非交换 Jordan 超代数的代数与几何分类 *

Hani Abdelwahab†、**Ivan Kaygorodov**‡ **和 Abror Khudoyberdiyev** §

摘要：本文给出了复数3维非交换 *Jordan* 超代数的代数与几何分类。特别地，我们得到了3维 *Kokoris* 超代数和标准超代数的代数与几何分类；此外，基于适当超代数之间的一一对应，我们还对一般泊松-*Jordan* 超代数和一般泊松超代数进行了分类。作为附带结果，我们给出了3维反交换超代数簇及其主子簇的代数与几何分类：李、马尔采夫、二元李、托特卡拉、反交换 $\mathfrak{CD}$-、 $\mathfrak{s}_4$-、反交换终端超代数、反交换保守超代数和反交换准保守 (刚性) 超代数。

关键词： 超代数，非交换*Jordan*代数，反交换代数，代数分类，几何分类。

MSC2020：17A30（主要）；17A70、17A15、14L30（次要）。

arXiv:2602.14248v1 [math.RA] 15 Feb 2026

目录

1 超代数的代数分类 4

1.1 预备知识：代数分类方法.4 1.2 类型 (1,2) 的非交换 Jordan 超代数.6 1.2.1 类型 (1,2) 的反交换超代数.7 1.2.2 分类定理 A1.11 1.2.3 定理 A1 的证明.11 1.3 类型 (2,1) 的非交换 Jordan 超代数.15 1.3.1 类型 (2,1) 的反交换超代数.15 1.3.2 分类定理 A2.17 1.3.3 定理 A2 的证明.17 1.4 推论.21 1.4.1 Kokoris超代数.21 1.4.2 结合超代数.21 1.4.3 标准超代数.22 1.4.4 反交换超代数.22

2 The 超代数的几何分类 2 **7**

2.1 预备知识：退化与几何分类.27 2.2 反交换超代数.28 2.3 Kokoris超代数.31 2.4 结合超代数.32 2.5 标准超代数.33 2.6 非交换 Jordan 超代数.34

*本研究得到 FCT 2023.08031.CEECIND、UIDB/00212/2023 和 UIDP/00212/2023 的资助。

†曼苏拉大学数学系，埃及曼苏拉；haniamar1985@gmail.com

‡CMA-UBI，贝拉因特里奥尔大学，葡萄牙科维良；kaygorodov.ivan@gmail.com §乌兹别克斯坦科学院数学研究所，乌兹别克斯坦塔什干；乌兹别克斯坦国立大学，乌兹别克斯坦塔什干；khabror@mail.ru

引言

由一族多项式恒等式定义的某个簇中，维数为n 的代数的代数分类（在同构意义下），是非结合代数理论中的一个经典问题，参见 [1, 18]。关于不同结合与非结合代数簇中小维数代数的代数分类，已有许多相关成果。自 20 世纪 70 年代以来，由一族多项式恒等式定义的代数簇的变形与几何性质一直是研究对象，参见 [2, 3, 6, 7, 9, 18, 21, 24, 25, 27] 及 [30, 31, 38]中的参考文献。Burde 和 Steinhoff 构造了 3 维和 4 维李代数簇的退化图 [9]。Grunewald 和 O'Halloran 研究了 5 维幂零李代数簇的退化 [24]。

非交换约旦代数由 Albert 在 [4]中引入。他指出，交替代数与 Jordan代数的结构理论具有许多共同的优良性质，因此自然可以猜想，这些代数属于一个具有类似理论的更一般的类。于是，他引入了由约旦恒等式和柔性恒等式定义的非交换约旦代数簇。也就是说，非交换约旦代数簇由以下恒等式定义：

$$x(yx) \quad = \quad (xy)x, \quad x^2(yx) \quad = \quad (x^2y)x.$$

非交换约旦代数这一类的范围十分广泛：例如，除了替代代数和 Jordan 代数外，它还包括拟结合代数、拟替代代数、二次柔性代数以及所有反交换代数。然而，这一类代数的结构理论远不完善。尽管如此，关于非交换约旦代数和超代数结构理论的研究仍取得了一些进展（例如参见 [10, 11, 32, 36, 37, 39, 40, 42–47, 50]）。Schafer 在 [47] 中首次提出了零特征下非交换约旦代数的结构理论。Kleinfeld 和 Kokoris 证明，在特征为零的域上，有限维的单柔性幂结合代数是非交换 Jordan 代数 [35]。McCrimmon 在一篇论文中给出了非交换约旦代数的坐标化定理 [39]。Shestakov 和 Schafer 在论文 [48, 50] 中研究了具有附加恒等式 $\big([x、y], y、y\big) = 0$ 的非交换约旦代数。Skosyrskiĭ [49] 研究了强素非交换约旦代数。Elduque、Kamiya 和 Okubo 建立了非交换约旦代数与 $(-1,-1)$-平衡 Freudenthal Kantor 三元系之间的联系 [20]。Cabrera Serrano、Cabrera García 和 Rodríguez Palacios 研究了素及半素非交换约旦代数的乘法代数 [10, 11]。Jumaniyozov、Kaygorodov 和 Khudoyberdiyev 对复四维幂零非交换约旦代数进行了分类 [28]；Abdelwahab、Abdurasulov 和 Kaygorodov 对复三维非交换约旦代数进行了分类 [1]。目前，非结合代数主簇的超推广研究受到了一定关注 [3, 5, 6, 8, 13, 14, 16, 18, 19, 26, 30, 34]。非交换 Jordan 超代数方面也取得了一些成果。具体而言，Pozhidaev 和 Shestakov 在 [44–46] 中对所有有限维单非交换 Jordan 超代数进行了分类；Kaygorodov、Popov 和 Lopatin 研究了单非交换 Jordan 超代数的结构 [32]；Popov 在 [42, 43] 中描述了单非交换 Jordan 超代数的表示。

本文对若干著名簇中的3维超代数进行了完整分类。首先，我们提出一种对非交换 Jordan 超代数进行分类的方法 (第 1 节。1)。随后，我们在定理 9 中得到反交换三维超代数（类型（1，2））, 并在定理 11 中得到反交换三维超代数（类型 (2, 1)）。本文的结果对最重要的三维反交换超代数子类进行了分类：因此，李、马尔采夫、二元李、托特卡拉、 $\mathfrak{CD}$-、$\mathfrak{s}_4$-、端代数、保守和拟保守 (刚性) 超代数的分类均已得到 (第 1.4 节。4)。作为推论，我们证明了三维二元李超代数的 Grishkov–Shestakov猜想 (推论 22)：不存在非平凡的复3维单二元李超代数。本文的主要定理 (定理 A1 和定理 A2) 分别见第 1.2.2 节和第 1.3.2 节。它们给出了三维非交换 Jordan 超代数的完整分类。此外，非交换 Jordan 超代数的分类还给出了另外两个重要子簇中的超代数分类：Kokoris超代数 (定理 12 和 13) , 以及标准超代数 (定理 17 和 18)。

本文第二部分致力于描述所述超代数簇中的不可约分支。具体而言，我们的结果可概括于下表¶ ‖：

超代数 / 型	类型 (1, 2)	(2, 1)	(3, 0)
Lie	$4-2-1$	$3-2-1$	$6-2-1$
马尔采夫	$5-2-1$	$3-3-2$	$6-2-1$
二元李	$5-5-4$	$4-3-2$	$6-2-1$
托特卡拉	$4-3-2$	$4-2-2$	$8-1-1$
$\mathfrak{aCD}$-	$4-3-2$	$3-3-2$	$6-2-1$
$\mathfrak{s}_4$-	$4-3-2$	$4-2-1$	$9-1-0$
$\mathfrak{a}$-终端	$4-3-2$	$3-2-1$	$6-2-1$
反交换	$7-1-0$	$6-1-0$	$9-1-0$
AssCom	$3-4-4$	$4-2-2$	$9-1-1$
Jordan	$3-7-7$	$4-7-7$	$9-5-5$
Kokoris	$7-6-3$	$6-5-3$	$9-5-3$
结合	$4-12-10$	$5-13-13$	$9-8-7$
标准	$4-16-14$	$5-22-22$	$9-14-13$
NCJ	$7-9-3$	$6-10-4$	$9-7-4$

我们还要记住以下包含关系：

$$\text{Lie} \subset \begin{matrix}\text{马尔采夫}\\ \mathfrak{aCD}\text{-}\\ \text{托特卡拉}\\ \mathfrak{s}_4\text{-}\\ \mathfrak{a}\text{-terminal}\end{matrix} \subset \text{二元李} \subset \text{反交换} \subset \begin{matrix}\text{Kokoris}\\ \text{Jordan}\\ \text{AssCom}\\ \text{结合}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{NCJ}\\ \cup\\ \text{标准}\end{matrix}$$

¶类型 (3,0) 的情况相关信息见 [1, 27]; 关于结合交换代数和 Jordan 超代数，请参见 [6]。

‖“$i-j-k$”表示相应的超代数簇为i维，具有j 个不可约分支和k 个刚性超代数。

1 超代数的代数分类

定义1. 域 $\mathbb{C}$ 上带有 $\mathbb{Z}_2$-分次的超代数 $\mathrm{A}=\mathrm{A}_0\oplus\mathrm{A}_1$ 称为非交换约旦超代数，如果其乘法满足以下两个超恒等式：

$$(xy)z-x(yz)\;=\;-\big(-1\big)^{|x||y|+|y||z|+|z||x|}\big((zy)x-z(yx)\big),$$

$$\big((xt)(yz)-((xt)y)z\big)+\big(-1\big)^{|x||t|}\big((tx)(yz)-((tx)y)z\big)+$$

$$\big(-1\big)^{|x|(|y|+|z|+|t|)+|z||y|}\big((tz)(yx)-((tz)y)x\big)+\big(-1\big)^{|y||z|+|z||t|+|t||y|}\big((xz)(yt)-((xz)y)t\big)+$$

$$\big(-1\big)^{|x|(|y|+|z|+|t|)+|z|(|t|+|y|)}\big((zt)(yx)-((zt)y)x\big)+\big(-1\big)^{|z|(|x|+|y|+|t|)+|t||y|}\big((zx)(yt)-((zx)y)t\big)\;=\;0.$$

对所有齐次元素 x、y、$z\in\mathrm{A}$，其中 $|x|$ 表示 x 的次数（“0”（偶元素），“1”（奇元素））。

1.1 预备知识：代数分类的方法

在本节中，我们建立一种直接的方法，用于获得定义在任意（n,m）型 Jordan 超代数上的（n,m）型非交换 Jordan 超代数结构的代数分类。

Jordan 超积和超交换子定义如下：

$$\begin{aligned}x\circ y\;&=\;\tfrac{1}{2}\big(xy+(-1)^{|x||y|}yx\big),\\ [x,y]\;&=\;\tfrac{1}{2}\big(xy-(-1)^{|x||y|}yx\big).\end{aligned}$$

超代数（A,∘）称为 A 的对称化超代数，记作 A^+。如果 A 是非交换 Jordan 超代数，则 A^+ 是 Jordan 超代数。

定义2。 超代数 $(\mathbf{P},\circ,[\cdot,\cdot])$ 称为一般泊松–约旦超代数（分别地，一般泊松超代数）**，如果 $(\mathbf{P},\circ)$ 是 *Jordan*（分别地，结合交换）超代数，$(\mathbf{P},[\cdot,\cdot])$ 是反交换超代数，并且要求这两个运算满足以下超恒等式：

$$[x\circ y,z]=(-1)^{|y||z|}[x,z]\circ y+x\circ[y,z].$$

一般泊松–约旦超代数的类别极其广泛。它包含所有泊松超代数、马尔采夫–泊松超代数和马尔采夫–泊松–约旦超代数，以及所有一般泊松超代数。

命题3。 $(\mathrm{A},\ \cdot)$ 是非交换 *Jordan* 超代数，当且仅当 $(\mathrm{A},\ \circ,\ [\cdot,\ \cdot])$ 是一般泊松–约旦超代数。

证明。 由于柔性超恒等式等价于 $[x\circ y,z]=x\circ[y,z]+(-1)^{|x||y|}y\circ[x,z]$,, 证明完毕。

□

**据我们所知，这类“结合–交换”代数由 Cannas 和 Weinstein 独立引入，并称为“近泊松代数”；Shestakov 则将其称为“广义泊松代数”（，后来 Kolesnikov、Makar-Limanov 和 Shestakov 在一篇论文中将其改称为“一般泊松代数”（2014年））。我们将采用后一种术语。

定义 4。 设$(\mathbf{P}_1,\circ_1,[\cdot,\cdot]_1)$和$(\mathbf{P}_2,\circ_2,[\cdot,\cdot]_2)$是两个一般的 *Poisson–Jordan* 超代数。线性映射 $\phi:\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_2$ 若保持乘积，则称为同态，也就是说，

$$\phi(x\circ_1 y)=\phi(x)\circ_2\phi(y),\qquad\qquad \phi([x,y]_1)=[\phi(x),\phi(y)]_2.$$

设 $(A_1,\cdot_1)$ 和 $(A_2,\cdot_2)$ 是两个非交换 Jordan 超代数，且 $(A_1,\circ_1,[\cdot,\cdot]_1)$ 和 $(A_2,\circ_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 是它们对应的一般泊松–约旦超代数。如果 $(A_1,\cdot_1)$ 和 $(A_2,\cdot_2)$ 同构，那么很容易看出，一般泊松–约旦超代数 $(A_1,\circ_1,[\cdot,\cdot]_1)$ 和 $(A_2,\circ_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 同构。反过来，我们可以证明，如果一般泊松–约旦超代数 $(A_1,\circ_1,[\cdot,\cdot]_1)$ 和 $(A_2,\circ_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 同构，那么非交换 Jordan 超代数 $(A_1,\cdot_1)$ 和 $(A_2,\cdot_2)$ 同构。因此，我们得到以下结果：

命题 5. 每个一般泊松–约旦超代数（分别地，一般泊松超代数）$(A,\circ,[\cdot,\cdot])$恰好与一个非交换约旦（分别地，*Kokoris*††）代数$(A,\cdot)$相关联。也就是说，一般泊松–约旦（分别地，一般泊松）超代数与非交换约旦（分别地，*Kokoris*）超代数之间存在双射对应。

设 $\mathbb{V}=\mathbb{V}_0\oplus\mathbb{V}_1$ 是域 $\mathbb{C}$上的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间。一个双线性映射

$$\theta:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$$

若对所有齐次元素x、$y\in\mathbb{V}$，下列分次交换条件成立，则称其为超交换的：

$$\theta(x,y)=(-1)^{|x||y|}\theta(y,x).$$

此外，若对所有齐次元素x、$y\in\mathbb{V}$，下列分次交换条件成立，则称 θ 为超反对称的：

$$\theta(x,y)=-(-1)^{|x||y|}\theta(y,x).$$

定义 6. 设$(A,\circ)$是一个 *(n，m)* 型 *Jordan* 超代数。定义$Z^2(A,A)$为所有满足以下条件的超反对称双线性映射 $\theta:A\times A\to A$的集合：

$$\theta(x\circ y,z)=(-1)^{|y||z|}\theta(x,z)\circ y+x\circ\theta(y,z).$$

对所有 x、y、$z\in A_0\cup A_1$。

注意，对于 $\theta\in Z^2(A,A)$，若我们在 A 上定义乘法 $*_\theta$

$$x*_\theta y\;=\;x\circ y+\theta(x,y)\text{ for all }x,y\text{ in }A,$$

则 $(A,*_\theta)$ 是一个型为 (n,m) 的非交换 Jordan 超代数。反之，若 $(A,\cdot)$ 是一个型为 (n,m) 的非交换 Jordan 超代数，则存在 $\theta\in Z^2(A,A)$，使得 $(A,\cdot,)\cong(A,*_\theta)$。为此，考虑由 θ 定义的超反对称双线性映射 $\theta:A\times A\to A$，其中 $\theta(x,y)=[x,y]$ 对所有x、$y\in A$ 均成立。于是 $\theta\in Z^2(A,A)$，且 $(A,\cdot,)\cong(A,*_\theta)$。

现在，设 $(A,\cdot)$ 是一个非交换 Jordan 超代数，Aut (A) 是 A 的自同构群。则 Aut(A) 在 $Z^2(A,A)$ 上的作用为

$$\big(\theta*\phi\big)(x,y)=\phi^{-1}\big(\theta\big(\phi(x),\phi(y)\big)\big),$$

对于 $\phi\in Aut(A)$，以及 $\theta\in Z^2(A,A)$。

††关于 Kokoris 代数，参见第 1.4.1 小节。

引理 7。 设 $(A,\cdot)$是一个 *Jordan* 超代数，且 θ， $\vartheta \in Z^2(A,A)$。那么，$(A,*_\theta)$与 $(A,*_\vartheta)$同构，当且仅当存在一个 $\phi \in Aut(A)$使得 $\theta * \phi = \vartheta$。

因此，我们可以按照以下三个步骤，对与给定的型为 (n,m) 的 Jordan 超代数 $(A,\circ)$ 相关联的型为 (n,m) 的非交换 Jordan 超代数进行分类：

步骤 1. 计算 $Z^2(A,A)$。

步骤 2. 求 Aut(A) 在 $Z^2(A,A)$ 上的轨道。

步骤 3. 从每个轨道中选取一个代表元 θ，然后构造非交换 Jordan 超代数 $(A,*_\theta)$。

我们引入以下记号。设

$$e_1,\ldots,e_n,e_{n+1}=f_1,\ldots,e_{n+m}=f_m,$$

是型为 (n,m) 的 Jordan 超代数 $(A,\circ)$ 的一个固定基。定义 $\Lambda^2(A,\mathbb{C})$ 为 A 上所有超反对称双线性形式构成的空间。于是

$$\Lambda^2(A,\mathbb{C})=\langle \Delta_{i,j} : 1\le i<j\le n+m\rangle \oplus \langle \Delta_{i,i} : n<i\le n+m\rangle,$$

其中 $\Delta_{i,j}$是超反对称双线性形式 $\Delta_{i,j}: A\times A\to\mathbb{C}$定义为

$$\Delta_{i,j}(e_l,e_m):=\begin{cases} 1, & \text{if } (i,j)=(l,m) \text{ and } i\neq j,\\ -(-1)^{|e_l||e_m|}, & \text{if } (i,j)=(m,l) \text{ and } i\neq j,\\ 1, & \text{if } i=l=m \text{ and } i=j>n,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

现在，如果 $\theta\in Z^2(A,A)$，那么 θ可唯一地写成$\theta(x,y)=\sum_{i=1}^{n} B_i(x,y)\,e_i$其中$B_1,B_2,\ldots,B_n$是 A 上的一列超反对称双线性形式。此外，我们可以写成$\theta=(B_1,B_2,\ldots,B_n)$。设 $\phi^{-1}\in$ Aut (A) 由矩阵 (b_{ij})给出。如果

$$(\theta*\phi)(x,y)=\sum_{i=1}^{n} B'_i(x,y)e_i, \text{ then } B'_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\phi^t B_j\phi.$$

1.2 型(1,2)的非交换 Jordan 超代数

定理 8. 设 J 是一个非平凡的 3 维 (1,2) 型 *Jordan* 超代数。则J 同构于下列超代数之一：

J_{01}	:		$e_1\circ f_1=f_2$		$f_1\circ f_2=e_1$	non − ass
J_{02}	:				$f_1\circ f_2=e_1$	ass
J_{03}	:		$e_1\circ f_1=f_2$			ass
J_{04}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$			non − ass
J_{05}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=f_1$	$e_1\circ f_2=\frac{1}{2}f_2$		non − ass
J_{06}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=f_1$			ass
J_{07}	:	$e_1\circ e_1=e_1$				ass
J_{08}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	$e_1\circ f_2=\frac{1}{2}f_2$		non − ass

J_{09}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=f_1$	$e_1\circ f_2=f_2$		ass
J_{10}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	$e_1\circ f_2=\frac{1}{2}f_2$	$f_1\circ f_2=e_1$	non − ass
J_{11}	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ f_1=f_1$	$e_1\circ f_2=f_2$	$f_1\circ f_2=e_1$	non − ass

1.2.1 (1,2)型反交换超代数

定理 9. 设 A 是一个非平凡的 3 维 (1,2) 型反交换超代数。则 A 同构于下列超代数之一:

A	:	$[e_1,f_1]$	$[e_1,f_2]$	$[f_1,f_1]$	$[f_1,f_2]$	$[f_2,f_2]$
A_{01}	:				$[f_1,f_2]=e_1$	
A_{02}	:					$[f_2,f_2]=e_1$
A_{03}	:		$[e_1,f_2]=f_1$	$[f_1,f_1]=e_1$		
A_{04}	:		$[e_1,f_2]=f_1$	$[f_1,f_1]=e_1$		$[f_2,f_2]=e_1$
A_{05}	:		$[e_1,f_2]=f_1$		$[f_1,f_2]=e_1$	
A_{06}	:		$[e_1,f_2]=f_1$			
A_{07}	:		$[e_1,f_2]=f_1$			$[f_2,f_2]=e_1$
A_{08}^{α}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=\alpha f_2$			
A_{09}^{α}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=\alpha f_2$		$[f_1,f_2]=e_1$	
A_{10}^{α}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=\alpha f_2$			$[f_2,f_2]=e_1$
$\mathrm{A}_{11}^{\alpha\neq1,\beta}$	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=\alpha f_2$	$[f_1,f_1]=e_1$	$[f_1,f_2]=\beta e_1$	$[f_2,f_2]=e_1$
$\mathrm{A}_{12}^{\alpha\neq1}$	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=\alpha f_2$		$[f_1,f_2]=e_1$	$[f_2,f_2]=e_1$
A_{13}	:	$[e_1,f_1]=f_1$		$[f_1,f_1]=e_1$		
A_{14}	:	$[e_1,f_1]=f_1$		$[f_1,f_1]=e_1$	$[f_1,f_2]=e_1$	
A_{15}^{α}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=f_1+f_2$	$[f_1,f_1]=e_1$		$[f_2,f_2]=\alpha e_1$
A_{16}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=f_1+f_2$		$[f_1,f_2]=e_1$	
A_{17}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=f_1+f_2$			
A_{18}	:	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_1,f_2]=f_1+f_2$			$[f_2,f_2]=e_1$

除以下情况外，所有列出的超代数都不同构:

$$\mathrm{A}_{08}^{\alpha}\cong\mathrm{A}_{08}^{\alpha^{-1}},\ \mathrm{A}_{09}^{\alpha}\cong\mathrm{A}_{09}^{\alpha^{-1}},\ and\ \mathrm{A}_{11}^{\alpha,\beta}\cong\mathrm{A}_{11}^{\alpha^{-1},\beta}\cong\mathrm{A}_{11}^{\alpha^{-1},-\beta}\cong\mathrm{A}_{11}^{\alpha,-\beta}.$$

证明。 设 $\theta=($<style id='4>B_1,<style id='7>B_2,<style id='10>$\mathrm{B}_3)\neq0$ 是 $\mathrm{Z}^2(\mathbb{C}^1,2,\mathbb{C}^1,2)$ 中任意一个元素。那么

$$\theta\ =\ \big(\alpha_1\Delta_{22}+\alpha_2\Delta_{33}+\alpha_3\Delta_{23},\ \alpha_4\Delta_{12}+\alpha_5\Delta_{13},\ \alpha_6\Delta_{12}+\alpha_7\Delta_{13}\big),$$

其中 α_1、.....、$\alpha_7\in\mathbb{C}$ 为某些值。自同构群 $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{C}^{1,2}\big)$ 由自同构 ϕ 组成，它们由如下形式的矩阵给出:

$$\phi=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

令 $\phi=\big(a_{ij}\big)\in\mathrm{Aut}\big(\mathbb{C}^{1,2}\big)$。则

$$\theta*\phi\ =\ \big(\beta_1\Delta_{22}+\beta_2\Delta_{33}+\beta_3\Delta_{23},\ \beta_4\Delta_{12}+\beta_5\Delta_{13},\ \beta_6\Delta_{12}+\beta_7\Delta_{13}\big),\ \text{where}$$

$$\begin{aligned}\beta_1&=a_{11}^{-1}\big(\alpha_1a_{22}^2+2\alpha_3a_{22}a_{32}+\alpha_2a_{32}^2\big),\\ \beta_2&=a_{11}^{-1}\big(\alpha_1a_{23}^2+2\alpha_3a_{23}a_{33}+\alpha_2a_{33}^2\big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_3 &= a_{11}^{-1}\left(\alpha_1 a_{22}a_{23}+\alpha_2 a_{32}a_{33}+\alpha_3 a_{22}a_{33}+\alpha_3 a_{23}a_{32}\right),\\
\beta_4 &= a_{11}\Xi\left(\alpha_4 a_{22}a_{33}-\alpha_6 a_{22}a_{23}+\alpha_5 a_{32}a_{33}-\alpha_7 a_{23}a_{32}\right),\\
\beta_5 &= a_{11}\Xi\left(\alpha_5 a_{33}^2-\alpha_6 a_{23}^2+\alpha_4 a_{23}a_{33}-\alpha_7 a_{23}a_{33}\right),\\
\beta_6 &= -a_{11}\Xi\left(\alpha_5 a_{32}^2-\alpha_6 a_{22}^2+\alpha_4 a_{22}a_{32}-\alpha_7 a_{22}a_{32}\right),\\
\beta_7 &= -a_{11}\Xi\left(\alpha_4 a_{23}a_{32}-\alpha_6 a_{22}a_{23}+\alpha_5 a_{32}a_{33}-\alpha_7 a_{22}a_{33}\right).
\end{aligned}
$$

且 $\Xi=\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)^{-1}$。由此

$$
\begin{pmatrix}\beta_4 & \beta_5\\ \beta_6 & \beta_7\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_6 & \alpha_7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.
$$

因此我们可以假设

$$
\begin{pmatrix}\alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_6 & \alpha_7\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.
$$

- $\begin{pmatrix}\alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_6 & \alpha_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。在这种情况下，我们有

$$
\begin{pmatrix}-\beta_3 & -\beta_2\\ \beta_1 & \beta_3\end{pmatrix}=\frac{1}{a_{11}}\begin{pmatrix}a_{33} & -a_{23}\\ -a_{32} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha_3 & -\alpha_2\\ \alpha_1 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.
$$

  由于 $\theta\neq 0$，我们可以假设

$$
\begin{pmatrix}-\alpha_3 & -\alpha_2\\ \alpha_1 & \alpha_3\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.
$$

  因此我们得到超代数 A_{01} 和 A_{02}。

- $\begin{pmatrix}\alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_6 & \alpha_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
  - $\alpha_1\neq 0$。令 $\lambda=\alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2$，则当 $\lambda=0$ 时 $\phi=\phi_1$，当 $\lambda\neq 0$ 时 $\phi=\phi_2$：

$$
\phi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \phi_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_3}{\alpha_1\sqrt[4]{\lambda}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}\end{pmatrix}.
$$

    于是 $\theta*\phi\in\left\{(\Delta_{22},\ \Delta_{13},\ 0),\ (\Delta_{22}+\Delta_{33},\ \Delta_{13},\ 0)\ \right\}$。因此我们得到超代数 A_{03} 和 A_{04}。

  - $\alpha_1=0,\ \alpha_3\neq 0$。我们选择 ϕ 为以下自同构：

$$
\phi=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_3^{-\frac{1}{2}} & -\frac{\alpha_2\alpha_3^{-\frac{3}{2}}}{2}\\ 0 & 0 & \alpha_3^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.
$$

    于是 $\theta*\phi=\left(\Delta_{23},\ \Delta_{13},\ 0\right)$。因此我们得到超代数 A_{05}。

– $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$。如果 $\alpha_2 = 0$，我们得到超代数 A_{06}。如果 $\alpha_2 \neq 0$，我们选取 ϕ 作为如下自同构：

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi = (\Delta_{33}, \Delta_{13}, 0)$。因此我们得到超代数 A_{07}。

- $\begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。令 ϕ 为如下自同构：

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix} \beta_4 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -\beta_3 & -\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & -a_{23} \\ -a_{32} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$。所以我们可以假设

$$\begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

因此我们得到超代数 A_{08}^1, A_{09}^1, 和 A_{10}^1。

- $\begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ with $\alpha \neq 1$.
  - $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$。我们选择 ϕ 为如下自同构：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi = (\Delta_{22} + \Delta_{33} + \beta_3 \Delta_{23}, \Delta_{12}, \alpha \Delta_{13})$。因此得到 $\mathrm{A}_{11}^{\alpha \neq 1\, \beta}$, 。

– $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$。令 $\phi = \phi_1$（若 $\alpha_3 = 0$），并令 $\phi = \phi_2$（若 $\alpha_3 \neq 0$）：

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi \in \{(\Delta_{33}, \Delta_{12}, \alpha \Delta_{13}), (\Delta_{33} + \Delta_{23}, \Delta_{12}, \alpha \Delta_{13})\}$。因此得到超代数 $\mathrm{A}_{10}^{\alpha \neq 1}$ 和 $\mathrm{A}_{12}^{\alpha \neq 1}$。

– $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$。首先假设 $\alpha = 0$。令 $\phi = \phi_1$（若 $\alpha_3 = 0$），并令 $\phi = \phi_2$（若 $\alpha_3 \neq 0$）：

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_3} \end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi \in \{(\Delta_{22}, \Delta_{12}, 0), (\Delta_{22} + \Delta_{23}, \Delta_{12}, 0)\}$。因此我们得到 A_{13} 和 A_{14}。

现在假设 $\alpha\neq 0$。若 $\alpha_3=0$，则令 $\phi=\phi_1$；若 $\alpha_3\neq 0$，则令 $\phi=\phi_2$：

$$\phi_1=\begin{pmatrix}\alpha^{-1}&0&0\\0&0&\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{\alpha\alpha_1}}\\0&1&0\end{pmatrix},\ \phi_2=\begin{pmatrix}\alpha^{-1}&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha_1}}\\0&\frac{\alpha_1}{\alpha_3\sqrt{\alpha\alpha_1}}&0\end{pmatrix}.$$

于是 $\theta*\phi\in\{(-\Delta_{33},\ \Delta_{12},\ \alpha^{-1}\Delta_{13}),(\Delta_{33}+\Delta_{23},\ \Delta_{12},\ \alpha^{-1}\Delta_{13})\}$。因此得到 $\mathrm{A}_{10}^{\alpha^{-1}}$ 和 $\mathrm{A}_{12}^{\alpha^{-1}}$。

– $\alpha_1=\alpha_2=0$。若 $\alpha_3=0$，则 $\theta=(0,\ \Delta_{12},\ \alpha\Delta_{13})$。因此得到超代数 A_{08}^{α}。若 $\alpha_3\neq 0$，我们取 ϕ 为如下自同构：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{\alpha_3}\end{pmatrix}.$$

于是 $\theta*\phi=(\Delta_{23},\ \Delta_{12},\ \alpha\Delta_{13})$。因此得到超代数 $\mathrm{A}_{09}^{\alpha\neq 1}$。

- $\begin{pmatrix}\alpha_4&\alpha_5\\\alpha_6&\alpha_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

– $\alpha_1\neq 0$。我们取 ϕ 为如下自同构：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha_1^{-\frac{1}{2}}&-\alpha_3\alpha_1^{-\frac{3}{2}}\\0&0&\alpha_1^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.$$

于是 $\theta*\phi=(\Delta_{22}+\alpha\Delta_{33},\ \Delta_{12}+\Delta_{13},\ \Delta_{13})$。因此得到超代数 A_{15}^{α}。– $\alpha_1=0$，$\alpha_3\neq 0$。我们取 ϕ 为如下自同构：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha_3^{-\frac{1}{2}}&-\frac{\alpha_2\alpha_3^{-\frac{3}{2}}}{2}\\0&0&\alpha_3^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.$$

于是 $\theta*\phi=(\Delta_{23},\ \Delta_{12}+\Delta_{13},\ \Delta_{13})$。因此我们得到超代数 A_{16}。

– $\alpha_1=\alpha_3=0$。若 $\alpha_2=0$，则得到超代数 A_{17}。若 $\alpha_2\neq 0$，我们选择 ϕ 为如下自同构：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha_2^{-\frac{1}{2}}&0\\0&0&\alpha_2^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.$$

于是 $\theta*\phi=(\Delta_{33},\ \Delta_{12}+\Delta_{13},\ \Delta_{13})$。因此我们得到超代数 A_{18}。

□

1.2.2 定理 A1 的分类

定理 A1. 设N 是一个非平凡的3维非交换 *Jordan* 超代数，其型为(1,2)。那么N 同构于定理 *8* 中列出的某个 *Jordan* 超代数、定理 *9* 中列出的某个反交换超代数，或以下超代数之一：

$\mathrm{N}_{01}^{\alpha\neq 0}$	: $e_1f_1=(1+\alpha)f_2$	$f_1e_1=(1-\alpha)f_2$	
	$f_1f_2=(\alpha+1)e_1$	$f_2f_1=(\alpha-1)e_1$	
N_{02}	: $e_1f_1=f_2$	$f_1e_1=f_2$	$f_1f_1=e_1$
	$f_1f_2=e_1$	$f_2f_1=-e_1$	
$\mathrm{N}_{03}^{\alpha\neq 0}$	: $f_1f_2=(\alpha+1)e_1$	$f_2f_1=(\alpha-1)e_1$	
N_{04}	: $f_1f_2=e_1$	$f_2f_1=-e_1$	$f_2f_2=-e_1$
N_{05}^{α}	: $e_1f_1=(1+\alpha)f_2$	$f_1e_1=(1-\alpha)f_2$	$f_1f_1=e_1$
$\mathrm{N}_{06}^{\alpha\neq 0}$	: $e_1f_1=(1+\alpha)f_2$	$f_1e_1=(1-\alpha)f_2$	$f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1$
$\mathrm{N}_{07}^{\alpha\neq 0}$	: $e_1e_1=e_1$	$e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1$	
$\mathrm{N}_{08}^{\alpha\neq 0}$	: $e_1e_1=e_1$	$e_1f_1=f_1$	$f_1e_1=f_1$
	$e_1f_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_2$	$f_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_2$	
N_{09}	: $e_1e_1=e_1$	$e_1f_1=f_1$	
	$f_1e_1=f_1$	$f_1f_1=e_1$	
$\mathrm{N}_{10}^{(\alpha,\beta)\neq 0}$	: $e_1e_1=e_1$	$e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1$	$f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1$
	$e_1f_2=\left(\frac{1}{2}+\beta\right)f_2$	$f_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\beta\right)f_2$	
N_{11}^{α}	: $e_1e_1=e_1$	$e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1$	$f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1$
	$e_1f_2=f_1+\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_2$	$f_2e_1=-f_1+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_2$	
N_{12}^{α}	: $e_1e_1=e_1$	$e_1f_1=\frac{1}{2}f_1+\alpha f_2$	$f_1e_1=\frac{1}{2}f_1-\alpha f_2$
	$e_1f_2=f_1+\frac{1}{2}f_2$	$f_2e_1=-f_1+\frac{1}{2}f_2$	$f_1f_1=-2\alpha e_1$
	$f_1f_2=e_1$	$f_2f_1=-e_1$	$f_2f_2=2e_1$

所有列出的超代数均不同构，除了：$\mathrm{N}_{03}^{\alpha}\cong\mathrm{N}_{03}^{-\alpha}$ 和 $\mathrm{N}_{10}^{\alpha\,\beta}\cong,\mathrm{N}^{\beta}{}_{,10}{}^{\alpha}$。

1.2.3 定理 A1 的证明

设 N 是一个非平凡的类型（1，2）三维非交换 Jordan 超代数。那么 N^{+} 是一个类型（1，2）的三维 Jordan 超代数。因此，我们可以假设 $\mathrm{N}^{+}\in\{\mathrm{J}_{01},。...,\mathrm{J}_{11}\}$。所以我们有以下几种情况：

I. $\mathrm{N}^{+}=\mathrm{J}_{01}$. 设 $\theta=\left(B_1,B_2,B_3\right)\neq 0$ 为 $\mathrm{Z}^2(\mathrm{J}_{01},\mathrm{J}_{01})$ 的任意元素。Th en

$$\theta=\left(\alpha_1\Delta_{22}+\alpha_2\Delta_{23},\,0,\,\alpha_2\Delta_{12}\right)\text{ for some }\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{01})$ 由 ϕ 以下列形式的矩阵给出的自同构组成：

$$\phi=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0\\0&\epsilon&0\\0&\alpha_{32}&\epsilon\alpha_{11}\end{pmatrix}:\epsilon^2=1.$$

- $\alpha_2\neq 0$。我们选择 ϕ 作为以下自同构：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}&1\end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi = (\alpha_2\Delta_{23},\ 0,\ \alpha_2\Delta_{12})$。因此我们得到超代数 $N_{01}^{\alpha\neq 0}$。

- $\alpha_2 = 0$。我们选择 ϕ 为以下自同构：

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi = (\Delta_{22},\ 0,\ 0)$。因此我们得到超代数 N_{02}。

II. $N^+ = J_{02}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3)$ 为 $Z^2(J_{02}, J_{02})$ 中的任意元素。

$$\theta = (\alpha_1\Delta_{22} + \alpha_2\Delta_{33} + \alpha_3\Delta_{23},\ 0,\ 0) \text{ for some } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(J_{02})$由自同构 ϕ 组成，它们由以下形式的矩阵给出：

$$\phi = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(J_{02})$。则 $\theta * \phi = (\beta_1\Delta_{22} + \beta_2\Delta_{33} + \beta_3\Delta_{23},\ 0,\ 0)$，其中

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\alpha_1 a_{22}^2 + 2\alpha_3 a_{22}a_{32} + \alpha_2 a_{32}^2}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_1 a_{23}^2 + 2\alpha_3 a_{23}a_{33} + \alpha_2 a_{33}^2}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \\ \beta_3 &= \frac{\alpha_1 a_{22}a_{23} + \alpha_2 a_{32}a_{33} + \alpha_3 a_{22}a_{33} + \alpha_3 a_{23}a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{pmatrix} -\beta_3 & -\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

因此，我们可以假设 $\begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$。于是得到超代数 $N_{03}^{\alpha\neq 0}$ 和 N_{04}。

III. $N^+ = J_{03}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 为 $Z^2(J_{03}, J_{03})$ 中的任意元素。Then

$$\theta = (\alpha_1\Delta_{22},\ 0,\ \alpha_2\Delta_{12}) \text{ for some } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(J_{03})$由自同构 ϕ 组成，这些自同构由以下形式的矩阵给出：

$$\phi = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{11}a_{22} \end{pmatrix}.$$

令 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}\,(J_{03})$。则

$$\theta * \phi = (\beta_1\Delta_{22},\ 0,\ \beta_2\Delta_{12}), \text{ where } \beta_1 = \alpha_1 a_{11}^{-1} a_{22}^2 \text{ and } \beta_2 = \alpha_2.$$

因此，我们得到代表元 $(\Delta_{22}、0、\ \alpha\Delta_{12})$ 和 $(0、0、\ \alpha\Delta_{12})$。因此得到超代数 N_{05}^{α} 和 $\mathrm{N}_{06}^{\alpha\neq 0}$。

IV. $\mathrm{N}^{+}=\mathrm{J}_{04}$. 设 $\theta=(B_1,B_2,B_3)$ 是 $\mathrm{Z}^2(\mathrm{J}_{04},\mathrm{J}_{04})$ 中的任意元素。则

$$\theta=(0,\ \alpha_1\Delta_{12},\ 0)\text{ for some }\alpha_1\in\mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{04})$ 由以下形式矩阵所给出的自同构 ϕ 构成：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}.$$

设 $\phi=(a_{ij})\in\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{04})$。则 $\theta*\phi=\theta$。因此，我们得到代表元$(0,\ \alpha\Delta_{12},\ 0)$。由此得到超代数 $\mathrm{N}_{07}^{\alpha\neq 0}$。

V. $\mathrm{N}^{+}=\mathrm{J}_{05}$. 设 $\theta=(B_1,B_2,B_3)\neq 0$ 是 $\mathrm{Z}^2(\mathrm{J}_{05},\mathrm{J}_{05})$ 中的任意元素。则

$$\theta=(0,\ 0,\ \alpha_1\Delta_{13})\text{ for some }\alpha_1\in\mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{05})$ 由以下形式矩阵所给出的自同构 ϕ 构成：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}.$$

设 $\phi=(a_{ij})\in\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{05})$。那么 $\theta*\phi=\theta$。因此，我们得到代表元$(0、0、\ \alpha\Delta_{13})$。由此得到超代数 $\mathrm{N}_{08}^{\alpha\neq 0}$。

VI. $\mathrm{N}^{+}=\mathrm{J}_{06}$。设 $\theta=(B_1,B_2,B_3)\neq 0$ 是 $\mathrm{Z}^2(\mathrm{J}_{06},\mathrm{J}_{06})$ 中的任意元素。那么

$$\theta=(\alpha_1\Delta_{22},\ 0,\ 0)\text{ for some }\alpha_1\in\mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{06})$ 由自同构 ϕ 组成，它们由以下形式的矩阵给出：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}.$$

设 $\phi=(a_{ij})\in\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_{06})$。那么 $\theta*\phi=(\alpha_1a_{22}^2\Delta_{22}、0、\ 0)$。因此，我们得到代表元 $(\Delta_{22}、0、\ 0)$。由此得到超代数 N_{09}。

VII. $\mathrm{N}^{+}=\mathrm{J}_{07}$。因此 $\mathrm{Z}^2(\mathrm{J}_{07},\mathrm{J}_{07})=\{0\}$。

VIII. $\mathrm{N}^{+}=\mathrm{J}_{08}$。设 $\theta=(B_1,B_2,B_3)$ 是 $\mathrm{Z}^2(\mathrm{J}_{08},\mathrm{J}_{08})$ 中的任意元素。那么

$$\theta=(0,\ \alpha_1\Delta_{12}+\alpha_2\Delta_{13},\ \alpha_3\Delta_{12}+\alpha_4\Delta_{13})\text{ for some }\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{C}.$$

自同构群 Aut(J_{08}) 由以下形式的矩阵所给出的自同构 ϕ 组成：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

且 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(J_{08})$。那么 $\theta * \phi = (0,\ \beta_1\Delta_{12} + \beta_2\Delta_{13},\ \beta_3\Delta_{12} + \beta_4\Delta_{13})$，其中

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\alpha_1 a_{22}a_{33} - \alpha_3 a_{22}a_{23} + \alpha_2 a_{32}a_{33} - \alpha_4 a_{23}a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_2 a_{33}^2 - \alpha_3 a_{23}^2 + \alpha_1 a_{23}a_{33} - \alpha_4 a_{23}a_{33}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \\ \beta_3 &= -\frac{\alpha_2 a_{32}^2 - \alpha_3 a_{22}^2 + \alpha_1 a_{22}a_{32} - \alpha_4 a_{22}a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \\ \beta_4 &= -\frac{\alpha_1 a_{23}a_{32} - \alpha_3 a_{22}a_{23} + \alpha_2 a_{32}a_{33} - \alpha_4 a_{22}a_{33}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}. \end{aligned}$$

由此可知 $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{32}a a_{22}a_{33} \end{pmatrix} a_{32}a$。因此我们可以假设

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\}.$$

于是得到超代数 $N_{10}^{\alpha\,\beta}$ 和 N_{11}^{α}。

IX. $N^+ = J_{09}$。那么 $Z^2(J_{09}, J_{09}) = \{0\}$。

X. $N^+ = J_{10}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3)$ 是 $Z^2(J_{10}, J_{10})$ 中的任意元素。那么

$$\theta = \left(-2\alpha_1\Delta_{22} + 2\alpha_2\Delta_{23} + 2\alpha_3\Delta_{33},\ \alpha_2\Delta_{12} + \alpha_3\Delta_{13},\ \alpha_1\Delta_{12} - \alpha_2\Delta_{13}\right),$$

对于某些 α_1、α_2、α_3、$\alpha_4 \in \mathbb{C}$。自同构群 Aut(J_{10}) 由自同构 ϕ 组成，这些自同构由以下形式的矩阵给出：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ where } a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = 1.$$

不失一般性，我们可以假设 $\alpha_3 \neq 0$。为说明这一点，假设 $\alpha_3 = 0$。令 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(J_{10})$。记

$$\theta * \phi = \left(-2\beta_1\Delta_{22} + 2\beta_2\Delta_{23} + 2\beta_3\Delta_{33},\ \beta_2\Delta_{12} + \beta_3\Delta_{13},\ \beta_1\Delta_{12} - \beta_2\Delta_{13}\right).$$

现在，令 $\phi = \phi_1$，若 $\alpha_2 \neq 0$；令 $\phi = \phi_2$，若 $\alpha_2 = 0$:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_1 - 1}{2} & \frac{\alpha_1 + 1}{2\alpha_2} \end{pmatrix},\ \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{\alpha_1}} \\ 0 & -\mathbf{i}\sqrt{\alpha_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $\beta_3 = 1$。因此我们可以假设 $\alpha_3 \neq 0$。取 ϕ 为如下自同构：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha_3} & 0 \\ 0 & -\alpha_2\sqrt{2\alpha_3^{-1}} & \frac{1}{\sqrt{2\alpha_3}} \end{pmatrix}.$$

于是 $\theta * \phi = \left(-2\alpha\Delta_{22} + 2\Delta_{33},\ \Delta_{13},\ \alpha\Delta_{12}\right)$。因此我们得到超代数 N_{12}^{α}

. XI. $N^+ = J_{11}$。那么 $Z^2(J_{11}, J_{11}) = \{0\}$。

1.3 型为(2,1)的非交换 Jordan 超代数

定理 10。 设**J** 是一个3维、型为(2,1)的 *Jordan* 超代数。那么**J** 同构于以下超代数之一：

$\mathbf{J}_{01}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$		$e_2\circ e_2=e_2$		ass
$\mathbf{J}_{02}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$		$e_2\circ e_2=e_2$	$e_1\circ f_1=f_1$	ass
$\mathbf{J}_{03}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$		$e_2\circ e_2=e_2$	$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	non − ass
$\mathbf{J}_{04}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$		$e_2\circ e_2=e_2$	$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$ $e_2\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	non − ass
$\mathbf{J}_{05}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$				ass
$\mathbf{J}_{06}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$			$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	non − ass
$\mathbf{J}_{07}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$			$e_1\circ f_1=f_1$	ass
$\mathbf{J}_{08}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ e_2=e_2$			ass
$\mathbf{J}_{09}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ e_2=e_2$		$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	non − ass
$\mathbf{J}_{10}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ e_2=e_2$		$e_1\circ f_1=f_1$	ass
$\mathbf{J}_{11}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ e^2=_2\frac{1}{2}e_2$			non − ass
$\mathbf{J}_{12}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ e^2=_2\frac{1}{2}e_2$		$e_1\circ f_1=\frac{1}{2}f_1$	non − ass
$\mathbf{J}_{13}$	:	$e_1\circ e_1=e_1$	$e_1\circ e^2=_2\frac{1}{2}e_2$		$e_1\circ f_1=f_1$	non − ass
$\mathbf{J}_{14}$	:	$e_1\circ e_1=e_2$				ass

1.3.1 反交换超代数的型 (2,1)

定理 11。 设**A** 是一个非平凡的3维反交换超代数，型为(2,1)。则**A** 同构于以下超代数之一：

A	:	$[e_1,e_2]$	$[e_1,f_1]$	$[e_2,f_1]$	$[f_1,f_1]$
$\mathbf{A}_{01}^{\alpha}$	:	$[e_1,e_2]=e_1$		$[e_2,f_1]=\alpha f_1$	$[f_1,f_1]=e_2$
$\mathbf{A}_{02}^{\alpha}$	:	$[e_1,e_2]=e_1$	$[e_1,f_1]=f_1$	$[e_2,f_1]=\alpha f_1$	$[f_1,f_1]=e_2$
$\mathbf{A}_{03}^{\alpha}$	:	$[e_1,e_2]=e_1$		$[e_2,f_1]=\alpha f_1$	$[f_1,f_1]=e_1$
$\mathbf{A}_{04}$	:	$[e_1,e_2]=e_1$	$[e_1,f_1]=f_1$		$[f_1,f_1]=e_1$
$\mathbf{A}_{05}^{\alpha}$	:	$[e_1,e_2]=e_1$		$[e_2,f_1]=\alpha f_1$	
$\mathbf{A}_{06}$	:	$[e_1,e_2]=e_1$	$[e_1,f_1]=f_1$		
$\mathbf{A}_{07}$	:		$[e_1,f_1]=f_1$		
$\mathbf{A}_{08}$	:		$[e_1,f_1]=f_1$		$[f_1,f_1]=e_2$
$\mathbf{A}_{09}$	:		$[e_1,f_1]=f_1$		$[f_1,f_1]=e_1$
$\mathbf{A}_{10}$	:				$[f_1,f_1]=e_1$

证明。 令 $\theta=(B_1,B_2,B_3)\neq 0$ 为 $\mathrm{Z}^2(\mathbb{C}^2,1,\mathbb{C}^2,1)$ 中的任意元素。那么

$$\theta=(\alpha_1\Delta_{12}+\alpha_2\Delta_{33},\ \alpha_3\Delta_{12}+\alpha_4\Delta_{33},\ \alpha_5\Delta_{13}+\alpha_6\Delta_{23}) \text{ for some } \alpha_1,\dots,\alpha_6\in\mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2,1)$ 由自同构 ϕ 构成，它们由以下形式的矩阵给出：

$$\phi=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}.$$

令 $\phi=(a_{ij})\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2,1)$。则

$$\theta*\phi=(\beta_1\Delta_{12}+\beta_2\Delta_{33},\ \beta_3\Delta_{12}+\beta_4\Delta_{33},\ \beta_5\Delta_{13}+\beta_6\Delta_{23}),$$

其中

$$\begin{array}{lllllllll}\beta_1 & = & \alpha_1a_{22}-\alpha_3a_{12}, & \beta_3 & = & \alpha_3a_{11}-\alpha_1a_{21}, & \beta_5 & = & \alpha_5a_{11}+\alpha_6a_{21},\\ \beta_2 & = & \frac{a_{33}^2\left(\alpha_2a_{22}-\alpha_4a_{12}\right)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, & \beta_4 & = & -\frac{a_{33}^2\left(\alpha_2a_{21}-\alpha_4a_{11}\right)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, & \beta_6 & = & \alpha_5a_{12}+\alpha_6a_{22}.\end{array}$$

由此，我们可以假设 $(\alpha_1,\alpha_3)\in\{(1,0),(0,0)\}$。

- $(\alpha_1,\alpha_3)=(1,0)$。
  - $\alpha_4\neq 0$。设 $\phi=\phi_1$ 若 $\alpha_5=0$，且 $\phi=\phi_2$ 若 $\alpha_5\neq 0$:

$$\phi_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha_2}{\alpha_4} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_4}}\end{pmatrix},\ \phi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha_5} & \frac{\alpha_2}{\alpha_4} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_4}}\end{pmatrix}.$$

    Then

$$\theta*\phi\in\{(\Delta_{12},\ \Delta_{33},\ \alpha\Delta_{23}),\ (\Delta_{12},\ \Delta_{33},\ \Delta_{13}+\alpha\Delta_{23})\}.$$

    因此我们得到超代数$\mathbf{A}_{01}^{\alpha}$ 和$\mathbf{A}_{02}^{\alpha}$。
  - $\alpha_4=0,\alpha_2\neq 0$。设 $\phi=\phi_1$ 若 $\alpha_5=0$，且 $\phi=\phi_2$ 若 $\alpha_5\neq 0$:

$$\phi_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\end{pmatrix},\ \phi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha_5} & -\frac{\alpha_6}{\alpha_5} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2\alpha_5}}\end{pmatrix}.$$

    Then

$$\theta*\phi\in\{(\Delta_{12}+\Delta_{33},\ 0,\ \alpha\Delta_{23}),\ (\Delta_{12}+\Delta_{33},\ 0,\ \Delta_{13})\}.$$

    因此我们得到超代数$\mathbf{A}_{03}^{\alpha}$ 和$\mathbf{A}_{04}$。
  - $\alpha_4=\alpha_2=0$. 若 $\alpha_5=0$，则令 $\phi=\phi_1$；若 $\alpha_5\neq 0$，则令 $\phi=\phi_2$:

$$\phi_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \phi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha_5} & -\frac{\alpha_6}{\alpha_5} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

    Then

$$\theta*\phi\in\{(\Delta_{12},\ 0,\ \alpha\Delta_{23}),\ (\Delta_{12},\ 0,\ \Delta_{13})\}.$$

    因此我们得到超代数$\mathbf{A}_{05}^{\alpha}$ 和$\mathbf{A}_{06}$。

- $(\alpha_1,\alpha_3)=(0,0)$。因此我们可以假设$(\alpha_5,\alpha_6)\in\{(1,0),(0,0)\}$。

  - $(\alpha_5,\alpha_6)=(1,0)$。若$(\alpha_2,\alpha_4)=(0,0)$，则得到超代数$\mathbf{A}_{07}$。现在假设$(\alpha_2,\alpha_4)\neq(0,0)$。若 $\alpha_2=0$，则令 $\phi=\phi_1$；若 $\alpha_2\neq 0$，则令 $\phi=\phi_2$:

$$\phi_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \phi_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{\alpha_4}{\alpha_2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\end{pmatrix}.$$

    那么 $\theta*\phi\in\{(0,\ \Delta_{33},\ \Delta_{13}),\ (\Delta_{33},\ 0,\ \Delta_{13})\}$。因此我们得到$\mathbf{A}_{08}$和$\mathbf{A}_{09}$。
  - $(\alpha_5,\alpha_6)=(0,0)$。那么我们可以假设 $(\alpha_2,\alpha_4)=(1,0)$。因此得到 $\mathbf{A}_{10}$。

□

1.3.2 分类定理 A2

定理 A2. 设 **N**是一个非平凡的3维非交换 *Jordan* 超代数，型为 (2,1)。则 **N** 同构于定理 *10* 中列出的某个 *Jordan* 超代数、定理 *11* 中列出的某个反交换超代数，或以下超代数之一：

$$
\begin{array}{lcllll}
\mathbf{N}_{01} & : & e_1e_1=e_1 & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=f_1 & \\
 & & e_2e_2=e_2 & f_1f_1=e_1 & & \\
\mathbf{N}_{02}^{\alpha\neq 0} & : & e_1e_1=e_1 & e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1 & f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1 & e_2e_2=e_2 \\
\mathbf{N}_{03}^{\alpha\neq 0} & : & e_1e_1=e_1 & e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1 & f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1 & \\
 & & e_2f_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1 & f_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1 & e_2e_2=e_2 & \\
\mathbf{N}_{04} & : & e_1e_1=e_1 & f_1f_1=e_2 & & \\
\mathbf{N}_{05} & : & e_1e_1=e_1 & e_2f_1=f_1 & f_1e_2=-f_1 & f_1f_1=e_2 \\
\mathbf{N}_{06} & : & e_1e_1=e_1 & e_2f_1=f_1 & f_1e_2=-f_1 & \\
\mathbf{N}_{07}^{\alpha\neq 0} & : & e_1e_1=e_1 & e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1 & f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1 & \\
\mathbf{N}_{08} & : & e_1e_1=e_1 & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=f_1 & f_1f_1=e_1 \\
\mathbf{N}_{09}^{\alpha\neq 0} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=e_2 & e_2e_1=e_2 & \\
 & & e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)f_1 & f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)f_1 & & \\
\mathbf{N}_{10} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=e_2 & e_2e_1=e_2 & \\
 & & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=f_1 & f_1f_1=e_2 & \\
\mathbf{N}_{11} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=e_2 & e_2e_1=e_2 & e_1f_1=f_1 \\
 & & f_1e_1=f_1 & e_2f_1=f_1 & f_1e_2=-f_1 & f_1f_1=e_2 \\
\mathbf{N}_{12} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=e_2 & e_2e_1=e_2 & \\
 & & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=f_1 & e_2f_1=f_1 & f_1e_2=-f_1 \\
\mathbf{N}_{13}^{\alpha\neq 0} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)e_2 & e_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)e_2 & \\
\mathbf{N}_{14}^{\alpha} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)e_2 & e_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)e_2 & e_1f_1=\frac{1}{2}f_1 \\
 & & f_1e_1=\frac{1}{2}f_1 & e_2f_1=f_1 & f_1e_2=-f_1 & f_1f_1=e_2 \\
\mathbf{N}_{15}^{\alpha} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)e_2 & e_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)e_2 & \\
 & & e_1f_1=\frac{1}{2}f_1 & f_1e_1=\frac{1}{2}f_1 & e_2f_1=f_1 & f_1e_2=-f_1 \\
\mathbf{N}_{16}^{\alpha,\beta} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)e_2 & e_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)e_2 & \\
 & & e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\beta\right)f_1 & f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\beta\right)f_1 & f_1f_1=e_2 & \\
\mathbf{N}_{17}^{\alpha,\beta} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)e_2 & e_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)e_2 & \\
 & & e_1f_1=\left(\frac{1}{2}+\beta\right)f_1 & f_1e_1=\left(\frac{1}{2}-\beta\right)f_1 & & \\
\mathbf{N}_{18}^{\alpha\neq 0} & : & e_1e_1=e_1 & e_1e_2=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)e_2 & e_2e_1=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)e_2 & \\
 & & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=f_1 & & \\
\mathbf{N}_{19} & : & e_1e_1=e_2 & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=-f_1 & f_1f_1=e_2 \\
\mathbf{N}_{20} & : & e_1e_1=e_2 & f_1f_1=e_2 & & \\
\mathbf{N}_{21} & : & e_1e_1=e_2 & e_1f_1=f_1 & f_1e_1=-f_1 &
\end{array}
$$

除以下情况外，所有列出的超代数均不同构：$\mathbf{N}_{03}^{\alpha}\cong\mathbf{N}_{03}^{-\alpha}$。

1.3.3 定理 A2 的证明

设**N** 是一个非平凡的类型 (2, 1) 三维非交换 Jordan 超代数。那么$\mathbf{N}^{+}$ 是一个类型 (2, 1) 的三维 Jordan 超代数。因此我们可以假设$\mathbf{N}^{+}\in\{\mathbf{J}_{01},。.....,\ \mathbf{J}_{14}\}$。因此我们有以下几种情形：

I. $\mathbf{N}^{+}=\mathbf{J}_{01}$。则 $Z^2(\mathbf{J}_{01},\mathbf{J}_{01})=\{0\}$。

II. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{02}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 为 $\mathrm{Z}^2(\mathbf{J}_{02}, \mathbf{J}_{02})$ 的任意元素。则

$$\theta = (\alpha_1 \Delta_{33},\ 0,\ 0) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{02})$由以下形式矩阵给出的自同构 ϕ 组成:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{02})$。则 $\theta * \phi = (\alpha_1 a_{33}^2 \Delta_{33},\ 0,\ 0)$。因此，我们得到代表元 $(\Delta_{33},\ 0,\ 0)$。于是得到超代数$\mathbf{N}_{01}$。

III. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{03}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 为 $\mathrm{Z}^2(\mathbf{J}_{03}, \mathbf{J}_{03})$ 中的任意元素。则

$$\theta = (0,\ 0,\ \alpha_1 \Delta_{13}) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{03})$由以下形式矩阵给出的自同构 ϕ 组成:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{03})$。则 $\theta * \phi = \theta$。因此，我们得到代表元$(0,\ 0,\ \alpha \Delta_{13})$。于是得到超代数$\mathbf{N}_{02}^{\alpha \neq 0}$。

IV. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{04}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$是 $\mathrm{Z}^2(\mathbf{J}_{04}, \mathbf{J}_{04})$ 的任意元素。那么

$$\theta = (0,\ 0,\ \alpha_1 \Delta_{13} - \alpha_1 \Delta_{23}) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{04})$ 由以下形式的矩阵所给出的自同构 ϕ 组成:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{04})$。那么 $\theta * \phi = \theta$若 $\phi = \phi_1$，且 $\theta * \phi = -\theta$若 $\phi = \phi_2$。因此得到超代数 $\mathbf{N}_{03}^{\alpha \neq 0}$。

V. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{05}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$是 $\mathrm{Z}^2(\mathbf{J}_{05}, \mathbf{J}_{05})$ 的任意元素。那么

$$\theta = (0,\ \alpha_1 \Delta_{33},\ \alpha_2 \Delta_{23}) \text{ for some } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{05})$ 由以下形式的矩阵所给出的自同构 ϕ 组成:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

令 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{05})$。则 $\theta * \phi = (0,\ \alpha_1 a_{22}^{-1} a_{33}^2 \Delta_{33},\ \alpha_2 a_{22} \Delta_{23})$。因此，我们得到代表元 $(0,\ \Delta_{33},\ 0)$, $(0,\ \Delta_{33},\ \Delta_{23})$ 和 $(0,\ 0,\ \Delta_{23})$。由此得到超代数 $\mathbf{N}_{04}$,$\mathbf{N}_{05}$, 和 $\mathbf{N}_{06}$。

VI. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{06}$。令 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 为 $Z^2(\mathbf{J}_{06}, \mathbf{J}_{06})$ 中的任意元素。则

$$\theta = (0,\ 0,\ \alpha_1 \Delta_{13}) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{06})$由以下形式的矩阵所给出的自同构 ϕ 构成：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{06})$。则 $\theta * \phi = \theta$。因此，代表元为$(0、\ 0、\ \alpha\Delta_{13})$。由此得到超代数$\mathbf{N}_{07}^{\alpha \neq 0}$。

VII. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{07}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$是 $Z^2(\mathbf{J}_{07}, \mathbf{J}_{07})$ 中的任意元素。则

$$\theta = (\alpha_1 \Delta_{33},\ 0,\ 0) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{07})$由以下形式的矩阵所给出的自同构 ϕ 构成：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{07})$。则 $\theta * \phi = (\alpha_1 a_{33}^2 \Delta_{33}、0、\ 0)$。因此，代表元为 $(\Delta_{33}、0、\ 0)$。由此得到超代数$\mathbf{N}_{08}$。

VIII. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{08}$。因此，$Z^2(\mathbf{J}_{08}, \mathbf{J}_{08}) = \{0\}$。

IX. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{09}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 是 $Z^2(\mathbf{J}_{09}, \mathbf{J}_{09})$ 中的任意元素。则

$$\theta = (0,\ 0,\ \alpha_1 \Delta_{13}) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{09})$ 由以下形式的矩阵给出的自同构 ϕ 构成：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{09})$。则 $\theta * \phi = \theta$。因此，代表元有$(0、\ 0、\ \alpha\Delta_{13})$。于是，我们得到超代数$\mathbf{N}_{09}^{\alpha \neq 0}$。

X. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{10}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 是 $Z^2(\mathbf{J}_{10}, \mathbf{J}_{10})$ 中的任意元素。则

$$\theta = (0,\ \alpha_1 \Delta_{33},\ \alpha_2 \Delta_{23}) \text{ for some } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{10})$由自同构 ϕ 组成，其对应矩阵具有如下形式：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{10})$。则 $\theta * \phi = (0,\ \alpha_1 a_{22}^{-1} a_{33}^2 \Delta_{33},\ \alpha_2 a_{22} \Delta_{23})$。因此我们有代表元 $(0,\ \Delta_{33},\ 0)$, $(0,\ \Delta_{33},\ \Delta_{23})$, 以及 $(0,\ 0,\ \Delta_{23})$。于是我们得到超代数$\mathbf{N}_{10}$,$\mathbf{N}_{11}$,和$\mathbf{N}_{12}$。

XI. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{11}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 为 $Z^2(\mathbf{J}_{11}, \mathbf{J}_{11})$ 的任意元素。则

$$\theta = (0,\ \alpha_1 \Delta_{12},\ 0) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{11})$ 由如下形式的矩阵 ϕ 所给出的自同构组成：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{11})$。则 $\theta * \phi = \theta$。因此，我们得到代表元 $(0,\ \alpha\Delta_{12},\ 0)$。于是，我们得到超代数 $\mathbf{N}_{13}^{\alpha \neq 0}$。

XII. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{12}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 是 $Z^2(\mathbf{J}_{12}, \mathbf{J}_{12})$ 中的任意元素。则

$$\theta = (0,\ \alpha_1 \Delta_{12} + \alpha_2 \Delta_{33},\ \alpha_3 \Delta_{13} + \alpha_4 \Delta_{23}) \text{ for some } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{12})$ 由如下形式的矩阵 ϕ 所给出的自同构组成：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

设 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{12})$。则

$$\theta * \phi = (0,\ \alpha_1 \Delta_{12} + \alpha_2 a_{22}^{-1} a_{33}^2 \Delta_{33},\ (\alpha_3 + \alpha_4 a_{21}) \Delta_{13} + \alpha_4 a_{22} \Delta_{23}).$$

因此，我们有代表元

$$(0,\ \alpha\Delta_{12} + \Delta_{33},\ \Delta_{23}),\ (0,\ \alpha\Delta_{12},\ \Delta_{23}),\ (0,\ \alpha\Delta_{12} + \Delta_{33},\ \beta\Delta_{13}),\ \text{and } (0,\ \alpha\Delta_{12},\ \beta\Delta_{13}).$$

因此，我们得到超代数 $\mathbf{N}_{14}^{\alpha}$、$\mathbf{N}_{15}^{\alpha}$、$\mathbf{N}_{16}^{\alpha\,\beta}$，以及 $\mathbf{N}_{17}^{\alpha\,\beta}$。

XIII. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{13}$。令 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 为 $Z^2(\mathbf{J}_{13}, \mathbf{J}_{13})$ 中的任意元素。那么

$$\theta = (0,\ \alpha_1 \Delta_{12},\ 0) \text{ for some } \alpha_1 \in \mathbb{C}^*.$$

自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{13})$ 由自同构 ϕ 构成，它们由以下形式的矩阵给出：

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

令 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{13})$。那么 $\theta * \phi = \theta$。因此，我们有代表元 $(0、\ \alpha\Delta_{12}、\ 0)$。由此得到超代数 $\mathbf{N}_{18}^{\alpha \neq 0}$。

XIV. $\mathbf{N}^+ = \mathbf{J}_{14}$。设 $\theta = (B_1, B_2, B_3) \neq 0$ 是 $Z^2(\mathbf{J}_{14}, \mathbf{J}_{10})$ 中的任意元素。那么

$$\theta = (0,\ \alpha_1 \Delta_{33},\ \alpha_2 \Delta_{13}) \text{ for some } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

自同构群 Aut($\mathbf{J}_{14}$) 由以下形式的矩阵所给出的自同构 ϕ 组成：

$$\phi = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

令 $\phi = (a_{ij}) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{J}_{14})$。则 $\theta * \phi = (0,\ \alpha_1 a_{11}^{-2} a_{33}^2 \Delta_{33},\ \alpha_2 a_{11} \Delta_{13})$。因此，我们得到代表元 $(0,\ \Delta_{33},\ \Delta_{13})$, $(0,\ \Delta_{33},\ 0)$ 和 $(0, 0,\ \Delta_{13})$。由此得到超代数 $\mathbf{N}_{19}$,$\mathbf{N}_{20}$,和$\mathbf{N}_{21}$。

1.4 推论

1.4.1 Kokoris 超代数

若柔性代数 A 满足 A^+ 是结合的，则称 A 为 Kokoris 代数。Kokoris 于 1960 年引入了 Kokoris 代数，它们也见于 [49]。$(\mathbf{A}, \circ, [\cdot,\cdot])$ 是一般泊松超代数，当且仅当 $(A, \cdot)$ 是 Kokoris 超代数。另外，注意到泊松超代数与李可容 Kokoris 超代数相关。

定理 12. 设 **K** 是一个 *3* 维复数 *Kokoris* 超代数，型为 (1,2)。则**K** 是定理 *8* 中列出的结合交换超代数、定理 *9* 中列出的反交换超代数，或者与下列某个代数同构：

$$\mathrm{N}_{03}^{\alpha\neq 0},\ \mathrm{N}_{04},\ \mathrm{N}_{05},\ \mathrm{N}_{06}^{\alpha\neq 0},\ \textit{or}\ \mathrm{N}_{09}.$$

定理 13. 设 **K** 是一个 *3* 维复数 *Kokoris* 超代数，型为 (2,1)。则**K** 是定理 *10* 中列出的结合交换超代数、定理 *11* 中列出的反交换超代数，或者与下列某个代数同构：

$$\mathbf{N}_{01},\ \mathbf{N}_{04},\ \mathbf{N}_{05},\ \mathbf{N}_{06},\ \mathbf{N}_{08},\ \mathbf{N}_{10},\ \mathbf{N}_{11},\ \mathbf{N}_{12},\ \mathbf{N}_{19},\ \mathbf{N}_{20},\ \textit{or}\ \mathbf{N}_{21}.$$

1.4.2 结合超代数

定理 14. 设 A 是一个 *3* 维结合超代数，型为 (1,2)。则A 是下列代数之一：

$$\begin{gathered}\mathrm{J}_{02},\ \mathrm{J}_{03},\ \mathrm{J}_{06},\ \mathrm{J}_{07},\ \mathrm{J}_{09},\ \mathrm{A}_{01},\ \mathrm{A}_{02},\ \mathrm{A}_{06},\ \mathrm{N}_{03}^{\alpha\neq 0},\ \mathrm{N}_{04},\ \mathrm{N}_{06}^{\alpha\neq 0}, \\ \mathrm{N}_{07}^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{N}_{07}^{-\frac{1}{2}},\ \mathrm{N}_{08}^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{N}_{08}^{-\frac{1}{2}},\ \mathrm{N}_{09},\ \mathrm{N}_{10}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\ \mathrm{N}_{10}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},\ \textit{or}\ \mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}.\end{gathered}$$

定理 15。 设**A** 是一个3维的复数结合超代数，其型为(2,1)。则**A** 是下列代数之一：

$$\begin{gathered}\mathbf{J}_{01},\ \mathbf{J}_{02},\ \mathbf{J}_{05},\ \mathbf{J}_{07},\ \mathbf{J}_{08},\ \mathbf{J}_{10},\ \mathbf{J}_{14},\ \mathbf{A}_{10},\ \mathbf{N}_{01},\ \mathbf{N}_{02}^{\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{02}^{-\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{03}^{\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{04},\ \mathbf{N}_{07}^{\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{07}^{-\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{08}, \\ \mathbf{N}_{09}^{\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{09}^{-\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{10},\ \mathbf{N}_{13}^{\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{13}^{-\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{18}^{\frac{1}{2}},\ \mathbf{N}_{18}^{-\frac{1}{2}},\ \textit{or}\ \mathbf{N}_{20}.\end{gathered}$$

1.4.3 标准超代数

标准代数的概念在 [4]中被引入。若满足以下两个恒等式，则称一个代数为标准代数:

$$\begin{aligned}(x,y,z)+(z,x,y)-(x,z,y) &= 0,\\ (x,y,wz)+(w,y,xz)+(z,y,wx) &= 0.\end{aligned}$$

标准代数包含所有结合代数和Jordan代数。已证明，标准代数簇恰好是包含结合代数簇与Jordan代数簇的最小簇 [15]。此外，每个标准代数都是非交换Jordan代数，因而也是幂结合的。通过对非交换 Jordan 超代数中的标准恒等式进行一些直接验证，我们得到以下结论。

定义16. 若下列两个超恒等式成立，则称一个超代数为标准的:

$$\begin{aligned}(x,y,z)+(-1)^{|z|\left(|x|+|y|\right)}(z,x,y)-(-1)^{|z||y|}(x,z,y) &= 0,\\ (x,y,wz)+(-1)^{|w|\left(|x|+|y|\right)+|x||y|}(w,y,xz)+(-1)^{|x|\left(|y|+|z|+w|\right)+|z|\left(|y|+|w|\right)}(z,y,wx) &= 0.\end{aligned}$$

定理 17. 设$\mathbf{S}$ 为复3维、型为(1,2)的标准超代数。则$\mathbf{S}$ 是定理 *14*中列出的结合超代数，或定理 *8*中列出的非结合*Jordan*超代数。

定理 18. 设$\mathbf{S}$ 为复3维、型为(2,1)的标准超代数。则$\mathbf{S}$ 是定理 *15*中列出的结合超代数、定理 *10*中列出的非结合*Jordan*超代数，或同构于$\mathbf{N}_{17}^{0\ \pm\frac{1}{2}}$,或$\mathbf{N}_{\pm\frac{1}{2},0\ 17}$。

1.4.4 反交换超代数

本小节汇总了若干有趣的反交换超代数子类的代数分类。有些分类已有研究成果‡‡，另一些则是新的；我们将它们一并呈现，以完整展示这些超代数类之间的差异。

定义19. 设(A, $[\cdot,\cdot]$) 是一个反交换超代数，则

(1) A 是一个李超代数，当且仅当

$$\big[[x,y],z\big] \;=\; \big[x,[y,z]\big]+\big(-1\big)^{|y||z|}\big[[x,z],y\big].$$

(2) A 是马尔采夫超代数 (参见, [5])，当且仅当

$$\Big[\big[[x,y],z\big],t\Big]-\Big[x,\big[[y,z],t\big]\Big]+\big(-1\big)^{|x||y|}\Big[y,\big[x,[z,t]\big]\Big]=$$

$$\big(-1\big)^{|t|\left(|y|+|z|\right)}\Big[\big[[x,t],y\big],z\Big]+\big(-1\big)^{|y||z|}\big[[x,z],[y,t]\big].$$

‡‡每个李超代数都是马尔采夫超代数，而马尔采夫超代数的分类已由 [5]给出。托特卡拉超代数的分类见 [8]。

(3) A 是二元 *Lie* 超代数（参见, [23]），当且仅当

$$\Big[[[x,y],z],t\Big]+(-1)^{|x||y|}\Big(\Big[y,[[x,z],t]\Big]+\Big[y,[x,[z,t]]\Big]-\Big[[y,[x,z]],t\Big]\Big)+$$

$$(-1)^{|z||t|}\Big(\Big[x,[[y,t],z]\Big]-\Big[[[x,y],t],z\Big]-\Big[[x,[y,t]],z\Big]\Big)=\Big[x,[y,[z,t]]\Big].$$

(4) A 是托特卡拉超代数（见, [8]），当且仅当

$$\Big[[[x,y],z]-[x,[y,z]]-(-1)^{|y||z|}[[x,z],y],t\Big]-[[x,y],[z,t]]\ =$$

$$(-1)^{|x||y|}\Big(\Big[y,[x,[z,t]]-[[x,z],t]-(-1)^{|x||z|}[z,[x,t]]\Big]+(-1)^{|x||z|}[[y,z],[x,t]]\Big).$$

(5) A 是一个 $\mathfrak{aCD}$-超代数（见, [33]），当且仅当

$$\Big[[[x,y],z],t\Big]+(-1)^{|x||y|}\Big[y,[[x,z],t]\Big]-\Big[x,[[y,z],t]\Big]=$$

$$(-1)^{|z||t|}\Big(\Big[[[x,y],t],z\Big]+(-1)^{|x||y|}\Big[y,[[x,t],z]\Big]-\Big[x,[[y,t],z]\Big]\Big).$$

(6) A 是一个 $\mathfrak{s}_4$-超代数（见, [17,22]），当且仅当

$$\Big[[[x,y],z]-[x,[y,z]]-(-1)^{|y||z|}[[x,z],y],t\Big]+$$

$$\Big[x,[[y,z],t]-[y,[z,t]]-(-1)^{|z||t|}[[y,t],z]\Big]+$$

$$(-1)^{|x||y|}\Big[y,[x,[z,t]]-[[x,z],t]+(-1)^{|z||t|}[[x,t],z]\Big]+$$

$$(-1)^{|z||t|}\Big[[x,[y,t]]-[[x,y],t]+(-1)^{|y||t|}\Big[[[x,t],y],z\Big]\ =\ 0.$$

(7) 一个 刚性的[§§] （准保守）超代数（参见 [12]），若存在一种新的乘法 $*$ 和一个双线性型 $\varphi:\mathrm{A}\times\mathrm{A}\to\mathbb{C}$，使得

$$\Big[t,[z,[x,y]]-[[z,x],y]\Big]+(-1)^{|z||x|}\Big([[t,x],[z,y]]-\Big[t,[x,[z,y]]\Big]\Big)+$$

$$(-1)^{|z||t|}\Big(\Big[[z,[t,x]],y\Big]-\Big[z,[[t,x],y]\Big]-(-1)^{|x||y|}\Big[[z,[t,y]],x\Big]\Big)+$$

$$(-1)^{|t|\left(|z|+|x|\right)}\Big([[z,x],[t,y]]-\Big[z,[x,[t,y]]\Big]\Big)\ =$$

§§Kac 和 Cantarini [12] 使用了“刚性”代数这一术语，但更早之前，Kantor 在 1989年将“准保守”一词用于这些代数 [29]。Kac-Cantarini 所说的“刚性”超代数与我们几何分类中将出现的刚性超代数不同。为避免误解，我们仅使用 Kantor 的记法。

$$(-1)^{|z||t|}\Big([[z*t,x],y]-(-1)^{|x||y|}[[z*t,y],x]-[z*t,[x,y]]+\varphi(z,t)[x,y]\Big).$$

(7.1) 若对所有 $z,t\in \mathrm{A}$， $\varphi(z,t)=0$ 且 $z*t=\frac{1}{3}[x,\ y]$，则称超代数 A 为α-终端超代数（参见 [41]）。(7.2) 若对所有 $z,t\in \mathrm{A},$， $\varphi(z,t)=0$，则称超代数 A 为保守的（参见[41]）。

定理20。 设A是一个非平凡的3维（1, 2）型反交换超代数。那么

A	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7.1)	(7.2)	(7)
A_{01}	✓	✓	✓	√	√	√	✓	✓	✓
A_{02}	✓	✓	✓	√	√	√	✓	✓	✓
A_{03}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{04}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{05}	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
A_{06}	✓	✓	✓	√	√	√	✓	✓	✓
A_{07}	✗	✓	✓	√	√	√	✓	✓	✓
A_{08}^{α}	✓	✓	✓	√	√	√	✓	✓	✓
A_{09}^{α}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{10}^{α}	✗	✗	$✓_{\alpha=1}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\mathrm{A}_{11}^{\alpha\neq1,\beta}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\mathrm{A}_{12}^{\alpha\neq1}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{13}	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{14}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{15}^{α}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{16}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
A_{17}	✓	✓	✓	√	√	√	✓	✓	✓
A_{18}	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗

证明。 检验超代数 (1)–(6) 和 (7.1) 的恒等式是常规过程，因此略去。保守超代数和拟保守超代数的情形将作更详细的说明（我们只考虑非终端情形）。

A_{03}：在定义19的（7）中的拟保守关系中取$z=f_1,t=e_1,x=f_2,$和$y=f_2$，我们发现这与 $*$ 和 φ的存在矛盾。

A_{04}：在定义19的（7）中的拟保守关系中取$\mathrm{z}=\mathrm{e}_1,\mathrm{t}=\mathrm{e}_1,\mathrm{x}=\mathrm{f}_2,$和$\mathrm{y}=\mathrm{e}_1$，我们得到 $\varphi(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_1)=0$；但若取 $\mathrm{z}=\mathrm{e}_1,\mathrm{t}=\mathrm{e}_1,\mathrm{x}=\mathrm{f}_2,$ 和 $\mathrm{y}=\mathrm{f}_1,$，则 $\varphi(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_1)=2$。这与 $*$ 和 φ 的存在矛盾。

A_{05}：这个超代数由于下述附加乘法而是保守的

$$f_1*f_2=e_1,\ e_1*f_2=f_1,\ f_2*f_1=-2e_1,\ f_2*e_1=2f_1.$$

A_{09}^{α}：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_1,t=f_1,x=f_2,$和$y=f_2$，我们发现这与 $*$和 φ 的存在性相矛盾。

A_{10}^{α}：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_2,t=f_1,x=e_1,$和$y=f_2$，我们得到$\alpha=\frac{1}{2}$，但对于$z=f_1,t=f_2,x=f_2,$和$y=e_1$，我们有$\alpha=0$。这与$*$和φ的存在性相矛盾。$A_{11}^{\alpha\beta}$，：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_2,t=f_1,x=f_2,$和$y=e_1$，我们得到$\alpha=\frac{1}{2}$，但若取$z=f_1,t=f_2,x=e_1,$和$y=f_2$，则$\alpha=0$。这与$*$和φ的存在性相矛盾。A_{12}^{α}：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_1,t=f_1,x=e_1,$和$y=f_2$，我们得到$\alpha=1$，但若取$z=f_2,t=f_2,x=f_1,$和$y=f_1$，则$\alpha=0$。这与$*$和φ的存在性相矛盾。A_{13}：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=e_1,t=f_1,x=f_1,$和$y=f_1$，我们得到对某个$\lambda\in\mathbb{C}$成立的$e_1*f_1=\frac{2}{3}f_1+\lambda f_2$。但若取$z=e_1,t=f_1,x=f_1,$和$y=e_1,$，则对某个$\mu\in\mathbb{C}$成立$e_1*f_1=f_1+\mu f_2$。这与$*$和$\varphi$的存在性相矛盾。$A_{14}$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_1,t=f_1,x=f_2,$和$y=f_2$，我们发现这与$*$和$\varphi$的存在性相矛盾。$A_{15}^{\alpha}$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_1,t=f_2,x=f_1,$和$y=e_1$，我们发现这与$*$和$\varphi$的存在性相矛盾。$A_{16}$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=e_1,t=f_1,x=e_1,$和$y=e_1$，我们发现这与$*$和$\varphi$的存在性相矛盾。$A_{18}$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z=f_2,t=f_1,x=f_2,$和$y=e_1$，我们得到$\varphi(f_2,f_1)=0$和$\varphi(f_2,f_1)=1$。这与$*$和$\varphi$的存在性相矛盾。

□

定理21。 设A是一个非平凡的3维(2,1)型反交换超代数。那么

A	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7.1)	(7.2)	(7)
$\mathbf{A}_{01}^{\alpha}$	✗	✗	$\surd_{\alpha=-1}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\mathbf{A}_{02}^{\alpha}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\mathbf{A}_{03}^{\alpha}$	$\surd_{\alpha=-\frac{1}{2}}$	$\surd_{\alpha\in\{-\frac{1}{2},\ 1\}}$	✓	$\surd_{\alpha=-1}$	$\surd_{\alpha=-\frac{1}{2}}$	✓	$\surd_{\alpha=-\frac{1}{2}}$	✓	✓
$\mathbf{A}_{04}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\mathbf{A}_{05}^{\alpha}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{A}_{06}$	✗	✗	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✓
$\mathbf{A}_{07}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{A}_{08}$	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✓
$\mathbf{A}_{09}$	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\mathbf{A}_{10}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

证明。 检验超代数(1)–(6)和(7.1)的恒等式是常规过程，因此省略。保守超代数和拟保守超代数的情形将作更详细的说明。

$\mathbf{A}_{01}^{\alpha}$：在定义19的(7)中拟保守关系里取$z = e_1, t = f_1, x = f_1$, 和$y = e_2$，可得 $\alpha = 0$；但对于$z = f_1, t = e_1, x = e_2$, 和$y = f_1$,，则有 $\alpha = -\frac{1}{2}$。这与 $*$ 和 φ的存在相矛盾。

$\mathbf{A}_{02}^{\alpha}$：在定义19的拟保守关系（7）中取$z = f_1, t = f_1, x = e_1$, 和$y = e_2$，我们发现这与 $*$和 φ的存在相矛盾。

$\mathbf{A}_{03}^{\alpha}$：由于下述附加乘法，这个超代数是保守的：

$$f_1 * e_2 = (1+\alpha) f_1,\ e_2 * f_1 = \alpha f_1,\ e_2 * e_2 = (1+2\alpha) e_2.$$

A_{04}：在定义19的拟保守关系（7）中取 $z = f_1, t = e_1, x = f_1$, 和 $y = f_1$，可知对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$, $e_1 * f_1 = f_1 + \lambda f_2$。但当 $z = f_1, t = e_1, x = e_1$, 和 $y = e_2$, 时，对某个 $\mu \in \mathbb{C}$，有 $f_1 * e_1 = -f_1 + \mu f_2$。这与 $*$ 和 φ的存在相矛盾。

$\mathbf{A}_{06}$：由于下述附加乘法，这个超代数是保守的：

$$f_1 * e_1 = -f_1,\ f_1 * e_2 = -f_1,\ e_1 * f_1 = f_1,\ e_2 * e_1 = -e_1,\ e_2 * e_2 = -e_2.$$

$\mathbf{A}_{08}$：该超代数由于如下给出的附加乘法而是保守的

$$f_1 * e_1 = f_1,\ e_1 * f_1 = f_1,\ e_1 * e_1 = 2e_1.$$

A_{09}：在定义19之(7)的拟保守关系中取 $z = e_1, t = f_1, x = f_1$, 与 $y = f_1$，我们得到对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$有 $e_1 * f_1 = \frac{2}{3} f_1 + \lambda f_2$。但对 $z = e_1, t = f_1, x = f_1$, 与 $y = e_1$,，我们有对某个 $\mu \in \mathbb{C}$成立 $f_1 * e_1 = f_1 + \mu f_2$。这与 $*$ 和 φ的存在性相矛盾。

□

推论22。 *Grishkov-Shestakov*[¶¶] 的猜想对于3维二元李超代数成立。

定理23. 设A为非平凡3维、型(3,0)的反交换超代数。则

A	乘积***			(1,2,3,5,7)	(4)	(6)
$\mathfrak{g}_1$	$[e_2,e_3] = e_1$			✓	✓	✓
$\mathfrak{g}_2$	$[e_1,e_3] = e_1$	$[e_2,e_3] = e_2$		✓	✓	✓
$\mathfrak{g}_3^{\alpha}$	$[e_1,e_3] = e_1 + e_2$	$[e_2,e_3] = \alpha e_2$		✓	✓	✓
$\mathfrak{g}_4$	$[e_1,e_2] = e_3$	$[e_1,e_3] = -e_2$	$[e_2,e_3] = e_1$	✓	✗	✓
$\mathscr{A}_1^{\alpha}$	$[e_1,e_2] = e_1 + e_2$	$[e_1,e_3] = e_2$	$[e_2,e_3] = \alpha e_3$	✗	$✓_{\alpha=0}$	✓
$\mathscr{A}_2$	$[e_1,e_2] = e_1$	$[e_2,e_3] = e_2$		✗	✓	✓
$\mathscr{A}_3$	$[e_1,e_2] = e_3$	$[e_1,e_3] = e_1$	$[e_2,e_3] = e_2$	✗	✗	✓

¶¶ [23,猜想 1.1]: 设 B 是一个非平凡的复有限维简单二元 Lie 超代数。那么，B 是简单李超代数，或者 dim B = 2。***三维反交换代数的分类见 [27]。

证明。 验证超代数 (1)–(6) 的恒等式是常规工作，因此略去。下面将更详细地讨论保守超代数和拟保守超代数。由于每个代数 $\mathfrak{g}_i$ 都是李代数，因此它是保守的，也是拟保守的。

$\mathscr{A}_1^{\alpha}$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z = e_1, t = e_1, x = e_2,$和$y = e_3$，我们发现这与 $*$ 和 φ的存在相矛盾。

$\mathscr{A}_2$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$\mathrm{z} = \mathrm{e}_1, \mathrm{t} = \mathrm{e}_2, \mathrm{x} = \mathrm{e}_2,$和$\mathrm{y} = \mathrm{e}_2$，我们发现$\mathrm{e}_1 * \mathrm{e}_2 \in \langle \mathrm{e}_2 \rangle$，但若取$\mathrm{z} = \mathrm{e}_1, \mathrm{t} = \mathrm{e}_2, \mathrm{x} = \mathrm{e}_2,$和$\mathrm{y} = \mathrm{e}_3,$，则我们发现$\mathrm{e}_1 * \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_1 \in \langle \mathrm{e}_2 \rangle$，这与 $*$ 和φ的存在相矛盾。

$\mathscr{A}_3$：在定义19的(7)中的拟保守关系中取$z = e_1, t = e_1, x = e_2,$和$y = e_3$，我们发现这与 $*$和 φ 的存在相矛盾。

□

2 超代数的几何分类

2.1 预备知识：退化与几何分类

设$V = V_0 \oplus V_1$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$分次的向量空间，并具有固定的齐次基$\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$。$V$上的超代数结构可通过结构常数 $(\alpha^k{}_{ij},\ \beta^k{}_{ij}, \gamma^k{}_{ij}, \delta^k{}_{ij}) \in \mathbb{C}^{m^3+3mn^2}$,来描述，其中乘法定义如下:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ij}^k e_k, \quad e_i f_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ij}^k f_k, \quad f_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k f_k, \quad f_i f_j = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ij}^k e_k.$$

令 $\mathscr{S}_{m,n}$ 表示由一族多项式超恒等式T定义的所有维数为(m,n)的超代数的集合，将其视为仿射簇 $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$中的子集 $\mathbb{L}(T)$。于是， $\mathscr{S}_{m,n}$ 是簇 $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$的扎里斯基闭子集。

群$G = (\mathrm{Aut}V)_0 \simeq \mathrm{GL}(V_0) \oplus \mathrm{GL}(V_1)$通过共轭作用于 $\mathscr{S}_{m,n}$：

$$(g * \mu)(x \otimes y) = g\mu(g^{-1}x \otimes g^{-1}y),$$

对所有x、$y \in V$、 $\mu \in \mathbb{L}(T)$以及$g \in G$。

令 $\mathscr{O}(\mu)$表示 $\mu \in \mathbb{L}(\mathrm{T})$在G作用下的轨道，并令 $\mathscr{O}(\mu)$为 $\mathscr{O}(\mu)$的扎里斯基闭包。假设J、J $' \in \mathscr{S}$m,n分别由 λ和$\mu \in \mathbb{L}(\mathrm{T})$表示。若 λ 退化到 μ, 记作 $\lambda \to \mu$，则称 $\mu \in \mathscr{O}(\lambda)$。在这种情况下，我们有 $\mathscr{O}(\mu) \subset \mathscr{O}(\lambda)$。因此，退化的概念不依赖于具体的代表元，我们用$\mathrm{J} \to \mathrm{J}'$ 代替 $\lambda \to \mu$，并用 $\mathscr{O}(\mathrm{J})$代替 $\mathscr{O}(\lambda)$。我们用$\mathrm{J} \not\to \mathrm{J}'$ 表示$\mathrm{J}' \notin \mathscr{O}(\mathrm{J})$。

若J 由 $\lambda \in \mathbb{L}(T)$表示，则称$J$ 在 $\mathbb{L}(T)$中是刚性的 ，当且仅当 $\mathscr{O}(\lambda)$是 $\mathbb{L}(T)$的开子集。若一个簇的子集不能写成两个真闭子集的并，则称其为不可约的。极大的不可约闭子集称为不可约分支。特别地，J 在 $\mathscr{S}_{m,n}$ 中是刚性的，当且仅当 $\mathscr{O}(\lambda)$是 $\mathbb{L}(T)$的一个不可约分支。众所周知，每个仿射簇都可以唯一地分解为有限个不可约分支。

为寻找退化，我们使用 [3, 6, 9, 24] 等文献中描述的标准方法。要证明非退化$J \not\to J'$，我们采用引理中的标准论证，其证明与 [24, 引理15]的证明相同。

引理24。 设 $\mathfrak{B}$ 是$\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ 的一个博雷尔子群，且$\mathrm{R} \subset \mathbb{L}(T)$ 是一个 $\mathfrak{B}$-稳定的闭子集。若$J \to J'$，且超代数J可由结构 $\mu \in \mathrm{R}$表示，则存在$\lambda \in \mathrm{R}$ 表示J'。

为证明我们的结果，我们需要以下结论。

定理25 (见， [6])。 以下结论成立：

(1) 类型 *(1, 2)* 的结合交换超代数簇维数为 *3*，包含四个刚性超代数和四个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(J_{02})$、$\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(J_{06})$、 $\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(J_{07})$ 和 $\mathscr{C}_4 = \mathscr{O}(J_{09})$ 给出。*(2)* 类型 *(2, 1)* 的结合交换超代数簇维数为 *4*，包含两个刚性超代数和两个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(J_{01})$ 和 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(J_{02})$ 给出。*(3)* 类型 *(1, 2)* 的 *Jordan* 超代数簇维数为 *3*，包含七个刚性超代数和七个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(J_{01})$、 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(J_{04})$、$\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(J_{05})$、 $\mathscr{C}_4 = \mathscr{O}(J_{06})$、$\mathscr{C}_5 = \mathscr{O}(J_{07})$、 $\mathscr{C}_6 = \mathscr{O}(J_{10})$ 和 $\mathscr{C}_7 = \mathscr{O}(J_{11})$ 给出。*(2)* 类型 *(2, 1)* 的 *Jordan* 超代数簇维数为 *4*，包含七个刚性超代数和七个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(J_{01})$、 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(J_{02})$、$\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(J_{03})$、$\mathscr{C}_4 = \mathscr{O}(J_{04})$、 $\mathscr{C}_5 = \mathscr{O}(J_{08})$、 $\mathscr{C}_6 = \mathscr{O}(J_{12})$ 和 $\mathscr{C}_7 = \mathscr{O}(J_{13})$ 给出。

2.2 反交换超代数

定理26. 对于型为(1,2), 的反交换超代数子簇，以下结论成立：

(1) 李超代数簇的维数为*4*，有一个刚性超代数和两个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A_{01})$和 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{08}^{\alpha})$给出。*(2)* 马尔采夫超代数簇的维数为*4*，有一个刚性超代数和两个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A_{05})$和 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{08}^{\alpha})$给出。*(3)* 二元李超代数簇的维数为*4*，有四个刚性超代数和五个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A_{05})$、 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{10}^{1})$、$\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(A_{13})$、$\mathscr{C}_4 = \mathscr{O}(A_{18})$和 $\mathscr{C}_5 = \mathscr{O}(A_{08}^{\alpha})$给出。*(4)* 托特卡拉超代数簇、 $\mathfrak{aCD}$-超代数簇、 $\mathfrak{s}_4$-超代数簇和$\mathfrak{a}$-终端超代数簇相同，其维数为*4*，有两个刚性超代数和三个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A_{01})$、 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{07})$和$\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(A_{08}^{\alpha})$给出。*(5)* 反交换超代数簇的维数为*7*，不可约且没有刚性超代数。

证明。下文将给出关于生成和非退化所需的全部论证。

李。A_{08}^{α} 是反交换的（作为代数），而A_{01} 是交换的（作为代数），因此$\mathrm{A}_{08}^{\alpha} \not\to \mathrm{A}_{01}$。其余退化为

$$\mathrm{A}_{01} \xrightarrow{\left(e_1,\, tf_1,\, \frac{1}{2}f_1+f_2\right)} \mathrm{A}_{02};\ \mathrm{A}_{08}^{-1} \xrightarrow{\left(te_1,\, tf_1-tf_2,\, f_1+f_2\right)} \mathrm{A}_{06};\ \mathrm{A}_{08}^{\frac{1-t}{1+t}} \xrightarrow{\left((1+t)e_1,\, tf_1-tf_2,\, f_1+f_2\right)} \mathrm{A}_{17}.$$

Mal. 维数 $\left(\mathrm{A}_{08}^{\alpha}\right)^2$ >维数 $\left(\mathrm{A}_{05}\right)^2$，因此 $\mathrm{A}_{05} \not\to \mathrm{A}_{08}^{\alpha}$。其余退化为

$$\mathrm{A}_{05} \xrightarrow{\left(te_1,\, f_1+t^2f_2,\, tf_2\right)} \mathrm{A}_{01};\ \mathrm{A}_{05} \xrightarrow{\left(2te_1,\, 2t^2f_1,\, f_1+tf_2\right)} \mathrm{A}_{07}.$$

BL. 维数 $\mathscr{O}(\mathrm{A}_{10}^{1})$ =维数 $\mathscr{O}(\mathrm{A}_{13})$ =维数 $\mathscr{O}(\mathrm{A}_{18})$ =维数 $\mathscr{O}(\mathrm{A}_{08}^{\alpha})$ = 4。因此，它们构成不可约分支。

Tor. 维数 $\mathscr{O}(\mathrm{A}_{01})$ =维数 $\mathscr{O}(\mathrm{A}_{07})$ = 3。因此，它们构成不可约分支。

Ant. 为了简化退化表示，我们将使用以下记号：

$$\mathfrak{X} := \sqrt{(\alpha-1)^2-4t^2};\ \mathfrak{Y} := \sqrt{(t+1)\left(\alpha t^2+1\right)};\ \mathfrak{Z} := -\frac{\sqrt{\alpha+t}}{(\alpha-1)(\alpha+2t-1)}.$$

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{A}_{11}^{-1,-1} & \xrightarrow{\left(\mathbf{i}te_1,\, \frac{(1+\mathbf{i})\sqrt{t}}{2\sqrt{2}}f_1-\frac{(1+\mathbf{i})\sqrt{t}}{2\sqrt{2}}f_2,\, \frac{1-\mathbf{i}}{2\sqrt{2t}}f_1+\frac{1-\mathbf{i}}{2\sqrt{2t}}f_2\right)} & \mathrm{A}_{03} \\
\mathrm{A}_{11}^{-1,\frac{1-t^2}{1+t^2}} & \xrightarrow{\left(te_1,\, -\frac{\sqrt{t^3+t}}{2}f_1-\frac{\sqrt{t^3+t}}{2}f_2,\, -\frac{\sqrt{t+t^{-1}}}{2}f_1+\frac{\sqrt{t+t^{-1}}}{2}f_2\right)} & \mathrm{A}_{04} \\
\mathrm{A}_{11}^{-1,0} & \xrightarrow{\left(te_1,\, \frac{t}{\sqrt{2}}f_1-\frac{\mathbf{i}t}{\sqrt{2}}f_2,\, \frac{1}{\sqrt{2}}f_1+\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}f_2\right)} & \mathrm{A}_{05} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1+\mathfrak{X}+\alpha}{1-\mathfrak{X}+\alpha},-\frac{\alpha-1}{2t}} & \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}(1-\mathfrak{X}+\alpha)e_1,\, t^2f_1+\frac{2t^3}{\mathfrak{X}+\alpha-1}f_2,\, -\frac{1}{2}t(\mathfrak{X}-\alpha+1)f_1+t^2f_2\right)} & \mathrm{A}_{08}^{\alpha} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1+\mathfrak{X}+\alpha}{1-\mathfrak{X}+\alpha},\frac{\mathfrak{X}+\alpha-4t^5+2t^2-1}{2(\alpha-1)t^4}} & \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}(1-\mathfrak{X}+\alpha)e_1,\, t^2f_1+\frac{2t^3}{\mathfrak{X}+\alpha-1}f_2,\, -\frac{1}{2}t(\mathfrak{X}-\alpha+1)f_1+t^2f_2\right)} & \mathrm{A}_{09}^{\alpha} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{\alpha-t^2+t-1}{(\alpha+t-1)(\alpha+t)},\,-1} & \xrightarrow{\left((\alpha+t)e_1,\, t(\alpha+t-1)\mathfrak{Z}\left(f_1+f_2\right),\, \mathfrak{Z}\left((\alpha+t-1)^2f_1-t^2f_2\right)\right)} & \mathrm{A}_{10}^{\alpha} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{(\alpha-1)(\alpha+2t-1)}{(\alpha+t-1)^2(\alpha+t)},\,1} & \xrightarrow{\left((\alpha+t)e_1,\, t(\alpha+t-1)\mathfrak{Z}\left(f_1+f_2\right),\, \mathfrak{Z}\left((\alpha+t-1)^2f_1+t^2f_2\right)\right)} & \mathrm{A}_{12}^{\alpha} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1}{t^{10}}-1,\ \frac{t^5\left(2t^{10}-3\right)}{\sqrt{2}}} & \xrightarrow{\left(t^{10}e_1,\, -\sqrt{2}t^{10}f_1+\frac{t^5}{1-2t^{10}}f_2,\, -\frac{\sqrt{2}t^8\left(t^{10}-1\right)}{2t^{10}-1}f_1+\frac{t^{13}}{2t^{10}-1}f_2\right)} & \mathrm{A}_{13} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1}{t^4}-1,\ \frac{1-2t^6+2t^4+t^2}{t\sqrt{4-8t^4+8t^2}}} & \xrightarrow{\left(t^4e_1,\, \frac{2t^5}{1-2t^4}f_1+\frac{t^2\sqrt{1-2t^4+2t^2}}{2t^4-1}f_2,\, t^3\left(\frac{1}{2t^4-1}-1\right)f_1+\frac{t^4\sqrt{1-2t^4+2t^2}}{1-2t^4}f_2\right)} & \mathrm{A}_{14} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1-t}{t+1},\ \frac{1-\alpha t^2}{\alpha t^2+1}} & \xrightarrow{\left((t+1)e_1,\, \frac{\mathfrak{Y}}{2}f_1+\frac{\mathfrak{Y}}{2}f_2,\, \frac{\mathfrak{Y}}{2t}f_1-\frac{\mathfrak{Y}}{2t}f_2\right)} & \mathrm{A}_{15} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1-t}{t+1},\ -\frac{2t^5+t+1}{2t^2\sqrt{t^6+t^2+t}}} & \xrightarrow{\left((t+1)e_1,\, \sqrt{t^6+t^2+t}f_1-t^3f_2,\, \sqrt{t^4+1+t^{-1}}f_1+t^2f_2\right)} & \mathrm{A}_{16} \\
\mathrm{A}_{11}^{\frac{1-t}{t+1},\ \frac{t-1}{2}} & \xrightarrow{\left((t+1)e_1,\, tf_1-tf_2,\, 1f_1+1f_2\right)} & \mathrm{A}_{18}
\end{array}$$

□

定理27。 对于型为(2, 1), 的反交换超代数子簇，以下论述成立：

(1) 李超代数与 $\mathfrak{a}$-终端超代数的簇相同，其维数为$_1\bar{}3$，有一个刚性超代数和两个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{203})$ 和$\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{05}^{\alpha})$给出。

(2) 马尔采夫超代数的簇维数为3，有两个刚性超代数和三个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{-2})$， $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{1})$，和 $\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{05}^{\alpha})$给出。

(3) 二元 *Lie* 超代数簇的维数为4，有两个刚性超代数和三个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{01}^{-1})$、 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{\alpha})$、以及 $\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(\mathbf{A}_{09})$给出。

(4) 托特卡拉超代数簇的维数为 *4*，有两个刚性超代数和两个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A_{03}^{-1})$ 和 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{06})$ 给出。*(5)* 𝔞𝔩𝔇-超代数簇的维数为 *3*，有两个刚性超代数和 *1* 三个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A\ 203)$、 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{05}^{\alpha})$ 和 $\mathscr{C}_3 = \mathscr{O}(A_{08})$ 给出。*(6)* $\mathfrak{s}_4$-超代数簇的维数为 *4*，有一个刚性超代数和两个不可约分支，分别由 $\mathscr{C}_1 = \mathscr{O}(A_{03}^{\alpha})$ 和 $\mathscr{C}_2 = \mathscr{O}(A_{08})$ 给出。*(7)* 反交换超代数簇的维数为 *6*，不可约且没有刚性超代数。

证明。下面，我们给出生成和非退化所需的全部论证。

李。我们需要找到以下两个退化 $\mathbf{A}_{03}^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\left(e_{1,\ 2,\ 1}\right)} tef\mathbf{A}_{10}, \mathbf{A}_{05}^{1} \xrightarrow{\left(te_{1+\ 2,\ 2\ 2,\ 1}\right)} tetetf\mathbf{A}_{07}$，并指出 $\dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{-\frac{1}{2}}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{05}^{\alpha}) = 3$。

Mal。只需指出 $\dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{-2}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{1}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{05}^{\alpha}) = 3$。

二元李。我们需要找到以下两个退化 $\mathbf{A}_{03}^{\alpha} \xrightarrow{\left(e_{1,\ 2,\ 1}\right)} etf\mathbf{A}_{05}^{\alpha}$， $\mathbf{A}_{03}^{1} \xrightarrow{\left(te_{1+\ 2,\ 2\ 2,\ 1}\right)} tetetf\mathbf{A}_{07}$，并指出

$$\dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{01}^{-1}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{\alpha}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{09}) = 4.$$

Tor。我们需要找出以下两个退化 $\mathbf{A}_{06} \xrightarrow{\left(te_{1\ \alpha\ 1+\ 2,\ 1}\right)} eef\mathbf{A}_{05}^{\alpha}, \mathbf{A}_{03}^{-1} \xrightarrow{\left(e_{1,\ 2,\ 1}\right)} tef\mathbf{A}_{10}$ 并指出，由于 $\left((\mathbf{A}_{06})_1\right)^2 = 0$， $\mathbf{A}_{06} \not\to \mathbf{A}_{03}^{-1}$。

𝔞𝔩𝔇。只需指出，$\dim \mathscr{O}(\mathbf{A}\ 203) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{05}^{\alpha}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{08}) = 3$。

$\mathfrak{s}_4$。我们需要找出以下两个退化 $\mathbf{A}_{03}^{1} \xrightarrow{\left(te_{1+\ 2,\ 2\ 2,\ 1}\right)} tetetf\mathbf{A}_{08}$ 并指出，$\dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{03}^{\alpha}) = \dim \mathscr{O}(\mathbf{A}_{06}) = 4$。

Ant。所有所需的退化如下所示。

$$\mathbf{A}_{02}^{\alpha} \xrightarrow{\left(te_1,\ e_2,\ f_1\right)} \mathrm{A}_{01}^{\alpha} \quad \left| \quad \mathbf{A}_{02}^{\alpha} \xrightarrow{\left(t^2e_2,\ te_1,\ tf_1\right)} \mathrm{A}_{03}^{\alpha} \right.$$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{02}^{\frac{1}{t^2}} \xrightarrow{\left(\frac{t-1}{t}e_1+te_2,\ -\frac{1}{t^2}e_1+1e_2,\ tf_1\right)} \mathrm{A}_{04} & \mathbf{A}_{02}^{0} \xrightarrow{\left(e_1+e_2,\ e_2,\ tf_1\right)} \mathrm{A}_{06} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}_{02}^{\frac{1}{t^2}} \xrightarrow{\left(-e_1+2t^2e_2,\ -\frac{1}{t}e_1+te_2,\ tf_1\right)} \mathrm{A}_{09}} \end{array}$$

□

2.3 Kokoris超代数

定理28。 型为(1,2)的复3维*Kokoris*超代数簇的维数为7，且有6 个不可约分支，由下列对象定义

$$\mathscr{C}_1=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{07})},\ \mathscr{C}_2=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{09})},\ \mathscr{C}_3=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{A}_{11}^{\alpha,\beta})},\ \mathscr{C}_4=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})},\ \mathscr{C}_5=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{05}^{\alpha})},\ and\ \mathscr{C}_6=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{09})}.$$

特别是，这个簇中只有3 个刚性超代数。

证明。 所有所需的退化如下所示。

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{N}_{09}^{0} \xrightarrow{\left(te_1,\ tf_1,\ t^2f_2\right)} \mathrm{J}_{03} & \mathrm{N}_{05}^{0} \xrightarrow{\left(e_1,\ tf_1,\ f_2\right)} \mathrm{J}_{06} \\ \hline \mathrm{N}_{03}^{-\frac{t}{t+2}} \xrightarrow{\left(2te_1,\ tf_1,\ f_1+(t+2)f_2\right)} \mathrm{N}_{04} & \mathrm{N}_{05}^{\alpha} \xrightarrow{\left(te_1,\ tf_1,\ t^2f_2\right)} \mathrm{N}_{06}^{\alpha} \end{array}$$

所有非退化结论均可由以下观察得出。

- $\{\mathrm{N}_{03}^{\alpha},\mathrm{N}_{05}^{\alpha}\} \not\rightarrow \{\mathrm{J}07,\mathrm{J}_{09}\}$，因为$\mathrm{N}_{03}^{\alpha}$ 和N_{05}^{α} 是幂零的
- $\mathrm{N}_{09} \not\rightarrow \{\mathrm{J}07,\mathrm{J}_{09}\}$，因为N09满足 $\{\text{复数}_{11}^{1}=\text{复数}212,\ \text{复数}_{13}^{3}=0\}$。
- 维数 $\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})}$ = 维数 $\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{05}^{\alpha})}$ = 维数 $\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}09)}$ = 4。

□

定理29. 型为 3维的复数 *Kokoris*超代数簇，型为 (2,1)，其维数为 6，并且有 5 个不可约分支，由以下对象定义

$$\mathscr{C}_1=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{J}_{01})},\ \mathscr{C}_2=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{J}_{02})},\ \mathscr{C}_3=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{A}_{02}^{\alpha})},\ \mathscr{C}_4=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{05})},\ and\ \mathscr{C}_5=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{09}^{\alpha})}.$$

特别地，这个簇中只有 3 个刚性超代数。

证明. 所有需要的退化为 $\mathbf{N}_{05} \xrightarrow{\left(e_{\ 1},\ ^{2}{}_{2},\ _{1}\right)} tetf\mathbf{N}_{04}$ 和 $\mathbf{N}_{05} \xrightarrow{\left(e_{\ 1},\ _{2},\ _{1}\right)} etf\mathbf{N}_{06}$。所有非退化都可由以下观察得出。

- $(\mathbf{N}05)_0 \not\rightarrow \{(\mathbf{J}01)0,(\mathbf{J}02)_0\}$，因此 $\mathbf{N}_{05} \not\rightarrow \{\mathbf{J}01,\mathbf{J}_{02}\}$。
- $\mathbf{N}_{05} \not\rightarrow \mathbf{N}_{09}^{\alpha}$，因为$\mathbf{N}05$ 满足 $\{c_{13}^{3}=-c3\ 31,\ c_{23}^{3}=-c_{32}^{3}\}$。
- 维数 $\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}05)}$ = 5；维数 $\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{09}^{\alpha})}$ = 4。

□

2.4 结合超代数

定理30。 型(1,2) 的复数3维结合超代数簇的维数为4 ，且有12 个不可约分支，由以下内容定义

$$\mathscr{C}_1=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{07})},\ \mathscr{C}_2=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{09})},\ \mathscr{C}_3=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})},\ \mathscr{C}_4=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{06}^{\alpha})},$$
$$\mathscr{C}_5=\mathscr{O}(\mathrm{N}_{07}^{\frac{1}{2}}),\ \mathscr{C}_6=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{07}^{-\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_7=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{08}^{\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_8=\mathscr{O}(\mathrm{N}_{08}^{-\frac{1}{2}}),$$
$$\mathscr{C}_9=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{09})},\ \mathscr{C}_{10}=\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}),\ \mathscr{C}_{11}=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}})},\ \textit{and}\ \mathscr{C}_{12}=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})}.$$

特别地，这个簇中只有10 个刚性超代数。

证明。 所有需要的退化为 $\mathrm{N}_{06}^{2-1}\left(\xrightarrow[-]{t\ t\quad 2\ 1,\quad 1,\quad 1+2\ 2}\right)$ *etfff*A_{06} 和 $\mathrm{N}_{09}\left(\xrightarrow[]{e\quad 1,\quad 1,\quad 2}\right)$ *tff*J_{06}。 轨道闭包的维数如下：

$$\begin{array}{rcccccl}
 & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{09})} & = & 4\\
 & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{06}^{\alpha})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{07}^{\frac{1}{2}})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{07}^{-\frac{1}{2}})} & =\\
 & \dim\mathscr{O}(\mathrm{N}_{08}^{\frac{1}{2}}) & = & \dim\mathscr{O}(\mathrm{N}_{08}^{-\frac{1}{2}}) & = & \dim\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}) & = 3\\
\dim\mathscr{O}(\mathrm{J}_{07}) & = \dim\mathscr{O}(\mathrm{J}_{09}) & = & \dim\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}) & = & \dim\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}) & = 1
\end{array}$$

所有非退化的理由如下。

- $\mathrm{N}_{03}^{\alpha}\not\rightharpoonup\mathrm{N}_{06}^{\alpha}$, since $(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})_0(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})_1=0$.
- N_{03}^{α} and N_{06}^{α} are nilpotent, hence $\{\mathrm{N}_{03}^{\alpha},\ \mathrm{N}_{06}^{\alpha}\}\not\rightharpoonup\{\mathrm{J}_{07},\ \mathrm{J}_{09},\ \mathrm{N}_{07}^{\alpha},\ \mathrm{N}_{08}^{\alpha},\ \mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta}\}$.
- N_{09} satisfies $\left\{\begin{array}{l}c_{11}^1=c_{12}^2=c_{21}^2,\\ c_{13}^3=c_{31}^3=0\end{array}\right\}$, hence $\mathrm{N}_{09}\not\rightharpoonup\{\mathrm{J}_{07},\mathrm{J}_{09},\mathrm{N}_{03}^{\alpha},\mathrm{N}_{07}^{\alpha},\mathrm{N}_{08}^{\alpha},\mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta}\}$.
- N_{07}^{α} satisfies $\left\{\begin{array}{l}c_{12}^2=(\frac{1}{2}+\alpha)c_{11}^1,\ c_{13}^3=c_{31}^3=0,\\ c_{21}^2=(\frac{1}{2}-\alpha)c_{11}^1\end{array}\right\}$, hence $\mathrm{N}_{07}^{\alpha}\not\rightharpoonup\{\mathrm{J}_{07},\ \mathrm{J}_{09},\ \mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta}\}$.
- N_{08}^{α} satisfies $\left\{\begin{array}{l}c_{12}^2=c_{11}^1,\ c_{13}^3=(\frac{1}{2}+\alpha)c_{11}^1,\\ c_{21}^2=c_{11}^1,\ c_{31}^3=(\frac{1}{2}-\alpha)c_{11}^1\end{array}\right\}$, hence $\mathrm{N}_{08}^{\alpha}\not\rightharpoonup\{\mathrm{J}_{07},\ \mathrm{J}_{09},\ \mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta}\}$.
- $\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ satisfies $\{c_{12}^2=0,c_{21}^2=c_{11}^1,c_{13}^3=c_{11}^1,c_{31}^3=0\}$, hence $\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\not\rightharpoonup\{\mathrm{J}_{07},\mathrm{J}_{09},\mathrm{N}_{10}^{\alpha,\alpha}\}$.

□

定理31。 复数3维、型(2,1) 的结合超代数簇维数为5 ，且有13 个不可约分支，定义如下：

$$\mathscr{C}_1=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{J}_{01})},\ \mathscr{C}_2=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{01})},\ \mathscr{C}_3=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{02}^{\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_4=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{02}^{-\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_5=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{03}^{\frac{1}{2}})},$$
$$\mathscr{C}_6=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{13}^{\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_7=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{13}^{-\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_8=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_9=\mathscr{O}(\mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}),$$
$$\mathscr{C}_{10}=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_{11}=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})},\ \mathscr{C}_{12}=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{18}^{\frac{1}{2}})},\ \textit{and}\ \mathscr{C}_{13}=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{18}^{-\frac{1}{2}})}.$$

特别是，这个簇中只有13个刚性超代数。

证明。 所有需要的退化如下所示。

$\mathbf{N}_{01}$	$\xrightarrow{\left(t^2e_1,\ te_2,\ tf_1\right)}$	$\mathbf{A}_{10}$	$\mathbf{N}_{01}$	$\xrightarrow{\left(e_1,\ e_2,\ tf_1\right)}$	$\mathbf{J}_{02}$
$\mathbf{N}_{01}$	$\xrightarrow{\left(e_2,\ t^2e_1,\ tf_1\right)}$	$\mathbf{N}_{04}$	$\mathbf{N}_{02}^{\alpha}$	$\xrightarrow{\left(e_1,\ te_2,\ f_1\right)}$	$\mathbf{N}_{07}^{\alpha}$
$\mathbf{N}_{01}$	$\xrightarrow{\left(e_1,\ te_2,\ f_1\right)}$	$\mathbf{N}_{08}$	$\mathbf{N}_{02}^{\alpha}$	$\xrightarrow{\left(e_1+e_2,\ te_2,\ f_1\right)}$	$\mathbf{N}_{09}^{\alpha}$
$\mathbf{N}_{01}$	$\xrightarrow{\left(e_1+e_2,\ t(t+1)e_1+te_2,\ tf_1\right)}$	$\mathbf{N}_{10}$	$\mathbf{N}_{01}$	$\xrightarrow{\left(te_1+(t-t^3)e_2,\ (t^4+t^2)e_1+(t^2-t^4)e_2,\ t^2f_1\right)}$	$\mathbf{N}_{20}$

轨道闭包的维数如下：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dim \overline{\mathcal{O}(\mathbf{N}_{01})} & = & 5 \\ \dim \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{01})} & = & \dim \overline{\mathcal{O}(\mathbf{N}_{02}^{\pm\frac{1}{2}})} & = & \dim \overline{\mathcal{O}(\mathbf{N}_{03}^{\frac{1}{2}})} & = & 4 \\ \dim \mathcal{O}(\mathbf{N}_{13}^{\pm\frac{1}{2}}) & = & \dim \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}) & = & \dim \mathcal{O}(\mathbf{N}_{18}^{\pm\frac{1}{2}}) & = & 2 \end{array}$$

所有非退化的理由如下。

- $\mathbf{N}_{01}$ is commutative, hence $\mathbf{N}_{01} \not\to \{\mathbf{N}_{02}^{\pm\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{03}^{\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{13}^{\pm\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{17}^{\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{18}^{\pm\frac{1}{2}}\}$.
- $(\mathbf{N}_{02}^{\pm\frac{1}{2}})_0$ and $(\mathbf{N}_{03}^{\frac{1}{2}})_0$ are commutative, hence $\{\mathbf{N}_{02}^{\pm\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{03}^{\pm\frac{1}{2}}\} \not\to \{\mathbf{N}_{13}^{\pm\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{17}^{\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}, \mathbf{N}_{18}^{\pm\frac{1}{2}}\}$.
- $\mathbf{N}_{01}$ satisfies $\{c_{11}^1 = c_{13}^3,\ c_{22}^2 = c_{23}^2\}$, hence $\mathbf{N}_{01} \not\to \mathbf{J}_{01}$

□

2.5 标准超代数

定理 32. 型为(1,2)的复3维标准超代数簇的维数为4，且有16个不可约分支，由下列各项定义

$$\mathcal{C}_1 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{J}_{01})},\ \mathcal{C}_2 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{J}_{04})},\ \mathcal{C}_3 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{J}_{05})},\ \mathcal{C}_4 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{J}_{07})},\ \mathcal{C}_5 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{J}_{10})},\ \mathcal{C}_6 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{J}_{11})},$$
$$\mathcal{C}_7 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{N}_{03}^{\alpha})},\ \mathcal{C}_8 = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{N}_{06}^{\alpha})},\ \mathcal{C}_9 = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{07}^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{10} = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{07}^{-\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{11} = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{08}^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{12} = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{08}^{-\frac{1}{2}}),$$
$$\mathcal{C}_{13} = \overline{\mathcal{O}(\mathrm{N}_{09})},\ \mathcal{C}_{14} = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{10}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{15} = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}),\ \textit{and}\ \mathcal{C}_{16} = \mathcal{O}(\mathrm{N}_{10}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}).$$

特别地，这个簇中只有14个刚性超代数。

证明. 根据定理 17，我们有结合部分与 Jordan 部分的并集，因此需要从定理 25 和定理 30 中选择不可约分支。

□

定理 33。 型为(2,1)的复数3维标准超代数簇的维数为5，且有22个不可约分支，由下列对象定义：

$$\mathcal{C}_1 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{01})},\ \mathcal{C}_2 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{03})},\ \mathcal{C}_3 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{04})},\ \mathcal{C}_4 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{11})},\ \mathcal{C}_5 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{12})},\ \mathcal{C}_6 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{J}_{13})},$$
$$\mathcal{C}_7 = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{N}_{01})},\ \mathcal{C}_8 = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{02}^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_9 = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{02}^{-\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{10} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{03}^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{11} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{13}^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{12} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{13}^{-\frac{1}{2}}),$$
$$\mathcal{C}_{13} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},0}),\ \mathcal{C}_{14} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{0,\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{15} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{0,-\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{16} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},0}),\ \mathcal{C}_{17} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}),$$
$$\mathcal{C}_{18} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{19} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{20} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{17}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}),\ \mathcal{C}_{21} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{18}^{\frac{1}{2}}),\ \textit{and}\ \mathcal{C}_{22} = \mathcal{O}(\mathbf{N}_{18}^{-\frac{1}{2}}).$$

特别是，该簇中只有22个刚性超代数。

证明。 考虑非结合非约当标准超代数 $\mathbf{N}_{\pm\frac{1}{2}}$,0 17 和 $\mathbf{N}_{17}^{0\ \pm\frac{1}{2}}$,，我们发现它们给出了维数为 2 的不可约分支。因此，我们的簇的所有不可约分支都将由结合超代数、非结合 Jordan 超代数以及上述标准超代数的不可约分支定义。

□

2.6 非交换 Jordan 超代数

定理34。 复数3维型 (1,2) 的非交换 *Jordan* 超代数簇的维数为7，并且有9 个由下列对象定义的不可约分支：

$$\mathscr{C}_1=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{07})},\ \mathscr{C}_2=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{11})},\ \mathscr{C}_3=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{A}_{11}^{\alpha,\beta})},\ \mathscr{C}_4=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{01}^{\alpha})},\ \mathscr{C}_5=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{07}^{\alpha})},$$
$$\mathscr{C}_6=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{08}^{\alpha})},\ \mathscr{C}_7=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{09})},\ \mathscr{C}_8=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta})},\ \textit{and}\ \mathscr{C}_9=\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{12}^{\alpha})}.$$

特别地，该簇中只有3个刚性超代数。

证明。 下面列出所有必要的退化。

N_{09}	$\xrightarrow{\left(t\sqrt{2t+4}e_1,\ \left(e_1,tf_1,\ f_2\right)\right)}$	J_{06}	N_{12}^{0}	$\xrightarrow{\left(e_1,\ {}^{1}\,tf_1,\ tf_2\right)\ -\ \left(te_1,tf_1,\ f_2\right)}$	J_{10}
$\mathrm{N}_{01}^{-\frac{t}{t+2}}$	$\xrightarrow{\left(2te_1,tf_1,\ f_1+(t+2)f_2\right)\ \left(\frac{\sqrt{t+2}}{\sqrt{2}}f_1-(t+2)f_2,\ \frac{2t+4}{\sqrt{2}}f_1+tf_2\right)}$	N_{02}	N_{01}^{α}	$\xrightarrow{\left(2t\alpha e_1,\ tf_1+f_2,\ 2\alpha t^2f_2\right)}$	N_{03}^{α}
$\mathrm{N}_{03}^{-\frac{t}{t+2}}$	$\xrightarrow{\left(e_1,tf_1,\ f_2\right)}$	N_{04}	N_{01}^{α}	$\xrightarrow{\left(e_1,\ tf_1+tf_2,\ -f_1+f_2\right)}$	N_{05}^{α}
N_{01}^{α}	$\longrightarrow$	N_{06}^{α}	$\mathrm{N}_{10}^{\alpha-t,\alpha+t}$	$\longrightarrow$	N_{11}^{α}

轨道闭包的维数如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{A}_{11}^{\alpha,\beta})} & = & 7\\
\dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{01}^{\alpha})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{12}^{\alpha})} & = & 5\\
\dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{07}^{\alpha})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{08}^{\alpha})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{N}_{09})} & = & 4\\
 & & & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{11})} & = & 2\\
 & & & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathrm{J}_{07})} & = & 1
\end{array}$$

所有非退化的理由如下：

- N_{01}^{α} is nilpotent, hence $\mathrm{N}_{01}^{\alpha}\not\rightarrow\{\mathrm{N}_{07}^{\alpha},\mathrm{N}_{08}^{\alpha},\mathrm{N}_{09},\mathrm{J}_{11},\mathrm{J}_{07}\}$.
- $\mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta}$ satisfies $\{c_{12}^2+c_{21}^2=c_{11}^1,\ c_{13}^3+c_{31}^3=c_{11}^1\}$, hence $\mathrm{N}_{10}^{\alpha,\beta}\not\rightarrow\{\mathrm{N}_{07}^{\alpha},\mathrm{N}_{08}^{\alpha},\mathrm{N}_{09},\mathrm{J}_{11},\mathrm{J}_{07}\}$.
- N_{12}^{α} satisfies $\left\{\begin{array}{l} c_{11}^1=c_{12}^2+c_{13}^3,\ c_{21}^3+c_{12}^3=0,\\ c_{31}^2+c_{13}^2=0,\ c_{11}^1=c_{31}^3+c_{13}^3\end{array}\right\}$, hence $\mathrm{N}_{12}^{\alpha}\not\rightarrow\{\mathrm{N}_{07}^{\alpha},\mathrm{N}_{08}^{\alpha},\mathrm{N}_{09},\mathrm{J}_{11},\mathrm{J}_{07}\}$.
- N_{07}^{α} satisfies $\{c_{11}^1=c_{12}^2+c_{21}^2,\ c_{13}^3=c_{31}^3=0\}$, hence $\mathrm{N}_{07}^{\alpha}\not\rightarrow\{\mathrm{J}_{11},\mathrm{J}_{07}\}$.
- N_{08}^{α} satisfies $\{2c_{11}^1=c_{12}^2+c_{21}^2,\ c_{11}^1=c_{13}^3+c_{31}^3\}$, hence $\mathrm{N}_{05}^{\alpha}\not\rightarrow\{\mathrm{J}_{11},\mathrm{J}_{07}\}$.
- N_{09} satisfies $\{2c_{11}^1=c_{12}^2+c_{21}^2,\ c_{13}^3=c_{31}^3=0\}$, hence $\mathrm{N}_{09}^{\diagup}\rightarrow\{\mathrm{J}_{11},\mathrm{J}_{07}\}$.

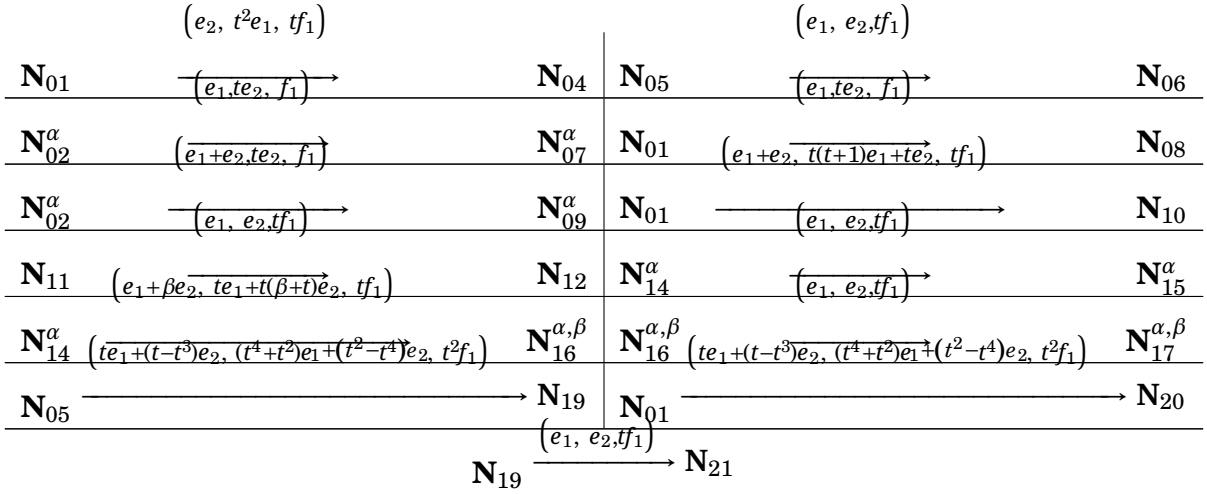
□

定理35。 型为(2,1) 的复数3维非交换约旦超代数簇的维数为6 ， 且有10 个不可约分支，其定义如下：

$$\mathscr{C}_1=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{J}_{01})},\ \mathscr{C}_2=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{A}^{\alpha}_{02})},\ \mathscr{C}_3=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{01})},\ \mathscr{C}_4=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{02})},\ \mathscr{C}_5=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{03})},$$
$$\mathscr{C}_6=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{05})},\ \mathscr{C}_7=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{11})},\ \mathscr{C}_8=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{13})},\ \mathscr{C}_9=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{14})},\ and\ \mathscr{C}_{10}=\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{18})}.$$

特别地，该簇中只有4个刚性超代数。

证明。 下面，我们将提及所有必要的退化。



轨道闭包的维数如下：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{A}^{\alpha}_{02})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{14})} = 6\\
\dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{01})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{02})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{03})} & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{05})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}_{11})} = 5\\
 & & & & & & & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{J}_{01})} = 4\\
 & & & & & & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{13})} & = & \dim\overline{\mathscr{O}(\mathbf{N}^{\alpha}_{18})} = 3
\end{array}$$

所有非退化的理由如下：

- $(\mathbf{N}^{\alpha}_{14})0$ 是非半单的，且$\mathbf{N}^{\alpha}_{14}$ 满足 $\{c^1_{11}=c^3_{31}+c^3_{13}, c^2_{12}c^2_{22}=c^1_{11}c^1_{21}, c^1_{11}=c^2_{21}+c^2_{12}, c^2_{22}=c^3_{32}+c^3_{23}, c^1_{11}c^1_{33}=-c^2_{33}c^2_{22}\}$，因此 $N^{\alpha}_{14}\not\rightarrow\{N_{01}, N^{\alpha}_{02},\ N^{\alpha}_{03},\ N_{05}, N_{11}, N^{\alpha}_{13},\ N^{\alpha}_{18},\ J_{01}\}$。
- $\mathbf{N}01$ 是交换代数，且满足 $\{c^1_{11}=c3\ 13,\ c212\ c^2_{12}=c111c^2_{12}+c211\ c^2_{22}\}$，因此 $\mathbf{N}_{01}\not\rightarrow\{\mathbf{N}^{\alpha}_{13},\ \mathbf{N}^{\alpha}_{18},\ \mathbf{J}_{01}\}$。
- $\mathbf{N}^{\alpha}_{02}$ 满足 $\{c^1_{11}=c^3_{13}+c3\ 31, c^1_{12}=c^3_{23}=0\}$，因此 $\mathbf{N}^{\alpha}_{02}\not\rightarrow\{\mathbf{N}^{\alpha}_{13},\ \mathbf{N}^{\alpha}_{18},\ \mathbf{J}_{01}\}$。
- 维数 $\left((\mathbf{N}05)_0\right)^2=1$，因此 $\mathbf{N}_{05}\not\rightarrow\{\mathbf{N}^{\alpha}_{13},\ \mathbf{N}^{\alpha}_{18},\ \mathbf{J}_{01}\}$。
- $(\mathbf{N}11)0$ 是交换且非半单的，因此 $\mathbf{N}_{11}\not\rightarrow\{\mathbf{N}^{\alpha}_{13}, \mathbf{N}^{\alpha}_{18}, \mathbf{J}_{01}\}$。

□

参考文献

[1] Abdelwahab H., Abdurasulov K., Kaygorodov I., 《非交换约旦代数的代数与几何分类》, arXiv:2407.05429。[2] Abdurasulov K., Khudoyberdiyev A., Toshtemirova F., 《幂零李-山口代数、Bol代数与相容李代数的几何分类》, 《数学通讯》33 (2025), 3, 10。[3] Abdurasulov K., Lubkov R., Saydaliyev A., 《Jordan 超代数的代数与几何分类》, 《西伯利亚电子数学报告》22 (2025), 1, 813–852。[4] Albert A., 《幂结合环》, 《美国数学会汇刊》64 (1948), 3, 553–593。[5] Albuquerque H., Elduque A., 《小维数马尔采夫超代数的分类》, 《代数与逻辑》35 (1996), 6, 351–365。[6] Alvarez M. A., Hernández I., Kaygorodov I., 《Jordan 超代数的退化》, 《马来西亚数学科学学会通报》42 (2019), 6, 3289–3301。[7] Ben Hassine A., Chtioui T., Elhamdadi M., Mabrouk S., 《左对称莱因哈特代数的上同调与变形》, 《数学通讯》32 (2024), 2, 127–152。[8] Bouarroudj S., Mashurov F., 《关于Zinbiel超代数与Tortkara超代数》, 《巴西数学学会通报》56 (2025), 3, 49。[9] Burde D., Steinhoff C., 《4维复李代数轨道闭包的分类》, 《代数杂志》214 (1999), 2, 729–739。[10] Cabrera Serrano A., Cabrera García M., 《强素非交换约旦代数的乘法素性》, 《代数杂志》538 (2019), 253–260。[11] Cabrera Serrano A., Cabrera García M., Rodríguez Palacios Á., 《强半素非交换约旦代数的乘法半素性》, 《代数通讯》50 (2022), 11, 4584–4591。[12] Cantarini N., Kac V., 《线性紧致单刚性超代数的分类》, 《国际数学研究通知》2010, 17, 3341–3393。[13] Camacho L., Fernández Ouaridi A., Kaygorodov I., Navarro R., 《Zinbiel超代数》, 《纽约数学杂志》29 (2023), 1341–1362。[14] Cantarini N., Caselli F., Kac V., 《E(4,4)的一个李共形超代数与表示对偶性》, 《数学进展》437 (2024), 109416。[15] Dorofeev G., Pchelintsev S., 《标准代数与可达代数簇》, 《西伯利亚数学杂志》18 (1977), 5, 702–707。[16] Drensky V., Ismailov N., Mustafa M., Zhakhayev B., 《自由双交换超代数》, 《代数杂志》652 (2024), 158–187。

[17] Dzhumadildaev A.，《带有斜对称恒等式的反交换代数》，《代数及其应用杂志》，8（2009），2，157–180。[18] Ehret Q.、Makhlouf A.，《Lie-Rinehart 超代数的分类与变形》，《数学通讯》，30（2022），2，67–100。[19]Elduque A.、Etingof P.、Kannan A.，《特征 5 下通过张量范畴从 Albert 代数到 Kac 的十维 Jordan 超代数》，《代数杂志》，666（2025），387–414。[20] Elduque A.、Kamiya N.、Okubo S.，《（−1，−1）-平衡 Freudenthal-Kantor 三系与非交换约旦代数》，《代数杂志》，294（2005），1，19–40。[21] Fehlberg Júnior R.、Kaygorodov I.、Saydaliyev A.，《对称 Leibniz 代数的几何分类》，《数学通讯》，33（2025），1，10。[22] Filippov V.，《关于满足四次标准恒等式的反交换代数》，《代数与逻辑》，40（2001），第4期，255–271。[23] Grishkov A.、Rasskazova M.、Shestakov I.，《单二元李与非李超代数的偶部可解》，《代数杂志》，655（2024），483–492。[24] Grunewald F.、O'Halloran J.，《维数小于六的幂零李代数簇》，《代数杂志》，112（1988），315–325。[25] Grunewald F.、O'Halloran J.，《Lie 代数的变形》，《代数杂志》，162（1993），1，210–224。[26] Huang A.、Gao Y.、Sun J.，《扭曲 N = 1 Block-Lie 超代数上的转置 Poisson 超代数结构》，《太平洋数学杂志》，335（2025），1，119–161。[27] Ismailov N.、Kaygorodov I.、Volkov Yu.，《Leibniz 代数与反交换代数的退化》，《加拿大数学通报》，62（2019），3，539–549。[28] Jumaniyozov D.、Kaygorodov I.、Khudoyberdiyev A.，《幂零非交换 Jordan 代数的代数与几何分类》，《代数及其应用杂志》，20（2021），11，2150202。[29] Kantor I.，《$\mathscr{L}$-函子理论中的一些问题》，（俄文）Trudy Inst. Mat.（Novosibirsk）16（1989），Issled. po Teor. Kolets i Algebr，54–75。[30] Kaygorodov I.，《非结合代数结构：分类与结构》，《数学通讯》，32（2024），3，1–62。[31] Kaygorodov I.、Khrypchenko M.、Páez-Guillán P.，《非结合代数的几何分类：综述》，《数学通讯》，32（2024），2，185–284。[32] Kaygorodov I.、Lopatin A.、Popov Yu.，《单非交换 Jordan 超代数的结构》，《地中海数学杂志》，15（2018），33。[33] Kaygorodov I.、Zusmanovich P.，《关于满足 $[R_a、R_b]$ 为导子的反交换代数》，《几何与物理杂志》，163（2021），104113。

[34] Khudoyberdiyev A.、Muratova K.，《幂零根具有特征序列（$n-1$，$1|m$）且幂零指数为$n+m$的可解 Leibniz 超代数》，《数学通讯》，32（2024），2，27–54。[35] Kleinfeld E.、Kokoris L.，《一次柔性代数》，《美国数学会会刊》，13（1962），6，891–893。[36] Kokoris L.，《单 nodal 非结合约旦代数》，《美国数学会会刊》，9（1958），4，652–654。[37] Kokoris L.，《Nodal 非结合约旦代数》，《加拿大数学杂志》，12（1960），488–492。[38] Lopes S.，《非结合代数与表示论：对称性、结构与不变量》，《数学通讯》，32（2024），2，63–117。[39] McCrimmon K.，《非结合约旦代数的结构与表示》，《美国数学会汇刊》，121（1966），187–199。[40] Oehmke R.，《Nodal 非结合约旦代数》，《美国数学会汇刊》，112（1964），416–431。[41] Popov Yu.，《保守代数与超代数：综述》，《数学通讯》，28（2020），2，231–251。[42] Popov Yu.，《单非交换 Jordan 超代数的表示 I》，《代数杂志》，544（2020），329–390。[43] Popov Yu.，《单非交换 Jordan 超代数的表示 II》，《纯粹与应用代数杂志》，227（2023），1，107135。[44] Pozhidaev A.、Shestakov I.，《次数为$n>2$的非交换 Jordan 超代数》，《代数与逻辑》，49（2010），1，18–42。[45] Pozhidaev A.、Shestakov I.，《特征零下的单有限维非交换 Jordan 超代数》，《西伯利亚数学杂志》，54（2013），2，301–316。[46] Pozhidaev A.、Shestakov I.，《单有限维模非结合约旦超代数》，《纯粹与应用代数杂志》，223（2019），6，2320–2344。[47] Schafer R.，《特征零的非交换约旦代数》，《美国数学会会刊》，6（1955），472–475。[48] Schafer R.，《满足 $([x,y],y,y)=0$ 的单非交换约旦代数》，《代数杂志》，169（1994），1，194–199。[49] Skosyrskiĭ V.，《满足$A^{(+)}$ 为结合的条件的非交换约旦代数 A》，《西伯利亚数学杂志》，32（1991），6，1024–1030。[50] Shestakov I.，《某些类的非结合约旦环》，《代数与逻辑》，10（1971），407–448。