arXiv:2602.14277v1 [math.LO] 15 Feb 2026

无限国际象棋的普适性

Matthew Bolan* Andreas Tsevas†

摘要

我们证明，在无限棋盘上进行、且包含无限多个棋子的国际象棋，具有尽可能强大的能力：每个带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈都与某个无限国际象棋局面策略等价，反之亦然。由于我们的构造是可计算的，而且开式盖尔–斯图尔特博弈已有充分研究，这使我们能够解决许多关于含无限多个棋子的无限国际象棋复杂性方面的未决问题。特别是，所有可数序数都可以作为某个此类国际象棋局面的博弈值出现。我们还给出另一种构造，使所有可数序数都能作为博弈值实现，并且有一个令人欣喜的特点：它仅由一对王和兵组成。

关键词：无限国际象棋；盖尔–斯图尔特博弈；描述集合论；组合博弈论。

*2020*年数学主题分类：91A44, 91A05。

1 引言

本文解决了关于无限多棋子参与的无限国际象棋的博弈值和复杂性的若干未解问题。无限国际象棋是将国际象棋规则自然扩展到整数格 $\mathbb{Z}^2$[2, 3, 4] 上进行对弈。该扩展大体遵循标准规则：后、象和车的移动方向与有限棋盘上的情况相同，但现在可以移动任意有限数量的格，因为它们不再受棋盘边缘限制。王、马和兵的走法符合预期，不过不存在兵升变或王车易位的概念，并且假设兵永远不能一次移动两格。每位棋手恰有一个王，无限对弈定义为和棋，而将军、将死、逼和、三次重复局面和五十回合规则[1] 均保持不变。

*多伦多大学数学系，加拿大matthew.bolan@mail.utoronto.ca

†乌尔姆大学物理系，德国andreas.tsevas@uni-ulm.de[1]在此前关于无限国际象棋的文献中，通常会忽略五十回合规则和三次重复局面导致的和棋；但我们通过构造结果不受这些规则影响的局面，避开了是否应将这些规则纳入考量的问题。

一个无限国际象棋局面 由轮到哪一方行棋的指示函数，以及对棋盘上每个格赋予的一个值来确定；该值表示该格上是否有棋子，如果有，则表示是哪种棋子。

无限国际象棋目前的形式，是通过 Math-Overflow [7, 8] 上的问题而广为人知的。正如 [7] 的回答中首次讨论、并在 [3], 中证明的那样，存在这样的局面：白方总能在有限时间内强制将死，但黑方可以选择将将死延迟任意多着法。这引出了对超限序数博弈值（定义 2）的考量，它衡量白方距离获胜还有多远。

尽管研究者已经构造出博弈值为 ω 、乃至高达 ω^4 [4] 的局面，但无限国际象棋中博弈值究竟能有多高，长期以来一直是个悬而未决的问题。特别是，Evans 和 Hamkins 在 [3] 中提出，无限国际象棋中所有对白方获胜的局面的博弈值，其上确界是多少。这个序数称为无限国际象棋的 $\boldsymbol{\omega_1}$，记作 $\omega_1^{\mathfrak{Ch}}$。目前已知的 $\omega_1^{\mathfrak{Ch}}$ 上界只有这样一个观察：国际象棋的所有博弈值都是可数的，即 $\omega_1^{\mathfrak{Ch}} \leq \omega_1$；这是由无限国际象棋的博弈树仅为可数分支这一事实推得的。

本文提出了两种不同的构造，它们都解决了这个问题，并且进一步拓展了结果。第一种构造见第 2 节。证明策略是将某些树上的博弈嵌入棋盘，这与 [3] 中展示如何在三维无限国际象棋中实现所有可数博弈值所采用的策略类似。在二维情形下，我们克服的主要障碍是如何允许树的分支彼此交叉。我们通过将树的分支表示为空的对角线（而非由棋子构成的结构），让象沿着这些对角线行进，从而解决了这一问题。我们的树的特性还使我们能够以基本相同的方式处理两位玩家，从而构造任意博弈树，进而模拟所有带和棋的开 Gale–Stewart 博弈（定义 1）。

我们的结果的陈述及其各种推论均以描述集合论的术语定义——对于未定义的术语和符号，请读者参阅 [10] 的第四节。这仅仅是形式化上的问题——只对国际象棋构造感兴趣的读者，即使没有任何集合论背景，也应当能够理解并欣赏这些构造。我们的第一个主要定理如下：

定理1. 对于任意具有和棋的开盖尔–斯图尔特博弈 G_{S_1,S_2}，都存在一个无限国际象棋局面 p，具有以下性质：

（i）给定关于 S_1 和 S_2 的预言机，可以计算出局面 p，因此它属于 $\Delta^{0,(S_1,S_2)}_1$。（ii）白方（分别为黑方）能够从 p 强制获胜，当且仅当玩家一（分别为玩家二）能够在 G_{S_1,S_2} 中强制获胜。如果 G_{S_1,S_2} 对某位玩家的博弈值为 α，那么 p 对相应玩家的博弈值为 $\beta \geq \alpha$。

（iii）对于 p 中某位玩家的任意获胜（分别为和棋）策略 σ，存在一个 $\Delta^0_{1}{}^{\sigma}$，使相应玩家在 $G_{S_1,\ S_2}$ 中拥有获胜（分别为和棋）策略。对于 $G_{S_1,\ S_2}$ 中某位玩家的任意获胜（分别为和棋）策略 σ，存在一个 $\Delta^0_{1}{}^{\sigma}$，使相应玩家在 p中拥有获胜（分别为和棋）策略。

事实证明，无限国际象棋本身就是这样一种带有和棋的盖尔–斯图尔特博弈，因此，含有无限多个棋子的无限国际象棋尽可能强大，策略复杂性也尽可能高。特别是，我们立即得到以下推论，从而解决了无限国际象棋的 $\boldsymbol{\omega_1}$这一问题：

推论1. 对于每个可数序数 $\alpha < \omega_1$，都存在一个含有无限多个棋子的无限国际象棋局面，其博弈值为 α。

我们指出，凭借这一构造的可计算性，将同样的论证限制在 S_1 和 S_2 可计算的博弈上，可以证明可计算棋局的 $\boldsymbol{\omega_1}$是丘奇–克莱尼序数 ω_1^{CK}；其上界已在 [3]中证明。

此外，许多关于盖尔–斯图尔特博弈复杂性的经典结果也适用于无限国际象棋。特别是，Andreas Blass 在 1972年的论文《获胜策略的复杂性》中提出的定理2 [1]立即推出了以下关于我们主定理的推论：

推论2. 对于任意超算术集 A，都存在一个可计算的无限国际象棋局面 p，使得 A 可递归于相关国际象棋对局的每一种获胜策略。

此外，根据上述论文定理3的证明中的构造，我们得到以下推论：

推论3. 存在一个无限国际象棋局面 p，具有以下性质：

(i) 局面 p 是可计算的。*(ii)* 白方有一种可计算的获胜策略，能够击败黑方的每一种超算术策略。*(iii)* 允许任意走棋时，双方玩家都没有获胜策略，且双方都能迫使对局以和棋告终。

这些结果涉及无限国际象棋的标准形式，在该形式中，后、车和象可以移动任意远的距离。不过，这种棋也有一个变体：所有棋子每步最多只能移动七格，与标准 8×8 棋盘上可能的最大步长相同。这一版本很可能是文献中最早出现的版本，D´enes K˝onig 在其 1927年关于其同名引理 [9]的论文中就已对其进行探讨。

我们在第3节提出的第二种构造讨论了这一变体。用于证明定理3的紧致性论证表明，在如此严格的限制下，超限博弈值只能通过国际象棋中的zugzwang（被迫走棋）[2]现象产生，这使得模拟任意博弈变得困难。尽管如此，我们仍然得到了以下结果：

定理2. 对于每一个可数序数 $\alpha < \omega_1$，都存在一个博弈值为 α 、仅由一对王和兵组成的无限国际象棋局面。

其证明方法是模拟一小类博弈（定义7），这类博弈充分利用zugzwang（被迫走棋），可达到任意大的可数博弈值，并能在棋盘上实现为由兵链构成的二叉树。

致谢

我们感谢MathOverflow的创建者与维护者，他们促成了关于无限国际象棋的最初讨论，并由此引出了这项工作。我们也感谢Joel David Hamkins和Davide Leonessi在2023年组织无限博弈研讨会，使我们得以展示并讨论关于无限国际象棋的初步结果。我们还感谢Hunter Spink对本手稿早期版本提出的意见。

Matthew Bolan感谢安大略省研究生奖学金的支持。

2 在无限国际象棋中模拟任意博弈

本节将介绍我们的第一个构造，并证明定理1。第2.1节专门介绍与我们在无限国际象棋中模拟的博弈类型相关的各种技术性定义，而第2.2节则讨论实际局面的构造。只对国际象棋感兴趣的读者可以直接跳到第2.2节，仍能充分了解这一构造的威力。

2.1 含和棋的开放式盖尔–斯图尔特博弈

我们首先介绍要模拟的博弈类别。对于一个由自然数有限序列组成的集合 $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$，我们将集合 $U(S) \subseteq \mathbb{N}^{\omega}$ 定义为所有这样的自然数无限序列构成的集合：其中有某个初始段属于S。

定义 1 (带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈)。 设 S_1， $S_2 \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 满足 $U(S_1) \cap U(S_2) = \varnothing$。我们将带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈$G_{S_1,\ S_2}$ 定义如下：两位玩家轮流说出 $\mathbb{N}$ 的元素，无限进行下去，从而产生一个序列 $s \in \mathbb{N}^{\omega}$ 。我们称先手玩家获胜

[2]Zugzwang 是一个德语词，意为“被迫走棋”。在国际象棋术语中，它指的是棋手因必须走棋而陷入不利局面的现象。

$G_{S_1,\ S_2}$若 $s \in U(S_1)$，则后手玩家获胜；否则，博弈以和棋结束。集合 $U(S_1)$ 和 $U(S_2)$ 称为收益集。

定义 1 是开 Gale–Stewart 博弈的一种推广。这类博弈最初于 [5], 中定义，以允许三种可能的结果：胜、负和和棋。博弈$G_{S_1,\ S_2}$ 恰好在$U(S_1) \cup U(S_2) = \mathbb{N}^\omega$时才是经典意义上的盖尔–斯图尔特博弈，这意味着不存在允许和棋的序列。我们用 S_1和 S_2来定义收益集，而不直接使用 $U(S_1)$和 $U(S_2)$，这样关于我们的构造、博弈值和可计算性结果的陈述会更容易表述。

术语开式 的由来是， $U(S_1)$和 $U(S_2)$在 $\mathbb{N}^\omega$上的积拓扑中是开集，而积拓扑中的所有开集都具有 $U(S)$的形式，其中 $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$取某个值。文献中也研究了更一般的盖尔–斯图尔特博弈，这类博弈允许收益集不是开集。在带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈中，如果某位玩家已经获胜，那么根据积拓扑的定义，必定存在一个有限时刻，此时无论任一玩家之后如何选择，都已能保证胜利。按照我们的具体定义，只需检查所命名序列的某个初始段是否属于 S_1 或 S_2，就能判断是否能保证某位玩家获胜。

盖尔–斯图尔特博弈中的策略 是一个映射 $\sigma : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$，将自然数的有限序列映射到自然数。轮到某位玩家行动时，若已经进行的自然数有限序列为 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$，该玩家便按照策略 σ 出招 $\sigma(v_1, v_2, \ldots, v_n)$[3]。如果一种策略无论面对何种其他策略都能获胜（或和棋），则称该策略为获胜策略（或和棋策略）。

无穷博弈论中有一个概念，它为开式博弈赋予一个序数，用来衡量获胜玩家距离胜利还需多长时间。我们现在按照 [3], 为带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈定义这一概念。

定义 2（序数博弈值）。考虑一个带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈$G_{S_1S_2}$。给定该博弈中由自然数有限序列 $v = (v_1, \ldots, v_n)$指定的某个初始对局，我们按归纳法定义 v玩家一的序数博弈值如下：如果玩家一已经确保自己在博弈中获胜，也就是说，如果存在某个自然数 $k \leq n$，使得$(v_1, \ldots, v_k) \in S_1$，那么 v的博弈值为 0。如果轮到玩家二行动，若对每个 $m \in \mathbb{N}$，对局$(v_1, \ldots, v_n, m)$都已被赋予博弈值 $\alpha_m \leq \alpha$，且 $\alpha = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\alpha_m\}$，则称$v$的博弈值为 α。如果轮到玩家一行动，若满足条件的自然数集合$T_{v,\alpha}$ 非空，其中 m 使得对局$(v_1, \ldots, v_n, m)$已被赋予博弈值 $\alpha_m < \alpha$，且$\alpha = \min_{m\in T_{v,\alpha}}\{\alpha_m\} + 1$，则称 v 的博弈值为 α。玩家二的序数博弈值以类似方式定义，只需交换玩家和收益集的角色。

关于开式博弈的博弈值，一个基本观察是：对玩家一而言，具有序数博弈值的对局恰好是那些

[3]请注意，这一定义为每个有限序列都指定了一步棋，包括那些永远不可能出现的序列，以及轮不到该玩家行动的序列。这些值无关紧要，在执行策略时不起任何作用。

能让玩家一获胜的对局。事实上，玩家一只要始终选择一个能导向更小博弈值的走法，就拥有获胜策略。

任意给定的无限国际象棋局面都可以解释为一个带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈。为此，我们固定一种将国际象棋着法编码为自然数的方式，规定非法着法会立即导致失败，并允许在相应的国际象棋对局本应结束后继续以任意自然数作为着法。所得博弈是开式的，因为将死只能在有限步对局后发生，而在棋盘上进行无限长的对局则为和棋。于是，集合 S_1 可以取为那些导致黑方被将死或黑方走出非法着法的有限对局序列，而 S_2 则为白方对应的集合。由此，无限国际象棋局面可以被赋予博弈值。如果一个局面对白方具有有限博弈值 n，那么这一概念就与国际象棋谜题中白方能在n步内将死的概念一致 [3]。

我们的主要定理是：无限国际象棋可以模拟任何带和棋的开 Gale–Stewart 博弈：

定理1。对于任意带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈$G_{S_1,\ S_2}$，都存在一个无限国际象棋局面 p，具有以下性质：

(i) 给定关于 S_1 和 S_2 的预言机，可以计算局面 p，因此它属于 $\Delta^{0,}_{(S_1,S_2)\qquad 1}$。(ii) 当且仅当玩家一（相应地，玩家二）能在 $G_{S_1,\ S_2}$ 中强制获胜时，白方（相应地，黑方）才能从 p 强制获胜。如果 $G_{S_1,\ S_2}$ 对某一玩家的博弈值为 α，那么 p 对相应玩家的博弈值为 $\beta \geq \alpha$。(iii) 对于某玩家在 p 中的任意获胜（相应地，和棋）策略 σ，相应玩家在 $G_{S_1,\ S_2}$ 中都存在一个获胜（相应地，和棋）策略 $\Delta^{0}_{,\ 1}{}^{\sigma}$。对于某玩家在 $G_{S_1,\ S_2}$ 中的任意获胜（相应地，和棋）策略 σ，相应玩家在 p 中都存在一个获胜（相应地，和棋）策略 $\Delta^{0}_{,\ 1}{}^{\sigma}$。

局面 p 本质上会是在棋盘上对 $G_{S_1,\ S_2}$ 的博弈树重要部分的一种简单嵌入。在 $G_{S_1,\ S_2}$ 中的着法将以可计算的方式对应于 p 中的某些象的着法，至少在将死发生之前如此。

我们的构造必须解决这样一个事实：盖尔–斯图尔特博弈需要无限长的时间才能进行完毕，但国际象棋中的无限对弈被定义为和棋。因此，任何模拟开 Gale–Stewart 博弈的国际象棋局面，都必须在某个时刻允许一名已确保自己能在相应盖尔–斯图尔特博弈中获胜的玩家将死对手。我们引入以下定义，以明确盖尔–斯图尔特博弈中失败方的哪些着法不会进一步影响博弈结果。

定义 3 (节点与失败节点)。考虑一个带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈 $G_{S_1,\ S_2}$ 以及该博弈中的某个初始对局，它由一个有限自然数序列 $v = (v_1, \ldots\ldots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ 指定，其中 $n \in \mathbb{N}$。对局 v 称为节点$G_{S_1,\ S_2}$。此外，如果轮到玩家一行动（即 n 为偶数），且 v 的某个初始段属于 S_2，则称 v 为玩家一的失败节点。同理，v

如果轮到玩家二行动（即 n 为奇数），且 v 的某个初始段属于 S_1，则称其为玩家二的失败节点。

定义4 (约化博弈树**)**。考虑一个带和棋的开 Gale–Stewart 博弈 $G_{S_1,\ S_2}$。那么，它的约化博弈树 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 恰好由满足以下条件的节点 $v \in \mathbb{N}^{<\omega}$ 组成：v 没有任何真初始段是博弈中任一玩家的失败节点。

带和棋的开 Gale–Stewart 博弈的约化博弈树 T 可以看作是恰好包含那些为将博弈进行至结束所必需的着法的树，其中终端节点总是对应于轮到行棋的玩家失败。我们记录约化博弈树的一些可直接由上述定义推出的性质：

观察 1。给定一个带和棋的开 *Gale–Stewart* 博弈 $G_{S_1,\ S_2}$ 及其约化博弈树 T，有以下结论：

(i) 给定 S_1 和 S_2的预言机，可以计算出树 T，因此它属于$\Delta^{0,\ (S_1,S_2)}_1$。*(ii)* 如果 $v \in \mathbb{N}^{<\omega}$ 是 T 的终端节点，那么 v 是G_{S_1}的失败节点，S_2。特别地，在初始对局 v之后，无论继续进行何种对局，轮到行棋的玩家都会失败。

(iii) 如果 $v \in \mathbb{N}^{\omega}$ 是 T 的无限分支，那么 v 在 G_{S_1}中是和棋。S_2。

因此，带和棋的开 Gale–Stewart 博弈可以改写为：玩家在其约化博弈树 T 上交替着法，沿树向更深处移动，双方都力图迫使对手走到终端节点。

2.2 无限国际象棋构造

现在，我们明确说明如何将任意带和棋的开 Gale–Stewart 博弈 $G_{S_1,\ S_2}$ 嵌入无限棋盘。为此，我们构造一个与其约化博弈树 T 对应的国际象棋局面。为此，我们将逐步引入若干小型国际象棋组件，它们可以组合起来，在棋盘上表示约化博弈树 T 的节点。

在介绍任何国际象棋组件之前，我们先概述整个构造。图1展示了与某个带和棋的开 Gale–Stewart 博弈 $G_{S_1,\ S_2}$ 对应的国际象棋局面的整体结构。黑王和白王被困在局面最左侧，可以沿着虚线标出的将杀对角线受到象的攻击而被将死。在它们右侧，棋盘上嵌入了一棵双色树，它对应于该博弈的约化博弈树 T。

双方玩家的移动选择都将受到极大限制，而且每次都只能控制一只自由象。双方的象在树中相互追逐，目标是抢先逃出树，并将对方易受攻击的王将死。两只象最初都位于最左侧的节点，也就是

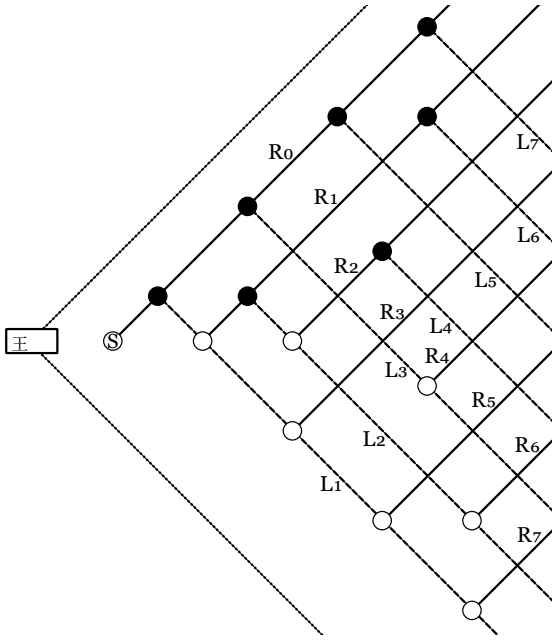


图1：对应于带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈的无限国际象棋局面的整体结构。白色圆圈表示白节点，黑色圆圈表示黑色节点。最左侧标有 S 的白色圆圈是树的根节点。对角线表示象在树中的可能路径，允许穿过节点。

树上标有“S”的白方根节点。我们将构造一个局面，迫使白方沿实线对角线向右上方移动其象 R_0 ，前往该线上可能无限多个黑方节点之一；这些节点将对应盖尔–斯图尔特博弈中玩家一的第一步。黑方将被迫跟随并吃掉白方的象，继而在该黑方节点中展开一系列局部着法，最后黑方将被迫沿虚线对角线向右下方离开该节点，前往其选择的一个白节点。我们将看到，这对应于盖尔–斯图尔特博弈中玩家二的第一步。在新到达的白节点处，双方将展开局部对弈，接下来轮到白方作出选择；这一次，白方将沿相应的实线对角线向右上方，前往其选择的一个黑方节点。白方沿实线对角线向右上方选择，黑方沿虚线对角线向右下方选择，如此交替进行，或许会无限持续下去，引诱双方不断深入树中。一般来说，只有当某位玩家到达一个没有子节点的节点时，博弈才会结束。该玩家因无法选择一个异色的后继节点而输掉博弈；这对应于到达盖尔–斯图尔特博弈的约化博弈树中的终端节点。

为了描述全二色树 $\mathbb{N}^{<\omega}$中所有节点在棋盘上的具体局面，我们令 k 为参数[4]，表示相邻平行对角线之间的间距。对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 $R_n = \{(x,\ y) |x - y = kn\}$ 表示第n条东北向对角线，同理，令 $L_n = \{(x,\ y)|x + y = kn\}$ 表示第 n条东南向对角线。我们将起始节点置于 R_0与 L_0的交点，并将王室置于 R_{-1} 与 L_{-1}的交点。若 $n \geq 0$、$m \geq 0$，且 $m \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}$，则我们在 R_n 与 L_m的交点处构建一个黑方节点；同理，若 $n > 0$、 $m \geq 0$，且 $m \equiv 2^{n-1} \pmod{2^n}$，则我们在 R_m 与 L_n的交点处构建一个白节点。现在我们记录一些事实，以便在论证局部组件的正确性时使用：

观察 2。对于足够大的 k，上述布局（如图*1*所示）可以放置在棋盘上，并具有以下性质：

(i) 对于每个 $n \geq 0$，每条 R_n 上恰好有一个白节点或起始节点。同样，对于每个 $n > 0$，每条 L_n 上恰好有一个黑方节点。*(ii)* 对于任意 $n \geq 0$，R_n 上的黑方节点分别位于 R_n 上唯一的白节点或起始节点的东北方向。类似地，对于 $n \geq 1$，L_n 上的白节点位于 L_n 上唯一的黑方节点的东南方向。*(iii)* 对于足够大的 k，距离标记为 R_n 或 L_n 的对角线 20 格以内的唯一棋子，是由构造明确放置在这些对角线上的组件。

现在我们构造王室，以及在棋盘上实现这一结构所需的各种节点。在本文的所有图中，我们可以假定白兵向上（北方）移动，而黑兵向下（南方）移动。在分析各种组件时，我们必须考虑这样的情况：某一方通过在图示范围之外走某一步，在局部停着不动。我们默认为，这类着法不会使游戏提前结束，不会导致无限长的强制序列，也不会使意外的棋子进入相关图示范围。这些假设将在组装最终局面时得到证明。

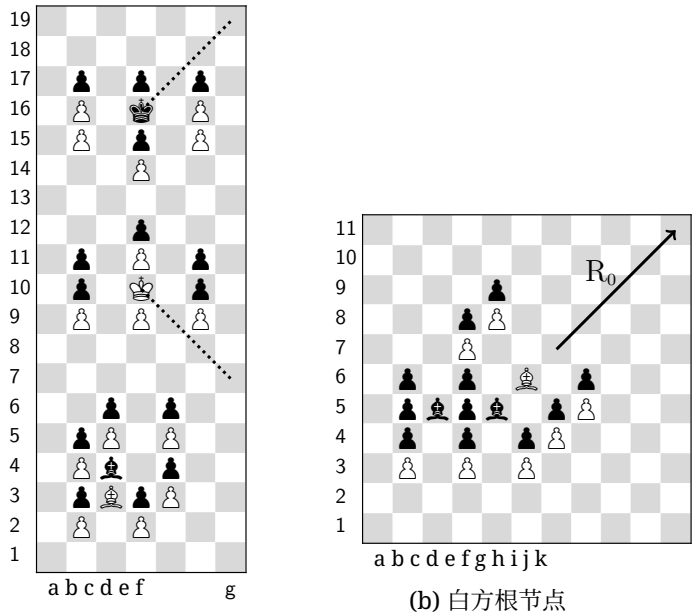
首先，我们介绍王室。

引理 1. 图 *2a* 所示的王室棋局组件具有以下性质。

(i) 来自虚线对角线且无法被吃子或干扰的象将军都构成将死。*(ii)* 只要没有棋子进入图*2*所示区域，双方都不会陷入逼和。

证明。 性质(i)成立，因为摆脱这种将军的唯一方法是走出将军，但目前双方的王都没有任何着法。性质(ii)成立，因为在这种情况下，双方玩家都将借助c3和c4上受困的防逼和象获得无限的着法来源。 □

[4]在实际应用中，我们将选择 $k = 50$，如后文图5所示。



(a) 王室

(b) 白方根节点
(白方走棋)

图2：树根组件

在白方先行的对局开始时，除防僵局象之外，唯一拥有可用合法走法的棋子将位于根节点中，如图2b所示。正如我们在图1中所见，根节点将位于王室右侧某处，它是标有S的最左侧白节点。

引理 2。 假设图 *2a* 和图 *2b* 所示的象是整个棋盘上唯一能够走动的棋子，黑方不控制实心箭头所示对角射线上的任何格，且轮到白方走棋。

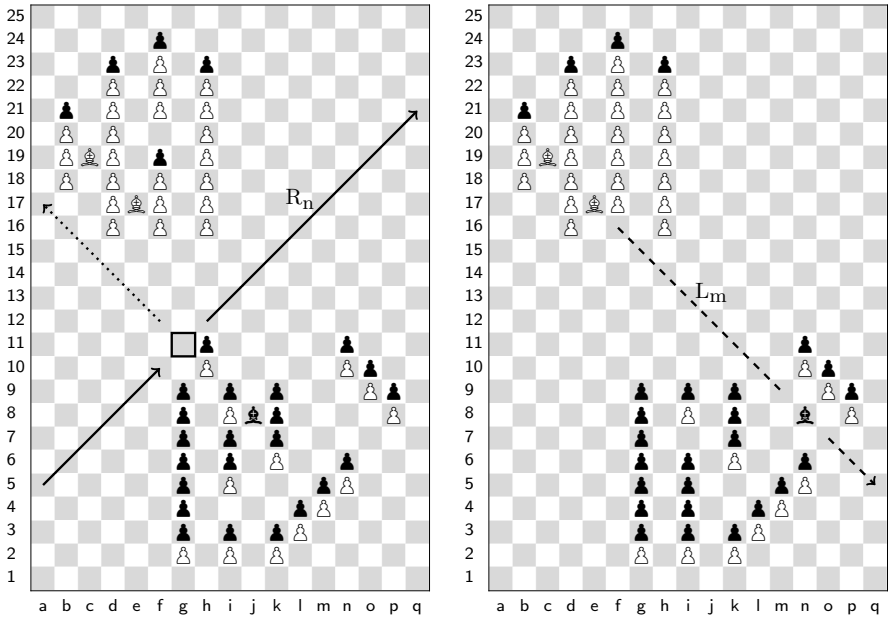
(i) 如果白方没有将起始节点（图 *2b*）中的象走到实心箭头所示方向上的受保护格，黑方就能确保一只黑象可以离开图 *2b*，并使白方的自由棋子最多只剩起始节点中的一只兵。*(ii)* 如果白方沿实心箭头所示方向走象，走到下一回合即可威胁将死黑方的格，黑方就必须立即用位于e5 格的象吃掉这只象，否则有限步内就会被将死。吃子后，起始节点中只剩下无法移动的兵。

证明。 对于 (i)，注意，五种着法中任何一种（包括由一只防止将死的象走出的着法），只要不沿着箭头方向，就会允许立即

吃掉白方的象，同时解放起始节点中位于 c5 和 e5 的黑方象之一，而白方最多只能解放一枚兵。类似地，沿箭头方向走到未受保护的格上，会让黑方能够安全地吃掉白方的象，并使黑方保有一只自由象。

对于(ii)，注意到如果黑方不吃子，白方通常可以立即将死。如果黑方的象威胁要阻挡将军，白方可以吃掉黑方那只必然无人防守的象，返回最初发出威胁的格，并在下一回合将死。

□



(a) 未使用的黑节点　　(b) 已使用的黑节点（黑方走）

图3：黑方节点。序列 1. Bg11 Bxg11 2. hxg11 h10 3. g12 h9 4. g13 h8 5. g14 h7 6. g15 h6 7. g16 hxi5 8. g17 i4 9. g18 i5 10. gxf19 i6 11. f20 Bi7 12. f19 Bk5 13. f18 Bn8 14. f17 in 在(a)中导向(b)中的局面。

沿着对角线，白方能够走到的唯一受保护的格子都包含在所谓的黑方节点中，这些节点在图1中以黑色圆圈表示。图3a展示了一个黑方节点的示例。引理 2表明，为了避免在没有补偿的情况下被吃子，从起始节点走出的白格象将被迫走到图3a中标记为 g11 的格子。由于实线对角线上没有障碍，白方可以沿对角线走到任意这样的节点，

这对应于白方在相应盖尔–斯图尔特博弈中的首步选择。至关重要的是，走到 g11 后，威胁获胜的将是白方！由于节点的整体布局（如图1所示），任何黑方节点的左上方虚线对角线上都没有任何阻挡。由于王室位于黑方节点的左侧某处，如果获得一次自由行动，白方就可以沿虚线对角线移动其象，立即将死。

因此，为避免立即被将死，黑方被迫用其仅有的自由象在 g11 吃子。

引理3. 假设轮到白方走棋，且棋盘上唯一自由的棋子是位于图*3a*中高亮格子 g11 上的一只黑象。

(i) 白方可以通过着法确保出现图*3b*中的局面，或者在任何黑象逃出图示范围或控制虚线射线上的任何格子之前，让一只白格象沿虚线射线逃出图示范围。*(ii)* 黑方可以通过着法确保出现图*3b*中的局面，或者让一只黑象沿射线 L_m 比任何白格象逃出图示范围早两着逃出图示范围。

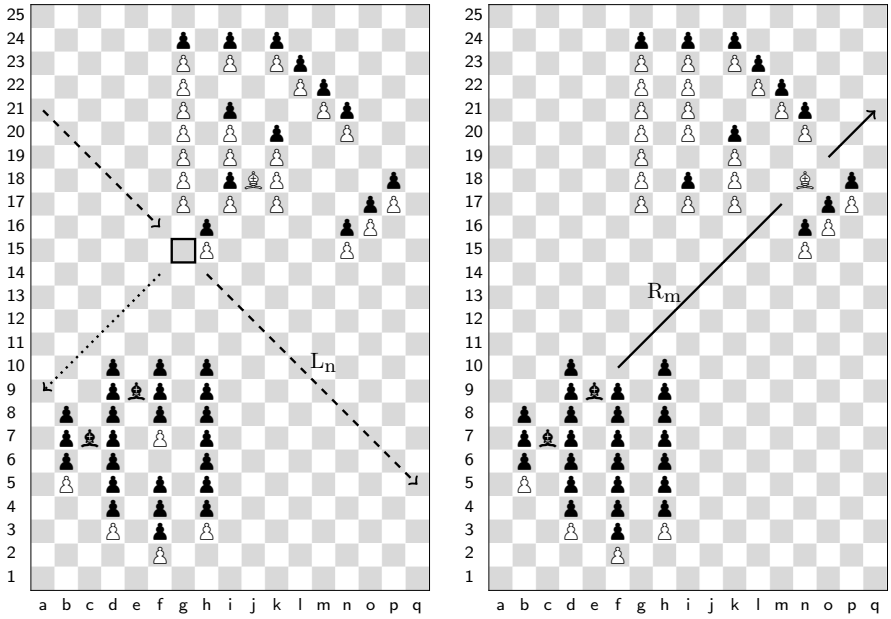
证明。 考虑以下着法序列：2. hxg11 h10 3. g12 h9 4. g13 h8 5. g14 h7 6. g15 h6 7. g16 hxi5 8. g17 i4 9. g18 i5 10. gxf19 i6 11. f20 Bi7 12. f19 Bk5 13. f18 Bn8 14. f17，其结果如图3b所示。我们将论证，任何一方若偏离这一序列，都会让对手的象得以按所需方式逃出图示范围。序列中的大多数着法，除了用防逼和象走等待着法之外，都是唯一的合法着法。4...hxi8、7...h5 和 10. g19 这几步都不可考虑，因为它们都会永久破坏己方解放象的可能性，同时仍让对手能够解放其象。观察2(iii)指出，节点正南方没有棋子，因此即使 7...h5 可能让一些黑兵离开图示范围，也无关紧要。

如果白方在这段过程中用防逼和象走一步等待着法，那么第14回合时，图3b中的虚线对角线将无人防守，黑方可以沿着这条对角线用象逃脱，而白方还来不及走 f17。类似地，如果黑方在这段过程中走一步等待着法，白方就会在黑方能将象移到 L_m 之前走 f17，从而可以毫无顾虑地将象调到 g11。其余偏离都与走等待着法类似。如果白方改走 4. ixh9、7. ixh6、13. Bf18 或 13. Bg19 中的一步，他至少会在竞速中落后两个节奏，相当于走了两步等待着法。如果黑方改走 9...fxg18，白方可以强制走 10. fxg18 和 11. f17，从而轻松赢得竞速。由于这已穷尽双方所有可能的偏离，因此所述着法序列确实是强制的。

□

上述着法之后，该节点中的最终局面现展示于图 3b。黑象此刻无保护地停在释放

对角线上 n8 格，该对角线以虚线标出。与此同时，e17 格上的白格象沿这条对角线威胁着吃掉它。该节点中的其他所有棋子都完全陷入僵局，双方在这个区域内都无法着棋，唯有这些新获解放的象例外。黑方走棋时不应以……Bxe17 吃掉白格象，因为这样会失去自己唯一能够自由行动的棋子，而应对的 dxe17 将导致 c19 格上的白格象随后获释，并很快将死。黑方也不应离开虚线释放对角线，否则新获解放的白格象就会像黑方走了一步等待着法那样将死其王。因此，黑方唯一的选择是沿虚线对角线向东南移动到某个受保护的格。关键在于，黑方可以从潜在的无限多个此类格中任选其一。黑方在该节点中可以选择让自己的象前往哪个目的格，这种自由正是“黑方节点”这一名称的由来。



(a) 原始状态白节点　　(b) 已使用的白节点（白方走棋）

图 4：白节点。(a) 中的走法序列 1...Bg15 2. Bxg15 hxg15 3. h16 g14 4. h17 g13 5. h18 g12 6. h19 g11 7. h20 g10 8. hxi21 g9 9. i22 g8 10. i21 gxf7 11. i20 f6 12. Bi19 f7 13. Bk21 f8 14. Bn18 f9 将导向 (b) 中的局面。

虚线对角线上所有受到保护的格都包含在所谓的白节点中，如图 4a 所示。这种节点只是黑方节点上下颠倒并反转颜色后的版本。它的作用相同，只是

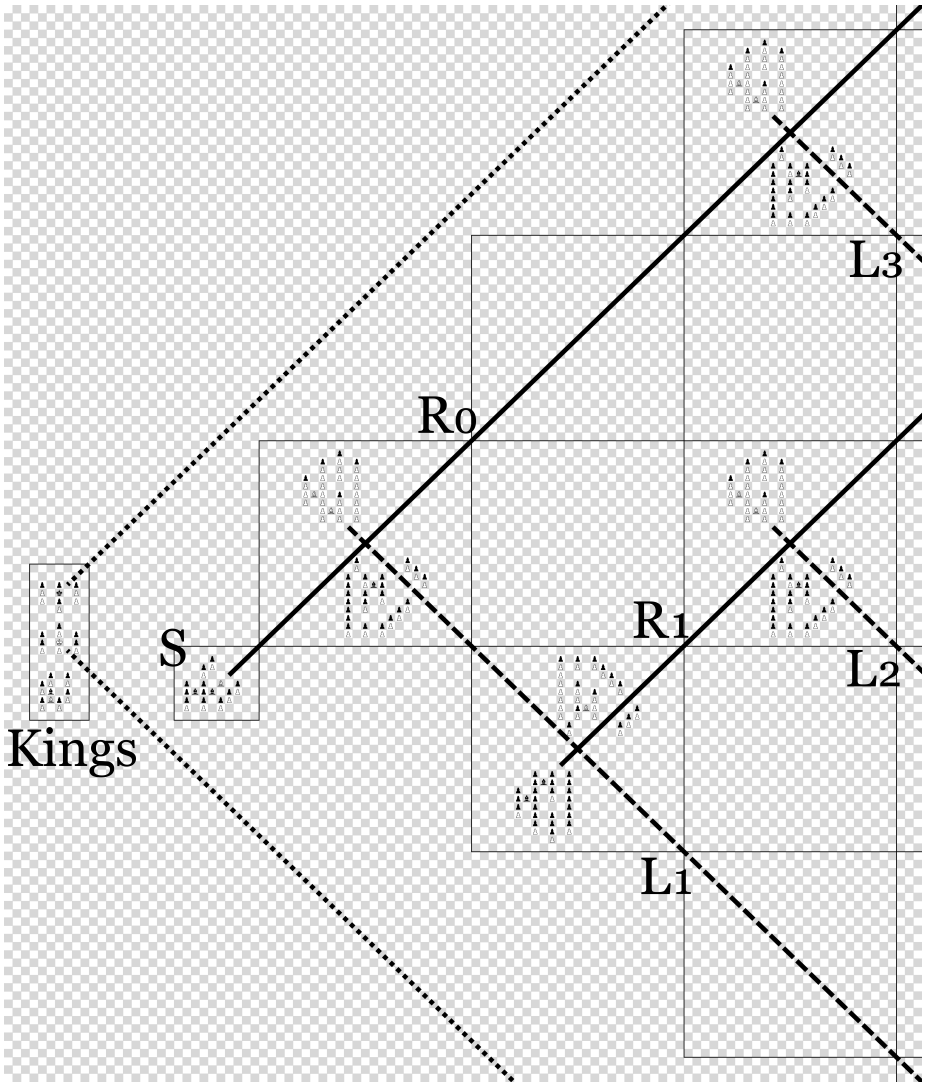


图5：嵌入无限棋盘的带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈。相邻平行对角线之间的间距为 $k = 50$。王室和根节点稍微移动了位置以适应页面，但这不会实质性地影响分析。

颜色互换了。现在，黑方威胁用位于 g15 的象沿点状对角线向左下方移动，从而一步将死；因此，白方被迫用刚刚解放出来的象吃掉它。这将再次引发一连串强制着法，与黑方节点的主线完全镜像。这些着法之后的局面如图 4b 所示，其中白格象

位于 n18，并受到刚刚解放出来、位于 e9 的黑象威胁。这迫使白格象沿实线标记的对角线向东北方向移动，并在某个黑方节点上选择一个受到保护的格。与之前类似，白方可以自由选择白格象的目的格，因此这个节点被称为“白节点”。

这些就是将带有和棋的开 Gale–Stewart 博弈嵌入无限棋盘所需的全部构件，如图5所示。从左下角延伸至右上角、以实线标记的对角线，是白格象逃离黑象并移至黑方节点的路线。同样，黑方选择对角线以虚线标记，从左上角延伸至右下角。王室和根节点位于局面的左侧，树位于右侧；各节点按照图1及其相关讨论中的 $k = 50$ 排列。

由此，我们展示了如何在棋盘上构造一棵节点颜色交替的全二色树 $\mathbb{N}^{<\omega}$。任何所需的博弈 $G_{S_1,\ S_2}$ 都可以通过仅构造其中一部分节点来获得，这些节点恰好对应于该博弈的约化博弈树 $\mathbb{N}^{<\omega}$。在这种局面下，白方和黑方轮流选择一个节点，分别沿各自的对角线 R_n 和 L_n 移动，同时向树的深处推进，直至一方到达终端节点。棋类树中的终端节点，意味着逃逸的象在其逃逸对角线上没有安全格，导致该方既无法保护自己的象免遭立即吃子，又能阻止将死。因此，白方的终端节点意味着黑方获胜，反之亦然。根据构造，T 中的白方终端节点是 $G_{S_1,\ S_2}$ 中玩家一的失败节点，而 T 中的黑方终端节点是玩家二的失败节点。

所有其他着法都具有局部性质，并且完全被强制。如前所示，在某个节点中任何偏离主线的行为，都会使对手在某个较小且固定的着法数内获胜。因此，该国际象棋局面恰好对应于带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈G_{S_1,S_2} 而国际象棋对局的获胜者对应于该盖尔–斯图尔特博弈的获胜者。注意，在主线中，无论是处于原始状态的节点还是已使用的节点，在未被使用时都不允许局部着法，因此我们先前对偏离情况的分析确实是穷尽的。

这一构造已经考虑到了五十回合规则，因为主线包含非常频繁的兵步和棋子吃子。因此，无需进一步修改即可适应该规则。

我们现在已准备好证明定理1：

定理*1*的证明。 首先，我们证明命题 (i)。给定带和棋的开式盖尔–斯图尔特博弈 $G_{S_1,\ S_2}$，令 T 为其约化博弈树——见定义4。令 p 为与 T 对应的无限国际象棋局面；T 是按照本节所述的过程构造的，即当且仅当某个节点属于 T 时，才将白方节点和黑方节点适当地放置在对角线的交点上。根据观察 1，既然 T 属于 $\Delta^{0}_{1,\,(S_1,S_2)}$，那么由国际象棋构造的可计算性可知，$p$ 也成立。

接下来，我们证明命题 (iii)。令 σ，τ：$\mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ 为 $G_{S_1,\ S_2}$ 的策略，并假设玩家一按照 σ 行棋，玩家二按照 τ 行棋。回顾一下，根据观察 1 以及博弈是开式这一事实，玩家一（分别地，玩家二）获胜，当且仅当对局在有限时间内到达玩家二（分别地，玩家一）的一个失败节点。因此，使用 σ 对阵 τ 的结果，仅取决于在约化博弈树中所包含的那些节点上，将策略限制后的 $\sigma|_T$ 对阵 $\tau|_T$。

在国际象棋局面 p 中，我们将白方认定为玩家一，将黑方认定为玩家二。双方只能用各自的象沿着约化博弈树前进；正如本节的国际象棋分析已展示的那样，任一玩家在某个节点偏离主线，另一方都能通过遵循可计算策略，在统一有界的着法数内获胜。我们将 G_{S_1,S_2} 中限于 T 的着法，视为从 p 开始的对局中选择远程象步。对局在到达 T 的终端节点时决出胜负；请注意， p中的白方终端节点对应于G_{S_1,S_2}中玩家一的失败节点，而 p 中的黑方终端节点则对应于玩家二的失败节点。因此，白方能在国际象棋对局中强制获胜（或和棋），当且仅当 $\sigma|_T$ 是获胜（或和棋）策略；反过来，黑方能在国际象棋对局中强制获胜（或和棋），当且仅当 $\tau|_T$ 是获胜（或和棋）策略。特别是，给定 σ（或 τ），白方（或黑方）可以用可计算的方式做到这一点，因为除远程象步外，所有所需的国际象棋着法都具有可计算性。

反过来，假设某位玩家在国际象棋局面 p 中拥有获胜（分别为和棋）策略 σ。根据本节的国际象棋分析，当对手沿着主线行棋时，该策略规定这位玩家在棋盘上的节点之间采用远程象步。由陈述 (i) 中国际象棋局面的可计算性，可立即得到相应玩家在限制于约化博弈树 T 的盖尔–斯图尔特博弈中拥有一个 $\Delta^{0,\ 1}{}^{\sigma}$ 获胜（分别为和棋）策略 $\hat{\sigma}$。根据上文的观察，某位玩家的策略 σ 获胜（分别为和棋），当且仅当该策略限制于 T 后仍获胜（分别为和棋），因此可以任意扩展 $\hat{\sigma}$，得到 $G_{S_1,\ S_2}$ 的获胜（分别为和棋）策略。

最后，我们证明陈述 (ii)。在陈述 (iii) 的证明中，我们已经说明了白方（分别为黑方）与玩家一（分别为玩家二）的强制对局结果之间的对应关系。对于某位玩家，$G_{S_1,\ S_2}$ 的博弈值（如果存在）不可能大于 p 的博弈值，因为尽管理论上的结果相同，$G_{S_1,\ S_2}$ 中的一个回合对应于国际象棋对局中的多个着法：一次远程象步，以及在一个节点内的若干着法。

□

这个定理可以视为关于无限国际象棋的强普适性陈述，即它至少与任何允许和棋的其他开式博弈一样强。值得注意的是，嵌入方法的明确性立刻意味着，任何可计算树都可以嵌入为一个可计算的国际象棋局面——该嵌入与约化博弈具有完全相同的复杂性

树 T。此外，国际象棋对局中制胜策略和和棋策略的复杂度，与所模拟的相应博弈中的策略复杂度完全一致。因此，关于开放博弈中制胜策略复杂度的许多结果，都能以其最强形式应用于无限国际象棋。

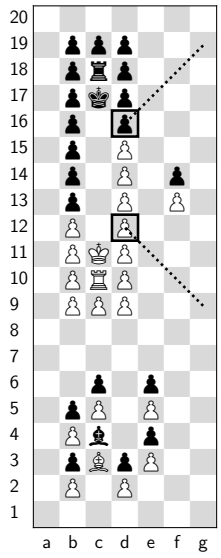


图 6：自杀将杀王室

现在我们简要讨论如何修改这一构造，以适用于另一种风格的国际象棋谜题。

注 1. 国际象棋谜题中，棋手通常的目标是将死对方的王。然而，一种广受欢迎的国际象棋谜题类型是自杀将杀谜题，其中每位棋手的目标反而是让自己的王被将死。自杀将杀国际象棋也称为 mis`ere 国际象棋。我们可以修改这一构造，使其适用于这种情形。具体而言，定理1及其在第 1 节中的推论对于 mis`ere 无限国际象棋也成立。

证明。 只需将图 2a 中的王室替换为图6所示的王室即可。如果白方先通过黑方节点中的虚线对角线逃出树，并将自己的象移至右上方的对角线，瞄准王自杀将杀室中的黑方 d16 兵，那么黑方就再也无法通过强制性弃子 Bxd16+ Kxd16# 来阻止自杀将杀。同样，如果黑方能先通过白节点中的虚线对角线逃出树，并将自己的象移至右下方的对角线，瞄准 d11 兵，情况也一样。f13 和 f14 上的封锁兵确保易受攻击的兵无法及时从除指定自杀将杀斜线以外的任何方向得到保护。否则，局面发展的方式与普通无限国际象棋的构造完全相同，双方沿着树向下竞速，

目的是让他们的象脱身，或迫使对手走到终端节点。

□

3 仅用王和兵实现任意博弈值

先前的构造很大程度上依赖于单个象能够在无限多个格之间进行选择。于是，人们可能会问，在所有棋子都只能有限移动的无限国际象棋变体中，情况会是怎样。我们主要关注以下规则集：

定义5。 短程无限国际象棋 是无限国际象棋的一种变体，其中所有棋子在每回合沿任意方向最多只能移动七格。无限国际象棋的其他规则保持不变。

这是 K″onig 在其 1927年 论文 [9], 中考虑的规则集，据我们所知，这使它成为文献中最早出现的无限国际象棋版本。

本节的主要构造只使用王和兵，通过嵌入一种我们称为从 Z中选择节点的树上博弈，实现所有可数博弈值。

3.1 zugzwang（被迫走棋）与从Z中选择节点

使用棋子数量有限的有限步长无限国际象棋时，不会出现超限博弈值这一现象，因为博弈树只有有限分支。然而，棋子数量无限时，情况就不同了。尽管没有任何棋子可以无限移动，玩家仍可能拥有无限多种选择，也就是选择移动哪枚棋子。因此，有可能构造出具有超限博弈值的局面。

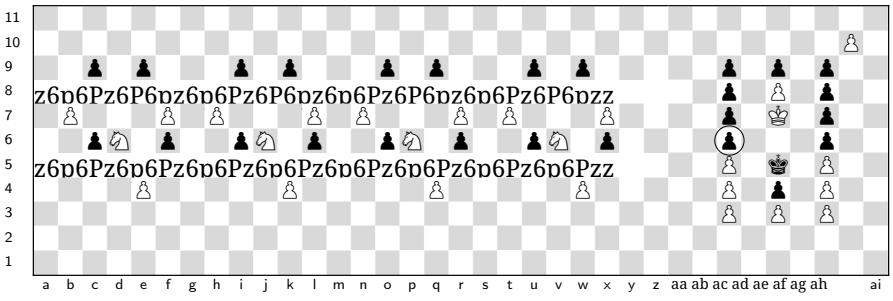


图7：博弈值为 ω 的短程国际象棋局面（黑方走棋）。图示模式向左无限延伸。

例1。 图7所示的局面中只有有限步长的棋子，黑方走棋时，其博弈值为 ω 。

证明。 两位玩家的王永久僵持在右侧的王室中。白方唯一将死黑方的希望，是让自己数量无限的马中有一匹抵达王室；这些马目前全都被困住，除非黑方允许，否则每匹最多只能移动两次。然而轮到黑方走棋，而且黑方处于 zugzwang（被迫走棋）状态：他很想跳过回合，以维持对马的禁锢，但必须走棋规则却成了他的致命弱点。局面中唯一能够移动的黑方棋子，是困马陷阱中的黑兵；移动其中任意一枚，都会放出一匹白马。例如，若黑方走 b4，白方可以应以 Nc4，随后这匹刚获自由的马便会慢慢走向 ac6 格上圈出的兵，将死黑王。黑方无法避免以这种方式放出一匹马，也无法指望逼和，但至少可以自由选择放出哪匹白马，以及它起初距离王室有多远。因此，整个局面的博弈值为ω。

□

在例 1 中，黑方一开始就处于 zugzwang（被迫走棋）的事实起了关键作用。事实上，通过研究规则的另一种细微变体，可以证明，任何具有超限博弈值的局面都必然涉及 zugzwang（被迫走棋）主题：

定义 6. 黑方可停着的短程无限国际象棋 是短程无限国际象棋的一种规则变体，黑方可以选择停着，而不移动棋子。停着不会重置五十回合规则计数器；如果黑方唯一的合法着法是停着，那么该局面仍视为因逼和而和棋。其他规则与之前相同。

我们关注这一变体，是因为有如下定理：

定理3. 在黑方可停着的短程无限国际象棋中，白方只能获得有限博弈值。

为证明这一点，我们需要以下引理：

引理 4. 如果局面 q 在黑方可停着的短程无限国际象棋中对白方的博弈值为 $k < \omega$ ，那么棋盘 $\mathbb{Z}^2$ 上存在一个有限子集 $S(q)$ ，使得任何在 $S(q)$上的棋子排列与 q 相同且五十回合规则计数器不大于 q的局面，对白方的博弈值至多为 k 。

证明。 我们将利用棋盘上所有棋子的最大走子距离不超过 7 这一事实，对 k andtheplayer to move 进行归纳，以证明此命题。

当 $k = 0$ 时，根据定义，轮到黑方走棋且黑方被将死，而这只取决于黑方王周围有限区域内的棋子。

如果在博弈值为 k 的局面 q 中轮到白方走棋，那么根据定义，白方可以走到某个博弈值为 $k - 1$ 的局面 q'（注意，由于需要重置五十回合

规则计数器，这一步可能需要走得离黑方的王非常远）。然后，我们可以将 $S(q)$ 定义为 $S(q')$ 中所有格的并集，再加上涉及白方走棋合法性的有限多个格；注意，这些格必须包括白方王周围的一块有限区域，以确保走棋后白方王没有被将军。那么，从 $S(q)$ 上与 q 匹配的任意局面出发，白方都可以走出与 q 中相同的一步，到达在 $S(q')$ 上与 q' 匹配的局面；根据 $S(q')$ 的定义，该局面将在 $k-1$ 步内将死。

如果黑方在博弈值为 k 的局面中行棋 q，令 q' 为黑方停着后到达的局面，令 $\{q_i\}$ 为黑方通过改变 $S(q')$ 上棋子的排列可以走到的有限个局面的集合。那么，我们可以令 $S(q)$ 包含与 $S(q')$ 或某个$S(q_i)$ 相距一步之内的所有格，以及任意选取的一步黑方非停着着法在判定是否合法时涉及的所有格。这样，$S(q)$ 显然是有限的。如果一个局面在 $S(q)$ 上与q 一致，那么黑方就没有被逼和，因此必须行棋或停着。不涉及 $S(q')$ 中格子的黑方着法，都会产生一个在 $S(q')$ 上与 q'一致的局面；而涉及其中格子的黑方着法，则必然会到达与某个 q_i 在 $S(q_i)$ 上一致的局面。因此，这个局面的博弈值也至多为 k。至此，归纳法完成。

□

现在我们证明定理3。

定理*3*的证明。我们不妨假设白方只走能降低博弈值的着法。这样一来，我们无需担心三次重复局面规则，也可以不必顾虑如何到达给定局面。反设存在一个博弈值为 $\alpha \geq \omega$的局面 p。那么，经过简单的归纳可知，在从 p开始的对局中，黑方可以迫使局面到达博弈值为 ω的 p'。根据博弈值的定义，轮到黑方在 p' 走棋，因为 ω 不是后继序数。因此，我们只需证明不存在博弈值为 ω 且轮到黑方走棋的局面 p'。

根据定义，黑方在 p' 停着会导致局面 p'' 的博弈值为 $k < \omega$。引理 4 告诉我们，存在棋盘的有限子集 $S(p'')$，使得任何在 $S(p'')$ 上与 p'' 一致的局面，其博弈值都不超过 k。然而，p' 在 $S(p'')$ 上与 p'' 一致，而且黑方至多只有有限种着法会改变 $S(p'')$ 上的棋子，因此黑方至多只能走到有限多个博弈值大于 k的局面。由于这些局面的博弈值仍然都是有限的，这就产生了矛盾，因为ω 并非有限多个自然数的上确界。因此，不存在这样的 p'，也就不存在这样的 p。

□

之所以以这种特定方式考虑允许黑方停着的博弈，是因为我们只是改善了黑方的前景，因此尤其可以推导出关于不允许停着的博弈中博弈值的事实。

推论4. *若短程无限国际象棋中的局面 p 对白方具有博弈值 $\alpha \geq \omega$，则 p 在允许黑方停着的短程无限国际象棋中并非白方获胜。*

证明. 由于 $\alpha \geq \omega$，黑方在不停着的情况下可以撑过任意有限个回合。因此，根据定理3，当允许停着时，黑方有办法永远存活。

□

换言之，zugzwang（被迫走棋）是我们在短程无限国际象棋中构造超限博弈值时唯一可用的机制。直观而言，必须走棋规则是短程国际象棋中唯一能迫使防守方作出真正无限选择的机制——所有其他规则要么本质上是局部的，要么是主要阻碍进攻方的和棋规则。这一观察并非国际象棋所独有；修改规则以去除非局部行为，再试图证明某种紧致性定理，这一宽泛策略可应用于多种无限博弈。例如，对于无限围棋中许多理想的构造，该证明的一个版本表明，非局部相互作用只能经由无限大的棋群或劫争规则来介导。类似论证见于 [6], ，其中表明无限六角棋及其他简单的放置棋子类游戏具有内在的局部性，即获胜局面完全由棋盘某一有限区域内的对弈所决定，因而并不容许超限博弈值。

尽管定理3带来了种种限制，我们仍将证明短程无限国际象棋的威力非凡；具体而言，所有可数序数都能作为博弈值出现，即使将可用棋子限制为只有兵和王：

定理2. 对于每个可数序数 $\alpha < \omega_1$，都存在一个博弈值为 α 的无限国际象棋局面，其中仅有一对王和兵。

我们将通过把一类博弈嵌入无限棋盘来证明定理2。这类博弈足够简单，可以仅用兵和王构造出来，并运用 zugzwang（被迫走棋）的思路；同时又足以涵盖所有可数无限博弈值：

定义7（从Z 博弈中选取节点）。 设 T 为满二叉树，即$T = \{0,1\}^{<\omega}$。设 Z为 T的一个无限子集。我们将以下从Z 博弈中选取节点与 Z相关联：轮到黑方时，必须从 Z中选择一个此前尚未选过的节点。白方没有任何有意义的着法，只能看着黑方走棋。游戏持续进行，直到黑方在整个游戏过程中选出了两个节点，且这两个节点互不为对方的初始段。此时游戏立即结束，白方获胜。否则，黑方通过无限对弈和棋，即成功从 Z 中说出无限多个都位于同一分支上的节点。

要求 Z 是无限的并非特别重要，但一旦我们开始将这些博弈嵌入国际象棋中，就需要这一条件来避免黑方陷入逼和。我们将二叉树中属于集合 Z 的节点称为 Z 节点 。不属于 Z 的节点称为 普通节点。任何没有 Z 节点后代的普通节点都与博弈无关，因此我们在所有图中都省略这类节点。

由于白方在这场博弈中只有在有限阶段才能获胜，因此如果白方获胜，这场从节点中选择Z博弈必然是开博弈，所以序数博弈值的理论适用于此。现在我们证明，任意大的可数无限序数都可以作为从节点中选择Z博弈的博弈值出现。

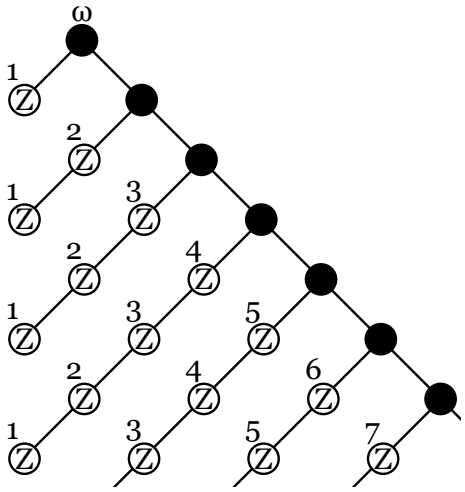
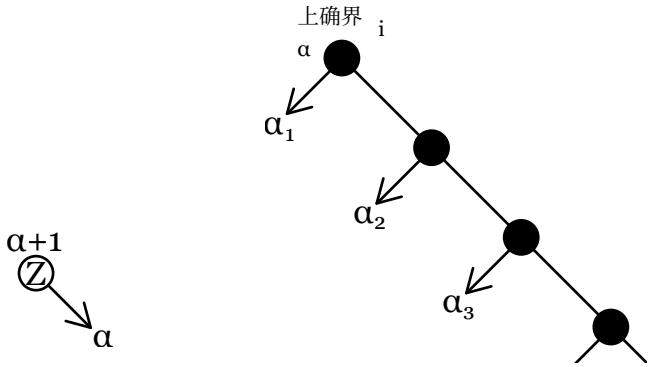


图 8：从 Z 局面中选择节点的博弈，博弈值为 ω

引理 5. 对于任意可数的无限序数 α，都存在一个无限集合 $Z \subseteq \{0,1\}^{<\omega}$，使得相应的从 Z 局面中选择节点的博弈对白方的博弈值至少为 α。

证明。 在超限归纳法的基底情形中，博弈值为 ω 的从 Z局面中选择节点的博弈如图 8 所示。图中描绘了二叉树的相关部分，Z-节点用字母 Z表示，普通节点则用黑色圆圈表示。根节点上标注了 ω，表示其下方树的博弈值。整棵树包含一条有一个 Z-节点的分支、一条有两个 Z-节点的分支、一条有三个 Z-节点的分支，依此类推，如图所示。至关重要的是，这些重要分支的排列方式使得它们两两相交处只包含普通节点。黑方在第一步被迫指定其中一条分支上的一个 Z-节点，从而选定该分支；如果他之后指定了位于另一条分支上的节点，就会输掉博弈。由于黑方在第一步就能选定一条含有任意多个有限个 Z-节点的分支，因此该局面的总博弈值为 ω。

对于后继序数的情形，给定一棵对应博弈值为 α 的树，我们可以如图 9a 所示构造一棵博弈值至少为 $\alpha+1$ 的树。树的根节点处放置了一个 Z 节点，其下嵌入了博弈值为 α 的树作为子树。显然，黑方仍会输掉这场博弈；博弈值至少为 $\alpha+1$，因为黑方可以在第一步于根节点着棋，从而得到博弈值为 α 的局面。



(a) 后继序数　　(b) 极限序数

图9：在从节点中选择Z博弈中构造序数博弈值。根节点标注的是树的总博弈值下界，而子树则标注各自的博弈值。

极限序数的情形与博弈值为 ω 的构造方式相同。给定这些博弈的一个可数集合，其中第 i 个博弈的博弈值为 α_i，我们考察图 9b 所示的树。由于黑方除导致输棋的那一步外，其余所有着法都必须在对应于某个 α_i 的子树中进行，黑方仍会输掉这场博弈，因此该局面的博弈值仍有定义。黑方可以自由选择任意一个他中意的 α_i，所以总博弈值至少为 $\sup \alpha_i$。因此，任意大的可数无限序数确实都可以实现为从节点中选择Z 博弈的博弈值。

□

3.2 无限国际象棋构造

现在，我们将通过关注如何在无限国际象棋中实现从节点中选择Z 博弈，来证明定理2。和之前一样，我们将构造若干小型组件，并将它们组合起来，以形成任意一个从节点中选择Z 博弈实例。在分析这些组件时，我们必须考虑这样的情况：一方在局部放弃着法，转而在图示区域之外的某处走棋。我们默认这些着法不会导致对局过早结束、引发无限长的强制序列，或使黑方棋子进入相关图示区域。组装最终局面后，我们将证明这些假设合理。

我们所嵌入的树的分支将由兵链构成。

定义8. 一条兵链 是棋盘上白兵与黑兵的一种配置，使得

(i). 每个兵的前方都有一个对方颜色的兵封锁着它。(ii). 除最北端的黑兵外，每个黑兵都由链中一个唯一的黑兵防守。

(iii). 链中任何颜色的兵都不受链外任何黑兵的防守或攻击。

我们将链中最北端的黑兵称为该链的基兵。如果我们把兵链中的一个黑兵替换为空格或白兵，就称这条链被激活了。

图10a展示了一个基兵位于 b16 的兵链示例。兵链之所以有用，是因为它具有以下性质：

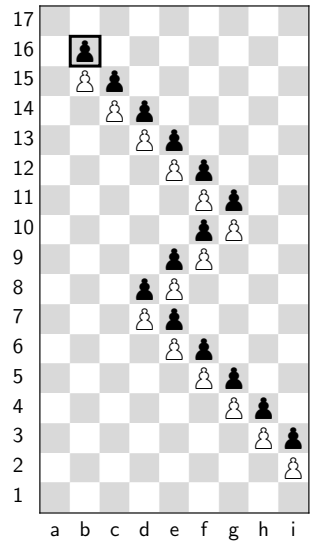
引理6。 白方可以迫使一枚白兵走到任意已激活兵链的基兵所在格。此外，白方还可以在每次沿链行棋之间，在棋盘其他位置行棋，而不会影响其最终迫使一枚兵走到基底格的能力。如果轮到黑方行棋，那么黑方可以确保白方唯一能够制造自由兵的纵线，就是基兵所在的纵线。

证明。 由于兵链已被激活，白方在链中有一枚可以推进的兵，它可以威胁黑方的一枚兵；或者白方已经在威胁黑方的一枚兵。黑方可以选择无视受到威胁的兵，也可以吃掉它。若黑方选择无视，白方就可以直接吃掉受到威胁的兵，从而沿链向上推进；若黑方选择吃掉它，则黑方释放出了一枚新的白兵，而这枚白兵现在可以向前推进。在这两种情况下，白方也都可以先在其他位置行棋，然后再回到这条兵链。白方以这种方式沿兵链不断向上推进，最终会有一枚兵走到基兵所在格。与此同时，黑方只要始终在能够吃子时选择吃子，就可以确保这是白方释放兵的唯一途径。

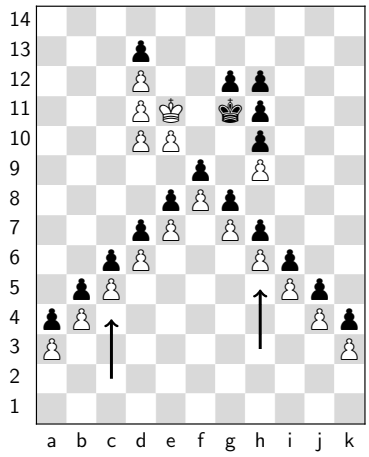
□

举例来说，如果图10a中i3上的黑兵消失，黑方仍会陷入僵局，而白方则可以随时选择将自己的兵推进到i3。此时，无论黑方如何应对——通过hxi3吃子，或在棋盘其他位置走子——白方都能在他选择的任何时候把一枚兵走到h4。在随后的回合中，白方可以继续以这种方式弃兵，向上推进到g5、f6、e7格、d8、e9，依此类推。假设白方不在意黑兵被向下释放，他就可以不顾黑方的走法，持续向上啃穿兵链，最终把一枚兵落到b16，即基兵所在的位置。

该局面的王室如图10b所示。它位于整个构造的最顶端，其中有两个陷入僵局的王，双方都无法走子。王室下方有两条共用同一个基兵 f9格的兵链，我们将其理解为沿对角线无限向下延伸。我们还要求每条兵链正下方的对角线为空。我们将在这些主兵链下方构造整个兵树，而白方的获胜条件是从树中释放出一个兵，从而激活王室的一条兵链。



(a) 带有基底的兵链片段
兵 b16



(b) 王室。对角线
兵链无限延伸。

图10：兵树的基本构造单元

引理7。 假设王室中兵链上方，除图*10b*所示的兵之外，双方都没有其他兵。那么，白方能够强制获胜，当且仅当白方能够强制使一枚白兵进入这些兵链正下方的一条对角线。

证明。 如果白方的某个兵到达所需的对角线，那么他下一回合就能迫使局面进入引理6，因此必定最终能将一个白兵走到 f9格，并在下一回合以无法阻挡的 f10# 将军。由于局面的其余部分位于决定胜负的兵链下方，且只由兵组成，一旦白兵到达所需的对角线，黑方就无法阻止败局。毕竟，黑方始终只能向下移动兵，因此永远无法影响兵链。如果白方无法将兵走到这些对角线中的任何一条，白方也不可能获胜，因为这样一来就没有办法释放出任何能够向黑王将军的兵。

□

来自*choosing-nodes-from-Z* 的完全二叉树将在棋盘上表示为一棵由兵组成的树，构建于王室的决定胜负的兵链之下。我们已经看到了将构成这棵树各条边的兵链，因此现在构造表示这棵树各节点的组件。普通二叉节点如图 11所示，可以理解为两条相互重叠的兵链。引理6意味着，只要其中任一兵链处于激活状态，白方就能迫使一个兵走到从图示 a13处延伸出去的兵链基底。我们构造的关键将是以下情形

这两条兵链都在节点下方被激活。

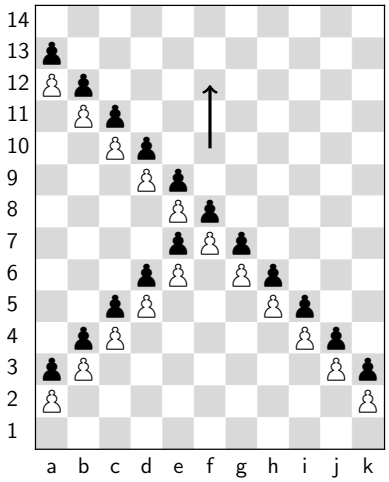
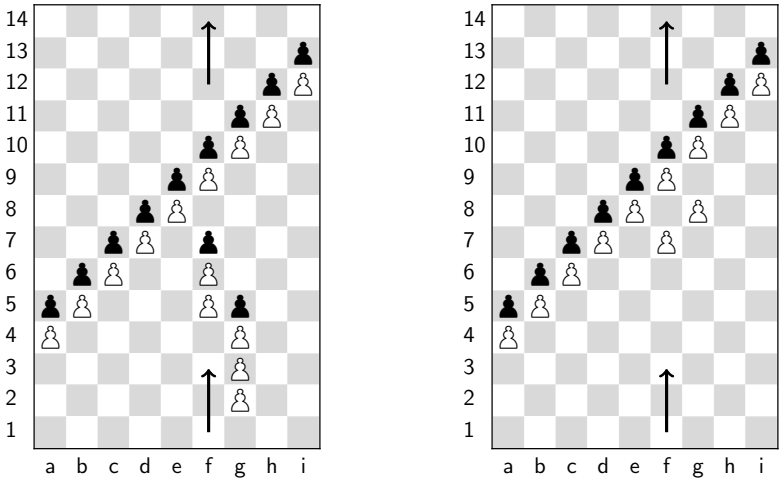


图 11：二进制节点

引理8. 假设图 *11* 中的兵链分别通过k3 和a3 在f8格下方被激活。那么白方可以迫使一枚兵沿 *f*线从图的顶部冲出。

证明。 白方首先按照引理6沿两条兵链向上推进，优先处理在较低横排激活的兵链。优先处理较低的兵链，是为了让过程中释放的黑兵位于另一条兵链下方，从而无法影响它。白方继续这一过程，直到出现以下任一情况：e7格和g7格上都有白兵；或者e7格和g7格其中一格上有白兵，同时黑方走了fxe7或fxg7，使f8格空出。此时，在第一种情况下，白方可以走exf8；在第二种情况下，白方可以走f8；两种情况下都威胁推进到f9格，随后从图示顶部逃出。如果黑方用exf8拖延局势，那么在这两种情况下，白方都有一步棋可以吃掉此时无人保护的f8格上的兵，之后沿f线逃脱将无法阻止。 □

现在，我们的目标是安排局面，使得白方只要从普通节点沿其 f线解放任意一个兵，就能确保获胜。根据引理7，如果白方能将一个兵推进到局面顶部决定胜负的兵链上，就能获胜。由于兵被解放的节点上方可能还有其他兵链，因此要让兵推进到那里，我们需要一种机制，使兵链下方的白兵能够解放链上方的另一枚白兵。我们现在说明，图 12a 的局面就能实现这一点。其思路是让第一个兵解放兵链下方一大群兵，然后这些兵便能强行突破。



(a) 原始状态　　(b) 使用中

图12：白兵过路机制

引理9。 如果一枚白兵从下方沿 f 线进入图 *12a* 所示局面，那么白方就能迫使一枚白兵从图的顶部沿f 线出去。

证明。 从 f1 进入后，白方的新兵将畅通无阻地挺进至 f4，之后白方可以确保吃掉黑方位于 g5 的黑兵，吃子位置为 g5 或 f4。这样一来，白方在 g线至少拥有两个自由兵。沿着 g线上的兵列向前推进，白方也可以迫使黑方位于 f7 的黑兵被吃掉，吃子位置为 f7 或 g6。此时，白方已将兵链下方棋盘上的所有黑兵清除，并至少在 f线和 g线各留有一个兵（事实上，最初位于 f6 和 g2 的白兵在所有情况下都会留在各自的纵线上）。因此，白方可以迫使局面变为图12b所示的局面，其中 f7 和 g8 上的重要兵下方可能还会多出一些白兵。

从图12b开始，论证与引理8中的相同。事实上，可以将该局面视为一个普通节点，其中有两条很短的兵链：一条经过 f8-e9-f10，目前在 f8 激活；另一条经过 g9 和 f10，目前在 g9 激活。与引理8中完全一样，白方通过推进 f8、将一个兵移至 e9，再将一个兵移至 g9，即可获胜。此时，白方将一个兵移至 f10，突破防线并威胁 f11。如果黑方走 gxf10，白方只需在 f10 吃回，下一步挺进 f11 就无法阻止。此时，f11 上的兵可以沿 f线从图的上方逃出。 □

至此，我们已介绍了将一场从.....中选择节点的Z 游戏 G嵌入无限棋盘所需的大多数组件。我们

现在，我们来介绍构造国际象棋局面 $p(G)$ 嵌入 G的方法，同时说明如何将节点标记为 Z-节点。

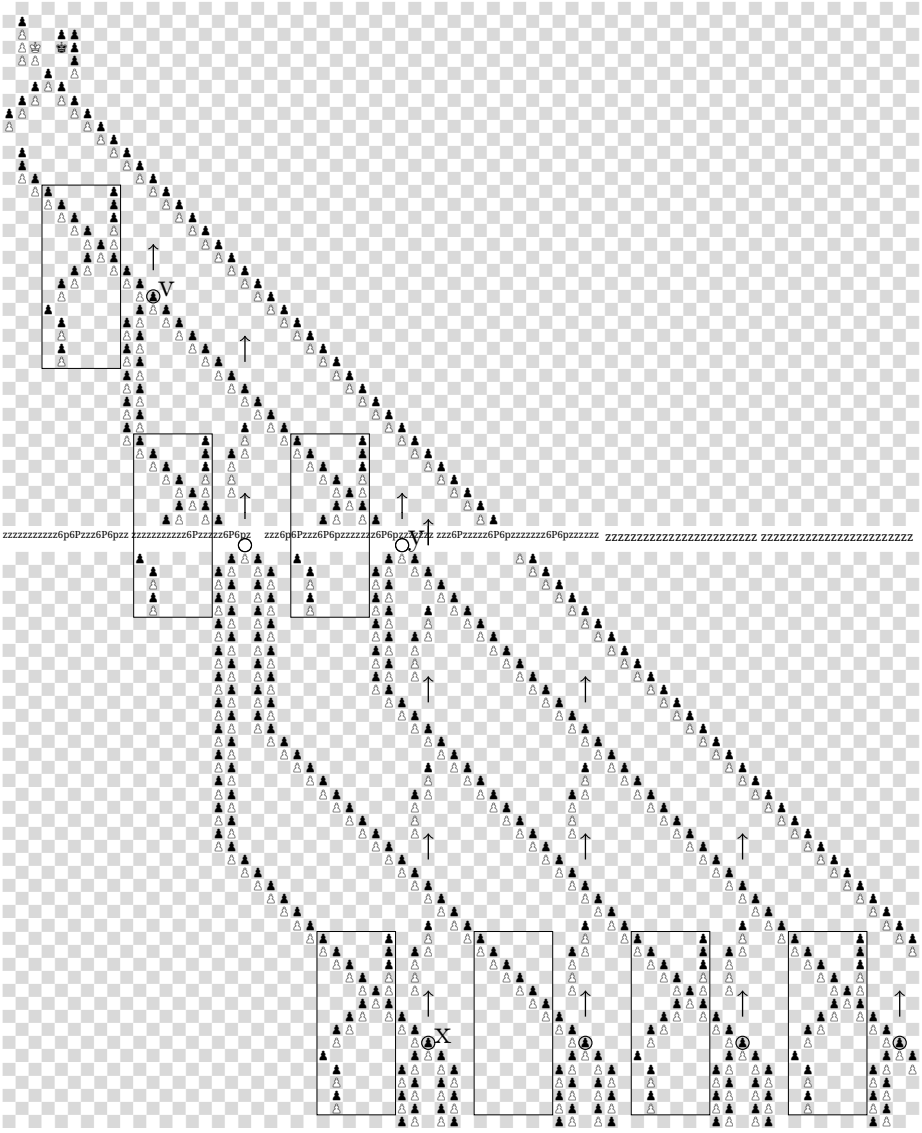
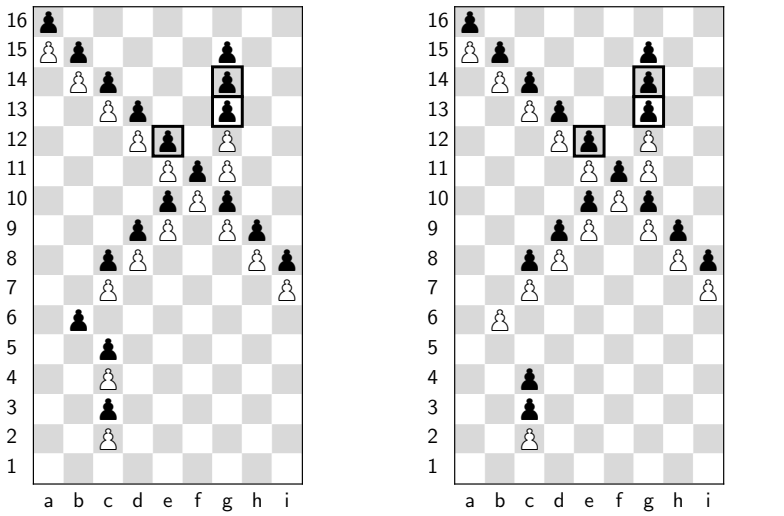


图 13：从根节点到深度为 2 的节点的兵树。节点以圈出的黑色兵标记。从左数第二个深度为 2 的节点是普通节点，因此有一条普通兵链从该节点延伸出去；其他所有节点都是 Z 节点，因此都配有图 14a 所示的 Z-分量副本。

局面 $p(G)$将以黑方走棋开始。棋盘上各组件的整体布局如图 13 所示，其中展示了深度为 2 或更浅的所有节点的位置，

王室和决定棋局的兵链构成局面的顶部。其下方由兵链构成满二叉树。每个圈出的格都属于一个二进制节点，如图 11 所示；从每个节点出发的兵链一路向上延伸至树根。我们在基兵后方额外放置了一枚黑兵，将树根设为死胡同，以拦截任何解放出来的白兵。对于每个 Z 节点，朝北延伸的兵链都配备了一个额外组件，如图中矩形区域所示，具体内容将在下文介绍。

这棵树的布局使每个二进制节点都位于不同的纵线上，每个节点上方只有对角线兵链，而且各节点上方的兵链间隔足够大。这样，每个节点上方的所有兵链都可以配置各自的一套白兵过路机制，如图 12a 所示。图 13 展示了一种实现方式：深度较高的节点至少位于深度较低节点右侧两条纵线处；同一深度的节点则置于同一高度，每隔 12 条纵线排列一个。兵链的灵活性意味着还可以采用许多其他构造方式。



（a）原始状态　　（b）1...b5 2. cxb5 c4 3. 之后　　b6

图14：Z-分量。黑方在此处的一步着法会为白方提供一条已激活的兵链，并使黑方无局部着法可走。

如前所述，我们在想要标记的节点正上方的边上放置一个图 14a 所示机制的副本，以此将节点标记为 Z-节点（图 13 中节点左侧的方框区域）。我们将此机制称为 Z-分量。这种分量基本由两条兵链构成，它们在图 14a 的 f11 格交汇：一条属于

树的长兵链，以及一条如图所示、从 c8 延伸而来的极短局部兵链。不过，与二叉节点不同，这两条兵链的汇合不会给黑方带来危险，因为 g13、g14 和 g15 上多出的黑兵阻止了任何白兵沿 f线逃脱。请注意，在每个 Z-分量中，黑方都可以立即走相应的 b6兵，但在其他任何地方都无子可走；而白方在整个局面中都无着法可走。我们将在引理 10 和 11 的证明中看到，在整个国际象棋对局中，黑方几乎始终处于 zugzwang（被迫走棋）状态；在先前未使用过的 Z-分量中，黑方走棋的效果将如同在 G 中走棋。如果黑方输掉相应的对局 G，白方就能在有限步数内强制将死。我们还将看到，白方无法做到更好。

现在我们来分析这种局面下的对弈。由于要求集合 Z 是无限的，因此存在无限多个Z-分量，且棋局绝不会以黑方被逼和告终。五十回合规则和三次重复局面也无关紧要，因为双方都只走兵步。因此，棋局只能以将死或白方被逼和告终。

我们首先说明， $p(G)$的博弈值不小于 G的博弈值。

引理10。 设 G 是一个博弈值为 α的从Z中选择节点的游戏。若白方在 $p(G)$中获胜，则 $p(G)$ 的博弈值至少为 α。

证明。 假设黑方开局时同时在 G 和 $p(G)$中走棋，试图在图14a的副本中走出序列1...b5 2. cxb5 c4 3. b6；该副本对应于他在 G 中选择的着法（因此，黑方在 G 中的每一步棋都对应棋盘上的两步棋）。要赢得这盘国际象棋对局，白方最终必须在某个Z-分量中偏离这一序列，否则对弈将无限延续。由于白方在当前Z-分量中没有其他着法，在此前用过的Z-分量之外也没有着法，因此白方唯一可采取的偏离方式，是在一个已经发生过交换1...b5 2. cxb5 c4 3. b6的Z-分量中走b7，如图14b所示。假设白方在黑方失去 G之前这样做。我们要说明，黑方此时有和棋策略，因此 $p(G)$的博弈值（若存在）至少为 α。

黑方的防守将由一个简单的算法给出。黑方会立即以 cxb7 回应白方的 b7，这一点很重要，因为这使他可以立即走出等待着法 b6。黑方现在宣布，只要可能，他每回合都会吃掉一枚白兵；但如果要在 Z-分量中用兵吃掉位于高亮格 e12、g13 和 g14 上的棋子，则不会这么做。如果白方走出一步棋，而黑方无法或不愿吃子，黑方就会改为走等待着法，推进一枚白方无法立即吃掉的兵。我们将论证，黑方总能执行这一策略，并最终以此逼和白方。

由于黑方尚未输掉相关的从……中选择节点Z 局，因此树中的任意两条已激活兵链都会在较短兵链起始的 Z-分量中相交。在这个分量中，黑方的策略确保他最终能走 fxe10 或 fxg10，具体取决于白方从哪个方向接近。若是前一种情况，右下方兵链（如果已激活）

现在理论上可以沿 g 线解放一个兵，但它会立刻困在 g10。若是后一种情况，黑方的策略会使 e11 兵永远无法移动，因此，虽然左下方兵链（如果已激活）可以在 e 线上解放一个兵，但它同样会困在 e10。两种情况下，白方都可以选择走 f11，之后最终进行 fxe12 dxe12 的兑子，从而激活左上方兵链并继续沿树向上推进；但这条兵链在这一系列着法开始之前就已经激活了。如果白方走 f12 而不是 fxe12，新解放的兵最终会困在 g13 或 g14，或者在 f14 被吃掉。总而言之，在每个 Z-分量中，白方都必须选择一条兵链使其陷入死局，无法永久解放任何兵，也无法激活任何新的兵链，并且最多只能迫使黑方走 5 步等待着法（应对白方在 e10 或 g10 的着法，以及最多 4 步涉及 f 兵的着法）。

请注意，白方通过初始偏离为黑方提供的等待着法 b6，足以在白方继续沿着 Z-分量中的序列行棋、回到他最初忽略黑方的局面时，将回合交还给白方。黑方只有在另外两种情况下才需要有可用的等待着法：白方走出无法在 Z-分量中通过吃子应对的着法，或在整棵树的根节点走棋；但这些情况只有在白方沿着一条兵链向上攀爬、到达相关节点并释放一大群黑方兵之后才会出现。

因此，白方的前景十分黯淡。白方参与的任何兵链，都会沿着树缓慢向上延伸，直到遇到死胡同根节点，或在某个 Z-分量处遇到另一条兵链。由于黑方能够用等待着法应对白方所有不在兵链中的着法，白方只能继续在兵链中行棋，直到黑方激活的所有有限条有限长度兵链都耗尽。此时，白方无棋可走，陷入逼和。

因此，白方不可能在黑方落败之前获胜 G，这意味着该局面的博弈值必须至少为 α （如果存在的话）。

□

还需证明：若 G 对白方是获胜局面，那么 $p(G)$ 对白方也是获胜局面，这样 $p(G)$ 的博弈值便存在。

引理 11. 设 G 是一个博弈值为 α 的从*Z*中选择节点的博弈，因此特别地，黑方在 G 中落败。那么黑方在 $p(G)$ 中也会落败，因此 $p(G)$ 有博弈值。

证明。 我们给出白方的一种获胜策略。

在白方获胜之前 G，白方始终采用简单策略：在图 14a 的任意副本中，黑方走 b5 后，白方就以 cxb5 应对。若黑方接着走 c4，白方可以走 b6，使黑方在该Z-分量中再无着法。这就保证了在白方获胜 G 之前，白方不会被逼和；白方还能从黑方走入的每个Z-分量中获得一条通向根节点的已激活兵链；并且黑方在每个Z-分量中最多只能走两步，之后就必须在一个新的副本中走 b5。

由于黑方必须不断使用新的 Z-分量，白方可以继续采用这一策略，直到黑方输掉 G。一旦发生这种情况，就存在两个已激活的 Z-分量，分别属于棋盘上的节点 x 和 y，且二者都不是另一个的初始段。

设 v 为棋盘上 x 和 y 的最近公共祖先节点。例如，图 13 中的某些节点分别标记为 x、 y和 v 。

现在白方可以采用以下策略取胜：和之前一样，白方在 x 或 y 以北的 Z-分量中，针对黑方的任何黑兵着法就地应对，以阻止任何黑兵被释放并干扰白方的胜利之路。由于棋盘上 x 和 y 以北只有有限个节点，黑方最终会用完这些着法，被迫在棋盘上同时位于 x 和 y 以南的坐标处（或同一高度）移动兵，而白方此时将不予理会。

在不应对 x 或 y 以北 Z-分量中的着法时，白方通过同步地从节点 x, y 沿兵链逐步向上推进至 v 来取得进展，并格外小心，只在当前较低的那条兵链上着法。采取这一谨慎做法，是因为沿兵链向上移动会在身后释放出一大群黑方兵，而白方希望避免两条兵链上的进展相互干扰。经过有限步数后，两条兵链都会到达节点 v，此时根据引理8，白方可以迫使一枚白兵垂直释放。这枚白兵随后将穿过其上方处于原始状态的兵链，并在每条兵链处运用引理9的穿越机制，直至抵达王室中决定胜负的兵链；根据引理7，白方由此取胜。

□

现在我们可以完成定理2的证明：

定理*2*的证明。根据引理 5，对于每个可数序数 β ，都存在一个从Z中选择节点的博弈 G ，其可数博弈值至少为 β。根据引理 11，相应的国际象棋局面 $p(G)$ 对白方而言有一个博弈值；根据引理10，该值至少为 β。通过简单的归纳法，从局面 $p(G)$ 经过有限步棋即可到达博弈值恰为 β 的局面，因此所有可数博弈值都会出现在仅有王和兵的局面中。 □

因此，仅有王和兵的无限国际象棋的 ω_1 也为 ω_1 。

虽然这一构造足以回答博弈值问题，但我们注意到，它使玩家之间产生了固有的不对称性。尤其是，它无法模拟任何白方拥有实质性选择的博弈。因此，我们并未得到定理1的完整类比，仍有以下问题：

问题1. 短程无限国际象棋能否模拟带有和棋的任意盖尔–斯图尔特博弈，达到定理1所述的意义？

参考文献

[1] Andreas Blass. 获胜策略的复杂性. 《离散数学》, 3:295– 300, 1972年. [2] 丹·布鲁姆利夫、Joel David Hamkins 和菲利普·施利希特. 无限国际象棋中的将死步数问题是可判定的. 载于《世界如何计算》，施普林格《计算机科学讲义》第7318卷，第78–88页. 海德堡，2012年.[3] C. D. A. Evans 和 Joel David Hamkins. 无限国际象棋中的超限博弈值. 《整数》, 14:论文编号 G2, 36页，2014年.[4] C. D. A. Evans、Joel David Hamkins 和诺曼·刘易斯·珀尔马特. 无限国际象棋中博弈值为 ω^4的一个局面. 《整数》, 17:论文编号 G4, 22页，2017年.[5] 戴维·盖尔和 F. M. Stewart. *13.* 完全信息无限博弈，第245–266页. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1953年.[6] Joel David Hamkins 和 Davide Leonessi. 无限六角棋是和棋. 《整数》, 23:论文编号 G6，33页, 2023年.[7]Johan W¨astlund（ https://mathoverflow.net/users/14302/johan- w¨astlund）. 几步将死? MathOverflow. URL:https://mathoverflow.net/q/63423（版本: 2024-01-30）.[8]理查德·斯坦利（ https://mathoverflow.net/users/2807/richard- stanley）. 无限棋盘上的国际象棋是否可判定. MathOverflow. URL:https://mathoverflow.net/q/27967（版本：2024-03-04）..[9] D´enes K˝onig. 关于从有限推至无限的一种推理方法.《*Acta Sci. Math.*（塞格德）》, 3(2-3):121–130, 1927 年 .[10] 皮尔乔治 · 奥迪弗雷迪 .《经典递归论》，《逻辑与数学基础研究》第125卷. 北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1989年.《自然数函数与集合理论》，第1卷。