arXiv:2602.14366v1 [math.GR] 16 Feb 2026

# 主块上的伽罗瓦作用与 Sylow 3-子群的生成

EDEN KETCHUM、J. MIQUEL MART´INEZ、NOELIA RIZO 和 A. A. SCHAEFFER FRY

ABSTRACT. 本文证明了 Navarro–Rizo–Schaeffer Fry–Vallejo 猜想的一个方向。该猜想提出了一种算法，可以根据特征标表判断一个有限群是否具有二生成的 Sylow 3-子群。这为伽罗瓦–麦凯猜想（亦称阿尔珀林–麦凯–纳瓦罗猜想）的逐块版本提供了进一步的证据。关键步骤之一是证明具有某种结构的有限群的主块满足 Isaacs–Navarro 伽罗瓦猜想。

## 1. 引言

在 Brauer 于 1963年提出的著名问题列表中的问题 12 里，他询问能否从一个有限群的特征标表中获取关于其 Sylow $p$-子群 $P$ 的哪些信息 $G$。特别是，近年来人们研究了能否通过这种方式得知 $P$ 的生成元个数这一问题，参见例如 [RSV20、NRSV21、MS23、Va23]。这一领域中的许多问题似乎都与伽罗瓦自同构 $\sigma \in$Gal($\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}$)的作用有关；该自同构固定$p'$次单位根，并将 $p$次单位根映为其 $1+p$ 次幂。对于任意分圆扩张 $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})/\mathbb{Q}$，我们将该自同构在 $\mathbb{Q}_n$上的限制记作 $\sigma$。本文通过证明 [NRSV21]中的主要猜想的以下方向，为这一系列问题作出贡献。

**定理 A.** 设 $G$ 是一个有限群，且 $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$。那么 $|P\colon \Phi(P)| = 9$ 当且仅当主3-块 $B_0(G)$ 恰好包含6 个或 9 $\sigma$-不变的、次数与3互素的特征标。

如 [NRSV21], 中所述，定理 A（及其逆命题）可由 Alperin–McKay–Navarro 猜想 [Nav04, Conj. B], 推出，甚至可由限制更严格的版本 [IN02, Conj. D]推出。因此，这一结果为这些难以捉摸的猜想提供了进一步的证据。我们指出，尽管无块版本 [IN02, Conj. C] 最近已在 [RS25], 中得到证明，但逐块版本（即使仅限于主块）距离完成仍远得多，而且尚未化归为单群上的问题。因此，为这一逐块版本寻找更多证据仍然很有意义。

定理 A 可以同时视为对 [NRSV21],中主要结果的推广（该结果讨论了关于 $p = 2$的类似问题），以及对 [GRSV25], 中主要结果的推广；后者证明了 $[P\colon P'] = 9$ 当且仅当 $B_0(G)$ 恰好包含 6 个或 9 个次数与 3 互素的不可约特征标。

我们对定理 A 的证明运用了 Ketchum [Ket25], 的最新研究，该研究表明，定理 A 的陈述（及其逆命题）对几乎单群成立。证明还运用了一个约化定理，以及一些关于几乎单群的补充结果，这些结果与 [GRSV25]中的结果类似。此外，该约化还依赖于 R. Brauer [Bra76] 关于具有循环 Sylow $p$-子群的群之结构的精彩研究。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20C15, 20D20.*Key words and phrases.* 伽罗瓦作用，主块，西罗子群。第一位和第四位作者感谢美国国家科学基金会提供的 CAREER资助（奖项编号：DMS-2439897）；第二位和第三位作者感谢由 MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033 和欧洲区域发展基金“建设欧洲的一种方式”资助的项目 PID2022-137612NB-I00，以及巴伦西亚自治区政府资助的项目 CIDEIG/2022/29。本研究的部分工作是在第二位和第三位作者访问丹佛大学期间完成的。他们谨向数学系致谢，感谢其热情接待。

如上所述， [IN02, Conj. C]已在 [RS25]中得到解决。我们的下一个主要定理考察主块版本，它是 [IN02, Conj. D], 的一部分，也是证明定理 A 的关键步骤。我们认为它本身也可能具有独立的研究价值。设 $\mathcal{H} \leq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$ 为 [Nav04]中所考察的伽罗瓦群。

**定理 B.** 设 $G$ 是一个阶数被 $p$ 整除的有限群， $N \lhd G$ 是一个阿贝尔 $p$ 群，并假设 $G/N$ 的 *Sylow* $p$ 子群是循环的，且 $\tau \in \mathcal{H}$ 是一个 $p$ 次幂阶元素。那么，$\tau$ 在 $\mathrm{Irr}(B_0(G))$ 中固定的零高度特征标数量，与其在 $\mathrm{Irr}(B_0(\mathbf{N}_G(P)))$ 中固定的数量相同，其中 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。

特别地，对于满足定理 B 假设的群的主块， [IN02，推论 D] 成立。事实上，正如注 3.4 所解释的，只需假设 $G/N$ 的每个最大亏格块都满足 [IN02，推论 D], 或 [Nav04，推论 B], 即可得到相同结果。（另见 [MMSV26，命题 5.4] ，其中讨论了另一种相关但限制较多的情形。）

本文结构如下：第 2 节包含预备引理和结果，以及 GRSV25 定理 B 的伽罗瓦版本。定理 B 在第 3 节中证明。第 4 节将定理 A 归约到单群，最后在第 5 节完成证明；我们还为任意块的定理 A 版本提供了一些证据。

## 2. Auxiliary results

**2.1. 伽罗瓦作用与主块。** 我们先汇集关于主块的一些基本事实。下文中，给定一个素数 $p$, $B_0(G)$ 表示有限群 $G$ 的主 $p$块。我们用 $\mathrm{Irr}(B_0(G))$ 表示 $B_0(G)$ 中不可约特征标的集合，并用 $\mathrm{Irr}_0(B_0(G))$ 表示其中零高度（即 $p'$ 次）特征标构成的子集。$\mathrm{Irr}_0(B_0(G))$ 中的 $\sigma$-不变特征标集合记为 $\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))$，并令 $k_{0,\sigma}(B_0(G)) := |\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))|$。

**引理 2.1.** 设 $G$ 为一个有限群，设 $N \lhd G$ ，并设 $p$ 为一个素数。

*(i)* 不可约特征标集合$(B_0(G/N)) \subseteq$ 不可约特征标集合$(B_0(G))$，并且若 $N$ 的阶不能被 $p$ 整除，则不可约特征标集合$(B_0(G/N))$ =不可约特征标集合$(B_0(G))$。*(ii)* 对任意 $\theta \in$ 不可约特征标集合$(B_0(N))$，存在某个 $\chi \in$ 不可约特征标集合$(B_0(G))$ 位于 $\theta$ 之上。*(iii)* 对任意 $\chi \in$ 不可约特征标集合$(B_0(G))$， $\chi_N$ 的每个成分都属于 $B_0(N)$。*(iv)* 若 $G/N$ 是一个 $p$-群，则 $B_0(G)$ 是 $B_0(N)$ 的唯一覆盖块。*(v)* 假设 $G = H_1 \times \cdots \times H_t$。则

$$\mathrm{Irr}(B_0(G)) = \{\theta_1 \times \cdots \times \theta_t \mid \theta_i \in \mathrm{Irr}(B_0(H_i))\}.$$

证明。 (i) 的第一部分由 [Nav98，定理 7.6], 之前的讨论得出，第二部分是 [Nav98，定理 9.9(c)]。(ii) 部分是 [Nav98，定理 9.4], (iii) 部分是 [Nav98，定理 9.2，推论 9.3] ，(iv) 部分是 [Nav98，推论 9.6]。(v) 部分是 [NT16，引理 2.6(b)]。□

引理 *2.2.* 设 $G$是一个有限群，且 $N = S_1 \times \cdots \times S_t$是$G$的一个极小正规子群，其中 $S_i$由 $G$传递地置换。假设 $G/N = \langle xN \rangle$是循环的，$C_G(N) = 1$且 $N_G(S_i) = N$。那么 $G/N \lesssim Out(N) = Out(S_1) \wr S_t$。特别地，适当重新排列 $S_i$后， $xN$在 $N$上的作用为 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)\tau \in Out(S_1) \wr S_t$，其中 $\tau = (1 \ldots t)$，并且我们有

(i) $\alpha_1 \cdots \alpha_t = 1$; (ii) 若 $\eta \in$不可约特征标集合$(S_1)$，则特征标 $\theta = \eta \times \eta^{\alpha_1} \times \eta^{\alpha_1\alpha_2} \times \cdots \times \eta^{\alpha_1 \cdots \alpha_t}$是 $G$-不变的。

证明。 由于 $G$在 $N$的分支上传递作用， $G/N \leq \mathrm{Out}(N) \cong \mathrm{Out}(S_1) \wr \mathrm{S}_t$。因此，将$xN$视为 Out($N$) 的一个元素时，它在 $N$的特征标上的作用等同于某个 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\tau$，其中$\alpha_i \in \mathrm{Out}(S)$，且 $\tau \in \mathrm{S}_t$ 的阶为 $t$ ；适当重新排列这些元素后，我们可以假设 $\tau = (1 \ldots t)$。此外，由于$\mathbf{N}_G(S_1) = N$，所以 $o(xN) = |G : N| = t$ ，并且我们有

$$1 = ((\alpha_1, \ldots, \alpha_t)\tau)^t = (\prod_{j=0}^{t-1} \alpha_{\tau^j(1)}, \ldots, \prod_{j=0}^{t-1} \alpha_{\tau^j(t)})\tau^t.$$

因此，

$$\prod_{j=0}^{t-1} \alpha_{\tau^j(1)} = \alpha_1 \cdots \alpha_t = 1,$$

这就证明了（i）部分。现在，若 $\eta \in \mathrm{Irr}(S)$，则令 $\theta = \eta \times \eta^{\alpha_1} \times \eta^{\alpha_1\alpha_2} \times \cdots \times \eta^{\alpha_1\cdots\alpha_t}$，并注意到，根据（ii）部分，$\theta^x = \theta$。由于 $G/N = \langle xN \rangle$， $\theta$ 是 $G$-不变的。□

**定理 2.3** (Alperin–Dade)。设 $N \triangleleft G$ 和 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。若 $p$ 不整除 $|G : N|$ 且$N\mathbf{C}_G(P) = G$，则限制定义了一个双射

$$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)) \to \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(N)).$$

证明。当$G/N$可解时，限制定义双射 $\mathrm{Irr}(B_0(G)) \to \mathrm{Irr}(B_0(N))$这一事实已在 [Alp76] 中证明；而在不要求可解性假设时，则已由 [Dad77]证明。由于 $\chi_N^\sigma = (\chi^\sigma)_N$，结论得证。□

引理 *2.4*。设 $G$ 是一个有限群 $H \le G$，且满足 $p \nmid |G : H|$。令 $\tau \in Gal(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q})$ 具有 $p$-幂阶。假设对于 $Q \in Syl_p(H)$，$C_G(Q) \subseteq H$。若 $\theta \in Irr_{0,\tau}(B_0(H))$，则 $\theta^G$ 包含一个成分 $\chi \in Irr_{0,\tau}(B_0(G))$。

*Pro*的。这可由 [MMSV26 引理 3.7] 的证明得到，利用 $\langle\tau\rangle$ 具有 $p$ 阶。 □

**引理 2.5.** 设 $N \triangleleft G$ 是包含于 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 中的一个 $p$-子群。此外，假设 $\theta \in \mathrm{Lin}(N)$ 是 $G$-不变的。设 $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q})$ 具有 $p$ 阶，并假设 $\theta$ 延拓到 $\lambda \in$不可约特征标集合$_{0,\tau}(P)$。那么 $\theta$ 延拓到 $B_0(G)$ 中一个 $\langle\tau\rangle$-不变的特征标。

ˆ证明。设 $H = P\mathbf{C}_G(P)$，并记为 $H = P \times X$。令 $\lambda = \lambda \times 1_X \in$不可约特征标集合$_{0,\tau}(B_0(H))$，由引理 2.4 可知，ˆ$\lambda^G$ 包含某个 $\chi \in$不可约特征标集合$_{0,\tau}(B_0(G))$。现在，由 [Nav18，问题 3.8]，，有 $\det(\chi^\tau) = \det(\chi)^\tau$，因此 $\delta := \det(\chi)^b$ （其中 $b$ 如 [GRSV25 引理 2.5] 的证明中所述）是 $\langle\tau\rangle$-不变的，属于 $B_0(G)$，并延拓 $\theta$。□

以下是 [MS23，引理 3] 的主块版本。

**引理 2.6.** 设 $G$ 是一个有限群，且满足$\mathbf{O}_{p'}(G) = 1$，并令 $P \in$Syl$_p(G)$。 $n$

$$K = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))} \ker(\chi) \le \Phi(P).$$

证明。令 $\lambda \in$Irr$(P/\Phi(P))$。记 $P\mathbf{C}_G(P) = P\times X$，并令 $\psi = \lambda\times 1_X \in$Irr$_{0,\sigma}(B_0(P\mathbf{C}_G(P)))$。由引理 2.4 可知， $\lambda^G$ 包含一个成分 $\chi \in$ Irr$_{0,\sigma}(B_0(G))$。由弗罗贝尼乌斯互反律，$\chi_{P\mathbf{C}_G(P)}$包含 $\lambda \times 1_X$，因此 $\chi_P$包含 $\lambda_P$。此外， $\chi_{P\cap K} = \chi(1)1_{P\cap K}$包含$\lambda_{P\cap K}$，这表明 ker($\lambda$) 包含 $P \cap K$。因此

$$P \cap K \subseteq \bigcap_{\lambda \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))} \ker(\lambda) = \Phi(P).$$

由 Tate 定理 [Nav18，推论 6.14], 可知，这意味着 $K$ 是 $p$-幂零的。于是，若 $K$ 不是一个$p$-群，则 $\mathbf{O}_{p'}(K) > 1$, 这与$\mathbf{O}_{p'}(G) = 1$矛盾。因此 $K$ 是一个正规 $p$-子群，故$K = P \cap K \subseteq \Phi(P)$，如所求。□

以下是 [GRSV25 定理 3.5] 的一个变体。

**引理2.7.** 假设 $N \triangleleft G$是一个直积 $N = S_1 \times \cdots \times S_t$由阶可被 $p$ 整除的非阿贝尔单群组成，并由 $G$传递地置换。设 $\theta = \theta_1 \times \cdots \times \theta_t$是 $G$-不变的。若 $\theta_1$ 可延拓为某个 $\sigma$-不变的、次数为 $p'$ 的不可约特征标，该特征标属于 $B_0(T)$ 对所有 $S_1 \le T \le \mathrm{Aut}(S_1)_{\theta_1}$均成立，则$\theta$ 可延拓为某个 $\chi \in$不可约特征标集合$_{0,\ \sigma}(B_0(G))$

ˆ证明。按照 [GRSV25 定理 3.5] 的证明，由假设可知， $\theta_1$ 可延拓为 $\theta_1$ 中的某个特征标，该特征标属于 Irr$_{0,\ \sigma}(B_0(\mathbf{N}_G(S_1))$。令 $\chi$ 为张量诱导特征标 $\chi = \hat{}\theta_1^{\otimes}$（见 [Nav18 第 10.5] 节），它属于 $B_0(G)$，并且可延拓 $\theta$ （同样由 [GRSV25 定理 3.5] 可知）。根据 [GI83 定义 2.1] 中的公式 ˆ， $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\theta_1)$，因此 $\chi$ 是 $\sigma$-不变的，证毕。□

以下是本节中仅有的对任意素数不成立的结果。接下来给出 $\sigma$-版本的 [GRSV25，定理 B]。

命题 *2.8*。设 $G$ 是一个有限群，$p \in \{2,3\}$，且 $P \in Syl_p(G)$。令 $N \lhd G$ 并假设 $p$ 整除 $|G : N|$。设 $\theta \in Irr(B_0(N))$ 是 $P \times \langle\sigma\rangle$-不变的。那么 $p$ 整除 $\hat{}k_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta)$。特别地，若 $\theta$ 延拓到 $\theta \in Irr_{0,\sigma}(B_0(PN))$，则 $k_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta) \geq p$。

证明。按照 [GRSV25 定理 2.7]中的论证，我们得到

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_0(B_0(G)|\theta)} \chi(1)^2 \equiv 0 \bmod p.$$

回想一下，$\langle\sigma\rangle$ 是一个 $p$-群，并作用于 $\mathrm{Irr}_0(B_0(G)|\theta)$。记

$$\mathrm{Irr}_0(B_0(G)|\theta) = \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta) \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_t$$

其中，$\Omega_i$'s 是非平凡的 $\langle\sigma\rangle$-轨道，令 $\chi_i$ 为每个 $\Omega_i$的一个代表元。由于 $\Omega_i$ 中的每个元素的次数都是 $\chi_i(1)$，且 $|\Omega_i| \equiv 0$ 模 $p$，我们有

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_0(B_0(G)|\theta)} \chi(1)^2 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta)} \chi(1)^2 + \sum_{i=1}^{t} |\Omega_i|\chi_i(1)^2 \equiv \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta)} \chi(1)^2 \bmod p$$

这表明

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta)} \chi(1)^2 \equiv 0 \bmod p.$$

现在，对于每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta)$，都有 $\chi(1)^2 \equiv 1$模 $p$，因此我们得出 $p$ 整除$k_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta)$，如所求。

$\hat{}$对于最后一部分，注意：若存在某个 $\theta \in$不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(PN)|\theta)$ 延拓 $\theta$，则由定理 2.3，存在 $\psi \in$ 不可约特征标集合 $_{0,\sigma}(B_0(PN\mathbf{C}_G(P))|\theta)$ 延拓 $\hat{}\theta$。由引理 2.4，$\psi^G$ 包含某个 $\chi \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(G))$。因此由 Frobenius 互反律，$k_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta) > 0$，从而结论成立。□

**注 2.9.** 前述结果对极大缺陷的非主块同样成立，此时须利用它们至少包含一个 $\sigma$-不变的零高度特征标（这已在 [BP80,Prop. 2.6] 中证明）。

**引理 2.10.** 假设 $p \leq 3$，且一个 $p$-群 $P$ 通过自同构作用在阶可被 $p$ 整除的群 $K$ 上。则 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(K))$ 中 $P$-不变特征标的集合非空，且其基数可被 $p$ 整除。

证明。由 [RSV20, 引理 2.2(c)] 可得，利用 $P$ 固定 $1_K \in$不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(K))$。□

2.2. **具有循环 Sylow 3-子群的群的结构**。以下 Brauer 的结果（其依据是 Herzog 在 [Her70] 中的一个结果）将是我们在定理 A 的约化定理最后一步中的关键。为方便读者，我们在此重述该结果。

**定理 2.11**。设 $G$ 为有限群，设 $p = 3$，并假设 $G$ 具有循环 *Sylow* $p$- 子群。那么以下情形之一成立：

(i) $G$ 是 $p$-可解的，且存在 $L \leq G$，使得 $|G : L| \in \{1, 2\}$，并且 $L$ 具有正规$p$-补群。

(ii) $G$ 不是 $p$-可解的，且对于每个 $N \lhd G$，要么 $N$，要么 $G/N$ 的阶不能被 $p$整除。

证明。我们采用 [Bra76 第 2] 节中的记号。令 $P$ 为 $G$ 的一个 Sylow 3-子群，并令$r = |\mathbf{N}_G(P) : P\mathbf{C}_G(P)|$。由于 $R = \mathbf{N}_G(P)/P\mathbf{C}_G(P) \leq \mathrm{Aut}(P)$，因此 $r = |R|$ 不能被 $p$ 整除；又由于 $P$ 是循环的，因此有 $r \mid p - 1 = 2$。

如 [Bra68 第 562], 页所述，我们称一个具有循环 Sylow 子群的群为亚循环型，如果存在指数为 $p^a r$ 的 $K \lhd G$，其中 $|P| = p^a$。

现在，若 $G$ 为亚循环型，则根据 [Bra76 定理 2C]，$G$ 是 $p$-可解的，因此我们处于情形 (i)。若 $r = 1$，则如所需，$G$ 有一个正规 $p$-补。若 $r = 2$，则结论由 [Bra76 命题 2F] 得出。

另一方面，如果 $G$ 不是亚循环型，那么它就不是 $p$可解的（同样由 [Bra76，定理 2C] 得出），因此我们处于情形 (ii)。结论现在由 [Bra76，定理 3C] 得出。□

## 3. Theorem B

本节旨在证明定理 B。我们从[Nav18，引理 93]的以下加强形式开始。

**引理 3.1.** 设 $\chi \in$ 不可约特征标集合$_{p',\tau}(G)$，其中 $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 具有 $p$-幂阶，并设 $N$ 是 $G$的正规子群。那么 $\chi_N$ 有一个 $P \times \langle\tau\rangle$ -不变成分，且其中任意两个都彼此$\mathbf{N}_G(P)$共轭。

证明。 设 $\mu \in \mathrm{Irr}(N)$ 位于 $\chi$之下。由于 $|G : G_\mu|$ 不能被 $p$ 整除（根据 Clifford 对应，且因为 $p$ 不整除 $\chi(1)$），并且 $\langle\tau\rangle$ 是一个 $p$-群，因此至少存在一个 $\langle\tau\rangle$-不变的 $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ 位于 $\chi$之下。但对于 $g \in G$，我们有 $(\theta^g)^\tau = (\theta^\tau)^g = \theta^g$，且 $\chi_N$的所有不可约组成成分都是 $\langle\tau\rangle$-不变的。现在，根据 [Nav18，引理 9.3]，，我们得出 $\chi_N$ 有一个 $P \times \langle\tau\rangle$-不变成分，且其中任意两个都彼此 $\mathbf{N}_G(P)$-共轭。□

我们还需要 Murai 的以下结果。为方便读者，我们用本文的记号重述该定理。回忆一下，若 $B$ 是 $G$的 Brauer $p$块，且 $\lambda$ 是 $G$的线性特征，则集合 $\lambda B = \{\lambda\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ 是 $G$ 的 Brauer $p$块（例如参见 [Riz18，引理 2.1]，）。

**引理 3.2.** 设 $N$ 是 $G$的正规子群， $B$ 是 $G$的 $p$块， $\xi \in \mathrm{Irr}(G)$ 是一个线性特征，且 $B$ 是 $G/N$的 $p$ 块。设 $b$ 和 $b$ 分别是 $B$和 $B$的 *Brauer* 对应块。那么，当且仅当$\xi_{N_G(P)}b$ 被 $b$支配时， $\xi B$ 被 $B$ 支配。

证明。 这本质上是 [Mur98，推论 2.5]。记 $H = \mathbf{N}_G(P)$。要应用这一结果，我们只需验证 $\xi^{-1}B$ 和 $\xi_H^{-1}b$ 是 Brauer 对应块。这可直接由诱导块的定义得出（参见 [Nav98，第 87] 页）。设 $K$ 是 $G$的一个共轭类；我们断言$\lambda^G_{\xi_H^{-1}b}(\hat{K}) = \lambda_{\xi^{-1}B}(\hat{K})$。 设 $L_1, \ldots, L_r$是 $H$的共轭类，满足$K \cap H = L_1 \cup \ldots \cup L_r$；设 $x_i \in L_i$， 设 $\psi \in \mathrm{Irr}(b)$， 并设 $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$。那么

$$\begin{aligned}\lambda^G_{\xi_H^{-1}b}(\hat{K}) &= \lambda_{\xi_H^{-1}b}\left(\sum_{x\in K\cap H} x\right) = \lambda_{\xi_H^{-1}b}(\hat{L_1} + \ldots + \hat{L_r}) \\ &= \omega_{\xi_H^{-1}b}(\hat{L_1})^* + \ldots + \omega_{\xi_H^{-1}b}(\hat{L_r})^* = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{|L_i|\overline{\xi_H(x_i)}\psi(x_i)}{\psi(1)}\right)^*\end{aligned}$$

由于 $\xi$ 是 $G$的类函数，因此对于所有 $i$， $j$ 都有 $\xi(x_i) = \xi(x_j)$，于是

$$\begin{aligned}\lambda^G_{\xi_H^{-1}b}(\hat{K}) &= \overline{\xi(x_1)}^* \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{|L_i|\psi(x_i)}{\psi(1)}\right)^* = \overline{\xi(x_1)}^* \lambda_b(\hat{L_1} + \ldots + \hat{L_r}) \\ &= \overline{\xi(x_1)}^* \lambda_b(K \hat{\cap} H) = \overline{\xi(x_1)}^* \lambda_B(K) = \left(\frac{|K|\xi^{-1}(x_1)\chi(x_1)}{\chi(1)}\right)^* = \lambda_{\xi^{-1}B}(\hat{K}),\end{aligned}$$

从而证明了该断言。 □

下面给出定理 B。回忆一下， $\mathcal{H}$ 是 [Nav04] 中所考虑的伽罗瓦群。

**定理 3.3.** 设 $N \lhd G$ ，其中 $N$ 是一个阿贝尔 $p$-群，并假设 $G/N$ 具有循环的 *Sylow* $p$-子群。设 $\tau \in \mathcal{H}$ 的阶为 $p$的幂。则 $|$不可约特征标集合$_{0,\,\tau}(B_0(G))| = |$不可约特征标集合$_{0,\,\tau}(B_0(\mathbf{N}_G(P)))|$，其中 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。

证明。 令 $\Delta$为集合 $\mathrm{Irr}(N)$ 中 $P \times \langle\tau\rangle$-不变元素上的一个 $\mathbf{N}_G(P)$-陪集代表集。由引理 3.1 可知

$$\mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G)) = \coprod_{\theta\in\Delta} \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G)|\theta),$$

并且

$$\mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_G(P))) = \coprod_{\theta\in\Delta} \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_G(P))|\theta).$$

因此，只需证明对于每个 $\theta \in \Delta$，$|$不可约特征标集合$_{0,\tau}$($B_0$(G)$|\theta$)$| = |$不可约特征标集合$_{0,\tau}$($B_0$(N$_G$($P$))$|\theta$)$|$。现在，令 $\theta \in \Delta$。我们断言映射

$$\iota_G^\theta : \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G_\theta)|\theta) \to \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G)|\theta)$$

由 $\psi \mapsto \psi^G$ 定义的映射是一个双射。事实上，由于 $\theta$ 是 $\langle\tau\rangle$-不变的，因此 $\langle\tau\rangle$ 作用于不可约特征标集合($G_\theta|\theta$)和不可约特征标集合($G|\theta$)，而 Clifford 对应蕴含 $\psi \mapsto \psi^G$ 是 Irr($G_\theta|\theta$) $\to$ Irr($G|\theta$)之间的双射。由于 $\langle\tau\rangle$ 的作用与特征标诱导可交换，因此当且仅当 $\tau$ 固定 $\psi \in$Irr($G_\theta|\theta$) 时，它才固定 $\psi^G \in$ Irr($G|\theta$)。现在，[Nav98，推论 6.2 和定理 6.7]蕴含了这一结论。类似地，由于 N$^{G_\theta}$($P$) $=$N$_G$($P$)$_\theta$，映射

$$\iota^\theta_{\mathbf{N}_G(P)} : \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_{G_\theta}(P))|\theta) \to \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_G(P))|\theta)$$

由 $\eta \mapsto \eta^{\mathbf{N}_G(P)}$ 定义的映射也是一个双射。

现在，我们断言，$\theta$延拓为 Irr($P$) 中一个 $\langle\tau\rangle$-不变的特征标，当且仅当 Irr0,$\tau$($B_0$(G)$|\theta$) 非空。事实上，取 $\chi \in$Irr0,$\tau$($B_0$(G)$|\theta$)，并令 $\psi \in$Irr0,$\tau$($B_0$($G_\theta$)$|\theta$) 为其 Clifford 对应项。于是，$\psi_P$是 $P$ 的一个 $\langle\tau\rangle$-不变特征标，并且根据 [NT19, 引理 2.1(ii)]，我们有$\psi_P$包含一个 $\langle\tau\rangle$-不变的线性成分 $\lambda \in$Irr($P$)。由于 $\psi_N = \psi(1)\theta$，$\lambda$是 $\theta$ 的一个延拓。反过来，若 $\theta$延拓为 Irr($P$) 中一个 $\langle\tau\rangle$-不变的特征标，则根据引理 2.5，$\theta$延拓为一个特征标 $\psi \in$Irr0,$\tau$($B_0$($G_\theta$))，且 $\psi^G \in$Irr0,$\tau$($B_0$(G)$|\theta$)。无论哪种情形，我们都得出结论~：Irr0,$\tau$($B_0$(G)$|\theta$) $\neq \emptyset$当且仅当 $\theta$延拓为一个特征标 $\theta \in$Irr0,$\tau$($B_0$($G_\theta$))，当且仅当 $\theta$延拓为 Irr($P$) 中一个 $\langle\tau\rangle$-不变的特征标。类似地，Irr0,$\tau$($B_0$(N$_G$($P$))$|\theta$) $\neq \emptyset$~当且仅当 $\theta$延拓为一个特征标 $\theta \in$Irr0,$\tau$($B_0$(N$^{G_\theta}$($P$)))，当且仅当 $\theta$延拓为 Irr($P$) 中一个 $\langle\tau\rangle$-不变的特征标。特别地，Irr0,$\tau$($B_0$(N$_G$($P$))$|\theta$) $\neq \emptyset$当且仅当 Irr0,$\tau$($B_0$(G)$|\theta$) $\neq \emptyset$。由于我们想证明 $|$Irr0,$\tau$($B_0$(G)$|\theta$)$| = |$Irr0,$\tau$($B_0$(N$_G$($P$))$|\theta$)$|$，我们~可以假设二者均非空，因此可以找到 $\theta \in$ Irr0,$\tau$($B_0$($G_\theta$)) 延拓~ ~$\theta$。注意，$\theta'$:= $\theta_{\mathbf{N}_{G_\theta}(P)}$ 不可约，且延拓 $\theta$。由于 $|G_\theta$: N$^{G_\theta}$($P$)$|$不能被~整除，我们根据 [LMNT25, 引理 2.1] 得出结论：$\theta' \in$Irr0,$\tau$($B_0$(N$^{G_\theta}$($P$))) 延拓 $\theta$。

由 Gallagher 定理，

$$\mathrm{Irr}(G_\theta|\theta) = \{\mu\tilde{\theta} \mid \mu \in \mathrm{Irr}(G_\theta/N)\} \text{ and } \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_{G_\theta}(P)|\theta) = \{\beta\tilde{\theta'} \mid \beta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_{G_\theta}(P)/N)\}.$$

~注意到，$\mu\theta$ 是 $\langle\tau\rangle$-不变的且次数与 $p$ 互素，当且仅当 $\mu$ 是 $\langle\tau\rangle$-不变的且次数与 $p$互素。此外，[Riz18，引理 2.4] 表明，存在一个集合 $\mathcal{B}$，由$G_\theta/N$ 的极大缺陷块组成，使得

$$\mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G_\theta)|\theta) = \coprod_{B\in\mathcal{B}} \{\mu\tilde{\theta} \mid \mu \in \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B)\}.$$

若 $\mathcal{B}'$表示N$^{G_\theta}$($P$)$/N$ =N$^{G_\theta/N}$($P/N$)中与 $\mathcal{B}$中的块相对应的 Brauer 对应块的集合，则由引理 3.2 可知，

$$\mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_{G_\theta}(P))|\theta) = \coprod_{b\in\mathcal{B}'} \{\beta\tilde{\theta'} \mid \beta \in \mathrm{Irr}_{0,\tau}(b)\}.$$

由于 $G/N$ 的 Sylow $p$-子群是循环的，[Nav04，定理 3.4] 表明，对每个 $B \in \mathcal{B}$，都存在一个双射 $\Omega_B$: 不可约特征标集合 $_{0,\tau}$($B$) $\to$ 不可约特征标集合 $_{0,\tau}$($b$)，其中 $b \in \mathcal{B}'$ 是 $B$ 的 Brauer 对应块。因此

$$\Omega_\theta : \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G_\theta)|\theta) \to \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_{G_\theta}(P)|\theta)$$
$$\mu\tilde{\theta} \mapsto \Omega_{\mathrm{bl}(\mu)}(\mu)\tilde{\theta'}$$

是一个双射，其中 bl($\mu$) 表示包含 $\mu$（属于 $\mathcal{B}$）的 $G_\theta/N$ 的块。因此，映射

$$\Psi_\theta := \iota^\theta_{\mathbf{N}_G(P)} \circ \Omega_\theta \circ (\iota_G^\theta)^{-1} : \mathrm{Irr}_{0,\tau}(B_0(G)|\theta) \to \mathrm{Irr}_{0,\tau}(\mathbf{N}_G(P)|\theta)$$

是一个双射，并且我们可以通过规定：若 $\chi$ 位于 $\theta \in \mathrm{Irr}_P(N)$ 之上，则 $\Psi(\chi) = \Psi_\theta(\chi)$，构造一个双射 $\Psi$：不可约特征标集合$_{0,\tau}(B_0(G)) \to$不可约特征标集合$_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_G(P)))$。（注意，该映射是满射，因为不可约特征标集合$_{0,\tau}(B_0(G)|\theta) \neq \emptyset$当且仅当不可约特征标集合$_{0,\tau}(B_0(\mathbf{N}_G(P)|\theta) \neq \emptyset$，如上所证。）结论得证。□

注 *3.4*。关于 $G/N$ 的西罗子群为循环的这一假设，仅在定理 *3.3* 证明的倒数第二段中用于应用 [*Nav04*，定理 *3.*4]。一般而言，我们只需假设：对于 $G/N$ 的每个极大缺陷块 $B$，若其 *Brauer* 对应块为$b$，则存在一个双射 $\Omega_B$*:* 不可约特征标集合*0,*$\tau$*(B)* $\to$不可约特征标集合*0,*$\tau$*(b)*。此外，若假设对所有 $\psi \in$ 不可约特征标集合*0,*$\tau$*(B)* 以及所有极大缺陷块 $B$，均有 $\Omega_B(\psi)$*(1)* $\leq \psi$*(1)*，那么定理 *3.3* 的证明将给出一个双射 $\Omega$*:* 不可约特征标集合*0,*$\tau$*(*$B_0(G)$*)* $\to$不可约特征标集合*0,*$\tau$*(*$B_0(N_G(P))$*)*，且 $\Omega(\chi)$*(1)* $\leq \chi$*(1)*。近期有人在 [*Gia*25] 中提出了此类双射的存在性。

类似的证明可得以下结果。

命题 *3.5.* 设 $N \lhd G$ 是完全的，且 $P \in$ *Syl* $_p$*(G)*。假设每个 $P$-不变特征标 $\theta \in$*Irr0,*$\sigma$*(*$B_0(N)$*)* 若能延拓为 $\sigma$-不变特征标 $PN$，也能延拓为 $\sigma$-不变特征标 $B_0(G_\theta)$；并假设 $G/N$ 的 *Sylow* $p$- 子群是循环的。则 |*Irr0,*$\sigma$*(*$B_0(G)$*)*| = |*Irr0,*$\sigma$*(*$B_0(NN_G(P))$*)*|。

证明。我们可以仿照定理 3.3 的证明，说明每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))$ 都位于某个 $P$-不变的 $\theta \in \mathrm{Irr}(B_0(N))$ 之上。由于 $\theta$ 的 $G$-共轭个数不被 $p$ 整除，且 $\langle\sigma\rangle$ 作用于 $G$ 的共轭集合，因此可知 $\theta$ 也是 $\sigma$-不变的。再次仿照定理 3.3 推理可得，$\chi \in \mathrm{Irr}_0(B_0(G))$ 是 $\sigma$-不变的，当且仅当其 Clifford 对应特征 $\psi \in \mathrm{Irr}_0(B_0(G_\theta))$ 是 $\sigma$-不变的。

ˆ 现在，根据 [Nav18，推论 6.2、6.4]，每个 $\theta \in \mathrm{Irr}_{0,\,\sigma}(B_0(N))$ 都延拓为某个 $\theta \in \mathrm{Irr}_{0,\,\sigma}(B_0(PN))$ 中的特征标（这里我们利用了 $N$ 是完全的，因此 $o(\theta) = 1$）。根据假设，$\theta$ 延拓为 $\mathrm{Irr}_{0,\,\sigma}(B_0(G_\theta))$ 中的一个特征标；我们可以从第四段开始，沿用定理 3.3 的证明，构造一个双射 $\mathrm{Irr}_{0,\,\sigma}(B_0(G)) \to \mathrm{Irr}_{0,\,\sigma}(B_0(N\mathbf{N}_G(P)))$。□

和之前一样，我们可以得到命题 3.5 的更一般版本，但考虑到其技术性，我们选择以尽可能简单的方式陈述它。

## 4. Reduction of Theorem A

本节中，我们在假设下文第 5 节中的结果成立的前提下证明定理 A。

**定理 4.1** (Navarro–Rizo–Schaeffer Fry–Vallejo)。设 $G = NP$，其中 $N$ 是 $G$ 的非阿贝尔非单极小正规子群，$\mathbf{C}_G(N) = 1$，$G/N$ 是循环的，且 $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$。设 $S \lhd N$ 是单群，并假设 $S$ 的 *Sylow*3 子群不是循环的，$H = \mathbf{N}_G(S)$，$C = \mathbf{C}_G(S)$，并令 $V \in \mathrm{Syl}_3(H/C)$。则以下结论成立。

(a) |不可约特征标集合$_{3',\,\sigma}(B_0(G))| \in \{6, 9\}$ 当且仅当 $H > SC$ 且 |不可约特征标集合$_{3',\,\sigma}(B_0(H/C))| \in \{6, 9\}$.(b) $|P\colon \Phi(P)| = 9$ 当且仅当 $H > SC$ 且 $|V\colon \Phi(V)| = 9$。

证明。仿照 [NRSV21，定理 3.4] 的证明。注意，[NRSV21，定理 3.4] 不需要关于 $S$ 的非循环 Sylow 子群的假设，因为非阿贝尔单群的 Sylow 2-子群不会是循环的。□

接下来，在假设第 5 节的结果成立的前提下，证明定理 A。本节余下部分中，令 $p = 3$。

**定理 4.2**。设 $G$ 为有限群，令 $B_0(G)$ 为 $G$ 的主 *3*-块，并令 $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$。假设 $k_{0,\,\sigma}(B_0(G)) \in \{6, 9\}$。那么 $|P\colon \Phi(P)| = 9$.

证明。我们对 $|G|$ 使用归纳法。由于根据 [Nav98，定理 9.9]，，$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)) = \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G/\mathbf{O}_{p'}(G)))$，我们可以假设 $\mathbf{O}_{p'}(G) = 1$。根据 [RSV20，定理 A]，我们还可以假设 $P$ 不是循环的。

步骤 *1*：我们可以假设 $P$ 在 $G$中不是正规子群。

若 $P \lhd G$，由于 $\mathbf{O}^{p'}(G) = 1$，我们有 $|\mathrm{Irr}(G/\Phi(P))| \in \{6, 9\}$（例如参见 [RSV20, 引理 2.2],）。现在，通过考察具有 6 或 9 个共轭类且含有正规 Sylow 3-子群的群的 Sylow 3-子群结构，即可得出结论（参见 [VLVL85]）（注意$|P/\Phi(P)| > p$，否则 $P$ 是循环的）。

令 $N$ 为 $G$ 的一个极小正规子群。

步骤 *2*：我们可以假设 $N$ 不是 $p$-初等阿贝尔群。
假设 $N$ 是 $p$-初等阿贝尔群。分以下几种情形。

(i) $k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 1$。在这种情形下，根据引理 2.10，$|G/N|$ 不被 $p$ 整除，因此 $P = N \lhd G$，由步骤 1 即可得证。(ii) $k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = k_{0,\sigma}(B_0(G))$。在这种情形下，对于所有 $\chi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))$，都有 $N \subseteq \ker(\chi)$。根据引理 2.6，$N \subseteq \Phi(P)$。由归纳法，$|P : \Phi(P)| = |P/N : \Phi(P)/N| = 9$，于是结论成立。(iii) $k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 6$。由前一种情形，$k_{0,\sigma}(B_0(G)) = 9$。在这种情形下，由归纳法可得 $|P/N : \Phi(P)N/N| = 9$，因此只需证明 $N \subseteq \Phi(P)$。反设不然，取 $\lambda \in \mathrm{Irr}(P/\Phi(P))$，并假设 $1_N \neq \theta = \lambda_N \in \mathrm{Irr}(N)$（这里我们利用了 $N \not\subseteq \Phi(P)$）。现在，$\theta$ 可延拓为 $\lambda \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(P)$，于是可以应用引理 ˆ 2.5，进而 $\theta$ 可延拓为 $\theta \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G_\theta))$。根据命题 2.8 和假设，我们 ˆ 有 $k_{0,\sigma}(B_0(G_\theta)|\theta) = 3$。由于 $\theta$ 是 $\sigma$-不变的，根据 Gallagher 定理和 [Riz18，引理 2.4]，$k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) \leq k_{0,\sigma}(B_0(G_\theta)|\theta) = 3 < 6 = k_{0,\sigma}(B_0(G/N))$，矛盾。(iv) $k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 3$。在这种情形下，根据 [RSV20], 的主要结果，$G/N$ 具有循环 Sylow 3-子群，因此由定理 3.3 可得 $k_{0,\sigma}(B_0(G)) = k_{0,\sigma}(B_0(\mathrm{N}_G(P))$，由步骤 1 即可得证。

因此，我们可以假设 $N = S_1 \times \cdots \times S_t$，其中 $S_i$ 是阶被 $p$ 整除的非阿贝尔单群。

步骤 *3*：若 $k_{0,\ \sigma}(B_0(G/N)) = 1$，则结论成立。
在此情形下，$G/N$ 不能被 $p$ 整除，因此 $P \subseteq N$。由于 $\mathrm{O}^{p'}(G) = 1$，我们也有 $\mathrm{C}_G(N) = 1$。若 $t = 1$，则应用 [Ket25] 的主要结果即可得出结论。因此，我们可以假设 $t > 1$。由 Frattini 论证可知，$G = N\mathrm{N}_G(P)$，故 $M = N\mathrm{C}_G(P)$ 是 $G$ 的正规子群。于是 $\mathrm{Irr}(G/M) \subseteq \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))$（见 [GRSV25，引理 2.1]）。接着，由定理 5.1 可知，$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(N))$ 中至少有 5 个特征标次数，因此由定理 2.3，$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(M))$ 中也至少有 5 个特征标次数。对每个 $\psi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(M))$，在其上方至少有一个 $\chi \in \mathrm{Irr}_{p',\sigma}(B_0(G))$，因此 $\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(M))$ 的特征标次数集合 $\setminus \{1_M\}$ 的大小至多为 $9 - k(G/M)$。结合 $|G/M|$ 不能被 3 整除这一事实，可得 $k(G/M) \in \{1, 2, 4, 5\}$。现在，我们可以仿照 [GRSV25，定理 6.3], 步骤 2 中的情形 (2.a.i)–(2.a.iv)，并在 loc. cit. 中用定理 5.2(iii) 替代定理 3.1(c)，从而完成证明：

(i) 情形 $k(G/M) = 1$。在此情形下，$G = M$，由定理 2.3 可得

$$k_{0,\sigma}(B_0(S))^t = k_{0,\sigma}(B_0(N)) = k_{0,\sigma}(B_0(M)) = 9.$$

这迫使 $t = 2$ 和 $k_{0,\ \sigma}(B_0(S)) = 3$。根据 [RSV20，定理 A], ，这意味着 $S$ 具有循环 Sylow 子群，因此 $P \subseteq N \cong S \times S$ 是二生成的，正如所需。

(ii) 情形 $k(G/M) = 2$。在此情形下，仿照 [GRSV25，定理 6.3], 中的 (2.a.ii) 进行论证，我们再次得到 $k_{0,\ \sigma}(B_0(S)) = 3$ 和 $t = 2$。我们指出，需要应用 [NT21，引理 4.2] ，以证明存在一个高度零的 $\sigma$-不变 $\chi \in$不可约特征标集合 $\mathrm{Irr}(B_0(G))$，它位于 $\mathrm{Irr}_{0,\ \sigma}(B_0(M))$ 中每个特征标之上。

(iii) 情形 $k(G/M) \in \{4, 5\}$。仿照 [GRSV25 定理 6.3] 中的情形 (2.a.iii) 和 (2.a.iv) 进行论证（并再次应用 [NT21 引理 4.2]），我们得到：要么 $t = 2$ 且 $k_{0,\ \sigma}(B_0(S)) = 3$（于是可如上所述得出结论），要么 $t = 2$ 且 $k_{0,\ \sigma}(B_0(S)) = 6$。在这种情形下，$S$ 不是循环的（根据 [RSV20], 的主要结果），因此 $9 \mid |S|$。我们使用定理 5.2(iii)，如情形 (2.a.iii) 和 (2.a.iv) 中那样得出结论。

步骤*4*：若 $k_{0,\ \sigma}(B_0(G/N)) = k_{0,\ \sigma}(B_0(G))$，则结论成立。

在这种情形下，Irr0,σ(B0(G)) 中的每个特征标都以 $N$ 为核。由于 $P$ 作用于 Irr0,σ(B0(N))（根据引理 2.10，该集合的大小可被 3 整除），且至少固定一个特征标，因此它至少固定 3 个特征标。令 $\eta \in$ Irr0,σ(B0(N)) 为非平凡且 $P$-不变的。根据 [Nav18，推论 6.2、6.4]，存在一个 $\psi \in$Irr0,σ($PN|\eta$) 延拓 $\eta$。于是，根据定理 2.3， $\psi$ 延拓为 $\psi \in$Irr0,σ($PN$C$_G$($P$)|$\eta$)，并且根据 [RSV20 引理 2.4]，$\psi^G$ 包含某个 $\chi \in$ Irr0,σ(B0(G))。由于 $\chi_N$ 包含 $\eta$，于是 $\chi \in$ Irr0,σ(B0(G)) − Irr0,σ(B0(G/N))，矛盾。

步骤*5*：若$k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 6$，则我们即告完成。

在此情形下，由步骤4，我们可以假设$k_{0,\sigma}(B_0(G)) = 9$。我们首先证明 $P$在 $N$的单直因子上传递地作用。假设不然，并设 $N = R\times T$，其中 $R$是 $\{S_1,\dots,S_t\}$的一个 $P$-轨道中诸元素的直积。由于 $p$整除 $|R|$ 与 $|T|$，我们知道 $p$整除$k_{0,\sigma}(B_0(R))$以及$k_{0,\sigma}(B_0(T))$，因此至少存在两个非平凡的 $P$-不变特征标$\theta_R,\xi_R \in$不可约特征标集合0,σ(B0(R))，以及两个非平凡的 $P$-不变特征标 $\theta_T,\xi_T \in$不可约特征标集合0,σ(B0(T))。现在，$1_N$、 $1_R\times\theta_T$与 $\theta_R\times\theta_T$是 $P\times\langle\sigma\rangle$-不变的，且不是 $G$-共轭的。但这是一个矛盾，因为不可约特征标集合0,σ(B0(G))中至少有6个位于 $1_N$ 之上的不可约特征，并且由命题 2.8，不可约特征标集合0,σ(B0(G))中至少有3个互异的特征标分别位于每个 $1_R\times\theta_T$与 $\theta_R\times\theta_T$之上。因此 $P$在 $\{S_1,\dots,S_t\}$上传递地作用

现在，由归纳法可知 $|PN:\Phi(P)N| = 9$。假设定理 5.1(i)(a) 对 $S$ 成立，并令 $\theta_1,\theta_2$ 如其中所述。由引理2.1(v)，令

$$\tilde{\theta_i} = \theta_i\times\cdots\times\theta_i \in \mathrm{Irr}_{p',\sigma}(B_0(N)),$$

因此 $\tilde{\theta_1}$和 $\tilde{\theta_2}$是不变的。注意，根据 Nav18，推论 6.2、6.4]，， $\tilde{\theta_1}$和 $\tilde{\theta_2}$可延拓为不可约特征标集合 Irr0,σ(B0($PN$))中的特征标，并且 $\tilde{\theta_1}$ 和 $\tilde{\theta_2}$ 不 $G$-共轭。由命题 2.8，这两个特征标各自上方在 Irr0,σ(B0(G)) 中至少有 3 个不可约特征标，矛盾。最后，假设定理 5.1(i)(b) 对 $S$ 成立，并令 $\theta \in$ Irr$_{p'}$(B0(S))为定理 5.1(i)(b) 的陈述所给出的特征标。令 $\theta \in$ Irr$_{p'}$(B0($N$)) 为$\tilde{\theta}$的若干个副本的乘积，使得 $\theta$ 是不变的。于是注意到 $G_{\tilde{\theta}}$ 在 $N$ 的单直因子上传递作用（因为 $P$ 如此）。由引理2.7，我们还知道 $\theta$ 可延拓为某个 $\phi \in$ Irr0,σ(B0($G_{\tilde{\theta}}$))。由于 $\phi$ 是不变的，根据 Gallagher 定理和[Riz18，引理 2.4]，，可得 $k_{0,\sigma}(B_0(G_{\tilde{\theta}})|\theta) \geq k_{0,\sigma}(B_0(G_{\tilde{\theta}}/N))$。根据 Clifford定理，$k_{0,\sigma}(B_0(G)|\theta) \geq k_{0,\sigma}(B_0(G_{\tilde{\theta}}/N))$。由于 $k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 6$，我们知道 $PN/N$不是循环的；于是两次应用 [RSV20，定理 A]，得到 $k_{0,\sigma}(B_0(G_{\tilde{\theta}}/N)) > 3$，这与 $k_{0,\sigma}(B_0(G)) - k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 3$矛盾。

因此我们有$k_{0,\sigma}(B_0(G/N)) = 3$，特别地，由 [RSV20，定理 A]， $G/N$ 具有循环 Sylow 3-子群。回顾 $N = S_1\times\cdots\times S_t$，其中$S_i \cong S$是阶可被 $p$整除的非阿贝尔单群。

步骤 *6*： $N$ 是 $G$ 与 $t \geq 2$的唯一极小正规子群。

若 $M$ 是另一个极小正规子群，则由步骤 3、4 和 5，我们可以假设$k_{0,\sigma}(B_0(G/M)) = 3$. 由 [RSV20，定理 A]，我们有 $N \cong NM/M$ 与 $G/N$ 具有循环 Sylow 3-子群，于是 $P$ 是亚循环但不是循环的，因此它是二生成的，正如所需。若 $N$ 是单群，则 $G$ 是几乎单，并由定理 5.2 即得结论，因此我们假设 $t \geq 2$。

我们的下一个目标是证明 $PN$在集合 $\{S_1,\dots,S_t\}$上传递地作用。我们记 $N = M_1\times\cdots\times M_s$，其中每个 $M_i$是 $\{S_1,\dots,S_t\}$上单个 $P$-轨道的直积。

步骤 *7*：我们可以假设 $s \leq 2$。

由于 $M_i \lhd PN$，对每个 $M_i$我们可以找到一个非平凡的 $P$-不变 $\theta_i \in$不可约特征标集合$_{0,\sigma}$(B0($M_i$))，这用到引理 2.10。然后，由引理2.1(v)，我们可以得到 $s+1$ 个特征标

$$1_N, (\theta_1\times 1_{M_2}\times\cdots\times 1_{M_s}), (\theta_1\times\theta_2\times 1_{M_3}\times\cdots\times 1_{M_s}), \dots, (\theta_1\times\cdots\times\theta_s)$$

属于 Irr$_{0,\ \sigma}$(B0($N$))，且是 $P$-不变的，并且彼此不为 $G$-共轭。由于 $N$是完全的，根据 [Nav18，推论 6.2、6.4] 以及引理 2.1(iv)，所有这些特征标都可扩展为 Irr$_{0,\ \sigma}$(B0($PN$)) 中的特征标。命题 2.8 在上述每个特征标之上产生 3 个互不相同的 Irr$_{0,\ \sigma}$(B0(G)) 中的特征标，因此 $k_{0,\ \sigma}$(B0(G)) ≥3($s+1$)。若 $s > 2$，我们便得到矛盾。

步骤 8：我们可以假设 $s \neq 2$。

若 $s = 2$ 则 $N = M_1 \times M_2$ 和 $M_1$ 与 $M_2$ 是 $G$-共轭的，但不是 $P$-共轭的。假设˜定理5.1(i)(a)对 $S_i$ 成立，并令 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 为其中的特征标。根据引理2.1(v)，令 $\theta_i = \theta_i \times \cdots \times \theta_i \in \mathrm{Irr}(B_0(M_1))$。那么这些特征标

$$1_N, \tilde{\theta}_1 \times 1_{M_2}, \tilde{\theta}_2 \times 1_{M_2}$$

不是 $G$-共轭的。此外，它们也不同于特征标 $\eta \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(N))$˜ ˜，后者由 $\theta_1$的若干副本取直积构造而成。现在，所有特征标 $1_N$，$\theta_1 \times 1_{M_2}$，$\theta_1 \times 1_{M_2}$和 $\eta$ 都是 $P$-不变的，因此根据 [Nav18，推论 6.2、6.4] 以及引理 2.1(iv)，它们可扩张为 $\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(PN))$中的特征标。由命题 2.8 可得$k_{0,\sigma}(B_0(G)) \geq 12$，这显然矛盾。

因此，我们假设 $S_i$ 如定理5.1(i)(b)所述。记 $S = S_1$，并令 $\theta \in \mathrm{Irr}(S)$为该陈述中给出的 $S$的特征标。令 $\eta_i = \theta \times \theta \times \cdots \times \theta \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(M_i))$（使用引理2.1(v)）。我们断言，$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(N))$中每个 $P$-不变特征标都与$1_N$, $\eta_1 \times 1_{M_2}$和 $\eta_1 \times \eta_2$ $G$-共轭。事实上，若存在 $\xi \in \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(N))$，它不与其中任何一个 $G$-共轭，则根据 [Nav18，推论 6.2、6.4] 以及引理 2.1(iv)，$\xi$延拓为$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(PN))$中的特征标。由命题 2.8 可知$k_{0,\sigma}(B_0(G)) \geq 12$，这与假设矛盾，从而证明了该断言。此外，注意到$\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|1_N) = 3$。

令 $L = \mathbf{N}_G(M_1) = \mathbf{N}_G(M_2)$，并注意到 $|G : L| = 2$、$G_{\eta_1 \times 1_{M_2}} = L_{\eta_1 \times 1_{M_2}} = L_{\eta_1}$ 和$M_2 \subseteq L_{\eta_1}$。由于 $PN$ 传递地作用于 $M_1$ 和 $PN \subseteq L_{\eta_1}$中 $S$ 的副本上，根据引理2.7，我们有 $\eta_1$ 延拓为 $\hat{}\eta_1 \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(L_{\eta_1}))$。现在，由于 $M_2$ 是完全的 $(\hat{}\eta_1)_N = \eta_1 \times 1_{M_2}$。类似地，$1_{M_1} \times \eta_2$ 延拓为 $\hat{}\eta_2 \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(L_{\eta_2}))$。

我们断言 $\eta = \eta_1 \times \eta_2$ 延拓为不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(G_\eta))$中的一个特征标。若 $G_\eta L = G$，则 $G_\eta$ 传递地作用于集合 $\{S_1, \ldots, S_t\}$ 上，根据引理2.7即可得证。否则，$G_\eta \subseteq L$，因此 $G_\eta = L_{\eta_1} \cap L_{\eta_2}$。现在，由于 $PN \leq G_\eta$，$G_\eta$也传递地作用于 $M_1$和 $M_2$中所含的 $S$的副本上。重复先前的论证，$\eta_1 \times 1_{M_2}$和 $1_{M_1} \times \eta_2$ 分别延拓为$\mu_1$，$\mu_2 \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(G_\eta))$。现在，根据 [GRSS20，引理 2.3]，$\mu_1\mu_2 \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(G_\eta))$，并且

$$(\mu_1\mu_2)_N = (\eta_1 \times 1_{M_2})(1_{M_1} \times \eta_2) = \eta$$

这样便证明完毕。

因此，我们满足命题 3.5 的假设，故

$$k_{0,\sigma}(B_0(G)) = k_{0,\sigma}(B_0(N\mathbf{N}_G(P)))$$

因此，若 $N\mathbf{N}_G(P) \leq G$，由归纳法即可得证。否则 $PN \triangleleft G$。

令 $X = PN\mathbf{C}_G(P)$。则 $\mathrm{Irr}(G/X) \subseteq \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|1_N)$。由前面几段以及命题 2.8，可得 $k_{0,\sigma}(B_0(G)|\eta_1 \times 1_{M_2}) = 3 = k_{0,\sigma}(B_0(G)|\eta_1 \times \eta_2)$，这意味着$k_{0,\sigma}(B_0(G)|1_N) = 3$。现在 $p$ 不整除 $|G : X|$，故有 $|G : X| \leq 2$。由定理 2.3，$k_{0,\sigma}(B_0(X)) = k_{0,\sigma}(B_0(PN))$。若 $X = G$，由归纳法可设 $PN = G$，但此时 $N$是 $PN$的极小正规子群，且 $P$在 $\{S_1, \ldots, S_t\}$ 上传递地作用，因此结论成立。否则，$|G : X| = 2$，故 $\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(X)) \leq 15$。由定理 2.3 及 [NRSV21，引理 2.5]，可得

$$3|\operatorname{Irr}_{0,P,\sigma}(B_0(N))| = |\operatorname{Irr}_{0,\sigma}(B_0(PN))| = |\operatorname{Irr}_{0,\sigma}(X)| \leq 15.$$

由于 3 整除 $|\mathrm{Irr}_{0,P,\sigma}(B_0(N))|$，这就迫使 $|\mathrm{Irr}_{0,P,\sigma}(B_0(N))| = 3$，因此 $|\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(X)| = 9$，由归纳法即可得证。

最后一步。

我们得出 $s = 1$，因此 $PN$在集合 $\{S_1, \ldots, S_t\}$上传递地作用。回忆一下，$PN/N$是循环的。

先假设 $S_i$ 具有非循环的 Sylow $p$-子群。考虑 $M = \bigcap \mathbf{N}_G(S_i) \triangleleft G$，并注意到 $M \subseteq \mathbf{N}_G(S)$。由于 $p$ 整除 $|G : \mathbf{N}_G(S)|$，于是 $p$ 整除 $|G : M|$。根据定理 2.11，$G/N$ 要么是 $p$-可解的，要么 $|M/N|$ 不能被 $p$整除。

首先假设 $|M/N|$ 不能被 $p$ 整除。注意到，由于 $PN/N$ 是阿贝尔的，且 $PN$ 在 $\{S_1, \ldots, S_t\}$ 上传递地作用，因此对每个 $i$、$j$，有 $\mathbf{N}_{PN}(S_i) = \mathbf{N}_{PN}(S_j)$。于是 $N \subseteq \mathbf{N}_{PN}(S) \subseteq M$，从而 $N = \mathbf{N}_{PN}(S)$。现在，我们可以应用引理 2.2 和定理 5.1(iii)，在不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(N))$ 中得到三个并非 $G$-共轭的 $P$-不变特征标。现在，命题 2.8 给出不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(G))$ 中 9 个不在不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(G/N))$ 中的特征标，矛盾。

因此，我们可以假设 $G/N$ 是 $p$-可解的。定理 2.11 表明，存在满足 $|G:\ L| \in \{1,2\}$ 的 $L \leq G$，使得 $L/N$ 具有正规 $p$-补 $K/N$。若 $|G:\ L| = 2$，则 $k_{0,\sigma}(B_0(L)) \leq 16$，并且由于 $k_{0,\sigma}(B_0(L))$ 能被 3 整除，我们得到 $k_{0,\sigma}(B_0(L)) \in \{3,6,9,12,15\}$。注意到 $K = O^p(L)$，因此由 [NRSV21，引理 2.5],，我们得到 $k_{0,\sigma,P}(B_0(K)) \in \{1,2,3,4,5\}$。由于 3 整除 $|K|$，$k_{0,\sigma,P}(B_0(K)) \equiv k_{0,\sigma}(B_0(K)) \equiv 0 \bmod 3$，于是唯一的可能性是 $k_{0,\sigma,P}(B_0(K)) = 3$。但在这种情形下 $k_{0,\sigma}(B_0(L)) = 9$，从而由归纳法即可完成。

因此，我们可以假设 $G = L = KP$，其中 $K \lhd G$。现在由 [NRSV21，定理 2.8],，我们得到 $k_{0,\sigma}(B_0(G)) = k_{0,\sigma}(B_0(N\mathrm{N}_G(P))$，因此根据归纳法，我们可以假设 $PN \lhd G$。现在考虑 $X = PN\mathrm{C}_G(P)$，并注意到，不可约特征标集合$(G/X) \subseteq \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|1_N)$，由[GRSV25，引理 2.1]。由于 $p$ 整除 $|N|$，我们有 $k_{0,\sigma,P}(B_0(N)) \equiv k_{0,\sigma}(B_0(N)) \equiv 0$ 模$p$。由命题 2.8，我们得到 $|\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G)|1_N)| = 3$。由于 $|G:\ X|$ 不能被 3 整除，我们得到 $|G:\ X| \in \{1,2\}$。如果 $|G:\ X| = 2$，那么

$$p \cdot k_{0,\sigma,P}(B_0(N)) = k_{0,\sigma}(B_0(PN)) = k_{0,\sigma}(B_0(X)) \leq 15,$$

其中，第一次等式用到了 [NRSV21，引理 2.5]；第二次等式用到了定理 2.3。这迫使 $|\mathrm{Irr}_{0,\ P,\ \sigma}(B_0(N))| = 3$，进而得到 $k_{0,\ \sigma}(B_0(PN)) = 9$。由归纳法，我们可以假设 $PN = G$。若 $G = X$，根据定理 2.3，我们可以同样假设 $PN = G$，结论便由定理 4.1 及 [Ket25] 的主要结果得出。

剩下的情形是，$S_i$ 的西洛 $p$-子群均为循环的。设 $C_1 \in \mathrm{Syl}_p(S_1)$。令 $C_i = C_1^{y^i} \in \mathrm{Syl}_p(S_1^{y^i})$，$Q = C_1 \times \cdots \times C_t \in \mathrm{Syl}_3(N)$，其中每个 $C_i \in \mathrm{Syl}_3(S_i)$，且 $Q \subseteq P$，其中 $P/Q = \langle yQ \rangle$ 为循环的。于是 $\langle yQ \rangle$ 传递地置换 $\{C_1, \ldots, C_t\}$；又因为对所有 $i$，$C_i$ 都是 $Q$ 的正规子群，所以我们得出 $\langle y \rangle$ 传递地置换 $\{C_1, \ldots, C_t\}$。这意味着存在 $x_1$，……，$x_t$，分别是 $C_1$，……，$C_t$ 的生成元，使得 $\langle y \rangle$ 传递地置换集合 $\{x_1, \ldots, x_t\}$。记 $z_i = (1,\ \ldots\ldots,\ 1,\ x_i,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)$。注意到 $Q = \langle z_1,\ \ldots\ldots,\ z_t \rangle$。我们断言 $P = \langle y,\ z_1 \rangle$。由于 $\langle y \rangle$ 在 $\{x_1, \ldots, x_t\}$ 上传递作用，因此也在 $\{z_1, \ldots, z_t\}$ 上传递作用。由此可知，每个 $z_j \in \langle y$ 都有 $z_1 \rangle$，所以 $Q \subseteq \langle y,\ z_1 \rangle$，且 $P = \langle y,\ Q \rangle \subseteq \langle y,\ z_1 \rangle$。由于 $P$ 不是循环群，它是二生成的，证毕。□

## 5. Simple groups

T本节的目标是证明 [GRSV25定理3.1]的如下“$\sigma$版本”。

**定理 5.1.** 设 $S$ 是阶可被3整除的非阿贝尔单群，并设 $X \in \mathrm{Syl}_3(\mathrm{Aut}(S))$。

*(i)* 下列情形之一成立。*(a)* 存在 $1_S \neq \theta_1$、$\theta_2 \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(S))$，它们在 $\mathrm{Aut}(S)$中非共轭，且在$X$下不变；或者*(b)* 存在一个 $X$-不变的 $1_S \neq \theta \in$不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(S))$，它对所有 $S \leq T \leq \mathrm{Aut}(S)_\theta$都延拓为 $B_0(T)$中的某个 $\sigma$-不变特征标。*(ii)* 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(S))$中特征标的次数集合的大小至少为3。*(iii)* 若 $S$ 具有非循环 Sylow 3-子群，则存在 $1_S \neq \theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3 \in$ 不可约特征标集合$_{0,\sigma}(B_0(S))$，它们在$\mathrm{Aut}(S)$中非共轭。

我们指出，定理 5.1 的 (iii) 部分已见于 [RSV20, 定理 C(b)]。除定理 5.1 外，我们还需要 [Ket25], 的主要结果，现重述如下：

**定理 5.2** (E. Ketchum)。设 $A$ 是一个几乎单群，且 $P \in \mathrm{Syl}_3(A)$。那么$k_{0,\ \sigma}(B_0(A)) \in \{6,9\}$ 当且仅当 $|P:\ \Phi(P)| = 9$。

**5.1. 前人结果。** 我们首先记录一些对证明定理 5.1 有用的前人结果。

**引理 5.3.** 设 $N \lhd G$ 且 $3 \nmid [G:\ N]$。

- 若 $\theta \in$不可约特征标集合$(N)$且 $\chi \in$不可约特征标集合$(G \mid N)$，则 $\chi$ 是 $\sigma$-不变的当且仅当 $\theta$ 是 $\sigma$-不变的。
- 若 $\theta \in$ 不可约特征标集合$_\sigma(B_0(N))$，则存在某个 $\chi \in$ 不可约特征标集合$_\sigma(B_0(G)|\theta)$。

证明。这摘自 [MMSV26，引理 3.5，推论 3.6]。 □

假设 $S = G/\mathbf{Z}(G)$ 是一个李型单群，其中 $G = \mathbf{G}^F$，且 $\mathbf{G}$ 是定义在特征为 $q_0$ 的域上的单连通代数群，并且 $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 是一个 Steinberg 端同态。设 $(\mathbf{G}^*, F)$ 与 $(\mathbf{G}\ F)$ 对偶，并记 $G^* := (\mathbf{G}^*)^F$。

**引理 5.4.** 设 $S$ 如上，且满足 $q_0 = p \geq 3$。那么每个 $\chi \in$ 不可约特征标集合$(S)$ 都是 $\sigma$-不变的。

证明。这由 [TZ04，定理 1.3 和命题 10.12] 得出。 □

**引理 5.5.** 设 $S$ 如上，且满足 $q_0 \neq p$ 和 $p \geq 3$。那么 $S$的任意幺正特征标都是 $\sigma$-不变的。

证明。这是 [MMSV26，引理 4.7]。 □

**引理 5.6.** 设 $S$ 和 $G$ 如上，且 $q_0 \neq p$ 和 $p$ 对 $G$是良好的。设 $s \in G^*$ 的阶为 $p$，且 $p \nmid |\mathbf{Z}(G)|$。那么半单特征标 $\chi_s$ 降阶为不可约特征标集合$\sigma(B_0(S))$中的一个特征标。

证明。这与 [MMSV26 引理 4.6] 和 [HS23 定理 5.1]，完全相同，后者使用了 [His90 推论 3.4] 和 [CE04 定理 21.13]。注意，由于 $s \in [G^*, G^*]$ （见 [NT13 引理 4.4]），$\chi_s$ 在 $\mathbf{Z}(G)$ 上平凡；并且根据 [MT11 例 20.16]，$\mathbf{C}_{\mathbf{G}^*}(s)$ 是连通的。□

5.2. **定理 5.1 的证明。**

**引理 5.7。** 当 $S$ 是交错群或散在群、定义在特征 3 上的李型群，或 ${}^2\mathrm{F}_4(2)'$ 时，定理 *5.1* 成立。此外，除非 $S \in \{\mathrm{PSL}_2(3^a), \mathrm{PSL}_3^\epsilon(3^a)\}$，*(i)(a)* 均成立。

证明。令 $S$ 如陈述所述。若 $S = J_3$，由[GAP24], 中的计算可知陈述成立，并且此时 (i)(a) 成立。因此，我们现在假设 $S \neq J_3$。

引理 5.4 和 [MMSV26, 引理 4.1] 表明，在后者的条件 (a1) 成立时，定理 5.1 等价于这些情形下的 [GRSV25, 定理 3.1]。因此，根据 [GRSV25, 注 3.2], ，我们只需考虑形如 $\mathrm{PSL}_2(3^a)$ 和 $\mathrm{PSL}_3^\epsilon(3^a)$ 的群。此外，我们只需验证定理 5.1 的条件 (i)(b) 在这些情形下成立。

令 $S = \mathrm{PSL}_2(3^a)$ 或 $S = \mathrm{PSL}_3^\epsilon(3^a)$。由 [GRSV25, 定理 3.1 和注 3.2]，可得某个 $1 \neq \theta \in \mathrm{Irr}_0(B_0(S))$，它是 $X$-不变的，并且对每个 $S \leq T \leq \mathrm{Aut}(S)_\theta$，都有 $\theta$ 延拓为 $B_0(T)$ 中的某个特征标（在这两种情形下，$\mathrm{Aut}(S)_\theta/S$ 均为阿贝尔群，因此事实上，$\mathrm{Aut}(S)_\theta$ 中所有位于 $\theta$ 之上的特征标都是延拓）。此外，由引理 5.4 可知，$\theta$ 是 $\sigma$-不变的。令 $S \leq T \leq \mathrm{Aut}(S)_\theta$。在这两种情形下，我们注意到 $T/S$ 有一个正规 Sylow 3-子群。令 $M$ 为该 Sylow 3-子群在自然投影 $\pi\colon T \to T/S$ 下的原像。由于 $S$ 是完全群，行列式阶 $o(\theta)$ 满足 $o(\theta) = 1$，因此我们可以利用 [Nav18, 推论 6.4]，得到 $\theta$ 在 $M$主块中的一个 $\sigma$-不变延拓。（回顾一下，由于 $M/S$ 的阶为 3 的幂，根据引理 2.1，$B_0(M)$ 是位于 $B_0(S)$之上的唯一块。）然后，引理 5.3 给出 $T$主块中的一个 $\sigma$-不变延拓。□

**引理 5.8. </style}定理 5.1 对于 这一在特征 下定义的李型群成立，且除非 $\mathbf{PSL}_2(q)$ 或 $3|(q+\epsilon)$，**以及 $S = \mathrm{PSL}_3^\epsilon(q)$，条件 *(i)(a)* 均成立。

证明. </style}设 $S$ 是一个在特征 $p \neq 3$ 下定义的李型单群。

首先考虑 (i)。假设 $S = \mathrm{PSL}_2(q)$，或者 $3|(q+\epsilon)$ 且 $S = \mathrm{PSL}_3^\epsilon(q)$。接下来我们断言，$\hat{}\hat{}$ ~ ~(*b*) 成立。取 $\theta = \theta_S$，其中 $\theta$ 是 $S$中的 Steinberg 特征标；在相应的两种情形下，$S$ 分别是 $\mathrm{PGL}_2(q)$ 和 $\mathrm{PGL}_3^\epsilon(q)$。由 [Mal08，定理 2.5] 可知，$\theta$ 是 $\mathrm{Aut}(S)$-不变的，并且由 [Mal08，定理 2.4] 可知它可延拓 $\hat{}\tilde{}$至 $\mathrm{Aut}(S)$。仿照 [RSV20，命题 3.9] 证明的第二、第三段中的论证，我们得到 $\theta \in \mathrm{Irr}_\sigma(B_0(S))$。令 $S \leq T \leq \mathrm{Aut}(S)_\theta = \mathrm{Aut}(S)$。显然，$\hat{}\tilde{}\,\theta$可延拓至 $\theta_{T\cap\tilde{S}} \in \mathrm{Irr}(B_0(T \cap S))$。由于 Steinberg 特征标取有理值，$\hat{}\tilde{}\,\theta_{T\cap\tilde{S}}$也取有理值。$T/(T \cap S)$ 是一个阿贝尔群，因此有正规 Sylow 3-子群。令 $M$为该 Sylow 3-子群在映射 $\pi\colon T \to T/(T \cap S)$ 下的原像。~根据引理 2.1，$B_0(M)$ 是位于 $B_0(T\cap S)$ 之上的唯一块；再利用 [Nav18，推论 6.6(a)]，可得到 $\theta_{T\cap\tilde{S}}$在 $\mathrm{Irr}(B_0(M))$ 中的一个有理延拓 $\chi$。最后，利用引理 5.3，我们得到一个特征标 $\hat{}\ \psi$，属于 $\mathrm{Irr}_\sigma(B_0(T)|\chi)$。由于 $\psi$位于 $\theta_{T\cap\tilde{S}}$之上，且 $T/(T \cap S)$ 是阿贝尔群，因此可知 $\hat{}\psi$必定是 $\theta_{T\cap\tilde{S}}$（因而也是 $\theta$）的延拓，证毕。

现在假设 $S$ 不是上文讨论的群之一。由 [GRSV25，命题 5.8] 可得 3 个 Aut($S$)-不变的幺正特征标。此外，根据引理 5.5，这些特征标必定是 $\sigma$-不变的。因此，(i)(a) 对 $S$成立。

接下来证明(ii)。注意，3不整除 ${}^2\mathrm{B}_2(q)$的阶，因此我们可以假设$S \neq {}^2\mathrm{B}_2(q)$。若 $S \neq \mathrm{PSL}_2(q)$且 $S \neq \mathrm{PSL}_3^\epsilon(q)$，其中 $3 \mid (q+\epsilon)$，那么由 [GRSV25, 命题 5.8] 可知，主块中有3个次数各异的幺正特征标，并且根据引理 5.5，这些特征标都被 $\sigma$固定。

因此，现在假设 $S = \mathrm{PSL}_2(q)$，或者 $3 \mid (q+\epsilon)$且 $S = \mathrm{PSL}_3^\epsilon(q)$。在这些情形下，分别令 $\tilde{G} = \mathrm{SL}_2(q)$和 $\tilde{G} = \mathrm{SL}_3^\epsilon(q)$。此外，分别令 $G = \mathrm{GL}_2(q)$、 $G = \mathrm{GL}_3^\epsilon(q)$以及 $G^* = \mathrm{PGL}_2(q)$、$\mathrm{PGL}_3^\epsilon(q)$。令 $s \in G^*$ 为一个半单元，其在典范投影映射 $\pi\colon \tilde{G} \to G^*$ 下的原像具有非平凡特征值（$\zeta_3, \zeta_3^2$），其中 $\zeta_3$是本原三次单位根。考虑半单特征标 $\chi_s \in \mathcal{E}(G, s)$。引理 5.6表明，$\chi_s$ 降阶后得到不可约特征标集合 $\mathrm{Irr}_\sigma(B_0(S))$ 中的一个特征标。此外，根据半单特征标的次数$\sim$性质，该特征标是高度零的；通过在 $G$中显式计算中心化子即可看出这一点。随后，将 $\chi_s$ 的降阶与 [GRSV25, 命题 5.8]给出的两个幺正特征标结合起来，便得到 $B_0(S)$中三个 $\sigma$固定且次数各异的特征标，所求即得。□

由引理 5.7 和 5.8 可得定理 5.1；注意，(iii) 是 [RSV20，定理 C(b)]。

5.3. **相关结果**。 最后，我们提出一些观察，以说明定理 A 对任意块的类比结论可能成立。首先，我们得到定义在特征 3 上、且其环境代数群具有连通中心的李型群的相应结论。

**推论 5.9**。 设 $G = \mathbf{G}^F$ 是一个李型群，其中$\mathbf{G}$ 是定义在 $\mathbb{F}_3$ 上的连通约化群，且$\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ 连通。设 $B$ 是 $G$ 的一个 3- 块，其缺陷群为 $D$。那么 $[D\colon \Phi(D)] = 9$ 当且仅当 $|$ 不可约特征标集合 $_0(B)| \in \{6, 9\}$。

证明。 根据 Dagger 和 Humphreys 的一个结果，唯一具有正缺陷的块是极大缺陷块，这些块由$\mathbf{Z}(G)$ 的特征标编号（见 [Hum71]）。首先假设$\mathbf{G}$没有 $\mathrm{G}_2$ 型分量。那么，任何具有正缺陷的块 $B$ 都满足 $\mathrm{Irr}_0(B) = \mathrm{Irr}_{3'}(B)$ 由 $B$ 中的半单特征标构成；这是利用 Jordan 分解的次数性质，以及由 [Mal07，定理 6.8] 得知非平凡幺正特征标的次数可被 3 整除。

由于 Z(G) 连通，且 $G^*$ 的半单元阶与 3 互素，并且 $\sigma$ 固定 $3'$ 阶单位根，因此利用 [SV20] 的主要结果，我们有 $\mathrm{Irr}_0(B) = \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B)$ 。设$|\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B)| \in \{6, 9\}$，并令 $B$ 为由特征标 $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Z}(G))$ 标记的块。现在，$\mathrm{Irr}(B)$ 中半单特征标的数目，等于 $\mathcal{E}(G, s)$ 中位于 $\theta$ 之上的特征标所对应的半单元的 $G^*$-共轭类数目。但正如 [ST23，命题 2.7(iii)]（另见 [NT13，引理 4.4], [MNST24，命题 3.7] 的证明）所述，这等于 $G^*/\mathrm{O}^{3'}(G^*)$ 中对应陪集里的半单共轭类数目。现在，对于每个半单 $s \in G^*$，都存在某个 $T^* := (\mathrm{T}^*)^F$ 包含 $s$，其中 $\mathrm{T}^* \leq \mathrm{G}^*$ 是某个 $F$-稳定的极大环面。根据[GM20，注 1.5.13(b, c)]， $T^*$ 给出 $G^*/\mathrm{O}^{3'}(G^*)$ 的所有陪集。因此，由 [FG12，推论 2.4],可知，每个这样的陪集都包含相同数目的半单共轭类。这意味着$|\mathrm{Irr}_0(B)| = |\mathrm{Irr}_0(B_0(G))|$。回想起 $\mathrm{Irr}_0(B_0(G)) = \mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))$ 与前述相同，因此我们有 $|\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(G))| \in \{6, 9\}$。于是，由定理 A 可得 $[P\colon \Phi(P)] = 9$。

最后，假设$\mathbf{G}$ 的分支类型为 $\mathrm{G}_2$。根据 [Mal07, 定理 6.8], , 群 $\mathrm{G}_2(q)$（其中 $q$ 是 3 的幂）在不可约特征标集合 $\mathrm{Irr}_{3'}(\mathrm{G}_2(q))$ 中有 7 个幺正特征标。利用 [Gec03, 表 1 和命题 5.5], $\mathrm{G}_2(q)$ 的幺正特征标全都具有 $\sigma$-稳定性。注意，这 7 个幺正特征标因此属于 $\mathrm{Irr}_{0,\sigma}(B_0(\mathrm{G}_2(q)))$，因为$\mathbf{Z}(\mathrm{G}_2)$ 是连通的，所以由第一段可知只有一个正缺陷块。因此，如果$\mathbf{G}$ 是单群，该结论显然成立。

因此，假设$\mathbf{G}$不是单群。由于我们假设$\mathbf{Z}(\mathbf{G})$是连通的，由[GM20, 引理 1.7.7] 可知，对于任意 $F$-稳定的极大环面$\mathbf{T}$，都有$\mathbf{G}^F = [\mathbf{G}, \mathbf{G}]^F \mathbf{T}^F$。于是， $G$ 是 $[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F$ 与一个阶与 3 互素的阿贝尔群$\mathbf{T}^F$ 的直积的商，因此不失一般性，可用$\mathbf{G}$ 替换为 $[\mathbf{G},\mathbf{G}]$, , 从而可以假设$\mathbf{G}$ 是半单的。

（事实上，回想一下，$\sigma$ 会固定不可约特征标集合 $\mathrm{Irr}(\mathbf{T}^F)$中的每个特征标，而它们各自都属于一个块。）于是，对于某些两两可交换的单约化群$\mathbf{G}_i$，有$\mathbf{G} = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{G}_i$。不妨设$\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_k$是类型 $\mathrm{G}_2$的分支，并将它们的乘积记为$\mathbf{H}$。由于每个$\mathbf{G}_i$（$1 \le i \le k$）的中心都是平凡的（因为类型 $\mathrm{G}_2$的唯一单群是伴随群），可知$\mathbf{H}$是直积，且$\mathbf{G} = \mathbf{H} \times \mathbf{H}'$，其中$\mathbf{H}'$是非类型 $\mathrm{G}_2$单分量的乘积。特别地，由 [GM20, 推论 1.5.16]可知，$G$ 有一个形如 $\mathrm{G}_2(q)$ 的直因子，其中 $q$ 是 3 的某个幂，结论由上一段得出。□

下一个观察由定理 A 以及如下事实得出：一般酉群与线性群的块与某些主块的表现类似。

**推论5.10.** 设 $G = \mathrm{GL}_n^{\epsilon}(q)$，并设 $B$ 为 $G$ 的一个3-块，缺陷群为 $D$。则$[D : \Phi(D)] = 9$，若 $|\text{不可约特征标集合}_0(\sigma(B))| \in \{6, 9\}$。

证明。若 $q$ 是 3 的幂，则此结论来自推论 5.9。因此现在假设 $q$ 是某个素数 $p \neq 3$的幂。设 $B$ 为某个半单 $3'$-元素 $s \in G^*$所对应的 $\mathcal{E}(G, s)$ 中的一个块。现在，由[FS82，定理 (7A)]，Jordan 分解给出不可约特征标集合$_0(B)$ 与不可约特征标集合$_0(b)$ 之间的一个双射，其中$b$ 是 $C$ 的某个幂幺块：$= \mathbf{C}_{\tilde{G}^*}(s)$。此处 $B$ 与 $b$ 共享一个缺陷群 $D$。由 [SV20]，该双射进一步是 $\sigma$-等变的。

现在，令$\mathsf{t}$ $e$ 为 $\epsilon q$ 模 3 的阶，因此 $e \in \{1, 2\}$。若 $e = 1$，那么实际上唯一的幂幺块 $C$ 是主块，因此结论现在由定理 A 得出。

因此，假设 $e = 2$。根据 $s$的不变因子，我们可以将 $C := \prod C_i$ 写成若干低秩一般线性群或酉群 $C_i$的乘积。设 $C_i :=\mathrm{GL}^{m_i}(\eta_i q_i)$，其中 $q_i$ 是 $q$的某个幂，$\eta_i \in \{\pm 1\}$，且 $m_i$ 为正整数。令 $e_i$ 为 $\eta_i q_i$ 模 3 的阶。于是，[MO83] 的结果表明，$D$ 同构于某个正整数 $w_i$ 对应的 $C' := \prod \mathrm{GL}^{e_i w_i}(\eta_i q_i)$ 的 Sylow 3- 子群；此外，$\mathrm{Irr}_0(b)$ 与 $\mathrm{Irr}_0(B_0(C'))$ 之间存在双射。该双射还具有 $\sigma$-等变性，这可由 [MO83, P.209-210]中的构造看出；并且利用 [SV20] 可知，$\sigma$ 在 $\mathcal{E}(C_i, t)$ 中的特征标上的作用仅取决于 $s_i$ 和 $t$，而它们与 $C_i'$中相应嵌入具有相同的特征值。因此，结论再次由定理 A 得出。□

## References

[Alp76] J. L. Alperin. 同构块。 *J. Algebra*, 43(2):694–698, 1976. [BP80] M. Brou´e 和 L. Puig. 块的 Frobenius 定理。 *Invent. Math.*, 56(2):117–128, 1980. [Bra68] R. Brauer. 有限群中的块与截面。II. *Amer. J. Math.*, 90:895–925, 1968. [Bra76] R. Brauer. 关于具有循环 Sylow 子群的有限群。I. *J. Algebra*, 40(2):556–584, 1976. [CE04] M. Cabanes 和 M. Enguehard. *Representation theory of finite reductive groups* 1 *New*, volume of *Mathematical Monographs* 2004 剑桥大学出版社，剑桥，. [Dad77] E. C. Dade. 关于同构块的评注。 *J. Algebra*, 45(1):254–258, 1977. [FS82] P. Fong 和 B. Srinivasan. 有限一般线性群和酉群的块。 *Invent. Math.*, 69 1 109 153, 1982 ( ): – . [FG12] J. Fulman 和 R. Guralnick. 有限 Chevalley 群中共轭类的数量与大小的界及其在错排问题上的应用。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(6):3023–3070, 2012. [GAP24] GAP 团队。 *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0*, 2024. [Gec03] M. Geck. 特征标值、Schur 指标与特征层。 *Represent. Theory*, 7:19–55, 2003 年 2 月。[GM20] M. Geck 和 G. Malle. *The character theory of finite groups of Lie type* 187 *Cambridge*, volume of *Studies in Advanced Mathematics* 2020 剑桥大学出版社，剑桥，. 导览。[Gia25] E. Giannelli. McKay 双射与特征标次数。 *arXiv:2507.01730*, 2025. [GRSS20] E. Giannelli、N. Rizo、B. Sambale 和 A. A. Schaeffer Fry. 主块中具有较少 $p'$特征标次数的群。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(11):4597–4614, 2020. [GRSV25] E. Giannelli、N. Rizo、A. A. Schaeffer Fry 和 C. Vallejo. 特征标与 Sylow 子群的阿贝尔化。 *J. Algebra*, 667:824–864, 2025. [GI83] D. Gluck 和 I. M. Isaacs. 广义特征标与置换特征标的张量诱导。*Illinois J. Math.*, 27(3):514–518, 1983. [Her70] M. Herzog. 关于 E. Artin 的一个问题。 *J. Algebra*, 15:408–416, 1970. [His90] G. Hiss. 有限约化群的正则块与半单块。 *J. London Math. Soc. (2)*, 41 1 63 68, 1990 ( ): – . [Hum71] J. E. Humphreys. 李型有限群的缺陷群。 *Math. Z.*, 119:149–152, 1971.

[HS23] N. N. Hung 和 A. A. Schaeffer Fry. 关于主块的 H´ethelyi-K¨ulshammer 猜想。*Algebra Number Theory*, 17(6):1127–1151, 2023. [IN02] I. M. Isaacs 和 G. Navarro. 任意有限群的 McKay 猜想的新改进。 *Ann. of Math. (2)*, 156(1):333–344, 2002. [Ket25] E. Ketchum. 几乎单群的特征标与 Sylow 3-子群的生成。 *arXiv:2509.02854*, 2025.[LMNT25] R. Lyons、J. M. Mart´ınez、G. Navarro 和 P. H. Tiep. 主块、不可约限制、域与次数。 *arXiv:2507.22503*, 2025. [Mal07] G. Malle. 李型有限群的零高度特征标。 *Represent. Theory*, 11:192–220, 2007. [Mal08] G. Malle. 幺幂特征标的扩张与归纳 McKay 条件。 *J. Algebra*, 320 7 2963 2980, 2008 ( ): – . [MNST24] G. Malle、G. Navarro、A. A. Schaeffer Fry 和 P. H. Tiep. Brauer 高度零猜想。

*Ann. of* , ( ): – . [MT *Math. (2)* 200 2 557 608, 2024

11] G. Malle 和 D. Testerman. *Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type*. 剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，2011. [MMSV26] A. Mar´oti、J. M. Mart´ınez、A. A. Schaeffer Fry 和 C. Vallejo. 主块中几乎 $p$有理特征标。 *Publ. Mat.*, 70(1):55–78, 2026. [MO83] G. O. Michler 和 J. B. Olsson. 有限一般线性群、酉群与对称群中的特征标对应。 *Math. Z.*, 184(2):203–233, 1983. [MS23] A. Moret´o 和 B. Sambale. 具有二生成 Sylow 子群的群及其特征标表。*Pacific J. Math.*, 323(2):337–358, 2023. [Mur98] M. Murai. 商群的块与特征标高度。 *Osaka J. Math.*, 35(4):835–854, 1998. [Nav98] G. Navarro.

*Characters and blocks of finite groups* 250 *London Mathematical Society* , volume of . *Lecture Note Series* 1998
剑桥大学出版社，剑桥，. [Nav04] G. Navarro. McKay 猜想与伽罗瓦自同构。 *Ann. of Math. (2)*, 160(3):1129–1140, 2004. [Nav18] G. Navarro.

*Character theory and the McKay conjecture* 175 *Cambridge Studies in Ad-* , volume of . *vanced Mathematics* 2018
剑桥大学出版社，剑桥，. [NRSV21] G. Navarro 、 N. Rizo 、 A. A. Schaeffer Fry 和 C. Vallejo. 特征标与西洛 2-子群的生成。 *Represent. Theory*, 25:142–165, 2021. [NT13] G. Navarro 和 P. H. Tiep. 正规子群上相对 $p'$ *Ann. of Math.* 次数的特征标。 *(2)* 178 3 1135 1171, 2013
, ( ): – . [NT16] G. Navarro 和 P. H. Tiep. 实群与西洛 2- 子群。 *Adv. Math.*, 299:331–360, 2016. [NT19] G. Navarro 和 P. H. Tiep. Sylow 子群、指数与特征标值。

*Trans. Amer. Math.* , ( ): – . [NT *Soc.* 372 6 4263 4291, 2019
21] G. Navarro 和 P. H. Tiep. 特征标次数不被

$p$ *Forum* 整除的特征 *Math. Pi* 9 2, 28, 2021
标的值域。 , :Paper No. e . [Riz18] N. Rizo. 相对于正规子群特征标的 $p$-块。 *J. Algebra*, 514:254–272, 2018. [RSV20] N. Rizo、A. A. Schaeffer Fry 和 C. Vallejo. 主块上的伽罗瓦作用与循环 Sylow 子群。 *Algebra Number Theory*, 14(7):1953–1979, 2020. [RS25] L. Ruhstorfer 和 A. A. Schaeffer Fry. Isaacs–Navarro 伽罗瓦猜想。 *arXiv:2509.02300*, 2025.[ST23] A. A. Schaeffer Fry 和 J. Taylor. 伽罗瓦自同构与经典群。 *Transform. Groups*, 28 1 439 486, 2023 ( ): – . [SV20] B. Srinivasan 和 C. R. Vinroot. 具有连通中心的有限约化群中特征标的伽罗瓦群作用与 Jordan 分解。 *J. Algebra*, 558:708–727, 2020. [TZ04] P. H. Tiep 和 A. E. Zalesskii. 李型有限群的幺正元及其复表示的实现域。 *J. Algebra*, 271:327–390, 2004. [Va23] C. Vallejo Rodr ´ *Vietnam J.* ıguez. 缺陷群 *Math.* 51 3 571 576, 2023
生成元数量的下界。 , ( ): – . [VLVL85] A. Vera L´opez 和 J. Vera L´opez. 根据共轭类数量对有限群进行分类。 *Israel J. Math.*, 51(4):305–338, 1985.

（Ketchum, Schaeffer Fry） Department of Mathematics, University of Denver, Denver, CO 80210, USA

(Mart´ınez, Rizo) Departament de Matemàtiques, Universitat de València, 46100 Burjassot, València,Spain

*Email address*, Ketchum: eden.ketchum@du.edu*Email address*, Mart´ınez: josep.m.martinez@uv.es*Email address*, Rizo: noelia.rizo@uv.es*Email address*, Schaeffer Fry: mandi.schaefferfry@du.edu