arXiv:2602.14246v1 [gr-qc] 15 Feb 2026

# 一个合成 Gannon–Lee 不完备定理*

Mathias Braun†、Carlo Rotolo‡

**摘要**

我们证明了整体双曲时空的 Gannon–Lee 不完备定理。我们假设满足 Ketterer 提出的合成零能量条件，以及一个我们称为“合成渐近正则”的陷获性条件。我们的结果将这一经典结果推广到了加权情形。此外，该结果也为低正则性情形的推广提供了动机和方向，这些推广留待未来工作完成。

*2020 MSC Classification.* 主要分类 53C50、83C75；次要分类 28A33、49Q22、53C23。

## 目录

**1 引言** **1**
1.1 不完备定理.2 1.2 合成曲率界.2 1.3 本文内容与主要结果.3 1.4 本文结构.5

**2 预备概念** **5**
2.1 洛伦兹几何.5 2.2 Ketterer 的合成零能量条件.6

**3 合成 Gannon–Lee 定理的陈述 8**

**4 合成零能量条件的局部到整体性质** **11**

**5 定理 1 的证明** **3**
5.1 聚焦结果.14 5.2 因果性步骤.15 5.3 拓扑学方面.17

## 1 引言

在本文中，我们在合成框架下陈述并证明广义相对论中的一个经典结果——Gannon–Lee 不完备定理的一个版本。在 [Ket24], Ketterer 引入了零能量条件和俘获面这两个概念的合成对应物。利用这些合成刻画，我们能够修改经典 Gannon–Lee 定理的假设条件，并在新的假设条件下恢复原有结论。我们的贡献在于给出了直接证明，不依赖于 [Ket24]中的相应等价性。我们建立的一个新技术要素是关于 Ketterer 的合成零能量条件的局部到整体结果；该结果本身具有独立意义，并在证明的最后一步中得到应用。我们研究带权时空（$M$， $g$, $e^{-V}\mathrm{Vol}_M$），在这类时空中，Ketterer 的条件仍然有定义，并且等价于对经典 Gannon–Lee 定理中的曲率条件所作的适当修改。因此，我们还得到了经典 Gannon–Lee 定理在带权时空中的推广。在此，我们介绍有关不完备定理和合成曲率界的一些背景，并概述本文的内容和主要结果。

*这是 CR 硕士学期项目的精简版，于 2025年春季在 EPFL 撰写，指导老师为 MB。

†数学研究所，EPFL，瑞士洛桑 1015。mathias.braun@epfl.ch
‡比萨大学数学系，意大利比萨，邮编 56127。c.rotolo1@studenti.unipi.it

## 1.1 不完备定理

广义相对论中的不完备定理是一系列结果，它们将时空的几何或拓扑与“奇点”的存在联系起来；这里的“奇点”是指不完备的因果测地线。这一概念源于 Penrose，他在 [Pen65] 中证明了这类定理中的第一个。他在研究中表明，在满足零能量条件 （NEC），即零方向上的里奇曲率为正，并且含有非紧柯西超曲面的时空中，紧俘获面的存在意味着 存在一条不完备的零测地线。俘获面的概念也是由 Penrose 提出的，它直观地描述了某一区域的边界：该区域的引力极强，连光都无法逃逸（这一点由其不完备定理的结论予以严格证明）。Penrose 的工作意义重大，他因此于 2020年 获得诺贝尔物理学奖，足见一斑。此后，许多人证明了不同的不完备定理：在 [Haw67] 中，霍金将类似的推理应用于类时情形，得出了存在过去不完备类时测地线的结论；在 [HP70] 中，Hawking 和 Penrose 汇集并强化了许多关于不完备定理的研究成果，得到了一个更具普适性的结果，即霍金–彭罗斯不完备定理。如今，这些结果既构成数学广义相对论经典理论的核心部分，也是一个活跃的研究领域。关于这一主题的最新综述，可参阅 Senovilla 和加芬克尔 [SG15]以及 Steinbauer [Ste23]的综述。

本项目关注 Gannon–Lee 定理。其经典形式是在假设零能量条件成立，并对包含于超曲面中的余维 2 子流形 $S$ 施加某些拓扑约束的前提下，证明零测地线不完备性。 $\Sigma$. Gannon–Lee 定理最初由 Gannon [Gan75] [Gan76]和 Lee [Lee76]分别独立证明。然而，他们的证明中存在一个错误，后来由 Galloway 发现；Galloway 还在 [Gal83], 中证明了该定理的修正版，并加强了假设条件。随后，Costa e Silva [CeS10], 证明了一个现代版本的 Gannon–Lee 定理，该版本适用于高维情形，并对时空的因果结构及其拓扑提出了较弱的假设 $S$ 。但这次证明再次依赖于对覆盖时空因果性的一个错误假设。之后，Costa e Silva 和 Minguzzi [CeSM20] 以及 Schinnerl 和 Steinbauer 在 [SS21], 分别给出了正确的证明，要求时空及其某些覆盖空间具有过去反射性（见定义 3.2）。这一最终版本的 Gannon–Lee 定理的主要假设是零能量条件和存在渐近正则超曲面。对于后一个假设，我们要求一个类空部分柯西曲面 $\Sigma$ 包含一个在 $M$中余维为 2 的子流形 $S$；该子流形将其分为两个连通分支 $\Sigma_-$ 和 $\Sigma_+$。此外，我们假设$S$具有某种俘获性。然而，与 Penrose 定理不同，我们要求 $S$ 仅在指向 $\Sigma_-$的零测地线方向上是俘获的；对于 $\Sigma_+$ 方向，我们则施加拓扑约束，并要求由包含映射诱导的映射 $\pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma_+ \cup S)$ 是满射。

## 1.2 合成曲率界

零能量条件和存在渐近正则超曲面这两项假设，在一定程度上都与时空的曲率有关（$M$， $g$, $e^{-V}\mathrm{Vol}_M$），因此要求度量 $g$ 至少具有 $C^2$正则性。然而，近年来，在低正则性下发展广义相对论和洛伦兹几何理论的兴趣日益浓厚，尤其是与不完备定理相关的研究。例如，可参阅 Cavalletti 和 Mondino 的综述 [CM22]。在低正则性度量的时空中恢复这些结果的一种可能方法，是将黎曼曲率张量视为分布，并以分布意义表述零能量条件（NEC）等条件。在 [SS21], 中，Schinnerl 和 Steinbauer 使用这一方法，将 Gannon–Lee 定理的适用范围扩展到正则性为 $C^1$的度量。关于曲率分布方法，最早的参考文献之一是 [GT87]，由 Geroch 和 Traschen 撰写。关于这一方法的现代阐释，以及低正则性框架重要性的背景介绍，可再次参阅 Steinbauer 的综述 [Ste23] 。

另一种可能的做法是避免明确提及曲率，转而用其他假设取代零能量条件等条件，这些假设可用于低正则性时空，或

甚至可用于 Kunzinger 和 S¨amann 在 [KS18] 中发展的更一般的洛伦兹长度空间情形。这一做法的动机来自其在黎曼情形中的巨大成功：在 McCann [McC94], Otto–Villani [OV 00], Cordero-Erausquin– McCann–Schmuckenschl¨ager [CEMS01] 以及 von Renesse–Sturm [vRS05], 的早期工作中，研究者运用最优传输技术，通过考察概率测度空间上适当泛函沿测地线的凸性，推导出黎曼流形上里奇曲率界的刻画。这促成了 Stur m [Stu06a] [Stu06b] 以及 Lott 和 Villani [LV09]针对非光滑度量空间里奇曲率界建立的一套强有力理论。在洛伦兹情形中，这是一个新兴但发展迅速的研究领域：在 [McC20] 中，McCann 通过玻尔兹曼–香农熵泛函的凸性性质，给出了带权时空强能量条件的刻画，即- $N$-Bakry–Emery–Ricci 曲率在类时方向上为正

$$E_V(\mu) = \int_M \rho \log(\rho)\, e^{-V} \mathrm{dVol}_M$$

在带权体积 $e^{-V}\mathrm{Vol}_M$ 所对应的绝对连续概率测度空间中，这些测度在 $M$ 上相对于该体积具有密度 $\rho$ $\mu$。沿着类似的思路，Mondino 和 Suhr 在 [MS23]中推导出了广义相对论爱因斯坦方程的合成刻画。Cavalletti 和 Mondino 在 [CM24], 中拓展了这项工作，并将合成曲率界的概念推广到了洛伦兹长度空间的非光滑情形。其他近期进展见 Braun [Bra23]以及 Braun–Ohta [BO24], 的工作，他们还分析了（Bakry–Emery）里奇曲率与另一种熵泛函——*N-Rényi* 熵——之间的关系。

$$S_N(\mu) = -\int_M \rho^{1-\frac{1}{N}} e^{-V} \mathrm{dVol}_M.$$

关于沿零方向的曲率界，类似的发展要晚近得多。在本文中，我们重点讨论 Ketterer [ Ket24], 的方法；他首次通过沿零测地线的最优传输刻画了零能量条件。尽管本质上是合成的，Ketterer 的合成零能量条件仍要求度量具备 $C^2$ 正则性才能定义，而能否将其推广到非光滑情形仍有待研究。紧接着 [Ket24], 之后，McCann 在 [McC24] 中提出了另一种合成零能量条件方案，将其视为合成类时曲率界的极限。更近期地，在[CMM25b], 中，Cavalletti、Manini 和 Mondino 在零超曲面上的绝对连续概率测度空间中，针对固定参考测度（称为*rigged* 测度）提出了另一种零能量条件刻画；在 [CMM25a]中，他们又将这一方法推广到了洛伦兹长度空间。正如他们在 [CMM25a], 中建立了彭罗斯不完备定理的首个合成版本一样，我们相信他们的框架也能导出 Gannon–Lee 不完备定理的合成版本；这一问题将留待未来研究。

## 1.3 工作内容与主要结果

在 [Ket24]Ketterer 提出了零能量条件和俘获面概念的综合对应概念。作为应用，他能够通过综合方法证明 Penrose 不完备性定理，而无需依赖经典曲率量。受此启发，我们将采用相同的方法研究 Gannon–Lee 定理。

Ketterer 的综合零能量条件涉及时空的零几何。加权时空中的一个零超曲面 $\mathcal{H}$（$M$, $g$, $e^{-V}\mathrm{Vol}_M$）是一个 $C^2$ 超曲面，使得度量在 $\mathcal{H}$ 上的限制是退化的。该度量在 $\mathcal{H}$ 上诱导出一个退化体积 $\mathrm{Vol}_{\mathcal{H}}$，我们定义 $m_{\mathcal{H}} = e^{-V}\mathrm{Vol}_{\mathcal{H}}$. 对于一个关于 $m_{\mathcal{H}}$-绝对连续的概率测度 $\mu$，其密度为 $\rho$，我们考虑相对 $N$-Rényi 熵

$$S_N(\mu \,|\, m_{\mathcal{H}}) = -\int_M \rho^{1-\frac{1}{N}} \mathrm{d}m_{\mathcal{H}}.$$

存在一个沿 $\mathcal{H}$的 $C^1$ 零法向量场 $K$，其流曲线可以重新参数化为零测地线，我们将其称为 $\mathcal{H}$的零测地生成线。这些测地线叶分解 $\mathcal{H}$，沿着它们，我们可以传输支撑在类空

$\mathcal{H}$截面上的概率测度。具体而言，给定两个零连接的概率测度 $\mu_0$ 和 $\mu_1$（精确定义见第2.2节），它们分别支撑在类空截面 $S_0$ 和 $S_1$上，Ketterer证明，可以通过概率测度的零位移插值（$\mu_t$）$_{t\in[0,1]}$ 将 $\mu_0$ 传输至 $\mu_1$。若对于任意两个非因果概率测度，只要它们零连接且 $m_{\mathcal{H}}$-绝对连续，则加权时空满足综合 $N$-零能量条件，其 $N$-Rényi熵沿零位移插值是凸的，即对于每个 $t \in [0,1]$,

$$S_N(\mu_t \,|\, m_{\mathcal{H}}) \leq (1-t)S_N(\mu_0 \,|\, m_{\mathcal{H}}) + tS_N(\mu_1 \,|\, m_{\mathcal{H}}).$$

在 [Ketterer 还给出了余维 2 类空曲面 $S$ 的俘获性的合成刻画（见定义 3.6）。他证明，$S$ 是俘获的，当且仅当沿着与 $S$正交地离开的零测地线传输时，$S$ 中测地球的测度下降得足够快。

现在我们可以陈述合成 Gannon–Lee 定理。所需的主要概念如下：

- 时空及其某个覆盖的过去反射性，与经典 Gannon–Lee 定理中的情形相同（见定义 3.2）；
- 合成零能量条件（见上文及定义 2.10）；
- 存在一个合成渐近正则超曲面 $\Sigma$：我们将定义 3.5 中的陷获性条件替换为 Ketterer 对测地球测度下降所要求的相同界限，但仅沿着指向 $\Sigma_-$ 的零测地线传输（见定义 3.8）。我们还要求 $\Sigma$具有一个穿刺（见第3节）。

**定理 1.1 (**合成 Gannon–Lee 定理)。 设 $(M, g, e^{-V}$体积$_M)$ 是一个维数为 $n+1$ 、过去反射且零测地线完备的加权时空，并满足合成$N$-零能量条件，其中 $N \geq n-1$。设 $\Sigma$ 是一个具有穿刺的合成渐近正则超曲面，其包围曲面为 $S.$。此外，假设以下两种情况之一成立：

- （$M$, $g$, $e^{-V}$体积$_M$) 的任意覆盖时空都是过去反射的；或者
- $S$ 是单连通的，且（$M, g, e^{-V}$体积$_M$) 的万有覆盖时空是过去反射的。

由包含映射 $i: S \to \Sigma$ 诱导的映射 $i_{\#}:\ \pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ 是满射。

我们遵循 Costa e Silva 和 Minguzzi 在 [CeSM20]以及 Schinnerl 和 Steinbauer 在 [SS21]中给出的证明结构。关键结果是集合 $\Sigma_-$ 的紧致性，由此可通过纯粹的拓扑论证得出结论。然而，经典证明很大程度上依赖于从 $S$ 沿 $\Sigma_-$ 方向离开的零测地线的聚焦结果，这要求同时满足零能量条件和 $S.$ 的内陷性。我们应用 Ketterer[Ket24] 的结果，在合成框架下获得类似的聚焦结果，随后便能轻松调整证明的其他步骤。将过去反射性替换为更强的整体双曲性假设，可得到以下更简明的定理表述。

**定理 1.2 (**整体双曲 Gannon–Lee 定理)。 设$(M, g, e^{-V}$体积$_M)$ 是一个维数为 $n+1$、满足针对 $N > n-1$ 的合成 $N$-零能量条件的整体双曲、零测地线完备加权时空。设 $\Sigma$ 是一个合成渐近正则的柯西曲面，其包围曲面为 $S.$。那么，由包含映射 $i$: $S \to \Sigma$ 诱导的映射 $i_{\#}: \pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ 是满射。

无论在经典框架还是合成框架下，Gannon–Lee 定理证明的最后部分都包含一个拓扑论证，涉及$M$的覆盖时空。尤其重要的是，关于 $M$ 的所有假设条件都能提升到覆盖空间上。对于零能量条件，这一点显而易见，因为里奇曲率是局部对象。Ketterer 的合成零能量条件等价于经典零能量条件，因此也具有局部到整体性质。不过，为了继续贯彻证明真正的合成 Gannon–Lee 定理这一目标，我们将在

第4节独立证明这一结果。这为由 Braun [Bra23]建立的 Cavalletti 和 Mondino [CM24]的类时曲率-维数条件的局部到整体结果，给出了第一个零曲版本。我们的证明受到黎曼情形中许多类似结果的启发，例如 Sturm [Stu06a], 、Villani [Vil09], 、Bacher–Sturm[BS 10], 、Cavalletti–Millman [CM16], 以及 Ketterer [Ket17], 证明的结果；此外，我们的证明还可能适用于将合成零能量条件推广到非光滑情形的某些版本，或许也适用于 Cavalletti、Manini 和 Mondino 在 [CMM25a] 中提出的版本（我们将留待未来工作探讨）。

### 1.4 工作结构

本文其余部分的结构如下：在第2节中，我们简要介绍洛伦兹几何的预备概念，随后引入 Ketterer 的综合零能量条件；关于更深入的描述，请参阅其论文 [Ket24] 。在第3节中，我们分别陈述经典版本和综合版本的 Gannon–Lee 定理。我们给出过去反射性的定义，这是该定理的因果性假设；随后严格引入渐近正则超曲面及其综合对应概念。最后，我们陈述经典和综合的 Gannon–Lee 定理。在第4节中，我们暂时偏离 Gannon–Lee 定理，证明关于综合零能量条件的局部到整体结果。在第5节中，我们转而证明综合 Gannon–Lee 定理。我们纳入 [Ket24], 中聚焦结果的证明，这是我们的证明不同于经典证明的主要之处。随后，对于证明的后半部分，我们调整 Costa e Silva–Minguzzi [CeSM20] 以及 Schinnerl–Steinbauer [SS21] 的论证；对于 $\Sigma_{-}$ 的紧致性，需要进行一些修改，而最后的拓扑步骤在我们的框架下仍然成立。_

**致谢** MB 受到 EPFL 伯努利教职的资助。本文的大部分工作是在 CR 赴 EPFL 进行交换学期访问期间完成的，期间获得了瑞士-欧洲流动计划的经费支持。CR 还感谢意大利国家高等数学研究所的代数与几何科学国家研究组提供支持。

## 2 预备概念

我们首先介绍理解本文结果的陈述与证明所需的所有预备概念。本节第一部分将介绍洛伦兹几何基础，随后转而阐述 Ketterer 的合成零能量条件。

### 2.1 洛伦兹几何

关于洛伦兹几何的参考资料包括 Hawking 和 Ellis 的经典著作 [HE73],O'Neill [O'N83], , 以及 Minguzzi 较新的著作 [Min19a] 。本文余下部分用 $M$ 表示一个维数为 $n+1$的洛伦兹流形，即一个无边界的光滑流形，配备有符号差为 $(-,+,\dots,+)$ 的度量张量 $g$。我们要求 $g$具有正则性 $C^2$，在此条件下，洛伦兹几何的所有经典理论都可毫无困难地推广（参见 Steinbauer [Ste23]）。我们用 $\langle v,w\rangle$ 表示双线性型 $g(v,w)$。若非零切向量 $v\in TM$满足 $\langle v,v\rangle$ 分别为负、正或零，则称其为类时、类空或零向量。按约定，零向量为类空向量。类似地，若一条 $C^1$ 曲线$\gamma\colon I\to M$ 的速度向量 $\gamma'(t)$ 对所有$t\in I$都分别为类时、类空或零，则称该曲线为类时、类空或零曲线。

我们称 $M$ 为时间定向的，或称为时空，如果它存在一个连续非零向量场 $Y$。如果 $\langle Y(p)\ v\rangle<0$，则称向量 $v\in T_pM$为未来指向；如果 $\langle Y(p)\ v\rangle>0$，则称其为过去指向。

我们称点 $q$ 位于 $p$ 的类时未来 中，记作 $p\ll q$，如果存在一条从 $p$ 到 $q$ 的未来指向类时曲线。类似地，如果存在一条从 $p$ 到 $q.$ 的未来指向因果曲线，我们称 $q$ 位于 $p$ 的因果未来 中，记作 $p\le q$。随后，我们将 $p$ 的类时 和因果未来 定义为

$$I^+(p)=\{q\in M\,|\,p\ll q\},\qquad J^+(p)=\{q\in M\,|\,p\le q\}.$$

对于子集 $A \subseteq M$，我们将其类时/因果未来定义为该集合中所有点的类时/因果未来的并集。这些集合记作 $I^+(A)$ $J^+(A)$。通过考虑相反的关系，我们也定义 $A$ 的类时 和因果过去，分别记作$I^-(A)$ 和 $J^-(A)$。类时关系和因果关系的一些性质如下（参见 Minguzzi [Min19a],命题 1.16）：

**命题 2.1 (** $\ll$ 和 $\leq$的性质)。关系 $\ll$ 和 $\leq$ 具有传递性。此外，关系 $\ll$ 是开关系；特别地，对于任意子集 $S \subseteq M$， $I^{\pm}(S)$ 是开集。

传递性可以通过所谓的推升引理加强。证明参见 Minguzzi [Min19a] 的定理 2.24。

**命题 2.2 (**推升引理)。设 $p$、$q$、$r$ 是时空 $M$ 中的点。以下 $g$ 命题成立：

$$p \leq q \ll r \Rightarrow p \ll r, \; and$$
$$p \ll q \leq r \Rightarrow p \ll r.$$

给定一个包含 $A$ 的开子集 $U$，我们还可以定义$A$ 在 $U$ 中的相对年代未来/因果未来/过去，即要求所考虑的曲线完全位于 $U$ 中。具体而言，我们定义

$$I^+(A, \; U) = \{q \in U \,|\, \exists \text{一条从 } A \text{ 到 } q\text{、完全包含于 U 中的未来指向类时曲线}\}$$

对于 $I^-(A, \; U)$ 和 $J^{\pm}(A, \; U)$ 也同理。

我们称时空中的子集 $A$ 为类时不可达的，如果它与每条类时曲线至多相交一次；称其为非因果的，如果它与每条因果曲线至多相交一次。部分柯西曲面是 $M$ 中的类时不可达 $C^2$ 超曲面。若每条不可延拓的类时曲线都恰好与 $\Sigma$ 相交一次，我们就称 $C^2$ 超曲面 $\Sigma \in M$ 为柯西曲面。存在柯西曲面的时空称为整体双曲时空。

给定一个类时不可达集 $A$，其边缘是满足以下条件的点集：对于每个包含 $p$ 的开邻域 $U$，都存在一条从 $I^-(p, \; U)$ 到 $I^+(p, \; U)$ 的类时曲线，该曲线不与 $A$. 相交。以下命题的证明见 O'Neill [O'N83], 命题 14.25。

**命题 2.3**（无边缘的类时不可达集是拓扑超曲面）。一个类时不可达子集 $A \subseteq M$ 是拓扑超曲面，当且仅当它与其边缘不相交。

## 2.2 Ketterer 的合成零能量条件

现在，我们介绍 Ketterer 在 [Ket24]中提出的合成零能量条件。对于一个正则性为 $C^2$的时空 $(M, g)$，若 $g$，则称零能量条件成立：

$$\mathrm{Ric}(v, v) \geq 0 \quad \forall \text{ null vectors } v \in TM.$$

这一假设是对时空里奇曲率的一项经典约束，被认为在物理上是合理的，也是 Gannon–Lee 定理的假设条件之一。在[Ket24], 中，Ketterer 提出了一种合成条件，无需明确提及曲率即可定义，且与零能量条件等价。沿用他的方法，我们将在一个比经典表述 Gannon–Lee 定理时稍为一般的框架中开展研究，即带权流形。

一个加权时空是一个三元组 $(M, g, e^{-V}\mathrm{Vol}_M)$，其中 $V \in C^\infty(M)$，且 $\mathrm{Vol}_M$是 $M$. 的体积形式。带权流形 $(M, g, e^{-V}\mathrm{Vol}_M)$ 的*Bakry–Emery* 里奇张量定义为

$$\mathrm{Ric}^V := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V.$$

我们称加权时空满足*Bakry–Emery N*-零能量条件，当且仅当$N > n - 1$

$$(N' - n + 1)\mathrm{Ric}^V(v, v) \geq \langle \nabla V, v \rangle^2$$

对任意零向量 $v \in TM$以及任意 $N' > N$.

现在我们概述如何定义 Ketterer 对应于 Bakry–Emery $N$-零能量条件的等价条件。更多详情请参阅 [Ket24]。在（带权）时空中，零超曲面 $\mathcal{H}$ 是一个超曲面，其上度量的限制是退化的。

度量张量诱导出一个退化的（$n-1$）体积形式 $\mathrm{Vol}_{\mathcal{H}}$，定义在 $\mathcal{H}$. 上。对于维数为 $n-1$的类空曲面 $S \subseteq \mathcal{H}$ 上的任意博雷尔子集 $A$，可通过施加以下条件来定义体积

$$\mathrm{Vol}_{\mathcal{H}}(A) := \int_A \mathrm{dVol}_{\mathcal{H}}.$$

若 $V \in C^\infty(M)$ 是我们时空的权函数，我们定义 $m_{\mathcal{H}} := e^{-V}\mathrm{Vol}_{\mathcal{H}}$，并用 $\mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$ 表示 $M$ 上 $m_{\mathcal{H}}$-绝对连续概率测度的集合。对于密度为 $\rho$ 的概率测度 $\mu \in \mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$，我们定义其 $N$-*Rényi* 熵

$$S(\mu \,|\, m_{\mathcal{H}}) := -\int_M \rho^{1-\frac{1}{N}}\, \mathrm{d}m_{\mathcal{H}}.$$

给定零超曲面 $\mathcal{H}$ 上的一点 $p$，$T_p\mathcal{H}$ 中存在唯一一个垂直于 $T_p\mathcal{H}$. 的零方向。$M$ 的时间可定向性使我们能够连续地选取该方向上的一个向量，从而在 $\mathcal{H}$. 上得到一个零法向量场 $K$。局部地，我们可以对 $K$ 的流曲线重新参数化，使其成为零测地线；我们称之为 $\mathcal{H}$. 的零测地生成线。由于我们假设 $\mathcal{H}$ 具有正则性 $C^2$，因此 $K$ 的正则性至少为 $C^1$。由此，我们可以在 $\mathcal{H}$ 上定义如下关系：

$$R_{\mathcal{H}} := \{(x,y) \in \mathcal{H}^2 \,|\, \exists \text{ a flow curve } \gamma \text{ of } K \text{ s.t. } \gamma(s) = x,\ \gamma(t) = y \text{ and } s \le t\}.$$

**定义 2.4**（零耦合）。 $M$ 上的零耦合 是一个概率 $\pi \in \mathcal{P}(M^2)$，满足 $\mathrm{supp}(\pi) \subseteq R_{\mathcal{H}}$，其中 $\mathcal{H}$.是某个零超曲面

**定义 2.5**（零连通概率测度）。 若存在一个零耦合 $\pi$，使得 $\mu_0$ 和 $\mu_1$为其边缘分布，则称两个概率测度 $\mu_0$，$\mu_1 \in \mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$ 是零连接的 。

对于任意$(x,\ y) \in R_{\mathcal{H}}$，我们可以考虑连接 $x$ 和 $y$ 的 $K$ 的唯一流曲线$\gamma_{x,\ y}$，以及它的仿射重参数化 $\tilde{\gamma}_{x,\ y}$：$[0,1] \to \mathcal{H}$。我们用 $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ 表示所有此类仿射重参数化曲线构成的集合，该集合继承了波兰空间的结构。

**定义 2.6**（动力学零耦合）。 动力学零耦合 是 $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ 上的一个概率测度。

若 $\pi$ 是一个零耦合，则将$(x,\ y)$映射为$\tilde{\gamma}_{x,\ y}$ 的映射 $\Upsilon :\ R_{\mathcal{H}} \to \mathcal{G}(\mathcal{H})$ 是可测的，因此可以定义动力学零耦合 $\Pi :=\ \Upsilon_{\#}\pi$。现在，若 $e_t :\ \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$是在 $t \in [0,1]$处的求值映射，我们可以定义 $\mu_t :=\ (e_t)_{\#}\Pi$. 。我们称$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 为由 $\pi$ 诱导的零位移插值，并称 $\pi$ 是 $\mu_0$ 和$\mu_1$之间的零耦合

若一个概率测度的支撑集包含于某个非因果类空 $C^2$ 子流形中，则称其为非因果 概率测度。给定两个零连接的非因果概率测度 $\mu_0$，$\mu_1 \in P(M,\ m_{\mathcal{H}})$，以及 $\Sigma_0$ 和 $\Sigma_1$ 这两个类空超曲面，使得 $\mathrm{supp}(\mu_0) \subseteq \Sigma_0$ 且 $\mathrm{supp}(\mu_1) \subseteq \Sigma_1$，则实际上 $\mathrm{supp}(\mu_0) \subseteq \mathcal{H} \cap \Sigma_0 =:\ S_0$ 且 $\mathrm{supp}(\mu_1) \subseteq \mathcal{H} \cap \Sigma_1 =:\ S_1$。在此情形下，我们有以下两个关键引理，均由 Ketterer 在 [Ket24]中证明。

**引理 2.7**（传输映射的存在性，[Ket24], 引理 3.2）。 设 $\mu_0$、$\mu_1$、$S_0$、$S_1$ 如上所述。则存在一个 $C^1$ 函数 $r :\ U \to \mathbb{R}$，其中 $U$ 是 $S_0$ 的一个包含 *supp*（$\mu_0$）的开子集，使得映射

$$T : U \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad x \longmapsto \exp_x(r(x)K(x))$$

满足 $\pi = (\mathrm{id}_{\mathrm{supp}(\mu_0)}\, T)_{\#}\mu_0$. 我们称 $T$为传输映射。

注记 2.8。 沿用前一个结果的证明，Ketterer 还证明了我们可以将传输映射 $T$ 扩展为一个完整的映射族 $(T_t)_{t\in[0,1]}$，定义如下：我们~令 $K(x) = r(x)K(x)$，并定义 $T_t(x) = \exp_x(tK(x))$。成立的是 $\mu_t = (T_t)_{\#}\mu_0$，且 $\mathrm{supp}\,\mu_t \subseteq T_t(S_0) = S_t$。此外，对于任意$t \in [0,1]$，映射 $T_t$ 都是从 $S_0$ 到 $S_t$ 的微分同胚，并且 $S_t$ 是类空且非因果的。

**引理 2.9**（变量替换，[Ket24], 引理 3.6 和 3.7）。设 $\mu_0, \mu_1$ 是 $m_{\mathcal{H}}$-绝对连续的无因果且零连接的概率测度，并设$(\mu_t)^{t\in[0,1]}$ 为其诱导的零位移插值。那么每个 $\mu_t$ 都相对于 $m_{\mathcal{H}}$ 绝对连续，且其密度$\rho_t$ 满足

$$e^{-V\circ T_t(x)}\rho_t(T_t(x))\det DT_t(x) = \rho_0(x)e^{-V(x)}.$$

最后，我们可以引入 Ketterer 的综合零能量条件：要求任意两个由零曲线连接的非因果概率测度之间的零位移插值上的该熵具有凸性，其中的时空为 $\mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$。

**定义 2.10**（综合零能量条件）。我们称加权时空 $(M^{n+1},\ g,\ e^{-V}\mathrm{Vol}_M)$ 对于 $N > n-1$ 满足合成 *N*-零能量条件，如果对于每个零超曲面 $\mathcal{H}$ 以及任意两个由零曲线连接的非因果概率测度 $\mu_0$, $\mu_1 \in \mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$，均有

$$S_{N'}(\mu_t \,|\, m_{\mathcal{H}}) \le (1-t)S_{N'}(\mu_0 \,|\, m_{\mathcal{H}}) + tS_{N'}(\mu_1 \,|\, m_{\mathcal{H}}) \quad \forall N' \ge N,$$

其中，$\mu_t$ 是 $\mu_0$ 和 $\mu_1$. 之间的零位移插值

以下定理由 Ketterer 提出，并在 [Ket24] 中得到证明。

**定理 2.11**（NEC 与综合 NEC 的等价性）。加权时空（$M$、$g$、$e^{-V}\mathrm{Vol}_M$）对于 $N > n-1$ 满足 *Bakry-Emery* $N$-零能量条件，当且仅当它满足综合 $N > n-1$ 的 $N$-零能量条件。

合成零能量条件可以用密度 $\rho_t$ 而非熵来重新表述 y,
这要归功于以下引理，该引理也由 Ketterer 在 [Ket24]中证明。

**引理 2.12 (**本质凹性**).** 设$(M,\, g,\, e^{-V}$体积$_M)$ 是一个维数为 $n+1$的加权时间定向时空。则对于 $N > n-1$，$M$ 满足合成 $N$-零能量条件，当且仅当对于任意非因果概率测度 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(M, m_{\mathcal{H}})$，若它们通过一个支撑在零超曲面 $\mathcal{H}$ 上的动力耦合 $\Pi$ 零连接，则对任意 $t \in [0,1]$ 均有

$$\rho_t^{-\frac{1}{N}}(\tilde{\gamma}_t) \ge (1-t)\rho_0^{-\frac{1}{N}}(\tilde{\gamma}_0) + t\rho_1^{-\frac{1}{N}}(\tilde{\gamma}_1) \quad for\ \Pi{-}almost\ every\ \tilde{\gamma} \in \mathcal{G}(\mathcal{H}),$$

其中 $\mu_t$ 是相应的零位移插值，而 $\rho_t$ 是 $\mu_t$的密度。

# 3 合成 Gannon–Lee 定理的陈述

本节陈述 Gannon–Lee 定理的经典版本和综合版本，并着重说明我们在综合版本的表述中所采用的不同条件。

我们按照 Senovilla 在 [Sen98], 中提出的模式不完备定理的框架来表述该定理。该定理概述了许多所谓不完备定理的一般结构，例如 Penrose 的定理 [Pen65], 、Hawking 的定理[Haw67]以及 Hawking 和 Penrose 的定理 [HP70]。所有这些结果都旨在确定时空 $M$ 中足以导致因果测地线不完备的条件。

**定理 3.1**（模式不完备定理）。设（$M, g$） 为满足以下条件的时空：

1. 关于 $M$曲率的条件；
2. 初始条件或边界条件；
3. 因果条件。

那么（$M, g$） 是因果测地线不完备的，即在 $M$中存在一条因果测地线，其最大定义区间严格包含于 $\mathbb{R}$.

Gannon–Lee 定理的能量条件是零能量条件（NEC），我们将其替换为 h
综合版本的 $N$-零能量条件。

经典版本和综合版本的因果条件相同 e
定理，并定义如下：

**定义 3.2**（过去反射时空）。我们称时空 $M$ 为过去反射的，若对于任意 $p, q \in M$ 以下两个等价条件之一（因而两者）成立：

- $I^+(p) \supseteq I^+(q) \Rightarrow I^-(p) \subseteq I^-(q)$;
- $q \in \overline{I^+(p)} \Rightarrow p \in \overline{I^-(q)}$.

关于这两个条件等价性的证明，例如参见 Minguzzi [Min19a],第 4.1 节。

现在我们来描述初始条件。与能量条件一样，从经典版本转为综合版本时，初始条件也需要作一些修改。

考虑加权时空中的一个 $C^2$ 类空超曲面 $\Sigma \subseteq M$，以及其中余维 2 的一个 $C^2$ 类空子流形 $S \subseteq \Sigma$。另假设 $S$分离了 $\Sigma$，也就是说，$\Sigma \setminus S$是两个互不相交的开子流形 $\Sigma_-$ 和 $\Sigma_+$. 的并。这个条件意味着 $S$ 在 $\Sigma$ 中的法丛是平凡的，因此我们可以沿着 $S$ 选取与 $\Sigma$ 相切的法向量场 $N_\pm$，使得 $N_+$（外法向）指向 $\Sigma_+$，而 $N_-$（内法向）指向 $\Sigma_-$. 。若以 $X$ 表示 $\Sigma$ 的未来指向类时法向量场，则可得到沿着 $S$ 的两个零法向量场 $K_\pm = X|_S + N_\pm$；它们在任意 $p \in S$ 处构成法空间 $T_pS^\perp \subseteq T_pM$.的零基。

**定义 3.3**（内未来汇聚曲面，[见24], 定义 4.8）。采用上述记号，若对任意 $p \in S$ 均有以下性质，则称 $S$ 为*Bakry–Emery* 内陷获或*Bakry–Emery* 内未来汇聚：

$$\langle H(p), K_-(p)\rangle + \langle \nabla V(p), K_-(p)\rangle > 0,$$

其中，$H(p)$ 是 $S$ 的平均曲率向量。类似地，利用 $K_+$，我们可以定义 n 外未来汇聚曲面。

注意，由于 $\Sigma$ 和 $S$ 属于 $C^2$ 类，零法向量场 $K_\pm$ 的正则性为 $C^1$. 。因此，平均曲率可按经典方式定义，且连续。

注 3.4。在非加权情形下，第二项消失。这就是内/外陷获曲面的经典定义。

**定义 3.5**（渐近正则超曲面，[参见21], 定义 2.5）。若正则性为 $C^2$ 的类空连通部分柯西曲面 $\Sigma \subseteq M$ 包含一个紧致连通的余维 2 子流形 $S$，并满足以下条件，则称其为渐近正则超曲面：

- 补集 $\Sigma \setminus S$ 是两个互不相交子流形 $\Sigma_+$，$\Sigma_-$ 的并集，其中 $\Sigma_+$是非紧的，且 $\Sigma_-$ 是连通的;
- 映射 $h_\#$：$\pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma_+)$,由包含映射 $h$: $S \to \Sigma_+$诱导，是满射;
- $S$ 是 Bakry–Emery 内未来汇聚的。

给定一个渐近正则超曲面 $\Sigma$，我们称满足上述性质的子流形 $S$ 为一个包围曲面。此外，如果存在一个类时向量场，使得它的所有流曲线都与 $\Sigma$ 恰好相交一次，则称 $\Sigma$ 存在一个穿刺。给定 $\Sigma$的一个穿刺，其流曲线将 $M$ 分叶，并且我们可以定义一个连续收缩映射 $\rho_X$：$M \to \Sigma$，将点 $x \in M$ 映射到经过 $x$ 的流曲线与 $\Sigma$. 的唯一交点。现在，对于经典 Gannon–Lee 定理的初始条件，我们假设时空（$M$，$g$）包含一个存在穿刺的渐近正则超曲面。

要修改渐近正则超曲面的定义，我们只需要为未来汇聚曲面的概念构造一个综合类比。对每个 $p \in S$，考虑从 $p$ 出发、初速度为 $K_-(p)$的零测地线 $\gamma_p$，以及集合 $\mathcal{C} = \bigcup_{p\in S} \mathrm{Im}\,\gamma_p$。于是，$S$ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个邻域是一个零超曲面，我们将其记为 $\mathcal{H}$，而 $K_-$ 是其零法向量场在 $S$ 上的限制。将 $K_-$ 替换为适当的重新参数化$\tilde{K}_-$，后，我们有映射

$$T_t : S \to \mathcal{H},\ p \mapsto \exp_p(t\tilde{K}_-(p))$$

当 $t$ 足够小时，是到其像上的微分同胚。

**定义 3.6**（合成内未来会聚曲面，[Ket24, 定义4.4）。使用上文引入的记号，我们称 $S$ 是合成内未来会聚的，或合成意义下未来会聚于 $\mathcal{H}$，如果对每个 $p \in S$，存在 $\varepsilon(p) \in (0,1)$，使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \log m_{\mathcal{H}}(T_t(B_\delta(p))) \le \varepsilon(p) < 0,$$

对于任意测地球 $B_\delta(p)$，其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) := \underline{\text{下极限}}_{h\downarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$.

这一界定与 Bakry–Emery 内未来会聚曲面的定义之间的等价性也由 Ketterer 在 [Ket24, 引理 4.6 中证明。

**定理 3.7**。设 $(M, g, e^{-V}\text{体积}_M)$ 为一个加权时空，且设 $\mathcal{H}$ 为一个零超曲面。设 $\Sigma$ 为一个非因果类空超曲面，且 $S := \Sigma \cap \mathcal{H}$. 那么，当且仅当对任意 $p \in S$， $S$ 在 $\mathcal{H}$ 中是合成意义下未来会聚的，条件成立

$$\langle H(p), K_-(p)\rangle + \langle \nabla V(p), K_-(p)\rangle > 0,$$

其中 $K_-$ 是 $\mathcal{H}$.的未来指向零法向量

现在我们可以轻松给出合成渐近正则超曲面的定义。

**定义 3.8**（合成渐近正则超曲面）。我们称正则性为 $C^2$ 的类空、连通部分柯西曲面 $\Sigma \subseteq M$ 为合成渐近正则超曲面，如果它包含一个紧致、连通、余维为 2 的子流形 $S$，满足：

- 补集 $\Sigma \setminus S$ 是两个互不相交子流形 $\Sigma_+$， $\Sigma_-$ 的并集，且 $\Sigma_+$是非紧的， $\Sigma_-$ 是连通的；
- 映射 $h_\#$： $\pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma_+)$，由包含映射 $h$: $S \to \Sigma_+$诱导，是满射；
- $S$ 在合成意义下内在未来汇聚。

和前面一样，我们称 $S$ 为 $\Sigma$ 的包围曲面，并以同样的方式定义 $\Sigma$.的穿刺

注记 3.9。包围曲面包含于一个 $C^2$ 类空部分柯西曲面中，因此也是一个非因果集。这使我们能够将合成的 $N$-零能量条件应用于支撑集包含在 $S$.中的概率测度

请注意，这个初始条件不仅对 $S$， $\Sigma$和 $M$的几何施加了约束，也对它们的拓扑施加了约束，从而体现了时空拓扑与零测地线不完备性之间的紧密联系。

现在我们可以陈述经典 Gannon–Lee 定理和合成 Gannon–Lee 定理。我们在加权时空的设定下陈述综合版本。注意，正如 Ketterer 在 [Ket24]，中证明的，在具有 $C^2$ 度量的时空中，我们所假设的所有合成条件都等价于经典条件，因此我们给出的证明也将经典 Gannon–Lee 定理推广到了带权时空。

**定理 3.10 (**经典 Gannon–Lee 定理， [SS21])。设$(M, g)$ 是一个过去反射、零测地线完备且满足零能量条件的时空。设 $\Sigma$ 是一个允许穿刺的渐近正则超曲面，并具有包围曲面 $S$.。再假设以下两种情形之一成立：

- $(M, g)$ 的任意覆盖时空都是过去反射的；或者
- $S$ 是单连通的，且$(M, g)$ 的万有覆盖时空是过去反射的。

那么，由包含映射 $i$： $S \to \Sigma$ 诱导的映射 $i_\#$： $\pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ 是满射。

**定理 3.11 (**合成 Gannon–Lee 定理)。设$(M, g, e^{-V}\text{体积}_M)$ 是一个维数为 $n+1$ 的过去反射、零测地线完备加权时空，且满足关于 $N > n-1$ 的合成$N$-零能量条件。设 $\Sigma$ 是一个允许穿刺的合成渐近正则超曲面，其包围曲面为 $S$. 。进一步假设以下两种可能性之一成立：

- 任意覆盖时空 $(M, g, e^{-V}$体积$_M)$ 均为过去反射，或者
- $S$ 是单连通的，且 $(M, g, e^{-V}\mathrm{Vol}_M)$ 的万有覆盖时空是过去反射的。

那么，由包含映射 $i\colon S \to \Sigma$ 所诱导的映射 $i_{\#}\colon \pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ 是满射。

整体双曲比过去反射是更强的条件（参见 Minguzzi[Min19a], 第4节第4.1和4.5小节），而且这一性质也会传递到覆盖空间。因此，假设 $M$ 整体双曲，我们可以得到一个更简单但略弱的表述。尽管如此，我们仍在下文给出该表述以求完整；不过，由于其证明基本相同，只是因果性步骤有所简化，因此这里只给出一般情形。

**定理 3.12** (整体双曲 Gannon–Lee 定理)。 设 $(M, g, e^{-V}\mathrm{Vol}_M)$ 是一个维数为 $n+1$ 的整体双曲、零测地线完备加权时空，并满足关于 $N > n-1$ 的合成 $N$-零能量条件。设 $\Sigma$ 是一个合成渐近正则柯西曲面，其包围曲面为 $S$. 。那么，由包含映射 $i\colon S \to \Sigma$ 所诱导的映射 $i_{\#}\colon \pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ 是满射。

在上述所有版本中，我们都直接陈述了定理，但通过取逆命题，可以很容易地得到一个更类似于上文所讨论的模式不完备定理的结果。具体而言，这意味着去除零测地线完备性假设，并增加以下假设： $i_{\#}\colon \pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ 不是满射。后一假设是对初始条件的补充，可以理解为这样的假设： $\Sigma$ 的拓扑复杂性（表现为其基本群中的非平凡元素）并非全部来自 $S$。

# 4 合成零能量条件的局部到整体性质

在继续进行合成 Gannon–Lee 定理的证明之前，我们先证明 Ketterer 的合成零能量条件的一个局部到整体结果，并将在定理证明的最后部分使用该结果。在光滑框架下——本文正是在这一框架中展开工作的——这是经典零能量条件等价性的推论，因为里奇张量是一个局部对象。然而，本文的目标是给出一个完全避免明确提及曲率的合成 Gannon–Lee 定理证明，因此我们将独立证明这一结果。这种方法还具有另一项优势：如果将合成零能量条件推广到较低正则性框架，它可以更容易地用于扩展该结果的有效范围。

**定义 4.1**。我们称加权时空 $(M,\ g,\ e^{-V}\mathrm{Vol}_M)$ 中的 $N > n-1$ 合成 $N$-零能量条件局部成立，其中时空维数为 $n+1$：对于任意零超曲面 $\mathcal{H}$，任意点 $p \in \mathcal{H}$ 都有一个关于 $\mathcal{H}$拓扑的开邻域 $U$，使得对任意两个支撑于 $U$ 中的非因果、零连接的绝对连续概率测度$\mu_0$, $\mu_1 \in \mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$，其诱导的零位移插值 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 满足

$$S_{N'}(\mu_t \,|\, m_{\mathcal{H}}) \le (1-t) S_{N'}(\mu_0 \,|\, m_{\mathcal{H}}) + t S_{N'}(\mu_1 \,|\, m_{\mathcal{H}})$$

对所有 $N' \ge N$ 均成立。

现在我们证明，这实际上等价于全局合成零能量条件。已有许多研究在黎曼流形情形下证明了各种合成曲率条件的局部到整体结果，例如 Sturm [Stu06a], Villani [Vil09], Bacher–Sturm[BS10], Cavalletti–Milman [CM16], Ketterer [Ket17], ，以及 Braun [Bra23] 对这些条件所作的洛伦兹适配；我们的结果深受这些工作的启发。关于证明的结构，我们特别参照 Ketterer [Ket17]。

**定理 4.2**。 加权时空的合成 $N$-零能量条件（$M, g, e^{-V}$体积$_M$）成立，当且仅当它在局部成立。

证明。 我们先证明，对于紧支撑概率测度，全局合成NEC成立，然后将结果推广到一般情形。考虑一个零超曲面 $\mathcal{H}$ ，以及两个非因果且由零曲线连接的概率测度 $\mu_0,\ \mu_1 \in \mathcal{P}(M,\ m_{\mathcal{H}})$

且它们具有紧支撑。根据引理 2.12，只需证明对于 Π–几乎处处的 $\gamma \in \mathcal{G}($ $\mathcal{H})$ 它成立

$$\rho_t(\gamma(t))^{-\frac{1}{N}} \geq (1-t)\rho_0(\gamma(0))^{-\frac{1}{N}} + t\rho_1(\gamma(1))^{-\frac{1}{N}},$$

其中 Π 是连接 $\mu_0$ 与 $\mu_1$ 的动力学零耦合，而诸函数 $\rho_t$是所诱导的零位移插值（$\mu_t$）$_{t\in[0,1]\cdot}$ 的密度。由于该零位移插值由一族 $C^1$ 微分同胚 $T_t$所诱导，集合

$$X = \bigcup_{t\in[0,1]} \operatorname{supp} \mu_t$$

是紧致的。根据 Nomizu 和 Ozeki 的论文 [NO61], 中的定理 1，我们可以在 $M$上固定一个完备背景黎曼度量 $h$。利用紧致性，我们可以选取 $\lambda \in (0, \operatorname{diam} X)$，以及覆盖 $X$的两个有限开子集族,

$$\mathcal{U}_1 = \{U_1, \ldots, U_k\}, \qquad \mathcal{U}_2 = \{V_1, \ldots, V_k\},$$

使得 $B_\lambda(V_i) \subseteq U_i$ ，并且对一切$i = 1, \ldots, k.$，合成零能量条件对支撑于 $U_i$ 的测度成立。我们通过迭代定义来细化覆盖 $\mathcal{U}_2$

$$L_1 = U_1, \qquad L_{i+1} = U_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} (\, U_{i+1} \cap L_j \,).$$

由此，我们得到 $X$ 的一个（未必开的）覆盖，它由互不相交且测度非零的集合 $L_1, \ldots, L_k$组成。

现在，我们可以考虑 $X$中 $\mathcal{H}$ 的零测地线生成元速度的 $h$-长度的最大值；由于紧致性，该值为有限数。将其记为 $m$，并在 $[0,1]$ 中取 $\bar{t} < \bar{s}$使得 $\bar{s} - \bar{t} \leq \frac{\lambda}{m}$.。定义 $\nu_0 = \mu_{\bar{t}}$与 $\nu_1 = \mu_{\bar{s}}$；它们是由传输映射族$\widetilde{T}_\tau$零连接的非因果概率测度：$= T_{(1-\tau)\bar{t}+\tau\bar{s}} \circ T_{\bar{t}}^{-1}$，对于 $\tau \in [0,1].$我们定义

$$\nu_0^i := \frac{1}{\nu_0(L_i)} \nu_0\big|_{L_i},$$

从而

$$\nu_0 = \sum_{i=1}^{k} \nu_0(L_i)\nu_0^i.$$

若 $\mathcal{L}_i = \{\gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) :\ \gamma(0) \in L_i\}$，则动力学零耦合

$$\Pi^i = \frac{1}{\Pi(\mathcal{L}_i)} \Pi\big|_{\mathcal{L}_i}$$

对所有 $i = 1,$ ....., $k$ 诱导一个零位移插值$(\nu_\tau^i)_{\tau\in[0,1]}$，其传输映射由 $\widetilde{T}_\tau\Big|_{L_i}$ 给出。利用 $\widetilde{T}_\tau$ 是从 $\nu_0$ 的支撑集到 $\nu_\tau$ 的支撑集的微分同胚这一事实，容易验证

$$\nu_\tau^i = \frac{1}{\nu_0(L_i)} \nu_\tau\big|_{\widetilde{T}_\tau(L_i)},$$

因此

$$\nu_\tau = \sum_{i=1}^{k} \nu_0(L_i)\nu_\tau^i, \ \text{ and } \ \eta_\tau = \sum_{i=1}^{k} \nu_0(L_i)\eta_\tau^i,$$

其中 $\eta_\tau$ 是 $\nu_\tau$ 的密度，而 $\eta_\tau^i$ 是 $\nu_\tau^i.$ 的密度。 $\nu_1^i$ 的支撑集包含于$\sim T_1(L_i)$中，因此可通过沿着支撑在 $[\bar{t}, \bar{s}]$上的 $\mathcal{H}$ 的零测地生成线各线段移动 $L_i$ 得到。由于根据假设条件$\bar{s} - \bar{t} \leq \frac{\lambda}{m}$，这些线段相对于 $h$而言比 $\lambda$短，因此 supp $\nu_1^i \subseteq B_\lambda(L_i) \subseteq U_i$。根据引理 2.12，局部合成 NEC进而推出，对于 $\Pi^i$–几乎处处的 $\gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$，有

$$\eta_\tau^i(\gamma(\tau))^{-\frac{1}{N}} \geq (1-\tau)\eta_0^i(\gamma(0))^{-\frac{1}{N}} + \tau\eta_1^i(\gamma(1))^{-\frac{1}{N}}.$$

由于 $\eta_\tau = \sum_{i=1}^k \nu_0(L_i)\eta_\tau^i$，且 $\eta_\tau^i$ 的支撑集两两不交，因此也有

$$\eta_\tau(x)^{-\frac{1}{N}} = \sum_{i=1}^k \nu_0(L_i)^{-\frac{1}{N}} \eta_\tau^i(x)^{-\frac{1}{N}}.$$

对 $i$ 求和并利用前述不等式，我们得到对于几乎处处的 $\Pi$–， $\gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$

$$\eta_\tau(\gamma(\tau))^{-\frac{1}{N}} \geq (1-\tau)\sum_{i=1}^k \nu_0(L_i)^{-\frac{1}{N}} \eta_0^i(\gamma(0))^{-\frac{1}{N}} + \tau \sum_{i=1}^k \nu_0(L_i)^{-\frac{1}{N}} \eta_1^i(\gamma(1))^{-\frac{1}{N}} =$$

$$= (1-\tau)\eta_0(\gamma(0))^{-\frac{1}{N}} + \tau\eta_1(\gamma(1))^{-\frac{1}{N}}.$$

这意味着函数 $(\bar{t},\bar{s}) \ni \tau \mapsto \eta_\tau(\gamma(\tau))^{-\frac{1}{N}}$ 是凹的，因此在分布意义下，$[\eta_\tau(\gamma(\tau))^{-\frac{1}{N}}]'' \leq$ 在 $(\bar{t},\bar{s})$ 上也小于等于 0。我们可以对不同的 $\bar{t},\bar{s}$ 重复此论证，从而得到 (0,1) 上 $\ni t \mapsto \rho_t(\gamma(t))^{-\frac{1}{N}}$，的二阶分布导数为负；这再次等价于

$$\rho_t(\gamma(t))^{-\frac{1}{N}} \geq (1-t)\rho_0(\gamma(0))^{-\frac{1}{N}} + t\rho_1(\gamma(1))^{-\frac{1}{N}},$$

正如我们所希望的那样。

现在，我们通过分析一般概率测度的情形来完成证明，这些概率测度不一定是紧支撑的。设 $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}(M,m_{\mathcal{H}})$ 是非因果的，并通过一族传输映射 $(T_t)_{t\in[0,1]}$ 零连接；设 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 是由此诱导的零位移插值。我们可以取 $M$ 的一个紧集穷竭 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，并考虑其限制

$$\mu_0^{(n)} = \frac{1}{\mu_0(B_n)}\mu_0\big|_{B_n}.$$

映射 $T_t$ 的限制对每个 $n \in \mathbb{N}$ 诱导出一个零位移插值 $\left(\mu_t^{(n)}\right)_{t\in[0,1]}$ 。。与之前一样，利用 $T_t$ 是一个微分同胚，我们得到对所有 $t \in [0,1]$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，均有

$$\mu_t^{(n)} = \frac{1}{\mu_0(B_n)}\mu_t\big|_{T_t(B_n)}, \qquad \rho_t^{(n)} = \frac{1}{\mu_0(B_n)}\rho_t^{(n)}\Big|_{T_t(B_n)},$$

其中 $\rho_t^{(n)}$ 是 $\mu_t^{(n)}$. 的密度。现在，$\mu_0^{(n)}$ 和 $\mu_1^{(n)}$ 都是紧支撑的，因此沿零位移插值 ( $\mu_t^{(n)}$ )，$N$-Rényi 熵具有凸性。由引理 2.12 可得

$$\rho_t^{(n)}(\gamma(t))^{-\frac{1}{N}} \geq (1-t)\rho_0^{(n)}(\gamma(0)) + t\rho_1^{(n)}(\gamma(1))$$

对于 $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ 中 $\Pi_n$-几乎处处的曲线 $\gamma$，其中 $\Pi_n$ 是由 $(\mu_t^{(n)})_{t\in[0,1]}$ 诱导的动力学零耦合。由于 $\rho_t^{(n)}$ 逐点收敛到 $\rho_t$，且 $\Pi_n$ 的支撑集之并就是 $\Pi$ 的支撑集，我们可以取极限得到

$$\rho_t(\gamma(t))^{-\frac{1}{N}} \geq (1-t)\rho_0(\gamma(0))^{-\frac{1}{N}} + t\rho_1(\gamma(1))^{-\frac{1}{N}}$$

对 $\Pi$-几乎处处的 $\gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$。再次由引理 2.12，结论得证。 □

˜**推论 4.3** (合成零能量条件可传递到覆盖空间)。若 $\Phi : M \to M$ 是˜时空的一个覆盖空间，且 $M$ 满足合成零能量条件，则 $M$ 也满足合成零能量条件。

˜证明。这可由前一个定理立即推出：由于 $\Phi$ 是局部等距映射，$M$满足局部合成NEC，因此也满足全局合成NEC。 □

# 5 定理证明

我们现在证明合成 Gannon–Lee 定理。我们遵循 Schinnerl 与 Steinbauer [SS21], 的证明，并修改其中 $S$ 的内陷性与零能量条件发挥作用的那一步。我们改为用 Ketterer[Ket24] 中的相应结果替换那些结果。证明的结构如下：第一步是证明存在

沿正交于 $S$ 的零测地线的焦点。这是我们需要使用合成条件而非经典条件的主要之处。此后，我们基本上可以遵循 Schinnerl 与 Steinbauer [SS21], 的证明，并由于我们是在假定度量张量具有更高正则性的条件下工作而作若干简化。证明的第二步是表明集合 $\Sigma_-:=S\cup\Sigma_-$ 是紧的。然后，我们可以用一个纯粹的拓扑论证得出映射 $i_\#:\pi_1(S)\to\pi_1(\Sigma)$.的满射性

## 5.1 聚焦结果

证明这一步的关键结果由 Ketterer 在 [Ket24], 的注 4.10 中证明，但为了完整起见，我们仍给出证明，因为这是合成 Gannon–Lee 定理证明中的关键步骤，也是我们的证明与经典证明有所不同的主要之处之一。

回顾一下，给定一个紧致的非因果余维二子流形 $S\subseteq M$，其上赋有一个与 $S$ 正交的 $C^1$ 零向量场 $K_-$，对于任意 $x\in S$，我们可以考虑一条从 $p$ 出发、初速度为 $K_-(x)$ 的测地线$\gamma_x$；取 $S$ 在 $C=\bigcup_{x\in S}\operatorname{Im}\gamma_x.$ 中的一个邻域，可以据此构造零超曲面$\mathcal{H}$。根据注 2.8，我们可以选择˜重新参数化 $K_-$ $K$，使得对于充分小的 $t$，映射

$$T_t:S\to\mathcal{H},\ x\mapsto\exp_x(t\tilde{K}_-(x))$$

是到其像上的一个微分同胚。

**命题 5.1 (聚焦结果)。** 设 $(M,g,e^{-V}$体积$_M)$ 为一个满足合成意义下的 $N$-零能量条件，且具有一个紧致、非因果、类空的余维为 ˜2 子流形 $S$ 的加权时空。考虑上述的 $\mathcal{H}$、 $K_-$ 和 $T_t$，并假设 $S$ 在 $\mathcal{H}.$ 中是合成意义下未来会聚的。那么存在一个时刻 $t_0>0$，使得对于所有 $x\in S$ 以及所有测地球 $B_\delta(x)$，映射 $T_t|_{B_\delta(x)}$ 在某个 $t\in(0,t_0)$处不再是微分同胚。

证明。 考虑 $x\in S$ 和测地球 $B_\delta(x)$。设 $t_x>0$ 使得映射 $T_t$ 在 $t\in(0,t_x)$ 上是微分同胚。 考虑非因果概率测度 $\mu_0:=\frac{1}{m_\mathcal{H}}m_\mathcal{H}|_{B_\delta(x)}$ 及其诱导的零位移插值 $\mu_t:=(T_t)_{\#}\mu_0$. 最后，设 $\rho_t$ 是 $\mu_t$ 相对于 $m_\mathcal{H}$ 的密度。由引理 2.9，得到

$$m_\mathcal{H}(T_t(B_\delta(x)))=\int_{B_\delta(x)}\det DT_t(x)e^{-V\circ T_t}\mathrm{dVol}_\mathcal{H}=\int_{B_\delta(x)}\frac{\rho_0}{\rho_t\circ T_t}\mathrm{d}m_\mathcal{H}.$$

由于 $S$ 在 $\mathcal{H}$ 中未来收敛，我们得到

$$0>-\varepsilon(x)\geq\frac{1}{m_\mathcal{H}(B_\delta(x))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\int_{B_\delta(x)}\frac{\rho_0}{\rho_t\circ T_t}\mathrm{d}m_\mathcal{H}\geq\frac{1}{m_\mathcal{H}(B_\delta(x))}\int_{B_\delta(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{\rho_0}{\rho_t\circ T_t}\mathrm{d}m_\mathcal{H},$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了法图引理。

令 $\delta\downarrow0$，我们得到

$$-\varepsilon(x)\geq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{\rho_0}{\rho_t\circ T_t}=-\frac{\rho_0}{(\rho_t\circ T_t)^2}\Big|_{t=0}(\rho_t\circ T_t)'(0)=-\frac{(\rho_t\circ T_t)'(0)}{\rho_0}.$$

现在考虑函数

$$y_x(t)=[\log(\rho_t\circ T_t(x))]'=\frac{(\rho_t\circ T_t)'}{\rho_t\circ T_t}.$$

由前面的计算可得 $y_x(0)\geq\varepsilon(x)>0.$ 此外，引理 2.12 表明函数 $t\mapsto(\rho_t\circ T_t)^{-\frac{1}{N}}$ 具有凹性。为简化记号，令 $u(t):=\rho_t\circ T_t(x)$，我们得到

$$\left[(\rho_t\circ T_t)^{-\frac{1}{N}}\right]''=\frac{N+1}{N^2}u^{-\frac{1}{N}-2}(u')^2-\frac{1}{N}u^{-\frac{1}{N}-1}u''\leq0,$$

这等价于

$$u''u^{-1}-\frac{N+1}{N}\left(\frac{u'}{u}\right)^2=\frac{u''u-(u')^2}{u^2}-\frac{1}{N}\left(\frac{u'}{u}\right)^2=y_x'-\frac{1}{N}y_x^2\geq0.$$

因此，根据 Riccati 比较，我们得到 $t_x \leq \frac{N}{\varepsilon(x)}$，要完成证明，只需取

$$t_0 := \frac{N}{\min_{x\in S}\varepsilon(x)},$$

由 $S$ 的紧致性可知其定义良好。 □

注记 5.2。 前一个命题表明，对于任意 $x \in U$，映射 $T_t$ 在某个 $x$ 处不是局部微分同胚。因此，其微分 $DT_t(x)$ 是奇异的，即存在一个向量 $v \in T_xS$，使得 $DT_t(x)v = 0.$。由于向量场 $J(t) = DT_t(x)v$ 沿着 $\tilde{}$ 的零测地线 $\gamma(t) = \exp_x(tK_-(x))$ 是一个 Jacobi 场，这意味着沿着 $\gamma$ 在 $t$.处存在一个焦点。

## 5.2 因果性步骤

我们刚刚证明的聚焦结果对于证明的下一步至关重要，即证明 $\Sigma_- = \Sigma_- \cup S.$ 的紧致性。我们将 Costa e Silva–Minguzzi [CeSM20] 和 Schinnerl–Steinbauer [SS21] 中的证明改编到我们的综合框架中。在第一步中，我们利用命题 5.1 替代通过经典零能量条件得到的聚焦论证；此后，证明过程与 [CeSM20] 和 [SS21]，中的论证类似。为方便读者，我们仍将其列出。我们将使用以下关于因果曲线的结果，该结果是 O'Neill [O'N83] 中的定理 10.51。

**定理 5.3** （将零曲线扰动为类时曲线的条件）。 设 $S$ 是时空 $M$ 中的一个类空子流形，且 $\alpha$： $[0,1] \to M$ 是一条因果曲线，其中 $\alpha$（0） $\in S$。那么存在一条类时曲线 $\beta$，满足 $\beta$（0） $\in S$ 和 $\beta$（1） $= \alpha$（1），除非 $\alpha$ 在重新参数化意义下与一条从 $S$ 正交出发、且在到达 $\alpha$（1） 之前没有任何焦点的零测地线重合。

**命题 5.4** （ 的紧致性 $\Sigma_-$）。 设 （$\overline{M}$、 $g$、 $e^{-V}$体积$_M$） 是满足合成 $N$-零能量条件的 $n+1$ 维加权时空，其过去反射且零测地线完备。假设 $M$ 包含一个带有穿刺的合成渐近正则超曲面 $\Sigma$ 。那么，对于 $\Sigma$ 中任意包围曲面 $S$，都有 $\Sigma_-$ ： $= \Sigma \cup S$ 是紧致的。

证明。 考虑集合 $E^+(S) := J^+(S)\backslash I^+(S)$：根据定理 5.3，它由与 $S$ 正交且不含焦点的零测地线线段组成。因此，包含在满足 $\gamma(0) \in S$， $\gamma'(0) = K_-(\gamma(0))$ 的未来指向零测地线上的点所构成的子集 $\mathcal{H}^+ \subseteq E^+(S)$ 是相对紧的，因为它包含于紧集 $S \times [0, t_0]$ 在指数映射 $(x, t) \mapsto \exp_x(tK_-(x))$ 下的像中。这里我们利用了该映射确实定义良好这一事实，因为根据 $\tilde{}$ 零测地线完备性，对于任意 $t \in \mathbb{R}.$， $tK_-(x)$ 都属于指数映射的定义域

从现在起，证明与 [CeSM20] 和 [SS21]中的证明相同。定义 $T = \partial I^+(\Sigma_+)\backslash\Sigma_+$，并回顾一下：固定一个在 $\Sigma$ 上诱导穿刺的向量场 $X$ 后，我们得到一个连续映射 $\rho_X : M \to \Sigma$，它将点 $p \in M$ 映射到经过 $p$ 的 $X$ 的流曲线与 $\Sigma.$ 之间的唯一交点。O'Neill [O'N83]，的命题 14.31 证明了， $\rho_X$ 是一个开映射。接下来将证明分为两个步骤：

$$(1)\ \text{Compactness of } T; \qquad (2)\ \overline{\Sigma}_- = \rho_X(T).$$

**1.** 我们首先证明 $T$ 是类时不可达的。由于无时性可传递给子集，因此只需证明 $\partial I^+(\Sigma_+)$是类时不可达的。设 $x \in \partial I^+(\Sigma_+)$ 和 $y \in I^+(x)$。 我们需要证明 $y \notin \partial I^+(\Sigma_+)$。 根据时序过去的开性，存在一个包含于 $I^-(y)$ 中的 $x$ 邻域。由于 $x$ 属于 $I^+(\Sigma_+)$ 的边界， 该邻域与 $I^+(\Sigma_+)$ 有非空交集，因此有 $y \in I^+(I^+(\Sigma_+)) = I^+(\Sigma_+)$。 根据时序未来的开性，这意味着 $y \notin \partial I^+(\Sigma)$，正如我们所要证明的。

注意，根据定义， $T$ 是一个闭集，因此要证明紧致性，只需证明它包含于相对紧集 $\mathcal{H}^+.$ 中。反设存在一点 $q \in T \setminus \mathcal{H}^+$。

断言： 存在一个序列$(q_k) \subseteq I^+(S)$，满足 $q_k \to q$.
断言的证明：我们可以取一列点 $q_k \in I^+(q)$，使其收敛到 $q$，从而有$q_k \in I^+(\Sigma_+)$。记 $\alpha$ 为经过 $q$. 的 $X$ 的极大积分曲线。根据穿刺的定义， $\alpha$ 必须与 $\Sigma$ 恰好相交一次。由 $\Sigma$ 的非因果性，这个交点是 $q$ ，或者必须位于 $q$的过去：在第一种情况下，由于 $q \notin \Sigma_+$ ，我们得到 $q \in \Sigma_-$；在第二种情况下，由于 $q \notin I^+(\Sigma_+)$，我们得到 $q \in I^+(\Sigma_-)$。因此，无论哪种情况都有 $q \in I^+(\Sigma_-)$。由于 $q_k$位于 $q$的未来，这意味着 $q_k$ 的过去与 $\Sigma_-$.有非空交集。此外，它也与 $\Sigma_+$ 相交，因为 $q_k \in I^+(\Sigma_+)$。然而，集合 $I^-(q_k) \cap \Sigma$ 与 $I^-(q_k)$ 经由 $\rho_X$ 的像相同，因而是连通的，所以它必定与 $S$.相交。于是 $S \cap I^-(q_k) \neq \emptyset \Rightarrow q_k \in I^+(S)$，这就证明了该断言。

再次利用 Nomizu 和 Ozeki 论文 [NO61], 中的定理 1，我们可以在 $M$ 上固定一个完备背景黎曼度量 $h$ 。考虑一列从 $S$ 出发的未来指向、未来不可延拓的类时曲线 $\sigma_k$ : $[0, +\infty) \to M$ ，它们以 $h$ 弧长参数化，并满足 $\sigma_k(t_k) = q_k$ ，其中 $t_k > 0.$ 。由 $S$ 的紧致性可知，经过取子列后，我们可以假设 $\sigma_k$ 在紧子集上一致收敛于一条曲线 $\sigma$ : $[0, +\infty) \to M.$ 。此外，根据极限曲线定理（例如参见 Minguzzi [Min19b], 定理 2.14 ），我们还可以假设 $\sigma$ 也是一条未来指向、未来不可延拓的因果曲线。

断言：序列 $(t_k)$ 无界。
断言的证明：反设序列 $(t_k)$ 有界。再次经过取子列后，我们可以假设 $t_k \to t_0$ ，因此 $\sigma(t_0) = q.$ 。由 $T$ 的无时性，曲线 $\sigma$ 无法扰动为一条类时曲线，因此再次根据定理 5.3，它必定与一条从 $S$ 正交出射的零测地线 $\eta$ 重合（至多相差重新参数化），且该测地线在 $q = \eta(b)$ 之前不含任何焦点。初速度 $\eta'(0)$ 不可能与 $K_-(\eta(0))$ 成比例，否则便有 $q \in \mathcal{H}^+$。因此， $\eta'(0)$ 必须与 $K_+(\eta(0))$ 成比例。然而，这意味着 $\eta$ 必定会在某个时刻 $b' < b$ 进入 $I^+(\Sigma_+)$，从而有 $q \in I^+(\Sigma_+)$，这与 $q \in T.$ 矛盾。这证明 $t_k$ 必须无界；经过取子列后，我们可以假设 $t_k \to +\infty.$

现在注意到，由于 $\sigma$ 定义在整个射线 $[0, +\infty)$ 上，它不可能包含在 $\partial I^+(S)$ 中；否则，它将与一条从 $S$ 沿 $K_-$ 方向正交射出的零测地线在重新参数化后重合，而我们已经证明，所有这类曲线都会在有限时间内进入 $I^+(S)$。于是，存在 $s > 0$ 使得 $\sigma(s) \in I^+(S)$。现在令 $U$ 为 $\sigma(s)$ 的一个开邻域，它包含于 $I^+(S)$ 中，并令 $r$ 为 $I^-(\sigma(s)\ U)$ 中的一点。由于 $\sigma_k(s) \to \sigma(s)$ 且 $t_k \to +\infty$，当 $k$ 充分大时，我们有 $\sigma_k(s) \in U$ ，并且 $\sigma_k(s) \in I^-(\sigma_k(t_k))$。因此，最终有 $r \ll \sigma_k(s) \leq \sigma_k(t_k) = q_k.$ 。取极限可得 $q \in I^+(r)$。由 $M$ 的过去反射性可得 $r \in I^-(q)$，进而推出 $r \in \overline{I^-(q)} \cap I^+(S)$；这里我们用到了 $r \in I^-(\sigma(s)\ U) \subseteq \overline{U \subseteq I^+(S)}$。这意味着，在 $I^-(q)$ 中存在一个趋近于 $r \in I^+(S)$ 的点序列。由 $I^+(S)$ 的开性可知，这意味着 $I^-(q) \cap S \neq \emptyset$ ，因此 $q \in I^+(S) \subseteq I^+(\Sigma_+)$。这与 $q \in T$ 矛盾，从而证明了 $T$ 的紧致性。

**2.** 我们通过证明 $\Sigma_- = \rho_X(T)$。 来完成证明。我们分别证明两个相反的包含映射。

我们首先证明 $\rho_X(T) \subseteq \Sigma_-.$ 假设存在一个点 $q \in \rho_X(T) \setminus \Sigma_- \subseteq \Sigma \setminus \Sigma_- = \Sigma_+.$ 那么存在一个点 $q' \in T$，它位于 $X$ 经过 $q \in \Sigma_+.$ 的流曲线 $\eta$ 上。由于 $X$ 是未来指向的，这意味着要么 $q' \in I^+(\Sigma_+)$，要么 $q' \in I^-(\Sigma_-)$。第一种情况与 $q' \in T$ 矛盾，因为 $T$ 包含于 $\partial I^+(\Sigma_+)$中，而后者与$I^+(\Sigma_+)$不相交；第二种情况同样荒谬，因为 $q' \in T \subseteq J^+(\Sigma_+)$，因此，将从 $\Sigma_+$ 到 $q'$ 的未来指向因果曲线与 $\eta$ 连接起来，我们将得到一条两次与 $\Sigma_+$相交的因果曲线，这与 $\Sigma.$ 的无因果性矛盾

对于反向包含，我们首先注意到，由于 $S \subset T,$ ，我们有 $S = \rho_X(S) \subseteq \rho_X(T)$。因此，我们得到 $\Sigma_- \setminus \rho_X(T) \subseteq \Sigma_-.$ 反设 $\Sigma_- \setminus \rho_X(T) \neq \emptyset$。那么存在一点 $p \in \partial_\Sigma \rho_X(T) \cap \Sigma_-,$ ，其中我们用 $\partial_\Sigma$ 表示集合 $\Sigma,$ 在赋予子空间拓扑后所得空间的拓扑边界。由 $T$的紧致性可知， $p \in \rho_X(T)$，因此存在一点 $p' \in T$使得 $p = \rho_X(p')$。 此外$p' \notin S$ ，否则我们就会有 $p = p' \in S \cap \Sigma_- = \emptyset.$

现在注意到， $T$ 的边缘包含于 $S$中。事实上，若 $x \in T \setminus S$，我们可以选取一个

$M$ 中 $x$ 的一个开邻域 $U$，使其与 $S$不相交。很容易证明，

$$I^+(x,U)\subseteq I^+(\Sigma),\qquad I^-(x,U)\subseteq M\setminus\overline{I^+(\Sigma)}$$

（参见 Galloway [Gal14], 引理 3.2）。因此，$U$中任何连接 $I^-(x,\ U)$和$I^+(x,\ U)$的曲线都必与 $T$相交，这证明了 $x\notin$边缘$(T)$。根据命题 2.3，这意味着 $T\setminus S$ 是一个拓扑超曲面，并且我们可以在 $M$ 中选取 $p'$的一个开邻域 $V_0$，使其满足 $\rho_X(V_0)\subseteq\Sigma_-$，$V_0\cap\Sigma=\emptyset$，且 $V_0\cap T$在 $T\setminus S$ 中是开集，并与 $\mathbb{R}^n$.的一个开子集同胚

若将 $X$的流记为 $\Psi$，我们可以在 $M$ 中选取 $p'$ 的一个开邻域 $U_0$ 和一个实数 $\varepsilon>0$，使其满足 $\Psi(U_0\times(-\varepsilon,\ \varepsilon))\subseteq V_0$。现在，由于 $T$的无时性，映射$\Psi_0=\Psi|_{U_0\cap T\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)}$是单射。因此，令 $W:=\mathrm{Im}\Psi_0$，根据区域不变性定理，$\Psi_0$ 是到 $W$ 上的同胚，且 $W$ 是开集。现在终于可以导出一个矛盾：我们有 $p\in\rho_X(U_0\cap T)=\rho_X(W)$，它由 $\rho_X$的开性可知是开集，因此 $p\in$int$(\rho_X(T))$，这与 $p\in\partial_\Sigma\rho_X(T)$相矛盾。 □

## 5.3 拓扑学方面

最后，我们可以采用 Schinnerl 和 Steinbauer 在 [SS21] 中使用的同一拓扑论证完成证明。唯一的区别在于，我们需要应用定理 4.2 中证明的局部到整体结果，以证明合成零能量条件能够传递到覆盖时空；而在经典情形下，这一点显而易见，因为里奇曲率是一个局部对象。我们给出这一步的完整证明，以说明我们为何以及在何处需要局部到整体性质。

首先固定一些记号。记 $j$ 为 $M$ 中 $S$ 的包含映射，并令 $\Phi:M\to M$ 为 $M$ 的一个满足 $\Phi_\#(\pi_1(M))=j_\#(\pi_1(S))$ 的连通光滑覆盖。此外，记 $m$ 为 $M$.中 $\Sigma$ 的包含映射。由于穿刺向量场 $X$ 处处不为零，我们可以固定一个完备背景黎曼度量，并据此将其归一化。这将得到一个完备向量场，其流曲线与每个 $\Sigma$. 恰好相交一次。其流映射给出一个微分同胚 $M\to\Sigma\times\mathbb{R}$，因此诱导映射 $m_\#:\pi_1(\Sigma)\to\pi_1(M)$ 是一个同构。现在证明 $\tilde\Sigma:=\Phi^{-1}(\Sigma)$ 是连通的。由于限制映射 $\Phi|_{\tilde\Sigma}$ 仍然是一个覆盖，只需证明，点 $x\in\Sigma$ 的原像中的任意两点都属于

$\tilde\Sigma$ $\tilde x_1\ \tilde x_2\in\Phi^{-1}\ x$ $\tilde\gamma$ 的同一个连通分支。若，()，我们可以用 $M$ 中的一条路径将它们连接起来，该路径在 $x$ 上投影为 $M$ 中的一个环路 $\gamma$。由于 $\pi_1(M)\cong\pi_1(\Sigma)$，环路 $\gamma$ 与 $\Sigma$ 中的一个环路同伦；后者又可提升为 $\Sigma$ 中的一条路径，从而连接 $\tilde x_1$ 和 $\tilde x_2$。

**引理 5.5.** 覆盖 $\Phi|_{\tilde\Sigma}$ 是平凡的。

证明。首先注意，由于 $S$ 将 $\Sigma$ 分成两个连通分支，存在一个嵌入 $F:S\times(-1,1)\to\Sigma$，满足 $F(S\times\{0\})=S$且 $F(S\times(0,1))\subseteq\Sigma_-$.。令$U_F^-:=F(S\times(0,1))$，且 $W:=U_F^-\cup S\cup\Sigma_+$.。我们有 $W$通过变形收缩到 $\Sigma_+$，因此 $\pi_1(W)\cong\pi_1(\Sigma_+)$。现在考虑 $\Phi^{-1}(W)$ ·的一个连通分支 $\tilde W$。限制映射 $\Phi|_{\tilde W}:W\to W$ 仍是一个覆盖映射；下面证明它实际上是一个微分同胚。由于它是满射局部微分同胚，只需证明它是单射。

令 $\tilde p,\tilde q\in W$ 满足 $\Phi(\tilde p)=\Phi(\tilde q)=:p\in W.$。由 $W$ 的连通性，存在一条路径 $\tilde\alpha:[0,1]\to W$，满足 $\tilde\alpha(0)=\tilde p$, $\tilde\alpha(1)=\tilde q$；其投影 $\alpha:=\Phi\circ\tilde\alpha$ 是$W$中的一个环路。由于 $\pi_1(W)\cong\pi_1(\Sigma_+)\cong\pi_1(S)$（同构由包含映射诱导），$\alpha$与 $S.$ 中的一个环路同伦。然而，由于 $\Phi_\#(\pi_1(M))=j_\#(\pi_1(S))$，我们有 $\alpha$ 实际上提升为 $M.$ 上的一个闭环路。根据提升的唯一性，给定一个固定的基点，这意味着 $\tilde\alpha$ 是一个环路，即 $\tilde p=\tilde q.$

现在反设 $\Phi|_\Sigma$ 是一个非平凡覆盖。由于 $S$ 包含于 $W$中，原像 $\Phi^{-1}(S)$ 有多个连通分支，这些连通分支均 分离 $\Sigma$，并且通过 $\Phi.$ 与 $S$ 微分同胚。设 $S_1$ 和 $S_2$ 是其中两个这样的连通分支，并令 $\tilde W_1$、$\tilde W_2$ 分别为 $\Phi^{-1}(W)$ 中包含它们的连通分支。每个 $W_i$ 都包含 $\Sigma_+$，的一个副本，我们将其记为 $C_i$。对于 $i=1,\ 2$，我们有 $C_i$ 在 $\tilde W_i.$中是非紧且闭的。定义 $\Sigma_-^{(1)}:=\tilde\Sigma\setminus\tilde C_1.$。关于 $M,\ \Sigma,\ S,\ \Sigma_-$ 的所有假设，对 $\tilde M,\ \tilde\Sigma,\ \tilde S_1$和 $\Sigma_-^{(1)}$ 也分别成立；事实上，合成 $N$-零能量条件

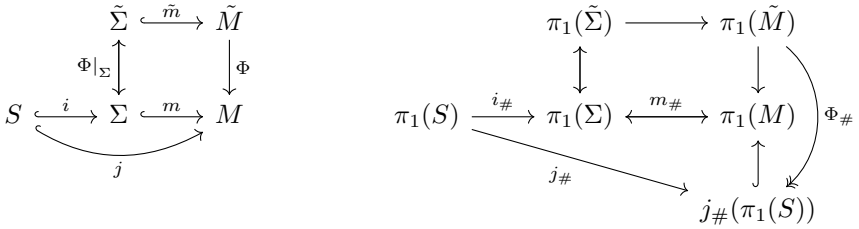
˜根据推论 4.3得以提升，假设合成 Gannon–Lee 定理的 $M$ 满足过去反射性，其他所有假设都是局部的。因此，我们可以应用命题 5.4，得到 $\Sigma^{(1)}_{-} \cup \tilde{S}_1$ 是紧的。然而，由于 $\tilde{W}_1 \cap \tilde{W}_2 = \emptyset$，我们有

$$\tilde{C}_2 \subseteq \tilde{W}_2 \subseteq \tilde{\Sigma} \setminus \tilde{W}_1 \subseteq \tilde{\Sigma} \setminus \tilde{C}_1 \subseteq \tilde{S}_1 \cup \Sigma^{(1)}_{-}.$$

因此，紧集 $\tilde{S}_1 \cup \Sigma^{(1)}_{-}$ 包含闭的非紧子集 $\tilde{C}_2$，这就产生了矛盾。

□

现在，定理 3.11 的证明结论很容易得出。我们有以下交换图：




令 $y \in \pi_1(\Sigma)$。由交换性可知

$$m_\#(y) = \left(\Phi \circ \tilde{m} \circ \Phi\big|_\Sigma{}^{-1}\right)_\# (y) = \Phi_\# \left(\tilde{m} \circ \Phi\big|_\Sigma{}^{-1}\right)_\# (y) \in j_\#(\pi_1(S)).$$

因此，存在一个元素 $x \in \pi_1(S)$，使得 $m_\#(y) = j_\#(x)$。由于 $j = m \circ i$，we 得到

$$m_\#(y) = m_\#(i_\#(x)).$$

由 $m_\#$ 的单射性可知 $y = i_\#(x)$，这证明了 $i_\#$ 的满射性，因为 $y$ 是任意的。

# 参考文献


[BO24] Mathias Braun 与 Shin-ichi Ohta。芬斯勒时空上的最优传输与类时下界里奇曲率界。美国数学会会刊，377(5):3529–3576，2024年。[Bra23]Mathias Braun。洛伦兹空间上的 R´enyi 熵。类时曲率-维数条件。纯粹与应用数学杂志 *(9)*，177:46–128，2023年。[BS10] Kathrin Bacher 与 Karl-Theodor Sturm。度量测度空间上曲率-维数条件的局部化与张量化性质。泛函分析杂志，259(1):28–56，2010年。[CEMS01] Dario Cordero-Erausquin、Robert J. McCann 与 Michael Schmuckenschl¨ager。一种 `a la Borell、Brascamp 与 Lieb 的黎曼插值不等式。数学发明，146(2):219–257，2001年。[CeS10] I. P. Costa e Silva。论高维情形下的 Gannon-Lee 奇点定理。*Classical Quantum Gravity*，27(15):155016，13，2010年。[CeSM20] Ivan P. Costa e Silva 与 Ettore Minguzzi。关于覆盖时空上因果条件的一个注记。*Classical Quantum Gravity*，37(22):227001，12，2020年。[CM16]Fabio Cavalletti 与 Emanuel Milman。曲率-维数条件的整体化定理。数学发明，226:1–137，2016年。[CM22] Fabio Cavalletti 与 Andrea Mondino。类时里奇曲率界的洛伦兹合成理论综述。广义相对论与引力，54(11):39，2022年。编号 137。

[CM24] Fabio Cavalletti 与 Andrea Mondino。洛伦兹合成空间中的最优传输、合成类时里奇曲率下界及其应用。《剑桥数学杂志》，12(2):417–534，2024年。

[CMM25a] Fabio Cavalletti、Davide Manini 和 Andrea Mondino。《合成零超曲面的几何》。预印本，arXiv:2506.04934 [math.DG] (2025)，2025年。

[CMM25b]Fabio Cavalletti、Davide Manini与Andrea Mondino。零超曲面上的最优传输与零能量条件。《数学物理通讯》，406(9):62，2025年。标识/编号212。[Gal83] Gregory J. Galloway。极小曲面、空间拓扑与时空中的奇点。《物理学杂志A辑》，16(7):1435–1439，1983年。[Gal14] Gregory J. Galloway。洛伦兹因果性札记。ESI-EMS-IAMP数学相对论暑期学校，2014年。[Gan75] Dennis Gannon。非单连通时空中的奇点。《数学物理杂志》，16(12):2364–2367，1975年。[Gan76] Dennis Gannon。论类空超曲面的拓扑、奇点与黑洞。《广义相对论与引力》，7(2):219–232，1976年。[GT87] Robert Geroch与Jennie Traschen。广义相对论中的弦及其他分布源。《物理评论D辑》，36:1017–1031，1987年8月。[Haw67] Stephen W. Hawking。宇宙学中奇点的出现。其三：因果性与奇点。《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》，300，1967年。[HE73] S. W. Hawking与G. F. R. Ellis。时空的大尺度结构，剑桥数学物理专著第1卷。剑桥大学出版社，伦敦—纽约，1973年。[HP70] S. W. Hawking与R. Penrose。引力坍缩与宇宙学中的奇点。《伦敦皇家学会会刊A辑》，314:529–548，1970年。[Ket17] Christian Ketterer。论具有可变曲率界的度量测度空间的几何。《几何分析杂志》，27(3):1951–1994，2017年。[Ket24] Christian Ketterer。借助熵的位移凸性刻画零能量条件。《伦敦数学会杂志》（2），109(1):论文编号e12846，24，2024年。[KS18] Michael Kunzinger与Clemens S¨amann。洛伦兹长度空间。《整体分析与几何年刊》，54(3):399–447，2018年。[Lee76] C. W. Lee。广义相对论中柯西超曲面拓扑的一个限制。《数学物理通讯》，51(2):157–162，1976年。[LV09] John Lott与C´edric Villani。经由最优传输得到的度量测度空间的里奇曲率。《数学年刊》（2），169(3):903–991，2009年。[McC94] Robert John McCann。相互作用气体与平衡晶体的凸性理论。第163页，1994年。博士论文——普林斯顿大学。[McC20] Robert J. McCann。玻尔兹曼熵的位移凸性刻画广义相对论中的强能量条件。《剑桥数学杂志》，8(3):609–681，2020年。[McC24] Robert J. McCann。合成零能量条件。《数学物理通讯》，405(2):论文编号38，24，2024年。[Min19a] E. Minguzzi。洛伦兹因果理论。《相对论活评论》，22:202，2019年。标识/编号3。

[Min19b] Ettore Minguzzi。闭锥结构的因果理论及其应用。《数学物理评论》，31(5):1930001，139，2019年。[MS23] Andrea Mondino与Stefan Suhr。广义相对论爱因斯坦方程的一种最优传输表述。《欧洲数学会杂志》（JEMS），25(3):933–994，2023年。[NO61] Katsumi Nomizu与Hideki Ozeki。完备黎曼度量的存在性。《美国数学会会刊》，12:889–891，1961年。[O'N83] Barrett O'Neill。半黎曼几何，纯粹与应用数学第103卷。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers],纽约，1983年。及其在相对论中的应用。[OV00] F. Otto与C. Villani。Talagrand不等式的推广及其与对数 Sobolev 不等式的联系。《泛函分析杂志》，173(2):361–400，2000年。[Pen65] Roger Penrose。引力坍缩与时空奇点。《物理评论快报》，14:57–59，1965年。[Sen98] Jos´e M. M. Senovilla。奇点定理及其推论。《广义相对论与引力》，30(5):701–848，1998年。[SG15] Jos´e M. M. Senovilla与David Garfinkle。1965年彭罗斯奇点定理。Classical Quantum Gravity，32(12):124008，45，2015年。[SS21] Benedict Schinnerl与Roland Steinbauer。关于Gannon-Lee 定理的一个注记。《数学物理快报》，111(6):论文编号142，17，2021年。[Ste23] Roland Steinbauer。广义相对论的奇点定理及其低正则性推广。《德国数学会年报》，125(2):73–119，2023年。[Stu06a] Karl-Theodor Sturm。论度量测度空间的几何。I。《数学学报》，196(1):65–131，2006年。[Stu06b] Karl-Theodor Sturm。论度量测度空间的几何。II。《数学学报》，196(1):133–177，2006年。[Vil09]C´edric Villani。最优传输，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften第338卷 *[数学科学基本原理]*。Springer-Verlag，柏林，2009年。旧与新。[vRS05] Max-K. von Renesse与Karl-Theodor Sturm。传输不等式、梯度估计、熵与里奇曲率。《纯粹与应用数学通讯》，58(7):923–940，2005年。