 或 $[x, b^{\pm n}x]$ 的线段，这与 WPD 条件矛盾。

通过 Bass-Serre 理论得到的上述一类例子中，一个非常自然的例子是这样的群：$G = G_1 *_H G_2$ 其中 H 是弱自正规的，也就是说，存在一个元素 $g \in G$，使得 $gHg^{-1} \cap H$ 是平凡的。（关于上述结果以及此类群的更多信息，参见[MO15]。）值得注意的是，按照 [BIP21]的定义，此类群是否为真邻近群仍是一个悬而未决的问题。下一节将概述一种解决这一问题的方法。

3. A comment on proper proximality

设 G 是一个可数群。设 $K_i < G$、$i = 1$、.....、n 是 G的一个有限子群族。用 $c_0(G, \{K_i\}_{i=1}^n)$表示由满足以下条件的函数 $f \in \ell^\infty(G)$构成的集合：对所有 $\epsilon > 0$，都存在一个有限集 $F \subset G$，使得对所有 $g \notin \bigcup_{i=1}^n FK_iF$均有 $|f(g)| < \epsilon$。容易验证，这始终是 $\ell^\infty(G)$中的一个闭双边理想。令 $\mathbb{S}_{\{K_i\}_{i=1}^n}(G) = (\ell^\infty(G)/c_0(G, \{K_i\}_{i=1}^n))^{R_G}$ 表示 G 在相对 Stone-Cech 边界 $\ell^\infty(G)/c_0(G, \{K_i\}_{i=1}^n)$上的右作用下的不动点。回顾相对小边界 $\widetilde{\mathbb{S}}_{\{K_i\}_{i=1}^n}(G) = ((\ell^\infty(G)/c_0(G, \{K_i\}_{i=1}^n))^{**})^{R_G}$的二次对偶版本。按照 [BIP21]的定义，如果在 $\mathbb{S}_{\{K_i\}_{i=1}^n}(G)$上不存在左 G-不变态，那么 G 相对于一个子群族 $\{K_i\}_{i=1}^n$是真邻近的。根据 [BIP21]的定理 4.3(iv)，等价地，G 相对于一个子群族$\sim \{K_i\}_{i=1}^n$ 是真邻近的，当且仅当在 $\mathbb{S}_{\{K_i\}_{i=1}^n}(G)$上不存在左 G-不变态。

给定子群 $H < G$，记 ι 为典范的压缩单射
从 $\ell^\infty(G)/c_0(G)$ 到巴拿赫空间的二重对偶的 $*$-代数同态

$(\ell^\infty(G)/c_0(G))^{**}$。对于任意子集 $X \subset G$，定义 $p_X = \sup_{g\in G} \iota(\mathbf{1}_{Xg})$，也称为 X 的右平均投影。定义 $P_X = \sup_{g,\ h\in G} \iota(\mathbf{1}_{gXh})$，也称为 X的左右平均投影。以下关键引理受到 DKE24a 的工作启发。

引理 3.1。对于任意两个子群 $X_1 < G$ 和 $X_2 < G$，有$p_{X_1}p_{X_2} = p_{X_1\cap X_2}$。

证明。根据定义显然有 $p_{X_1\cap X_2} \le p_{X_1}p_{X_2}$。现在，对于任意$g_1$，$g_2 \in G$，我们看到，如果 $t \in X_1g_1 \cap X_2g_2$，那么 $X_1g_1 \cap X_2g_2 = (X_1 \cap X_2)t$。因此，给定一个有限集 $F \subset G$，存在一个有限集 $F' \subset G$，使得$H_1F \cap H_2F = \bigcup_{g_1,\ g_2\in F} X_1g_1 \bigcup X_2g_2 = \bigcup_{t\in F'}(X_1 \cap X_2)t$，从而$p_{X_1}p_{X_2} = \bigvee_{F\subset G} \iota(\mathbf{1}_{X_1F\cap X_2F}) \le p_{X_1\cap X_2}$。□

令 $\mathcal{A}_H^1(G)$ 表示由 $\{\mathbf{1}_{gHg^{-1}}\}_{g\in G} \subset \ell^\infty(G)$ 生成的 C^*-代数。

引理 3.2. 对于任意一对不同的元素 $X, Y \in \mathcal{W}(H)$，有$p_{\widetilde{X}}p_{\widetilde{Y}} = 0$。因此，映射 $\mathbf{1}_{gHg^{-1}} \mapsto p_{gHg^{-1}}$可（唯一地）扩张为一个单射 $*$-同态 $\pi\colon \mathcal{A}_H^1(G)/c_0(G) \to P_H\widetilde{\mathbb{S}}(G)P_H$。

证明。设 $X, Y \in \mathcal{W}(H)$，且 $X \ne Y$。那么，对于任意有限集 $F \subset G$，我们有 $\mathbf{1}_{\widetilde{X}F} \le \mathbf{1}_{(X\setminus X\cap Y)F} = \mathbf{1}_{XF} - \mathbf{1}_{(X\cap Y)F}$。因此，我们得到 $p_{\widetilde{X}} \le p_X - p_{X\cap Y}$。然后由引理 3.1 可得 $p_{\widetilde{X}}p_{\widetilde{Y}} \le (p_X - p_Xp_Y)(p_Y) = 0$，证毕。
由此可知，将映射 $\mathbf{1}_{gHg^{-1}} \mapsto p_{gHg^{-1}}$ 线性扩张到 $\{\mathbf{1}_{gHg^{-1}} : g \in G\}$ 的线性张成上所得的映射是良定义的、等距的，并且是 $*$-同态，因此可延拓为一个 C^*-嵌入 $\pi\colon \mathcal{A}_H^1(G)/c_0(G) \to P_H\widetilde{\mathbb{S}}(G)P_H$。显然，$\pi$ 是 G-等变的。□

回忆冯·诺伊曼代数 $\mathcal{A}_H(G) = W^*(\{\mathbf{1}_{gHg^{-1}}\}_{g\in G})$。为记号简便，记 $\mathbf{1}$ 为 $\mathcal{A}_H(G)$ 的单位元。构造映射 $\pi\colon \mathcal{A}_H(G) \to ((\ell^\infty(G)/c_0(G))^{**})^{R_G}$，使得 $\pi(\mathbf{1}) = P_H$ 的一种自然方法如下：

(1) $\pi(\mathbf{1}_{gHg^{-1}}) = p_g$；(2) 对于 $X \in \mathcal{W}(H)$ 和 $X = \cap_{i\in I_X} g_iHg_i^{-1}$，定义 $\pi(\mathbf{1}_X) = \wedge_{i\in I} p_{g_i}$。(3) 定义 $\pi(\mathbf{1}_{\bigcup_{Y\in\mathcal{W}(H)\ Y\subsetneq X} Y}) = \bigvee_{Y\in\mathcal{W}(H)\ Y\subsetneq X} p_Y$。~(4) 对于 $X = X\setminus\bigcup_{Y\in\mathcal{W}(H)\ Y\subsetneq X} Y$，定义 $\pi(\mathbf{1}_{\widetilde{X}}) = \pi(\mathbf{1}_X) - \pi(\mathbf{1}_{\bigcup_{Y\in\mathcal{W}(H)\ Y\subsetneq X} Y})$。(5) $\pi(\bigsqcup_{\widetilde{X}\in S\subset\widetilde{\mathcal{X}}} \mathbf{1}_{\widetilde{X}}) = \bigvee \pi(\mathbf{1}_{\widetilde{X}})$。

我们确实有如下结果：
引理 3.3。对于每个 $X \in \mathcal{W}(H)$，都有 $\bigvee_{F\subset G} \iota(\mathbf{1}_{\widetilde{X}F}) \le \pi(1_{\widetilde{X}})$。

证明。固定 $X = \cap_{i=1}^\infty g_iHg_i^{-1}$，其中 $g_i \in G$。对于每个有限子集 $F \subset G$，以及每个 $Y \in \mathcal{W}$（H），其中该集合是 H 的共轭像的有限交，并且

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\iota(\mathbf{1}_{\widetilde{X}F}) \leq \iota(\mathbf{1}_{(\cap_{i\leq n} g_i H g_i^{-1} \setminus Y)F}) \leq \iota(\mathbf{1}_{(\cap_{i\leq n} g_i H g_i^{-1})F}) - \iota(\mathbf{1}_{(Y\cap(\cap_{i\leq n} g_i H g_i^{-1}))F}).$$

应用引理 3.1，并继续上述不等式链，我们得到

$$\begin{aligned}\iota(\mathbf{1}_{\widetilde{X}F}) &\leq \bigvee_{F\subset G} \left(\iota(\mathbf{1}_{(\cap_{i\leq n} g_i H g_i^{-1})F}) - \iota(\mathbf{1}_{(Y\cap(\cap_{i\leq n} g_i H g_i^{-1}))F})\right) \\ &= \wedge_{i\leq n} p_{g_i} - (\wedge_{i\leq n} p_{g_i}) p_Y.\end{aligned}$$

~因此，对 n 取下确界并对 Y 取上确界，可得 $\iota(\mathbf{1}_{\widetilde{X}F}) \leq \pi(X)$，结论由此得证。□

由 π 的构造可立即得出，对于每个 $Y \neq X$，投影 $\pi(\mathbf{1}_{\widetilde{X}})$ 与 $\pi(\mathbf{1}_{\widetilde{Y}})$ 正交。阻碍这一方法的主要问题在于，难以验证 $\pi(\mathbf{1}) = P_H$。如果存在这样的映射 π，并且已证明它是正的，那么便可证明一些新的群族具有适当近端性，其中尤其包括融合自由积 $G *_A H$，且其中 A是弱自正规（见例 2.15）。事实上，回想一下，若 G 相对于 H是真邻近的，而 G 并非真邻近，则存在一个左 G 不变态 ϕ，定义在 $\mathbb{S}(G)$ 上，使得 $\phi(P_H) = 1$。此外，假设 G 相对于 H 是真邻近的，且 H 在 G 中并非共轭余 amen。则 G 是真邻近的。事实上，反设 G 并非真邻近。则存在一个左 G 不变态 $\widetilde{\phi}$，定义在 $\mathbb{S}(G)$ 上，使得 $\phi(P_H) = 1$。于是由上述论述可知，$\phi \circ \pi$ 是 $\mathcal{A}_H(G)$ 上的一个G-共轭不变态，这正是所需的，与 H不具共轭余 amen 性矛盾。

References

[BF02] Mladen Bestvina 和 Koji Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups*, Geometry & Topology **6** (2002), 69–89.

[BIP21] R´emi Boutonnet、Adrian Ioana 和 Jesse Peterson, *Properly proximal groups and their von Neumann algebras*, 《Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er.》（4）**54**（2021），第 2 期，445–482。MR 4258166.

[DKE24a] Changying Ding 和 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli, *Proper proximality among various families of groups*, 《Groups Geom. Dyn.》**18**（2024），第 3 期，921–938。MR 4760266.

[DKE24b], *Structure of ~~relatively~~ biexact group von Neumann algebras*, 《Comm. Math. Phys.》**405**（2024），第 4 期，论文编号 104，19 页。MR 4733336.

[DKEP23] Changying Ding、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Jesse Peterson, *Properly proximal von Neumann algebras*, 《杜克数学杂志》（），第 – 2894 期。MR 4675043.

[Eym72] Pierre Eymard, *Moyennes invariantes et représentations unitaires*, 数学讲义，第 300 卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1972。MR 447969.

[MO15] Ashot Minasyan 和 D. V. Osin, *Acylindrical hyperbolicity of groups acting on trees*, 《Math. Ann.》**362**（2015），1055–1105，–。

[MP03] Nicolas Monod 和 Sorin Popa, *On co-amenability for groups and von Neumann algebras* **25** 2003 3, 82 87 ,
加拿大皇家学会数学科学院会刊（）, 第 – 期。MR 1999183[TD20] Robin D. Tucker-Drob, *Invariant means and the structure of inner amenable groups* **169** 2020 13, 2571 2628 4142752 , 《杜克数学杂志》（）, 第 – 期。
MR

Mehrdad Kalantar, University of Oxford, UK
Email address: mehrdad.kalantar@maths.ox.ac.uk

Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli, University of Maryland, USA
Email address: sriva@umd.edu