arXiv:2602.14373v1 [math.LO] 16 Feb 2026

方括号运算的闭无界集

Osvaldo Guzm´an * Stevo Todorcevic †

摘要

本文继续研究第 5 章中的三个方括号运算 $[\cdot\cdot]$。我们称一个方括号运算$[\cdot\cdot]$ 具有拉姆齐俱乐部性质，如果对每个闭无界集 $C \subseteq \omega_1$，都存在一个不可数子集 $W \subseteq \omega_1$，使得 $[\alpha\beta] \in C$ 对每个 $\alpha, \beta \in W.$，第二作者证明了，真力迫公理意味着所有由阿隆佐恩树诱导的方括号运算都具有这一性质。我们将这一结果推广到另外两类运算。我们得出结论："所有方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质"和"没有任何方括号运算具有拉姆齐俱乐部性质"这两个命题均与 ZFC 相容。换言之，对于任何方括号运算的拉姆齐俱乐部性质，ZFC 都无法判定其成立与否。此外，我们还分析了马丁公理和连续统假设下方括号运算的拉姆齐俱乐部性质。

1 引言

著名的拉姆齐定理指出，ω 上的每个图都包含一个可数无穷完全子图或一个可数无穷独立子图[1]。将其直接推广到 ω_1 上，便会断言 ω_1 上的每个图都包含一个不可数完全子图或一个不可数独立子图。然而，正如 Sierpi´nski 所指出的，这一推广是错误的。事实上，情况远不止如此，正如第二作者的下述定理所示：

定理 1（T. [40], [38]） 存在 $c\colon [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 使得对每个$A \in [\omega_1]^{\omega_1}$ 和 $\gamma \in \omega_1$，都存在 $\alpha, \beta \in A$ 使得 $c(\alpha, \beta) = \gamma$.

换句话说，ω_1 的配对可以用不可数多个颜色着色，使得每种颜色都会出现在每个不可数集合中（关于这一类型的更多结果，

*关键词：方括号运算、序数上的游走、真力迫公理、马丁公理、连续统假设。美国数学学会分类：03E05, 3E50, 03E57, 03E35.

†第一作者得到 PAPIIT 项目资助，项目编号为 IA 104124、IN105926，以及 SE-CIHTI 项目资助，编号为 CBF2023-2024-903。[1]回顾一下，如果任意两个顶点都相连，则称图是完全图；如果任意两个顶点都不相连，则称图是独立图。

参见 [30] 或 [35]）。给定一个函数 $F : [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 和一个子集$X \subseteq \omega_1$，定义图 $G(F, X)$ 于 ω_1 上：当 $F(\alpha, \beta) \in X$. 时，用一条边连接 α 和 β。当 F 具有较强的组合性质时，这族图可能非常有趣。本书第 5 章 [40], 介绍了方括号运算 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$, $[\cdot\cdot]_{T,a}$ 和 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{R},e}$ ，其中 C 是一个 C-序列， T 是一个带有专化映射 a 的特殊阿隆佐恩树，R 是一个由实数组成的 ω_1- 序列，而 e 是一个映射序列。这些运算的定义和主要性质将在预备知识部分回顾。本文中，“方括号运算”一词始终指这三个函数之一。以下是第二位作者的另一项结果：

定理2（T. [40]） 设 F 是一个方括号运算，且 S、$Z \subseteq \omega_1$. 满足：若对称差 $S \triangle Z$ 是平稳的，则图 $G(F, S)$ 与 $G(F, Z)$ 彼此正交（它们不含不可数的同构子图）。

凭借这一结果，第二作者得以解决不可数图的基问题：[2] 2^{ω_1} 是一个由不可数图构成的族$\mathcal{G}$ 的最小大小，使得每个不可数图都包含$\mathcal{G}$中某个成员的同构副本。我们认为，这一结果足以说明有必要深入研究由方括号运算所诱导的图，而这正是本文的核心主题。我们从以下定义开始：

定义3 设 F： $[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 且 $X \subseteq \omega_1$. 。我们称 X 为 F-拉姆齐的，若 $G(F, X)$ 含有不可数完全子图或不可数独立子图。

我们将研究哪些 ω_1 子集对于方括号运算是拉姆齐的。以下结果证明于 [40]。

定理4（T.） 设 $[\cdot\cdot]$ 是一个方括号运算，且 $W \in [\omega_1]^{\omega_1}$. 集合 $\{[\alpha\beta] \mid \alpha, \beta \in W\}$ 包含一个闭无界集。

注意，这一结果蕴含定理1。另一个容易得到的推论如下：

推论5 设 $[\cdot\cdot]$ 是一个方括号运算，且 $X \subseteq \omega_1$.

1. 若 $G([\cdot\cdot], X)$ 含有不可数完全子图，则 X 含有一个闭无界集。

[2] 这一结果应与 PFA 的以下著名推论形成对照：任意两个 ω_1-稠密的实数子集同构（见 [10] 或 [12]）；不可数线性序有一个由五个元素构成的基（见 [29]）；并且大小为 ω_1 的有向偏序恰有五种共尾类型（见 [44]）。

2. 若 $G([\cdot\cdot], X)$ 含有不可数独立子图，则 X 不是平稳集。

注意到，定理4表明，若 $S \subseteq \omega_1$ 是平稳的（特别是若它是闭无界集），那么 $G([\cdot\cdot], S)$不包含不可数独立子图。因此，我们可以将定义3针对闭无界集改写如下：

定义6 设 $[\cdot\cdot]$ 是一个方括号运算， $C \subseteq \omega_1$ 是一个闭无界集。若 $G([\cdot\cdot], C)$ 包含不可数完全子图，则称 C 是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐 的。

根据推论5的第一点，确定哪些子集$X \subseteq \omega_1$ 使得 $G([\cdot\cdot], X)$包含不可数完全子图的问题，可以归结为 X 是闭无界集的情形。此外，由于哪些子集会产生含有不可数独立子图的图这一问题，与完全子图的问题互为对偶，因此我们得到以下问题：

哪些闭无界集是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的？

沿着这一方向的首个结果见于该书 [40]（引理 5.4.4）：

定理 7（T. [40]) 真力迫公理 （*PFA*）蕴含：若 T 是一棵特殊阿隆佐恩树，且 $a\colon T \longrightarrow \omega$ 是一个特化映射，那么每个闭无界集都是 $[\cdot\cdot]_{T,\ a}$-拉姆齐的。

这个定理回答了伍丁在研究力迫时提出的一个问题 $\mathbb{P}_{\mathsf{max}}$ （见 [46]）。以下问题促使我们研究这一主题：

1. 定理 7 的结论是否独立于 ZFC？它在马丁公理或连续统假设下的情况如何？

2. 定理 7 对其他方括号运算是否也成立？

本文探讨了这些问题。我们将证明，定理 7 对其他方括号运算也成立，而且其结论独立于 ZFC（对所有方括号运算均如此）。事实上，对于某些方括号运算，该结论甚至独立于马丁公理，而其否定与连续统假设相容。尚待解决的最重要问题是：连续统假设是否与“每个闭无界集都是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的”这一陈述相容。

本文的结构如下。第 2 节介绍全文将使用的必要记号和定义。接下来的五节介绍初等子模型、阿隆佐恩

树、序数上的游走、力迫以及 Baumgartner 的闭无界集强迫的相关背景知识。读者可以跳过这些预备章节，并在需要时再返回查阅。书籍 [40] 中方括号运算的定义将在第 8 节回顾。在第 9 节中，我们证明对于每个闭无界集 $C \subseteq \omega_1$，都存在一个方括号运算 $[\cdot\cdot]$（任意类型），使得 C 是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的。另一方面，在第 10 节中，我们证明 Baumgartner 的闭无界集强迫所添加的泛俱乐部，对于基模型中的任何方括号运算 $[\cdot\cdot]$ 都不是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的。因此，ZFC 无法证明定理 7 的结论。此外，我们证明马丁公理与以下命题相容：存在一个由 C-序列诱导的方括号运算，使得并非所有闭无界集都是拉姆齐的。在第 11 节中，我们将这些结果推广到所有方括号运算，而不仅仅是基模型中的方括号运算。在第 13 节和第 14 节中，我们将定理 7 推广到其余的方括号运算。最后一节介绍一系列开放问题。

2 记号

若 $(T, <_T)$ 是一棵树，则称之为树，当且仅当它是一个具有最小元的偏序，并且对每个 $s \in T$，集合 $s^{\downarrow} = \{t \in T \mid t <_T s\}$ 都是良序。给定一个序数α，用 T_α 表示 T的 α层，也就是所有满足 $s^{\downarrow}$同构于 α. 的 $s \in T$ 的集合。 T 的高度是使得 T_α 为空集的最小 α 。对于$s \in T$， s 的高度是唯一的序数 α ，使得 $s \in T_\alpha$. 。 s 的高度记作 $|s|$ （尽管我们使用了与表示基数相同的符号，但不应造成混淆）。若 $\gamma \leq |s|$，则用 $s \restriction \gamma$ 表示 T_γ 中唯一满足 $s \restriction \gamma \leq_T s$ 的元素（因此 $s \restriction |s| = s$）。对于$C \subseteq \omega_1$，记 $T \restriction C = \{s \in T \mid |s| \in C\}$ 。若对每个极限序数 α 及 s、$t \in T_\alpha$，只要 $s^{\downarrow} = t^{\downarrow}$，就有 $s = t$ （等价地说， T 的树拓扑是豪斯多夫的），则称 T为 Hausdorff 树。若 s与$t \in T$ 不相容（记作 $s \perp t$），则称它们不相容，当且仅当 $s \not\leq_T t$ 且 $t \not\leq_T s$. 。用 $\triangle(s,t)$ 表示满足 $s \restriction \alpha = t \restriction \alpha$. 的最大 α 。树的一个分支是一个极大线性有序子集。

虽然我们的重点是高度为 ω_1 的树，但我们也会遇到 $2^{<\omega}$. 的子树。给定 s、$t \in 2^{<\omega}$， s 与 t 的拼接记作 $s^\frown t$. 。有时我们会用 $s^\frown n$ 代替 $s^\frown(n)$ （其中某个 $n \in \omega$）。 s 的锥定义为 $s = \{f \in 2^\omega \mid s \subseteq f\}$。设 $S \subseteq 2^{<\omega}$ 是一棵树（树序为 $\subseteq$）。如果 $s^\frown 0$ 和 $s^\frown 1$ 都属于 S.，我们就称 $s \in S$ 为分裂节点。如果 s 是 S 的一个分裂节点，且它恰好延伸了 n 个分裂节点，我们就称 s 为 S. 的一个 n-分裂节点。 S 的所有 n-分裂节点组成的集合记作 $\mathrm{split}_n(S)$。萨克斯树（或完美树）是指其中任意节点都可以延伸到一个分裂节点的树。 S 的分支集合定义为 $[S] = \{f \in 2^\omega \mid \forall n \in \omega\,(f \restriction n \in S)\}$。

我们用 $\mathrm{LIM}(\omega_1)$ 表示所有可数极限序数构成的集合。给定 $S \subseteq \omega_1$，其聚点集合（记为 S'）是所有满足下述条件的 $\alpha \in \omega_1$ 的集合：

$S \cap \alpha$ 在 α 中无界。我们用 $[\alpha, \beta]$ 表示闭区间 $\{\xi \mid \alpha \leq \xi \leq \beta\}$。这不应与方括号运算混淆，后者始终记作 $[\alpha\beta]$ （不带逗号）。区间 (α, β) 和 $(\alpha, \beta]$ 具有通常的含义。表达式 $\langle \delta_n \rangle \longrightarrow \delta$ 表示序列 $\langle \delta_n \rangle$ 收敛到 δ （采用 ω_1 上通常的序拓扑）。序数类记为 OR。

量词 $\exists^{\omega_1}$ 表示“存在不可数多个”，而 $\forall^{\infty}$ 表示“对几乎所有”（即除有限多个之外的所有）。对于 A 一个序数的集合，我们用 OT(A) 表示其序型。若 f 是一个函数，我们用 dom(f) 表示其定义域，im(f) 为其像。

3 可数初等子模型的预备知识

初等子模型在研究 ω_1. 的组合学时起着根本作用。我们现在回顾工作所需的关于它们的基本事实，并请读者参阅综述 [16] 以了解更多。对于基数 κ，将 H(κ) 定义为由所有传递闭包的大小小于 κ. 的集合所组成的集合。涉及初等子模型的论证通常从选取一个足够大的正则 κ 开始，该基数是所讨论论证所需要的。为避免不断重复，当无需明确指出时，我们将省略对 κ 的提及。这样，我们将只写“设 M 为一个可数初等子模型”，而不是“设 M 为某个 H(κ),的可数初等子模型，其中 κ是一个足够大的正则基数”。对 κ 的提及常常并不需要。然而，在将模型用作旁条件时（见 [39] 和 [41]）并非如此，正如我们将在第 13 节和第 14 节中所做的那样。在这两节中，我们将更仔细地指明所需的基数。

设 M 是一个可数初等子模型。 的高度定义为 $\delta_M = M \cap \omega_1$. 。众所周知，$\delta_M$ 是一个可数序数。我们将需要以下关于模型高度的结果：

命题 8 设 M 是一个可数初等子模型，且 C、$S \in M$ 是 ω_1. 的两个子集

1. 如果 C 是一个闭无界集，那么 $\delta_M \in C$.
2. 如果 $\delta_M \in S$，那么 S 是平稳的。

另一个非常有用的结果如下：

引理 9 设 M 是一个可数初等子模型，且 $A \in M$. 。若 $A \nsubseteq M$，则 A 是不可数的。

回顾以下概念:

定义 10 设 δ 是一个序数。若 δ 对（序数）加法封闭，则称其为不可分解的。等价地，$\gamma + \delta = \delta$ 对每个 $\gamma < \delta$. 成立。用 $IND(\omega_1)$ 表示所有可数不可分解序数构成的集合。

模型的高度是一个不可分解序数（它对序数乘法和幂运算也封闭）。不难看出，IND(ω_1) 是一个闭无界集。

定义 11 设 $\gamma \leq \omega_1$. 。若 $\{M_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ 满足以下条件，则称其为一个初等子模型的连续链:

1. 存在一个不可数正则基数 κ，使得每个 M_α 都是 $H(\kappa)$ 的初等子模型。
2. 若 $\alpha < \beta < \gamma$，则 $M_\alpha \in M_\beta$.。3. 若 $\alpha < \gamma$ 是一个极限序数，则 $M_\alpha = \bigcup M_\xi \xi < \alpha$

4 阿隆佐恩树的预备知识

阿隆佐恩树是一个高度为 ω_1 的树，其所有层都是可数的，并且没有不可数分支。 ω_1 的组合学有很大一部分都涉及阿隆佐恩树。读者可以参阅综述 [43]，以深入了解阿隆佐恩树（另见 [13] 和 [24]）。如果存在 $a:\ T \longrightarrow \omega$，使得对于每个 $n \in \omega$，集合 $a^{-1}(\{n\})$都是一个反链，则阿隆佐恩树 T 是特殊的。我们称 a 一个从其到 T.的特化映射

设 T^1，...，T^n 是高度为 ω_1. 的树。树积 $S = T^0 \otimes ... \otimes T^n$ 由所有序列 $s = (s_0,\ ...,\ s_n) \in T^0 \times ... \times T^n$ 组成，满足 $|s_0| = ... = |s_n|$. 。对于s、$t \in S$，如果对每个 $i \leq n$. 都有 $s_i \leq_{T^i} t_i$，则定义 $s \leq_S t$。容易验证，$(S,\ \leq_S)$是一个高度为 ω_1 的树，而 S_δ 恰好是所有满足 $|s_0| = ... = |s_n| = \delta$. 的$s = (s_0,\ ...,\ s_n) \in S$的集合。如果 $s = (s_0,\ ...,\ s_n) \in S$且 $\delta < |s|$，则有$s \restriction \delta = (s_0 \restriction \delta,\ ...,\ s_n \restriction \delta) \in S_\delta$（借此机会提醒读者，在此语境中，$|s|$ 表示 s在树S中的高度，而不是其作为序列的基数）。集合 $A = \{s_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq S$ 称为高度递增的，如果对所有 $\alpha < \beta$都有 $|s_\alpha| < |s_\beta|$。 – –

定义 12 设 $T^1, ..., T^n$ 是高度为 ω_1, $S = T^0 \otimes ... \otimes T^n$, $A = \{s_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq S$, $k \in \omega$ 和 $\delta \in \omega_1$. 的树。我们称 A 是 k在层δ 上分布的，如果对于每个 $u_0, ..., u_k \in S_\delta$, 都存在不可数多个 $\alpha \in \omega_1$，使得$s_\alpha \restriction \delta \cap u_i = \emptyset$ 对于所有 $i \leq k$.

以下引理出自 [43]（引理 5.9），在研究阿隆佐恩树时尤其有用。

命题 13 设 $T^1, ..., T^n$ 是高度分别为 ω_1，$S = T^0 \otimes ... \otimes T^n$ 和 $A = \{s_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq S$ 的树，且高度递增。对于每个 $k \in \omega$，存在 $\delta \in \omega_1$，使得 A 在第 δ. 层是 k-分布的

这一结果的一个推论是以下命题（另一种证明可见于 [47] 的断言 3.2）。

命题 14 设 T 是一棵阿隆佐恩树，且 A 是 T. 的一个不可数子集。存在两个不可比较节点 $s, t \in T$，使得集合 $\{u \in T \mid s <_T u\}$ 和 $\{u \in T \mid t <_T u\}$ 都是不可数的。

前述命题的“初等子模型”版本也成立。

命题 15 设 T 是一棵阿隆佐恩树，$A \subseteq T$, M 是一个可数初等子模型，其中 T, $A \in M$ 且 $t \in A \setminus M$. 。存在 $\xi \in M$ 和 $u \in T \restriction \xi$，使得：

1. $t \perp u$.
2. 存在不可数多个 $s \in A$ 使得 $u \leq_T s$.

5 力迫预备知识

我们假设读者已经熟悉 [23] 中介绍的力迫法。若 $\mathbb{P}$ 是一个力迫，且 M 是一个满足 $\mathbb{P} \in M$，的可数初等子模型，我们称 $p \in \mathbb{P}$ 为 $(M, \mathbb{P})$-泛型条件，如果对于每个满足 $D \in M$，的开稠密集 $D \subseteq \mathbb{P}$，集合 $D \cap M$ 在 p. 以下预稠密。此外，如果 $p \in D$ 对于每个 $D \in M$（它是 $\mathbb{P}$. 的一个开稠密子集）都成立，则称 p 为 $(M, \mathbb{P})$-完全脱殊条件。众所周知，若 p 是 $(M, \mathbb{P})$-泛型，且 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是一个满足 $p \in G$，的泛型滤子，那么 $M[G]$ 是 M 和 $M[G] \cap V = M$ 的泛型扩张。下面这个关于泛型条件的等价刻画非常有用（参见 [41]）。

引理 16 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫，$p \in \mathbb{P}$ 和 M 是一个初等子模型，且$\mathbb{P} \in M$. 。以下命题等价：

1. p 是一个$(M, \mathbb{P})$-泛型条件。
2. 对每个具有 $A \in M$ 和 $q \leq p$ 的 $A \subseteq \mathbb{P}$，如果 $q \in A$，那么就存在一个与 q. 相容的 $r \in A \cap M$

如果对每个具有 $\mathbb{P} \in M$ 和 $p \in M \cap \mathbb{P}$ 的可数初等子模型 M，（全）适当的力迫 $\mathbb{P}$ 都存在一个是 $(M, \mathbb{P})$-（全）泛型条件的，那么该力迫（全）适当。可以证明，一个力迫是全适当的，当且仅当它是适当的且不会添加新实数（参见 [17]）。

我们说 $\mathbb{P}$ 具有 κ-链条件 （$\mathbb{P}$ 是 κ-c.c.），如果 $\mathbb{P}$ 没有大小为 κ.的反链。我们用可数链条件代替 ω_1-c.c.。下述事实是众所周知的（见 [27]或 [41]）。

命题 17 设 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件，且 M 是满足$\mathbb{P} \in M$. 的可数初等子模型。每个 $p \in \mathbb{P}$ 都是$(M, \mathbb{P})$-泛型。

关于两步迭代，我们有如下结果（见 [1]）。

命题 18 设 $\mathbb{P}$ 为一个力迫概念，$\mathbb{Q}$ 为一个偏序的 $\mathbb{P}$-名称，且 M 为满足 $\mathbb{P}$、$\mathbb{Q} \in M$. 的可数初等子模型。对于$(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \mathbb{Q}$，下列陈述等价：

1. $(p, \dot{q})$ 是$(M, \mathbb{P} * \mathbb{Q})$-泛型。
2. p 是$(M, \mathbb{P})$-泛型，且 $p \Vdash$“$\dot{q}$ 是$(M[G], \mathbb{Q}[G])$-泛型”（其中 G 是泛型滤子的典范 $\mathbb{P}$-名称）。

回顾以下概念：

定义 19 设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的子序。若满足以下条件，我们称 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的正则子序：

1. 若 $p \perp_{\mathbb{P}} r$，则 $p \perp_{\mathbb{Q}} r$.
2. 对每个 $q \in \mathbb{Q}$，存在 $p \in \mathbb{P}$，使得对每个 $r \in \mathbb{P}$，若 $r \leq p$，则 r 与 q. 相容。在这种情况下，我们称 p 是 q 到 $\mathbb{P}$. 的约化

若 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{Q}$，的正则子序，则用 $\mathbb{Q}$ 进行力迫会添加一个 $(V, \mathbb{P})$-泛型滤子。若 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 产生相同的泛型扩张，我们称它们强迫等价。

定义 20 设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是偏序集。若对每个 p、$r \in \mathbb{P}$ 都满足以下条件，我们称 $f: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ 是一个稠密嵌入：

1. 若 $p \leq r$，则 $f(p) \leq f(r)$。
2. 如果 $p \perp r$，那么 $f(p) \perp f(r)$。

3. f 的像在 $\mathbb{Q}$.中稠密

众所周知，如果两个偏序集之间存在稠密嵌入，那么它们是强迫等价的。有关正则子序和稠密嵌入的更多信息，请参阅 [24] 。

马丁数 $\mathfrak{m}$ 是满足以下条件的最小基数 κ：存在一个可数链条件力迫 $\mathbb{P}$，以及一个由 κ 的稠密子集组成的族$\mathcal{D}$，使得 $\mathbb{P}$ 中不存在与$\mathcal{D}$的每个成员都相交的滤子 $G \subseteq \mathbb{P}$。马丁公理（MA）断言$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$（其中 $\mathfrak{c}$ 表示连续统的大小）。以下是一个非常著名的结果（见 [24]中的定理 V.4.1）。

定理 21 设 $\lambda > \omega$ 是一个正则基数，且 $2^{<\lambda} = \lambda$. 存在一个大小为 λ 的可数链条件力迫 $\mathbb{P}$，使得 $\mathbb{P} \Vdash$“$\mathfrak{m} = \mathfrak{c} = \lambda$”。

6 序数游走预备知识

序数上的游走 方法（由第二作者提出）是构造 ω_1. 上结构的一种强大技术。几乎所有有趣的 ω_1组合对象，包括阿隆佐恩树、豪斯多夫间隙、Countryman 线、齐性埃伯莱因紧空间、具有强组合性质的 ω_1 上的着色、L-空间、平方不是林德洛夫空间的群的 Lindel¨...以及超滤子、弗雷歇群´.....等等，都可以用这种方法构造。本节将回顾我们工作所需的序数上的游走的相关结果。读者可以在著作 [40] 和 [14]中进一步了解此方法。更多应用见
[37], [42], [26], [30], [31], [20], [32], [33]{[15], [28], [35], [36], [34] 或 [25] 等文献。

我们称$\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ 为 C-序列，如果以下条件对每个 $\alpha \in \omega_1$ 都成立:

1. $C_\alpha \subseteq \alpha$.2. $C_{\alpha+1} = \{\alpha\}$.3. 如果 α 是极限序数，那么 $C_\alpha = \{C_\alpha(n) \mid n \in \omega\}$ 是 α 的共尾子集，序型为 ω.

固定一个 C-序列 C。写作 $C_\alpha = \{C_\alpha(n) \mid n \in \omega\}$ 时，我们总是默认对每个 $n \in \omega.$，都有 $C_\alpha(n) < C_\alpha(n+1)$。对于 $\alpha < \beta$ 两个可数序数，从 β 到 α 的步定义为 $\mathrm{stp}(\alpha, \beta) = \min(C_\beta \setminus \alpha)$。从 β 到 α 的游走的上迹定义为 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) = \{\beta_0, ..., \beta_n\}$，其中 $\beta_0 = \beta$、$\beta_n = \alpha$，且 $\beta_{i+1} = \mathrm{stp}(\alpha, \beta_i)$（$\mathrm{Tr}(\alpha, \beta)$ 是有限集，因为序数不存在无限递减序列）。注意，游走的完整编码定义为 $\rho_0(\alpha, \beta) = \langle |C_{\beta_0} \cap \alpha|, |C_{\beta_1} \cap \alpha|, ..., |C_{\beta_{n-1}} \cap \alpha| \rangle$，它是一个

属于 $\omega^{<\omega}$. 的元素。定义 $\lambda(\alpha,\ \beta) = \max\{\bigcup C_{\beta_i} \cap \alpha \mid i < n\}$，并注意它是一个小于 α. 的序数。上述和完整编码都可以递归定义：

$$\mathsf{Tr}(\alpha, \beta) = \{\beta\} \cup \mathsf{Tr}(\alpha, \mathsf{min}(C_\beta \setminus \alpha))$$

$$\rho_0(\alpha, \beta) = \langle |C_\beta \cap \alpha| \rangle^\frown \rho_0(\alpha, \mathsf{min}(C_\beta \setminus \alpha))$$

以下是一个简单但至关重要的结果：

命题 22 设 $\alpha < \gamma < \beta$ 为可数序数。以下条件等价：

1. $\gamma \in Tr(\alpha, \beta)$.
2. $Tr(\alpha, \beta) = Tr(\gamma, \beta) \cup Tr(\alpha, \gamma)$.
3. $\lambda(\gamma, \beta) < \alpha$.
4. $\rho_0(\alpha, \beta) = \rho_0(\gamma, \beta)^\frown \rho_0(\alpha, \gamma)$.

因此，如果 $\lambda(\gamma, \beta) < \alpha$，那么从 β 到 α 的游走可分解为从 β 到 γ 的游走，随后是从 γ 到 α. 的游走。对于 β 这个可数序数，定义 $\rho_{0\beta}$： $\beta \longrightarrow \omega^{<\omega}$ 为 $\rho_{0\beta}(\alpha) = \rho_0(\alpha, \beta)$。由 ρ_0 诱导的阿隆佐恩树定义为 $T(\rho_0) = \{\rho_{0\beta} \restriction \alpha \mid \alpha \leq \beta < \omega_1\}$。在 [40] 中证明了，$T(\rho_0)$ 是一棵豪斯多夫的特殊阿隆佐恩树，并且不会在极限层上产生分支。为方便起见，我们用 $\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha, \beta)$ 代替 $\triangle_{T(\rho_0)}(\rho_{0\alpha}, \rho_{0\beta})$。以下引理众所周知；为完整起见，我们给出证明。

引理 23 集合 $\{\rho_{0\alpha} \mid \alpha \in LIM(\omega_1)\}$ 是 $T(\rho_0)$ 的反链。

证明。如果 α 是极限序数且 $\xi < \alpha$，那么 $\rho_{0\alpha}(\xi)$ 当且仅当 $\xi \in C_\alpha$. 是一个长度为 1 的序列。引理的结论显然成立。 ■

下面的引理是众所周知的（例如，它可由 [30] 中的事实 2 推出）。为方便读者，我们在此给出证明。

引理 24 设 $\delta < \omega_1$. 如果 $\xi < \delta$，那么对于几乎所有 $\alpha \in (\xi, \delta)$，都有 $\xi \leq \lambda(\alpha, \delta)$。特别地，如果 $\langle \delta_n \rangle \longrightarrow \delta$，那么 $\langle \lambda(\delta_n, \delta) \rangle \longrightarrow \delta$.

证明。假设存在一个无限集 $A \subseteq (\xi,\ \delta)$，使得对所有 $\lambda(\alpha,\ \delta),\ < \xi$ 都成立 $\alpha \in A$. 根据命题 22，可得 $A \subseteq \mathsf{Tr}(\xi,\ \delta)$。因此，$\mathsf{Tr}(\xi,\ \delta)$ 是无限的，这就产生了矛盾。 ■

7 Baumgartner 的俱乐部力迫的预备知识

Baumgartner 的俱乐部力迫 是使用有限条件向ω_1 添加俱乐部子集的标准方法。Baumgartner 在[12]中引入并研究了这一方法。这是一种非常有趣的力迫概念，有多种应用，也是一个自然的例子：它是正规迫，但不是 ω-正规迫。其条件的有限性便于进行各种 amalgamation 论证，进而使泛俱乐部具有丰富的组合性质。本节回顾这一力迫概念的基础知识。欲了解更多内容，请参阅 [21], [12], [2], [48], [49], [4], [7]。我们用 Int(ω_1) 表示集合 $\{(\alpha,\ \beta] \mid \alpha < \beta < \omega_1\}$。

定义 25 Baumgartner 的俱乐部力迫 （记作 $\mathbb{BC}$）由满足以下性质的所有有序对 $p = (a, I)$ 组成：

1. $a \in [\omega_1]^{<\omega}$ 2. $I \subseteq$ *Int*(ω_1) 是有限的。3. $a \cap \bigcup I = \emptyset$.

给定 $p = (a_p, I_p)$ 和 $q = (a_q, I_q)$，它们属于 $\mathbb{BC}$，定义 $p \leq q$，若 $a_q \subseteq a_p$ 且 $\bigcup I_q \subseteq \bigcup I_p$.。这是 [48] 中 Baumgartner 俱乐部力迫的一种表述（还有其他几种表述，它们都给出强迫等价的概念）。为方便起见，如果 $a_p \subseteq \alpha$ 且 $\bigcup I_p \subseteq \alpha$.，我们称 α 在 p 之上

若 $G \subseteq \mathbb{BC}$ 是一个泛型滤子，则*Baumgartner* 的泛型俱乐部 定义为 $C_{gen} = \bigcup\{a_p \mid p \in G\}$。容易验证， C_{gen} 被强迫为一个闭无界集。

由于 $\mathbb{BC}$ 是一个大小为 ω_1的偏序，因此它满足 ω_2-链条件。此外，它是正规迫。事实上，确定给定可数初等子模型上的泛型条件非常容易：

命题 26（[12]）设 M 是一个可数初等子模型，且 $p = (a_p, I_p) \in \mathbb{BC}$. 以下条件等价：

1. p 是一个（$M, \mathbb{BC}$）-泛型条件。
2. $\delta_M \in a_p$ （其中 $p =$ （a_p, I_p）） 。

结合这个最后的结果以及命题 17 和 18，我们得到如下结论：

推论 27 设 $\dot{\mathbb{Q}}$ 是一个可数链条件偏序的 $\mathbb{BC}$-名称，且 M 是一个可数初等子模型，其中 $\mathbb{Q} \in M$. 对于 $(p, \dot{x}) \in \mathbb{BC} * \mathbb{Q}$，以下条件等价：

1. $(p, \dot{x})$ *is* $(M, \mathbb{BC} * \dot{\mathbb{Q}})$*-generic.*

2. $\delta_M \in a_p$.

适当性和 ω_2-链条件意味着，进行强迫扩张后不会有基数坍缩。设 $p, r \in \mathbb{BC}$. 注意，若p和 r相容，则 $p \wedge r = (a_r \cup a_p, I_p \cup I_q)$ 是 p 和 r. 的最大公共扩张。对于 $p, q \in \mathbb{BC}$, 若存在 $\delta \in a_p$ 使得$a_q = a_p \cap \delta$且 $I_q = \{(\alpha, \beta] \in I_p \mid \beta < \delta\}$. 注意，若 $q \sqsubseteq p$, 则 $p \leq q$. 若M 是一个可数初等子模型，且 p 是一个 $(M, \mathbb{BC})$-泛型条件，则定义 $p_M = (a_p \cap M, I_p \cap M)$. 我们有如下结论：

命题 28 设 M 是某个 $H(\kappa)$ 的可数初等子模型，且p 是一个 $(M, \mathbb{BC})$-泛型条件。以下结论成立：

1. $p_M = (a_p \cap M, I_p \cap M) \sqsubseteq p$. 特别是， $p \leq p_M$ 2. $p_M \in M$ 3. 若 $r \in M$ 且 $r \leq p_M$，则 r 与 p 相容。

最后这个命题蕴含 $\mathbb{BC}$ 是强适当的（见 [41]）。我们如何添加许多鲍姆加特纳俱乐部？由于 $\mathbb{BC}$不满足可数链条件，有限支撑积（在此情形下等价于有限支撑迭代）会压垮 ω_1。那么可数支撑积呢？一般而言，若 $\mathbb{P}$是$_{CS}$一个力迫概念，且 X 是一个序数集合，我们用 $\prod \mathbb{P}$表示由从 X 到$\mathbb{P}$的所有可数偏函数构成的可数$_{\alpha \in X}$支撑积 $\mathbb{P}$，。尽管可数支撑积在某些应用中往往很有用（例如添加许多 Sacks 或 Silver 实数），但在此情境下毫无用处。 [4] 中证明了可数支撑积也会压垮 ω_1 （这是更一般现象的一个例子：Hruˇs´ak 在 [19]中证明，任何由无穷多个大小至多为 $\mathfrak{c}$、且会添加无界实数的正规迫组成的可数支撑积，都会压垮 ω_1）。当然，我们可以使用可数支撑迭代。然而，这种做法不仅将我们限制在连续统不大于 ω_2 的模型中，，还使我们失去了 Baumgartner 的原始迫使中极具吸引力的“有限性”。幸运的是，Asper´o 在 [4] 中找到了一个方法，可以添加许多鲍姆加特纳俱乐部而不压垮基数。该方法的行为很像积（可以将其视为介于有限支撑积与可数支撑积之间），同时仍保留了鲍姆加特纳闭无界集强迫的某些“有限本质”。现在我们将回顾这一方法；所有结果均归功于 Asper´o，详见 [4]。

定义 29 $\mathbb{BC}_0$ 表示所有 $p = (a, I) \in \mathbb{BC}$ 的集合，其中 $a \subseteq IND(\omega_1)$ 且 $I = \emptyset$. 。 $\mathbb{BC}_0$ 中的元素通常称为纯条件。

容易看出， $\mathbb{BC}_0$ 中的任意有限个条件都有一个下界，且该下界属于$\mathbb{BC}_0$。对于 X 中的一组序数，我们用 $\mathbb{BC}^X$ 表示可数支撑积$_{CS}\prod\ \mathbb{BC}_{\alpha\in X}$

定义 30 令 $X \subseteq$ 序数类， $p \in \mathbb{BC}^X$ 且 $\gamma \in \omega_1$.

1. p的支撑是 $\mathrm{sup}(p) = \{\alpha \in X \mid p(\alpha) \neq 1_{\mathbb{BC}}\}$。 2. p 的纯支撑是 $\mathrm{sup}^{pr}(p) = \{\alpha \in \mathrm{sup}(p) \mid p(\alpha) \in \mathbb{BC}_0\}$。 3. p 的非纯支撑是 $\mathrm{sup}^{imp}(p) = \mathrm{sup}(p) \setminus \mathrm{sup}^{pr}(p)$。 4. p 的全像是 $\mathrm{Fim}(p) = \bigcup\{a_{p(\alpha)} \mid \alpha \in \mathrm{sup}(p)\}$。 5. p 的 γ-支撑是 $\mathrm{sup}^{\gamma}(p) = \{\alpha \in \mathrm{sup}(p) \mid \gamma \in a_{p(\alpha)}\}$。

若 γ 是一个不可分解序数，我们用 γ^+ 表示大于 γ. 的第一个不可分解序数。尽管该记号也用于后继基数，但不应因此产生混淆。现在我们可以定义用于添加许多鲍姆加特纳闭无界集的 Asper´o 力迫。

定义 31 设 $X \subseteq$ 属于序数类。*Asper´o* 积 $\mathbb{BC}^{(X)}$ 是 $\mathbb{BC}^X$的子序，由所有满足以下性质的 $p \in \mathbb{BC}^X$ 组成：

1. $sup^{imp}(p)$ 和 $Fim(p)$ 都是有限的。

2. 若 δ 是不可分解序数，则 $OT(sup_\delta(p)) < \delta^+$.

$\mathbb{BC}^{(X)}$ 上的序继承自 $\mathbb{BC}^X$. 。尽管我们对 Asper´o 积的定义与 [4], 中的定义略有不同，但这些差异无关紧要。

设 $p, q \in \mathbb{BC}^{(X)}$.。注意， p与 q在 $\mathbb{BC}^X$中相容，当且仅当它们在 $\mathbb{BC}^{(X)}$. 中相容。容易验证，若 $Y \subseteq X$且 $p \in \mathbb{BC}^{(X)}$,，则限制 $p \restriction Y$属于 $\mathbb{BC}^{(Y)}$。 此外还有以下结论：

引理 32 设 $Y \subseteq X$。力迫 $\mathbb{BC}^{(Y)}$ 是 $\mathbb{BC}^{(X)}$. 的正则子序。此外，若 $p \in \mathbb{BC}^{(X)}$，则 $p \leq p \restriction y$，且 $p \restriction y$ 是 p 到 $\mathbb{BC}^{(Y)}$.的约化。

显然， $\mathbb{BC}^{(\{\gamma\})}$ 与 $\mathbb{BC}$ 同构，因此 $\mathbb{BC}^{(X)}$ 会添加许多鲍姆加特纳闭无界集。

引理 33 令 X， $Y \subseteq$ 序数类。

1. 若 $X \cap Y = \emptyset$，则 $\mathbb{BC}^{(X \cup Y)}$ 与 $\mathbb{BC}^{(X)} \times \mathbb{BC}^{(Y)}$ 同构。特别地，它们强迫等价。*2.* 若 $OT(X) = OT(Y)$，则 $\mathbb{BC}^{(X)}$ 与 $\mathbb{BC}^{(Y)}$ 同构。

关于适当性，以下结果是命题 26 的对应版本：

定理 34（Asper´o, [4]） 设 $X \subseteq OR$，M 为一个满足 $X \in M$ 和 $p \in \mathbb{BC}^{(X)}$. 的可数初等子模型。以下条件等价：

1. p 是（M，$\mathbb{BC}^{(X)}$）-泛型。
2. $M \cap X \subseteq$ 上确界$\delta_M(p)$.

尽管这一最后结果在 [4], 中并未明确陈述，但它可直接由该文的引理 3.7 的证明推出。

推论 35（Asper´o, [4]） 设 $X \subseteq OR$。*Asper´o* 积 $\mathbb{BC}^{(X)}$ 是适当的，并满足 ω_2-链条件。特别地，它不会压塌基数。

关于经由 $\mathbb{BC}^{(X)}$ 力迫后连续统的大小，下面引用一个结果：

命题 36 设 $\kappa \geq \omega_2$ 是一个基数，使得 $\kappa^{\omega_1} = \kappa$. 。若 $G \subseteq \mathbb{BC}^{(\kappa)}$ 是一个泛型滤子，则 $V[G]$ 是 $\kappa = 2^{\omega} = 2^{\omega_1}$.的一个模型。

关于类似于 $\mathbb{BC}^{(X)}$ 的构造，请参阅 [5] 和 [6]。

8 方括号运算

本节回顾本书第 5 章中三个方括号运算的定义；它们是本书研究的核心。这些运算的一个关键性质是，每个不可数子集 ω_1 都会实现俱乐部多个值。我们将研究与每种运算相关的拉姆齐俱乐部。

第一个方括号运算是用序数上的游走定义的。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\clubsuit$-序列。定义 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$: $[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$，使得对每个 $\alpha < \beta$:

$$\begin{array}{lcl} [\alpha\beta]_{\mathcal{C}} & = & \min\{\mathsf{Tr}(\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta),\beta) \setminus \alpha\} \\ & = & \min\{\mathsf{Tr}(\alpha,\beta) \cap \mathsf{Tr}(\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta),\beta)\} \end{array}$$

这样，从 β游走到 $\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$， 途中遇到的第一个大于或等于 α 的点恰好是 $[\alpha\beta]_{\mathcal{C}}$. 。等价地，它是从 β 到 α 的游走与从β 到 $\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ 的游走所共有的最小点（见 [40]）。值得指出的是， [40]中的定义使用 $\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)-1$，而不是 $\triangle_{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$。这一区别与我们的论证无关。

第二个方括号运算通过一个（互不相同的）实数序列 $\mathcal{R}=\{r_\alpha \mid \alpha\in\omega_1\}\subseteq 2^\omega$ 和一个序列 $e=\langle e_\beta \mid \beta\in\omega_1\rangle$ 来定义，其中 $e_\beta:\beta+1\longrightarrow\omega$ 是一个单射，满足 $e_\beta(\beta)=0.$。为方便起见，我们将具有这些性质的序列称为良序列。对于 α和 β这两个可数序数，记 $\triangle_{\mathcal{R}}(\alpha,\beta)=\triangle(r_\alpha,r_\beta)$。定义 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{R},e}$: $[\omega_1]^2\longrightarrow\omega_1$，使得对每个 $\alpha<\beta$:

$$\boxed{[\alpha\beta]_{\mathcal{R},e}=\min\{\xi\in[\alpha,\beta]\mid e_\beta(\xi)\leq\triangle_{\mathcal{R}}(\alpha,\beta)\}}$$

计算$[\alpha\beta]_{\mathcal{R},e}$ 的过程是先找出最小的 m，使得$r_\alpha(m)\neq r_\beta(m)$，然后取满足 $e_\beta(\xi)\leq m$.的最小 $\xi\in[\alpha,\beta]$

第三个方括号运算通过一棵豪斯多夫特殊 Aron- szajn 树 T和一个特化映射 a: $T\longrightarrow\omega.$ 来定义。这一次，该运算定义在 T 上，而不是 $\omega_1.$ 上。给定 $s,t\in T,$，将 $s\wedge t$ 定义为 s 和 $t.$ 的最大下界。注意，由于 T 是一棵 Hausdorff 树，$s\wedge t$ 定义良好。对于 $s,t\in T,$，令 $[s,t]=\{z\in T\mid s\leq_T z\leq_T t\}$。

定义 $[\cdot\cdot]_{T,\,a}$: $[T]^2\longrightarrow T$使得对于每个 $s,\ t\in T$，满足 $|s|\leq|t|$:

$$\boxed{[st]_{T,a}=\min\{z\in[t\restriction|s|,t]\mid z=t\vee a(z)\leq a(s\wedge t)\}}$$

要计算$[st]_{T,\,a}$，首先令 $m=a(s\wedge t)$。然后，找到第一个满足 $|z|\geq|s|$ 且 $a(z)\leq m.$ 的节点 $z\leq_T t$。若不存在这样的节点 z，令$[st]_{T,\,a}=t.$。由于该运算在 ω_1上未定义，在此语境下，图$G([\cdot\cdot],\ X)$（对于 $X\subseteq\omega_1$）的顶点集是树 $T.$。若节点 s 与 t 之间由一条边相连，则$[st]_{T,\,a}$ 的高度属于 $X.$

建议读者回顾上述方括号运算的证明：这些运算都具有这样的性质，即 ω_1 的每个不可数子集都会实现俱乐部多个不同值（ [40] 中的引理 5.1.4、5.4.1 和 5.5.1）；这些证明中的思想将被频繁使用。

9 寻找拉姆齐俱乐部

设 $[\cdot\cdot]$ 是一个方括号运算， $C\subseteq\omega_1$ 是一个闭无界集。回忆一下， C 是 $[\cdot\cdot]$- 拉姆齐 的，当且仅当存在一个不可数的 $W\subseteq\omega_1$，使得 $\{[\alpha\beta]\mid\alpha,\beta\in W\}\subseteq C$

（换句话说， W 在 $G([\cdot\cdot],C)$ 中诱导出一个完全子图）。本节将证明，对于每个闭无界集 C，都存在一组方括号运算的参数 $[\cdot\cdot]$，使得 C 是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的。

定理 37 设 $C \subseteq \omega_1$ 为一个闭无界集，$R = \{r_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ 为一个实数序列， T 为一棵豪斯多夫特殊阿龙扎因树。存在一个 $\mathcal{C}$-序列 $\mathcal{C}$、一个良序列 e 以及一个专化映射 a: $T \longrightarrow \omega$，使得 C 是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的，其中 $[\cdot\cdot]$可以是运算 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$、 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{R},\, e}$ 或 $[\cdot\cdot]_{T,\, a}$.中的任意一个。

证明。 我们不妨假设 $C \subseteq \mathrm{LIM}(\omega_1)$，并回想一下， C' 表示 $C.$ 的聚点。我们首先构造 $\mathcal{C}$-序列 $\mathcal{C}$。 找一个序列$\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$，使得对每个 $\alpha \in \omega_1$：

1. $C_{\alpha+1} = \{\alpha\}$。2. 若 $\alpha \in C'$，则 $C_\alpha = \{C_\alpha(n) \mid n \in \omega\} \subseteq C$ 是 α 的一个序型为 ω的共尾子集。3. 若 α 是一个极限序数，但 $\alpha \notin C'$，则 $C_\alpha = \{C_\alpha(n) \mid n \in \omega\}$ 是 α 的一个序型为 ω 的共尾子集，并且 $C_\alpha(0) = \bigcup(C \cap \alpha)$。

我们强调，对于 α limit：在情形 $\alpha \in C'$ 下， C_α 包含于 C 中；而如果 $\alpha \notin C'$，那么 C_α 中至多只有第一个点属于 C。此外，如果 $C \cap \alpha \neq \emptyset$，那么 $C_\alpha(0)$ 属于 $C.$。我们断言，如果 $\alpha, \beta \in C'$（其中 $\alpha < \beta$），那么 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) \subseteq C.$。我们用反证法，设 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) = \{\beta_0, ..., \beta_{n+1}\}$（其中$\beta_0 = \beta$, $\beta_{n+1} = \alpha$ 且 $\beta_{i+1} = \mathrm{stp}(\alpha, \beta_i)$）。设 i 是满足 $\beta_{i+1} \notin C$ 的第一个。由于 $\beta_i \in C$，可知 β_i 是一个极限序数。此外，由于 $\beta_{i+1} \in C_{\beta_i}$，可知 C_{β_i} 不是 C的子集，因此 $\beta_i \notin C'.$。我们知道 $C \cap \beta_i \neq \emptyset$（因为 α 属于交集），所以 $C_{\beta_i}(0) = \bigcup(C \cap \beta_i)$，进而 $\alpha \leq C_{\beta_i}(0)$。于是得到 $\beta_{i+1} = C_{\beta_i}(0)$，它属于 C，因此产生矛盾。由此可得 $\{[\alpha\beta]_{\mathcal{C}} \mid \alpha, \beta \in C'\} \subseteq C$，所以 C 是 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$-拉姆齐。

我们现在按如下方式找到良序列 $e.$ Find $e = \langle e_\beta \mid \beta \in \omega_1 \rangle$：若 $\beta \notin C,$，则 e_β：$\beta + 1 \longrightarrow \omega$ 可以是任意满足 $e_\beta(\beta) = 0.$ 的单射。在情形 $\beta \in C,$ 下，我们选取一个具有以下性质的单射 e_β：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{For every } \gamma \in \beta, \text{ if } \gamma \notin C \text{ and } \delta = \bigcup(C \cap \gamma), \\ \text{then } e_\beta(\delta) < e_\beta(\gamma)\end{array}}$$

我们断言，若 $\alpha, \beta \in C$（满足 $\alpha < \beta$），则 $[\alpha\beta]_{\mathcal{R},e} \in C.$。假设情形并非如此。令 $\gamma = [\alpha\beta]_{\mathcal{R},e}$，并假设它不在 $C.$中。由此可得 $\alpha < \gamma < \beta.$。由于 $\alpha \in C$，可得 $\delta = \bigcup(C \cap \gamma)$也在 C中。注意， $\alpha \leq \delta < \gamma$且 $e_\beta(\delta) < e_\beta(\gamma) \leq \triangle_{\mathcal{R}}(\alpha, \beta)$。如此一来， $e_\beta(\delta) < \triangle_{\mathcal{R}}(\alpha, \beta)$，但这就产生了矛盾，因为 γ 是集合 $\{\xi \in [\alpha, \beta] \mid e_\beta(\xi) \leq \triangle_{\mathcal{R}}(\alpha, \beta)\}$ 的最小元素。由此我们得出 $\{[\alpha\beta]_{\mathcal{R},e} \mid \alpha, \beta \in C\} \subseteq C$，因此 C是 $[\cdot]_{\mathcal{R},e}$-拉姆齐的。

接下来需要找到专化映射。令 $f: T \longrightarrow P$ 为一个专化映射，其中 P 是素数集合。定义 a: $T \longrightarrow \omega$，使得对每个 $s \in T$，以下条件成立：

1. 若 $|s| \in C$，则 $a(s) = f(s)$。
2. 若 $|s| \notin C$ 且 $\delta = \bigcup(C \cap |s|)$，则 $a(s) = f(s \restriction \delta)^{f(s)}$.

注意，$a(s)$ 是素数，当且仅当 $|s| \in C$。我们断言 a 是一个特化映射。反证，假设存在 $s, t \in T$，使得 $t <_T s$ 且 $a(s) = a(t)$。若 $a(t)$ 是素数，则可得 $a(t) = f(t)$ 且 $a(s) = f(s)$，这与 f 是一个特化映射相矛盾。现在假设 $a(t)$ 不是素数。令 $\delta = \bigcup(C \cap |s|)$。若 $\delta \leq |t|$，则 $t \restriction \delta = s \restriction \delta$ 且 $a(t) = f(t \restriction \delta)^{f(t)}$，而 $a(s) = f(s \restriction \delta)^{f(s)}$.。由此可得 $f(t) = f(s)$，这再次与 f 是一个特化映射相矛盾。唯一剩下的情形是 $|t| < \delta$.。令 $\gamma = \bigcup(C \cap |s|)$，它小于 δ.。由此可得 $a(s) = f(s \restriction \delta)^{f(s)}$ 且 $a(t) = f(t \restriction \gamma)^{f(t)}$.。由于 $t \restriction \gamma <_T s \restriction \delta$，可得 $f(s \restriction \delta)$ 和 $f(t \restriction \gamma)$ 是不同的素数，因此 $a(s) = a(t)$ 不可能成立。

现在我们证明，若 s、$t \in T \restriction C$ 和 $|s| < |t|$，则 $|[st]_{T、a}| \in T$.。令 $z = [st]_{T、a}$，并假设 $|z| \notin C$.。由此可得 $|s| < |z|$.。令 $\delta = \bigcup(C \cap |z|)$，它属于 C，且 $|s| \leq \delta$.。我们知道 $a(z) = f(z \restriction \delta)^{f(z)}$.。由于 $\delta \in C$，我们有 $a(z \restriction \delta) = f(z \restriction \delta)$，因此 $a(z \restriction \delta) < a(z) < a(s \wedge t)$。这与 z. 的极小性矛盾。这样，若 U 是 $T \restriction C$ 的不可数子集，且任意两个不同的节点都具有不同的高度，则 $\{|[st]_{T、a}| \mid s、t \in U\} \subseteq C$，所以 C 是 $[\cdot\cdot]_{T、a}$-拉姆齐。

设 $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ 是一个 C-序列。若对每个 α 极限，C_α 的每个元素都是后继序数，我们就称$\mathcal{C}$ 为后继 C-序列。这类序列有时很有用（参见 [40]）。定理 37 中找到的 C-序列不是后继 C 序列。不过，如有需要，也可以构造出这样的序列。

命题 38 设 $C \subseteq \omega_1$ 是一个闭无界集。存在一个后继 *C*-序列 *D*，使得 C 是 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{D}}$-拉姆齐。

证明。我们可以假设 $C \subseteq \mathrm{LIM}(\omega_1)$。令 C 为定理 37 的证明中得到的 C-序列。定义一个新的 C-序列 D $= \{D_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$，其中 $D_\alpha(n) = C_\alpha(n) + 1$ 对每个 α 极限且 $n \in \omega$.。我们断言，若$\alpha, \beta \in C'$（其中 $\alpha < \beta$），则 $[\alpha\beta] = [\alpha\beta]_{\mathcal{D}} \in C$.。若 $[\alpha\beta]$ 是 α 或 β，则无需处理，因此假设 $\alpha < [\alpha\beta] < \beta$.。特别地，$\alpha \notin \mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)$，其中 $\triangle = \triangle_{\mathcal{D}}(\alpha, \beta)$。令 $\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) = \{\beta_0, ..., \beta_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_{n+1}\}$，其中 $\beta_0 = \beta$,$\beta_{i+1} = [\alpha\beta]$ 且 $\beta_{n+1} = \triangle$。注意 $\beta_{i+2} < \alpha < \beta_{i+1} = [\alpha\beta]$.。若 $[\alpha\beta]$ 是后继序数，则会有 $[\alpha\beta] - 1 < \alpha < [\alpha\beta]$，这显然不可能，因此 $[\alpha\beta]$ 是极限序数。于是 $\beta_i = [\alpha\beta] + 1$.。令 $j < i$ 为满足 β_j 是极限序数的最大值。

断言 39 $\beta_{j+2} \in C$.

首先考虑 $\beta_j \in C'$. 的情形。这样，存在 $\gamma \in C$ 使得$\beta_{j+1} = \gamma+1$，因此 $\beta_{j+2} = \gamma$.。若 $\beta_j \notin C'$，我们知道 $D_{\beta_j}(0) = \bigcup(C \cap \beta_j)+1$，它属于 C 且大于 α.。由此可得 $\beta_{j+1} = \bigcup(C \cap \beta_j) + 1$，并且$\beta_{j+2} = \bigcup(C \cap \beta_j)$。这就完成了断言的证明。

我们现在断言 $j = i - 1$.。如果情况并非如此，那么我们就有$j < i - 1$，于是:

$$\begin{aligned} j < i-1 &\implies j+2 < i+1 \\ &\implies j+2 \leq i \\ &\implies j+2 < i \end{aligned}$$

最后一个蕴含成立，是因为 β_i 是后继，而 β_{j+2} 是极限。但这与 j. 的极大性矛盾。由此，我们有 $[\alpha\beta] =\beta_{i+1} = \beta_{j+2} \in C$.。因此，$\{[\alpha\beta] \mid \alpha,\ \beta \in C'\} \subseteq C$, </style}所以 是 $\cdot\cdot]_{\mathcal{D}}$-拉姆齐。

■

10 破坏方括号运算

我们称方括号运算 $[\cdot\cdot]$ 具有拉姆齐俱乐部性质，如果 ω_1 的每个俱乐部子集都是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐。本节将证明，对于任何来自基模型的方括号运算，鲍姆加特纳俱乐部都不可能是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐。因此，可以证明某些方括号运算不具有拉姆齐俱乐部性质是一致的。

定理 40 $\mathbb{BC}$ 强迫泛俱乐部不是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的，对任意方括号运算 $[\cdot\cdot]$ （在 V. 中）

证明。设 $p_0 \in \mathbb{BC}$ 和 $\dot{B}$，使得 $p_0 \Vdash$“$\dot{B} \in [\omega_1]^{\omega_1}$”。我们要将 $.p_0$ 扩展为一个条件，使其强迫存在 $\alpha,\ \beta \in B$，满足 $[\alpha\beta]$ 不属于 $\mathcal{C}_{gen}$。令 $\langle M_\alpha \mid \alpha \leq \omega \rangle$ 为一条初等子模型的连续链，使得 $\dot{}$ 满足 $p_0,\ B \in M_0$，并包含我们要处理的方括号运算。为方便起见，我们引入以下记号:

1. $M = M_\omega$.2. $\delta = \delta_M$.3. $\delta_n = \delta_{M_n}$ 当 $n \in \omega$. 时 4. $p_0 = (a_0,\ I_0)$。

注意，$\delta = \bigcup \delta_n$.令 $p_1 = (a_0 \cup \{\delta\}\ \ I_0)$。我们知道 $p_1 \leq p_0$ 且$_{n\in\omega}\dot{}$是一个 $(M,\ \mathbb{BC})$-泛型条件（见命题 26）。由于 B 被强迫为

不可数，现在我们可以找到 $p \leq p_1$ 和 $\beta > \delta$，使得 $p \Vdash$“$\beta \in B$”。记$p = (a_p,\ I_p)$。由命题 28，我们知道 $p_M = (a_p \cap M,\ I_p \cap M)$ 属于 M，且比 $p.$ 弱。记 $p_M = (a_M,\ I_M)$。

现在，证明根据所讨论的方括号运算类型分成不同情形。我们先考虑由 C-序列诱导的运算这一情形，记作$\mathcal{C}$。为方便本部分证明中的记号，我们将用 $[\gamma\xi]$ 表示 $[\gamma\xi]_{\mathcal{C}}$，并用$\triangle(\gamma,\xi)$ 表示$\triangle_{\mathcal{C}}(\gamma,\xi)$（对任意的 $\gamma,\xi \in \omega_1$）。我们假设 $\mathcal{C} \in M_0.$

设 $g: T(\rho_0) \longrightarrow \omega$ 是一个满足 $g \in M_0.$ 的特化映射。取 $n \in \omega$，使得 $\lambda(\delta,\beta)$ 和 p_M 属于 $M_n,$，然后选取 $\xi < \delta_n$，使得 $\lambda(\delta,\beta)\ ,\lambda(\delta_n,\delta) < \xi$，且 ξ 在 $p_M.$ 之上。记 $s = \rho_{0\beta} \restriction \xi$，并取 $i \in \omega$ 使得 $g(\rho_{0\beta} \restriction \delta_n) = i.$。定义 A 为满足下列性质的所有 $t \in T(\rho_0)$ 构成的集合：

1. $s \subseteq t.$
2. $g\ (t)\ = i.$
3. 对每个 $\eta < \omega_1$，都存在 $q \in \mathbb{BC}$，使得：

   (a) $p_M \sqsubseteq q.$(b) 存在 $\alpha > \eta$，使得 $q \Vdash$“$\alpha \in B$”且 $t \subseteq \rho_{0\alpha}.$

由此可得 $A \in M_n,$ 因为用于在 A 中定义的所有参数都属于 $M_n.$。此外，注意到 $\rho_{0\beta} \restriction \delta_n \in A,$ 这意味着 $A \neq \emptyset.$。根据初等性，我们可以找到 $t \in A \cap M_n.$。由此可得 $s \subseteq t,\ \rho_{0\beta} \restriction \delta_n$，并且 t 和 $\rho_{0\beta} \restriction \delta_n$ 在 $T(\rho_0)$ 中不相容，因为 $g(t) = g(\rho_{0\beta} \restriction \delta_n)$。令 $\triangle = \triangle(\rho_{0\beta},\ t)$。我们考察 Tr($\triangle\ \delta_n$)。由于 $t \in A,$ 我们可以找到 $q = (a_q,\ I_q) \in \mathbb{BC}$ 和 α，使得：

1. $\alpha, q \in M_n.$2. 迹($\triangle\ \delta_n$) $\setminus \{\delta_n\} \subseteq \alpha.$3. $p_M \sqsubseteq q.$4. $q \Vdash$“$\alpha \in B$”和 $t \subseteq \rho_{0\alpha}.$

由此可得 $\triangle\ = \triangle(\alpha,\beta)$。取一个 $\varepsilon < \delta_n$，使其高于 $q.$。定义 $r = (a_p \cup a_q, I_p \cup I_q \cup \{(\varepsilon,\delta_n]\})$。由此可得，$r$扩展了 p 和 q；它是 $(M,\mathbb{BC})$-泛型强迫，但不是 $(M_n,\mathbb{BC})$-泛型强迫。注意，$r \Vdash$“$\alpha,\beta \in B$”和 $r \Vdash$“$\delta_n \notin C_{gen}$”。现在我们来计算 $[\alpha\beta]\ .$。回忆一下，$\lambda(\delta,\beta)\ \ \lambda(\delta_n,\delta) < \triangle$。由命题 22 可得：

$$迹(\triangle\ \beta) = 迹(\delta, \beta) \cup 迹(\delta_n, \delta) \cup 迹(\triangle\ \delta_n)$$

由于 $\alpha < \delta_n$，且 $\mathrm{Tr}(\triangle\ \delta_n) \setminus \{\delta_n\} \subseteq \alpha$，因此 $[\alpha\beta] = \delta_n$，它被 r 强迫处于 C_{gen}之外

现在我们考虑由实数序列$\mathcal{R} = \{r_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ 和 $e = \langle e_\beta \mid \beta \in \omega_1\rangle$ 一个良序列所诱导的运算情形。在这部分证明中，为了记号便利，我们将把 $[\gamma\xi]$ 记作 $[\gamma\xi]_{\mathcal{R},e}$，并将 $\triangle(\gamma, \xi)$ 记作 $\triangle_{\mathcal{R}}(\gamma, \xi)$（对于任意 $\gamma, \xi \in \omega_1$）。我们假设 $\mathcal{R}\ e \in M_0$.

找出 $n \in \omega$ 使得 $p_M \in M_n$。定义 $m = e_\beta(\delta_n)$ $s = r_\beta \restriction m$ 和$F = \{\xi < \beta \mid e_\beta(\xi) \leq m\} \cap M_n$. 由于 F是一个有限集，我们有 $F \in M_n$.选择 $\eta < \delta_n$ 使得 $F \subseteq \eta$ 且 η 高于 p_M. 令 A 为所有满足以下性质的$t \in 2^{<\omega}$ 的集合：存在 $q \in \mathbb{BC}$

1. $s \subseteq t$.2. $p_M \sqsubseteq q$.3. $q \Vdash$ “$\exists^{\omega_1}\alpha \in B(r_\alpha \in \langle t\rangle)$”.

注意，如果 $k > m$，那么 $r_\beta \restriction k \in A$，其见证为 $p.$。由于 $A \in M_n$，而 r_β并非如此，我们可以找到 $t \in A$，使得 $r_\beta \notin t$。记 $\triangle = \triangle(t, r_\beta) \geq m.$。由初等性可知，我们可以找到 $q_0 \in \mathbb{BC} \cap M_n$，使得 $p_M \sqsubseteq q_0$ 且 $q_0 \Vdash$“$\exists^{\omega_1}\alpha \in B(r_\alpha \in t)$”。令 $H = \{\xi < \beta \mid e_\beta(\xi) \leq \triangle\} \cap M_n.$。现在我们可以找到 $q = (a_q, I_q) \in M_n$，它扩张 q_0 和 $\alpha \in M_n$，使得 $q \Vdash$“$\alpha \in B$”，$r_\alpha \in t$，且 $H \subseteq \alpha.$。注意 $\triangle = \triangle(\alpha, \beta)$。选取一个高于 q的 $\varepsilon \in M_n$，并定义 $r = (a_p \cup a_q, I_p \cup I_q \cup \{(\varepsilon, \delta_n]\})$。由此可得，$r$扩张 p且 q；它是$(M, \mathbb{BC})$-泛型，但不是 $(M_n, \mathbb{BC})$-泛型。由此可得 $r \Vdash$“$\alpha, \beta \in B$”且$r \Vdash$ “$\delta_n \notin C_{gen}$”。此外，容易看出 $[\alpha\beta] = \delta_n$，而

. r 强迫它不属于 C_{gen}.

最后一种情形是，该运算由豪斯多夫特殊的 Aron-szajn 树 T 和 a所诱导：$T \longrightarrow \omega$ 一个特化映射。为方便记号，我们现在将 $[st]$ 记作$[st]_{T,r}$。我们可以假设 $T, a \in M_0$. 还需要再做一项更改：现在 B 被强迫为 T 的不可数子集，并且 $\beta > \delta$是某个 $t \in T$的高度，使得 $p \Vdash$“$t \in B$”。

选取 $n \in \omega$ 使得 $p_M \in M_n$。现在我们可以定义 $m = a(t \restriction \delta_n)$ 和$F = \{\eta < \beta \mid a(t \restriction \eta) \leq m\} \cap M_n.$由于 F是一个有限集，我们有 $F \in M_n$。选取 $\xi < \delta_n$ 使得 $F \subseteq \xi$，且 ξ高于 $p_M.$。令 A 为所有满足下列性质的 $s \in T$组成的集合：存在 $q \in \mathbb{BC}$，使得：

1. $t \restriction \xi \leq_T s$.
2. $p_M \sqsubseteq q$.

3. $q \Vdash$“$s \in B$”。

由此可得 $A \in M_n$ 和 $t \in A.$。应用命题 15，可找到 $\gamma \in M$和 $w \in T_\gamma$，使得 $w \perp t$，并且存在不可数多个 $s \in A$，使得$w \leq_T s.$。我们考察 $w \wedge t.$。由于 $\xi < |w \wedge t|$，因此 $a(w \wedge t) > m = a(t \restriction \delta_n)$。定义 $G = \{\eta < \beta \mid a(t \restriction \eta) \leq a(w \wedge t)\} \cap M_n.$ 同样， $G \in M_n$，因为它是 $M_n.$ 的有限子集。现在我们可以找到满足以下性质的 $s \in A \cap M_n$和 $q \in \mathbb{BC} \cap M_n$：

1. $w \leq_T s$.2. 对每个
$\eta \in G.$，都有 $|s| > \eta$ 3.
$p_M \sqsubseteq q$.4. $q \Vdash$“$s \in B$”。

注意， $s \wedge t = w \wedge t.$ 选取 $\varepsilon \in M_n$ 使其高于 q，并定义 $r = (a_p \cup a_q, I_p \cup I_q \cup \{(\varepsilon, \delta_n]\})$. 由此可知， r 延伸了 p，且 q，它是$(M, \mathbb{BC})$-泛型，但不是$(M_n, \mathbb{BC})$-泛型。注意， $r \Vdash$“$s, t \in B$”和 $r \Vdash$“$\delta_n \notin C_{gen}$”。此外，我们有 $[st] = t \restriction \delta_n$，其高度被 r 强迫为处于C_{gen}之外

现在我们要证明，马丁公理（MA）与存在不具备拉姆齐俱乐部性质的方括号运算相容。为确立这一结果，我们旨在证明，对于基模型中的方括号运算，鲍姆加特纳闭无界集会使该性质严重失效，以至于无法通过可数链条件力迫来修复这一性质。遗憾的是，我们只能对由 C-序列诱导的方括号运算证明这一结果。

命题 41 设 $\dot{\mathbb{Q}}$ 是一个用于可数链条件力迫的 $\mathbb{BC}$-名称，且 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{C}$-序列。. $\mathbb{BC} * \mathbb{Q}$ 强迫泛俱乐部不是 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$-拉姆齐的。

证明。 我们采用一种类似于定理 40 的方法。不过，由于处理迭代时会出现额外困难，这个证明还涉及更多复杂之处。为方便记号起见，我们将 $[\gamma\xi]$ 写作 $[\gamma\xi]_{\mathcal{C}}$，并将 $\triangle(\gamma, \xi)$ 写作 $\triangle_{\mathcal{C}}(\gamma, \xi)$（对于任意 $\gamma, \xi \in \omega_1$）。

设 $(p_0, \dot{x}) \in \mathbb{BC} * \dot{\mathbb{Q}}$ 且 $\dot{B}$ 满足 $(p_0, \dot{x}) \Vdash$“ $\dot{B} \in [\omega_1]^{\omega_1}$”。我们要将$(p_0, \dot{x})$扩展为一个条件，强迫存在 $\alpha, \beta \in B$ 使得 $[\alpha\beta]$ 不在 $\dot{C}_{gen}$中。令 $\langle M_\alpha \mid \alpha \leq \omega^2 \rangle$ 为初等子模型的连续链，满足 $\mathbb{Q}, (p_0, \dot{x})$ $B, \mathcal{C} \in M_0$。为方便起见，我们引入以下记号：

1. $M = M_{\omega^2}$.
2. $\delta = \delta_M$.

3. $\delta_\alpha = \delta_{M_\alpha}$ 对于 $\alpha < \omega^2$.

4. $p_0 = (a_0,\ I_0)$。

令 $p_1 = (a_0 \cup \{\delta\}\ \ I_0)$。根据推论 27，我们知道 $(p_1, \dot{x}) \leq (p_0, \dot{x})$ 是一个 $(M, \mathbb{BC} * \mathbb{Q})$-泛型条件。由于 B 被强迫为不可数，我们现在可以找到 $(p, \dot{y}) \leq (p_1, \dot{x})$ 和 $\beta > \delta$，使得 $(p, \dot{y}) \Vdash$“$\beta \in B$”。记作 $p = (a_p, I_p)$。根据命题 28，我们知道 $p_M = (a_p \cap M, I_p \cap M)$ 属于 M 且弱于 $p.$。记 $p_M = (a_M, I_M)$。

令 $g:\ T(\rho_0) \longrightarrow \omega$ 是一个特化映射，满足 $g \in M_0$. 寻找一个极限序数 $\gamma < \omega^2$，使得 $\lambda(\delta, \beta)\ p_M \in M_\gamma$。选择高于 p_M的 $\eta < \delta_\gamma$，并且 $\lambda(\delta, \beta)\ \lambda(\delta_\gamma, \delta) < \eta$. 由于 γ 是极限序数，我们可以找到 $\varepsilon < \gamma$，使得 $\eta < \delta_\varepsilon$。注意，$\delta_\gamma \in \mathrm{Tr}(\delta_\varepsilon, \delta)$。再次，由于 γ 是极限序数，我们可以找到 $\alpha \in (\varepsilon, \gamma)$，使得 $\mathrm{Tr}(\delta_\varepsilon, \delta_\gamma) \setminus \{\delta_\gamma\} \subseteq \delta_\alpha$. 定义 $q = (a_p \cup \{\delta_\varepsilon, \delta_\alpha\}\ \ I_p \cup \{(\delta_\alpha, \delta_\gamma]\})$。由此可知，$q$ 是对于 M、M_ε 和 M_α的 $\mathbb{BC}$-泛型条件，但它不是对于 M_γ. 的。令 $G \subseteq \mathbb{BC}$ 为一个泛型滤子，满足 $q \in G$.

现在我们转到 $V[G]$. 注意到 $M[G]$，$M_\varepsilon[G]$ 和 $M_\alpha[G]$ 分别是 M, M_ε和 M_α的力迫扩张。记 $y = \dot{y}[G]$, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[G]$ 和$i \in \omega$，使得 $g(\rho_{0\beta} \restriction \delta_\varepsilon) = i$. 将 A 定义为满足下列条件的 $w \in \mathbb{Q}$ 的集合：存在$t \in T(\rho_0)$，使得：

1. $\rho_{0\beta} \restriction \lambda(\delta_\varepsilon, \delta_\gamma)\ \ \rho_{0\beta} \restriction \eta \subseteq t$.
2. $g(t) = i$.
3. $w \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \mu \in B$ $(t \subseteq \rho_{0\mu})$”。

若 $w \in A$ 和 t 如上所述，我们称 t 是 $w \in A$. 的一个见证。注意到 $A \in M_\varepsilon[G]$. 我们断言 $y \in A$，且 $\rho_{0\beta} \restriction \delta_\varepsilon$ 是它的一个见证。我们只需验证 $y \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \mu \in B(t \subseteq \rho_{0\mu})$”。为验证这一点，令 $H \subseteq \mathbb{Q}$为一个带有 $y \in H$. 的 $(V[G],\ \mathbb{Q})$ 泛型滤子。我们有 $M[G][H]$ 是 $M[G],$ 的泛型扩张，而后者是 $M,$ 的泛型扩张，因此 $\beta \notin M[G][H]$. 根据引理 9，$\{\mu \in B[G \times H] \mid t \subseteq \rho_{0\mu}\}$ 是不可数的。由于 H是任意一个含有 y 的泛型滤子，因此 $y \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \mu \in B(t \subseteq \rho_{0\mu})$”，正如我们所需。

我们现在知道 $y \in A$. 由于 $\mathbb{Q}$ 满足可数链条件，且 $A \in M_\varepsilon[G]$, 由命题 17 和引理 16 可知，存在一个与 y. 相容的 $w \in A \cap M_\varepsilon[G]$。选取 $t \in T(\rho_0) \cap M_\varepsilon[G]$ 作为 $w \in A$. 的见证。由于 $g(t)$ 和 $g(\rho_{0\beta} \restriction \delta_\varepsilon)$相同，因此 t 和 $\rho_{0\beta}$ 在 $T(\rho_0)$中不可比较。选取 $u \in \mathbb{Q}$作为 w 和 y.的公共扩展。

有了最近获得的新知识，我们回到 V. 设 $\dot{u}$ 和 $\dot{w}$ 是$\mathbb{BC}$的名称，分别对应 u 和 $w.$。现在我们可以找到 $r \leq q$，使得：

1. $r \Vdash$“$\dot{w} \in A$”并且知道一个作为见证的 $t \in M_\varepsilon$。
2. $r \Vdash$“$\dot{u} \leq \dot{w}, \dot{y}$”。

由此可知 $(r,\ \dot{u}) \leq (p,\ \dot{y})$（因此 $(r,\ \dot{u}) \Vdash$“$\beta \in B$”），并且 $(r,\ \dot{u}) \Vdash$“$t \subseteq \rho_{0\mu}$”。记 $\triangle = \triangle(\rho_{0\beta}, t)$（回顾 $\rho_{0\beta} \perp t$）。由于 $\lambda(\delta,\beta)\ \lambda(\delta_\gamma,\delta)\ \lambda(\delta_\varepsilon, \delta_\gamma) < \triangle$, 我们有：

$$\mathsf{Tr}(\triangle,\beta) \quad = \quad \mathsf{Tr}(\delta,\beta) \cup \mathsf{Tr}(\delta_\gamma,\delta) \cup \mathsf{Tr}(\delta_\varepsilon,\delta_\gamma) \cup \mathsf{Tr}(\triangle,\delta_\varepsilon)$$

同样值得回顾的是，迹$(\delta_\varepsilon,\delta_\gamma) \setminus \{\delta_\gamma\} \subseteq \delta_\alpha$, 因此迹$(\triangle\ \beta) \cap \delta_\gamma \subseteq \delta_\alpha$.这样一来，$\delta_\gamma = \min\{$迹$(\triangle\ \beta) \setminus \delta_\alpha\}$. 根据推论 27，我们知道 $(r, \dot{u})$ 是一个 $(M_\alpha, \mathbb{BC} * \mathbb{Q})$-泛型条件。由于 $(r, \dot{u}) \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \mu \in B\ (t \subseteq \rho_{0\mu})$, 我们可以找到 $(r_0, \dot{u}_0)$ 和 μ 使得：

1. $(r_0,\ \dot{u}_0) \leq (r,\ \dot{u})$。2. $\mathsf{Tr}(\triangle\ \beta) \cap \delta_\gamma \subseteq \mu$ 以及 $\mu < \delta_\alpha$.3. $t \subseteq \rho_{0\mu}$.4. $(r_0,\ \dot{u}_0) \Vdash$“$\mu \in B$”。

由此可得 $\triangle = \triangle(\mu,\ \beta)$ 和 $[\mu\beta] = \delta_\gamma$, 这 r_0 迫使 $\dot{C}_{gen}$ 不属于 ■

要将这一结果推广到其他方括号运算，难点在于如何选择 α.。对于由 C-序列诱导的运算，存在一种自然的选择；但在其他情形下，相应的选择应当是什么，目前尚不清楚。

首先添加一个鲍姆加特纳闭无界集，然后通过可数链条件力迫强迫马丁公理（马丁公理），即可得到以下相容性结果：

定理 42 命题“存在一个 *C*-序列，其方括号运算不具有拉姆齐俱乐部性质”与马丁公理以及任意大的连续统相容。

可以证明，对于形如 $\mathbb{COL}_\in(\kappa) * \mathbb{P}$ 的力迫，无法修复 Baumgartner 泛型闭无界集的 $[\cdot\cdot]_\mathcal{C}$-拉姆齐俱乐部性质的失效，其中 $\mathbb{COL}_\in(\kappa)$ 表示 κ 的 $\in$-塌缩（见 [41]），而 $\mathbb{P}$ 是一个 ω-正规迫的名称。该结果将发表于一篇即将发表的论文中。

11 处理所有方括号运算

在上一节中，我们证明了存在不具备拉姆齐俱乐部性质的方括号运算是相容的。事实上，鲍姆加特纳俱乐部见证了基模型中所有运算的这一性质失效。现在，我们旨在构造这样的模型：其中没有任何方括号运算具备拉姆齐俱乐部性质。注意，根据定理 37，不可能由单个闭无界集同时见证所有此类运算的这一失效。为了构造一个使每个方括号运算都不具备拉姆齐俱乐部性质的模型，我们将使用 Asper´o 的积添加许多 Baumgartner 俱乐部。

定理 43 “不存在具有拉姆齐俱乐部性质的方括号运算”这一陈述与连续统可以任意大相一致。

证明。设 $\kappa \geq \omega_2$ 是一个基数，使得 $\kappa^{\omega_1} = \kappa$. 我们断言，使用 $\mathbb{BC}^{(\kappa)}$ 进行力迫会产生所需的模型。取一个 $G \subseteq \mathbb{BC}^{(X)}$ 泛型滤子。我们已经知道 $V[G] \models \mathfrak{c} = \kappa$ （见命题 36）。令 $[\cdot\cdot]$ 是 $V[G]$. 中的一个方括号运算。由于 $[\cdot\cdot]$ 是一个大小为 ω_1 的对象，并且 $\mathbb{BC}^{(\kappa)}$ 具有 ω_2-c.c.，我们可以找到 $\alpha \in \kappa$ ，使得 $[\cdot\cdot]$ 仅取决于 $\mathbb{BC}^{(X)}$，其中$X = \kappa \setminus \{\alpha\}$。由于 $\mathbb{BC}^{(\kappa)}$与 $\mathbb{BC}^{(X)} \times \mathbb{BC}$强迫等价，结论由定理 40 得出。

我们想强调以下结果，它由前一个定理、 [40] 的引理 5.4.4 以及后续各节中建立的结果推出：

推论 44 以下两个陈述都与 *ZFC* 相容（但不能同时成立）：

1. 所有方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质。
2. 没有任何方括号运算具有拉姆齐俱乐部性质。

换言之，对于任意方括号运算，ZFC 都无法判定其拉姆齐俱乐部性质是否成立。

现在，我们的目标是构造一个马丁公理的模型，其中没有任何由 C-序列诱导的方括号运算具有拉姆齐俱乐部性质。我们先添加许多 Baumgartner 俱乐部，再以通常的方式力迫马丁公理，从而得到所需的模型。为此，我们需要若干初步的技术引理。

令 X 为一个序数集合， $\beta \in X$ 且 $\dot{B}$ 为一个 $\mathbb{BC}^{(X)}$-名称。我们称 $\dot{B}$ 不依赖于 β ，如果 $\dot{B}$ 等价于一个 $\mathbb{BC}^{(X\setminus\{\beta\})}$-名称。我们有如下结论：

命题45 令 $\kappa \geq \omega_1$ 为一个正则基数， $\dot{\mathbb{P}}$ 为一个 $\mathbb{BC}(\kappa^+)$-名称，用于表示大小为 κ 的偏序； $\dot{f}$ 为一个 $\mathbb{BC}(\kappa^+)$-名称，表示 ω_1. 上的一个运算。存在$\beta \in \kappa^+$ 使得：

1. $\mathbb{P}$ 和 f 不依赖于 β 2. $\mathbb{BC}(\kappa^+) * \dot{\mathbb{P}}$ 和 $(\mathbb{BC}^{(\kappa^+ \setminus \{\beta\})} * \dot{\mathbb{P}}) \times \mathbb{BC}$ 是强迫等价的。

证明。我们可以假设基模型中存在一个集合 P ，使得$\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$。对于每个 $x, y \in P$ 和 $\alpha, \beta \in \omega_1$，定义集合 $D(x, y, \alpha, \beta)$ 为所有满足以下条件的 $p \in \mathbb{BC}(\kappa^+)$ 构成的集合：要么 $p \Vdash$“$x \leq_{\dot{\mathbb{P}}} y$”，要么 $p \Vdash$“$x \not\leq_{\dot{\mathbb{P}}} y$”，并且存在 $\gamma \in \omega_1$，使得 $p \Vdash$“$\dot{f}(\alpha, \beta) = \gamma$”。显然，每个 $D(x, y, \alpha, \beta)$ 都是 $\mathbb{BC}(\kappa^+)$ 的开稠密子集。取 $A(x, y, \alpha, \beta) \subseteq D(x, y, \alpha, \beta)$ 为一个极大反链，并令 A 为所有这些反链的并。定义 $B = \bigcup\{\mathrm{sup}(p) \mid p \in A\}$。由于 $\mathbb{BC}(\kappa^+)$ 具有 ω_2-链条件，因此可得 $|B| \leq \kappa$ $\beta \in \kappa^+$ $B.$，所以我们可以找到 \ 我们断言 β 符合要求。显然， $\mathbb{P}$和 $\dot{f}$ 不依赖于 β.

为便于书写，记作 $X = \kappa^+ \setminus \{\beta\}$。定义函数 F：$(\mathbb{BC}^{(X)} * \dot{\mathbb{P}}) \times \mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{BC}(\kappa^+) * \dot{\mathbb{P}}$，其定义为 $F(p, \dot{x}, r) = (p^\frown r, \dot{x})$， 其中 $p^\frown r \in \mathbb{BC}(\kappa^+)$ 满足 $\mathrm{sup}(p^\frown r) = \mathrm{sup}(p) \cup \{\beta\}$ $p \subseteq p^\frown r$，且 $p^\frown r(\beta) = r.$。容易看出， F 是一个稠密嵌入。 ■

我们需要以下结果（参见 [11]的定理 2.1 及其下方的注记）。

命题 46 设 κ 是一个正则基数， $\mathbb{P}$ 是一个偏序，且 $\mathbb{Q}$ 是一个关于力迫的 $\mathbb{P}$-名称。

1. 若 $\mathbb{P}$ 满足 κ-链条件，且它强迫 $\dot{\mathbb{Q}}$ 也满足 κ-链条件，则 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ 满足 κ-链条件。
2. 若 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ 满足 κ-链条件，则 $\mathbb{P}$ 满足 κ-链条件，并且强迫 $\dot{\mathbb{Q}}$ 满足 κ-链条件。

特别地，我们得到：如果 $\dot{\mathbb{P}}$ 是一个可数链条件偏序的 $\mathbb{BC}^{(X)}$-名称，那么 $\mathbb{BC}^{(X)} * \dot{\mathbb{P}}$ 是 ω_2-可数链条件。以下引理可由命题 36 和标准论证推出。

引理 47（广义连续统假设）设 $\kappa > \omega_1$ 是一个正则基数，且 $X \subseteq$ 是大小为 $\kappa.$ 的序数类。以下结论成立：

1. $\mathbb{BC}^{(X)}$ 的大小为 $\kappa.$
2. $\mathbb{BC}^{(X)}$ 强迫“$\mathfrak{c} = 2^{<\kappa} = \kappa \wedge 2^\kappa = \kappa^+$”。

现在我们可以证明本节的主要结果：

定理 48 “由 *C*-序列诱导的方括号运算均不具有拉姆齐俱乐部性质”这一陈述与马丁公理以及任意大的连续统相容。

证明。 假设基模型满足 GCH，选取 $\kappa \geq \omega_1$ 一个正则基数，并令 $G \subseteq \mathbb{BC}^{(\kappa^+)}$ 为一个泛型滤子。我们转到 $V[G]$. 在这里，我们知道 $\mathfrak{c} = \kappa^+$ 以及 $2^{<\kappa^+} = 2^\kappa = \kappa^+$. 。根据定理 21 的标准证明，存在一个由 c.c.c.力迫构成的有限支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \mid \alpha \leq \kappa^+ \rangle$ ，使得 $\mathbb{P}_{\kappa^+}$强迫“$\mathfrak{m} = \mathfrak{c} = \kappa^+$”，并且若 $\alpha < \kappa^+$, 则 $|\mathbb{P}_\alpha| \leq \kappa$. 。为方便起见，记作 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa^+}$.

我们回到 V，并断言 $\mathbb{Q} = \mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}}$ 就是我们要找的偏序。我们已经知道 $\mathbb{Q}$ 强迫“$\mathfrak{m} = \mathfrak{c} = \kappa^+$”。剩下要证明的是，它也强迫不存在具有拉姆齐闭无界集性质的方括号运算。令 f 为一个方括号运算的 $\mathbb{Q}$-名称。由于 $\mathbb{Q}$ 满足 ω_2-可数链条件，且 $\kappa^+ > \omega_1$ 是正则的，我们可以找到 $\alpha < \kappa^+$ ，使得 $\dot{f}$ 等价于一个 $\mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha$-名称。令 $\dot{\mathbb{R}}$ 为商 $\mathbb{P}_{\kappa^+}/\mathbb{P}_\alpha$.的一个 $\mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha$-名称。如此一来， $\mathbb{Q} \equiv (\mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha) * \dot{\mathbb{R}}$ （其中 $\equiv$ 表示强迫等价）。注意，根据命题 46, $\dot{\mathbb{R}}$ 被强迫为可数链条件。由于根据命题 45， $\mathbb{P}_\alpha$ 被强迫其大小至多为 κ, ，我们可以找到 $\beta \in \kappa^+$ ，使得以下条件成立：

1. $\mathbb{P}_\alpha$ 和 f 不依赖于 β.

2. $\mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha \equiv (\mathbb{BC}^{(\kappa^+ \setminus \{\beta\})} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha) \times \mathbb{BC}$.

这样，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}} \\ &\equiv (\mathbb{BC}^{(\kappa^+)} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha) * \dot{\mathbb{R}} \\ &\equiv ((\mathbb{BC}^{(\kappa^+ \setminus \{\beta\})} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha) \times \mathbb{BC}) * \dot{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

由此可知， $\dot{f}$ 将在由 $\mathbb{BC}^{(\kappa^+ \setminus \{\beta\})} * \dot{\mathbb{P}}_\alpha$, 所得的扩张中存在，随后是 $\mathbb{BC}$ ，再之后是一个可数链条件力迫。我们可以应用命题 41，并得出结论：在最终扩张中， f 不具有拉姆齐俱乐部性质。

■

请注意，如果能够证明命题 41 对其他方括号运算也成立，那么定理 48 的论证也同样适用于它们。

12 方括号运算与连续统假设

既已确定马丁公理与方括号运算的拉姆齐俱乐部性质之间（不存在）关系，我们现在转而讨论连续统假设。显然，若连续统假设在基模型中成立，那么添加一个鲍姆加特纳俱乐部仍会保留它。因此，定理 40 蕴含连续统假设

与存在不具有拉姆齐俱乐部性质的方括号运算相容。本节的目标是证明一个更强的结果：连续统假设（甚至 $\diamondsuit$）与每一种方括号运算都不具有拉姆齐俱乐部性质相容。我们无法像前几节那样进行，因为添加许多鲍姆加特纳俱乐部会迫使连续统假设失效。相反，我们将使用一种由 Baumgartner、Harrington 和 Kleinberg 引入的力迫概念，通过可数条件添加一个闭无界集 [9] （另见 [18]）。

定义49 令 $\mathbb{SC}$ 为 ω_1.的所有闭的可数子集构成的集合。对于 p、$q \in \mathbb{SC}$，定义 $q \leq p$，当且仅当 p 是 q.的初始段。

$\mathbb{SC}$ 是用可数条件通过 ω_1 射击一个闭无界集的通常力迫。显然，$\mathbb{SC}$ 是一个 σ-闭树。若 $G \subseteq \mathbb{SC}$ 是泛型滤子，则泛俱乐部定义为 $C_{gen} = \bigcup G.$。不难验证，C_{gen} 被强迫为 ω_1.上的一个闭无界集。下面的引理简单且众所周知。

引理50 设 M 是一个可数初等子模型。

1. 若 $p \in \mathbb{SC}$ 是$(M, \mathbb{SC})$-泛型的，则 $\delta_M \in p$.。*2.* 设 $p \in \mathbb{SC} \cap M.$。存在 $q \leq p$，使得某个$(M, \mathbb{SC})$-泛型条件满足$\delta_M = max(q)$。

论文 [17] 给出了一个完全真力迫 $\mathbb{P}$ 的例子，其中存在一些条件是$(M, \mathbb{P})$-泛型的，却不是$(M, \mathbb{P})$-完全脱殊的。幸运的是，这种现象不会发生在我们的力迫 $\mathbb{SC}$.中。

引理51 设 M 是一个可数初等子模型，并且 $p \in \mathbb{SC}.$ 若 p 是$(M, \mathbb{SC})$-泛型的，则它是$(M, \mathbb{SC})$-完全脱殊的。

证明。设 $D \in M$ 是 $\mathbb{SC}.$ 的一个开稠密子集。由 p的泛型性，存在 $q \in D \cap M$ 与 $p.$ 相容。由于 $\mathbb{SC}$ 是一棵树，必然有 $p \leq q$ 或 $q \leq p.$。由于 $\max(q) < \delta_M \leq \max(p)$，于是 $q \leq p.$。由此可知 $p \in D$，因为 D 是 $\mathbb{SC}$.的开子集。 ■

我们还有如下结果：

引理52 设 $\{M_n \mid n \in \omega\}$ 是可数初等子模型的连续递增链，并且 $M = \bigcup M_n.$ 若 $p \in \mathbb{SC}$ 对于每个 $n \in \omega$都是 $(M_n, \mathbb{SC})$-泛型的，则 p 是 $(M, \mathbb{SC})$-泛型的。

证明。我们将证明 p 是 $(M, \mathbb{SC})$-完全脱殊的。设 $D \in M$ 是 $\mathbb{SC}.$ 的一个开稠密子集。选取 $n \in \omega$ 使得 $D \in M_n.$。由于 p 是 $(M_n, \mathbb{SC})$-完全脱殊的，因此 $p \in D.$。 ■

为确立本节的主要结果，我们必须先引入新的定义并证明若干辅助引理。我们从一些关于实数集的不可数子集的预备结果开始。

定义 53 设 X 是 2^{ω}. 的一个子集。 X 的核树 （记作 $S(X)$）由所有使集合 $\langle s\rangle \cap X$ 不可数的 $s \in 2^{<\omega}$ 组成。

我们有以下简单的观察。

引理 54 如果 $X \subseteq 2^{\omega}$ 是不可数的，那么 $S(X)$ 是一棵萨克斯树。

下面的结果也很容易，因此留给读者证明。

引理 55 设 $X \subseteq 2^{\omega}$ 是不可数的， M 是一个可数初等子模型，满足 $X \in M.$。如果 $r \in X \mid M$，那么 $r \in [S(X)]$.

现在我们引入本节主要定理所需的有关阿隆佐恩树的定义和结果。

定义 56 设 $(T, \leq_T)$ 是一棵阿隆佐恩树， $s \in T$、 $p \in \mathbb{SC}$，且 B 是一个 $\mathbb{SC}$-名称，表示 $T.$ 的不可数子集。我们称：

1. p $\dot{B}$-消灭 s 若存在 $t <_T s$ 使得 $p \Vdash$“$\forall z \in \dot{B}(t \not\leq_T z)$”。
2. p B-冻结 s 若对每个 $t <_T s$，都有 $p \Vdash$“$\exists^{\omega_1} z \in B(t \leq_T z)$”。
3. p B-决定 s 若 p 要么 B-消灭 s ，要么 B-冻结 $s.$

需要特别注意的是，在消灭和冻结的定义中，节点t都必须严格低于 $s.$。我们有如下引理。

引理 57 设 $(T, \leq_T)$ 是一棵阿隆佐恩树， B是一个关于 $\mathbb{SC}$-名称的名称，其对应于 T的一个不可数子集； M 是一个满足 B的可数初等子模型， $T \in M$是一个 $(M, \mathbb{SC})$-泛型条件，且 $\delta = \delta_M.$。以下结论成立：

1. p B-决定每个 $s \in T_{\delta}.$
2. 存在 $s \in T_{\delta}$ ，使得 p B-冻结 $s.$

证明。 我们先证明第一点。设 $s \in T_{\delta}.$ 由于 p 是（M， $\mathbb{SC}$）-完全脱殊的，因此对每个 $t <_T s$， 以下陈述之一成立：

1. $p \Vdash$“$\exists^{\omega_1} z \in B(t \leq_T z)$”。
2. p 强迫集合 $\{z \in B \mid t \leq_T z\}$ 至多可数。

如果第一点对每个 $t <_T s$,都成立，那么我们就有 p B-冻结了s ，证明完毕。假设存在 $t <_T s$ ，使得 强迫集合$\{z \in B \mid t \leq_T z\}$ 至多可数。再次运用完全泛性质，我们知道存在 $\alpha < \delta$ ，使得 $p \Vdash$“$\{|z| \mid z \in B \wedge t \leq_T z\} \subseteq \alpha$”。由此可得 $p \Vdash$“$\forall z \in \dot{B}(s \restriction \alpha \not\leq_T z)$, 因此 p $\dot{B}$-消灭了 s.

现在我们将证明， p B在层 δ. 处冻结一个节点。由于 B 被强迫为不可数，我们可以找到满足 $|z| > \delta$ 和 $q \leq p$ 的 $z \in T$，使得 $q \Vdash$“$z \in B$”。令 $s = z \restriction \delta$. 。由此可知， p 无法 B 消灭 s, 因此 p 将其冻结。

令 $e = \langle e_\beta \mid \beta \in \omega_1 \rangle$ 为一个良序列。定义树 $T(e) = \{e_\beta \restriction \alpha \mid \alpha \leq \beta < \omega_1\}$。如果方括号运算 $[\cdot\cdot]$ 属于以下类型之一，则称其为 Aronszajn 方括号运算：

1. $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$ ，其中$\mathcal{C}$ 是一个 C-序列。2. $[\cdot\cdot]_{T,\, a}$ ，其中 T 是豪斯多夫特殊阿隆佐恩树，且 a: $T \longrightarrow \omega$ 是一个特化映射。3. $[\cdot\cdot]_{\mathcal{R},\, e}$ ，其中$\mathcal{R} = \{r_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ ，并且 $e = \langle e_\beta \mid \beta \in \omega_1 \rangle$ 是一个良序列，且 $T(e)$ 是一棵 Aronszajn 树。

现在我们可以证明以下结论：

命题 58 $\mathbb{SC}$ 强迫泛俱乐部对于任意阿朗佐扬方括号运算 $[\cdot\cdot]$ ，都不是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的。

证明。 设 $p \in \mathbb{SC}$ 和 $\dot{B}$ 满足 $p \Vdash$“ $\dot{B} \in [\omega_1]^{\omega_1}$”。我们要将 p 扩展为一个条件，强迫存在 $\alpha, \beta \in B$ ，使得 $[\alpha\beta]$ 不属于 C_{gen}。令$\langle M_\alpha \mid \alpha \leq \omega^2 \rangle$ 为可数初等子模型的连续链，满足 $B \in M_0$, 并且包含我们要处理的方括号运算。为方便起见，我们引入以下记号：

1. $M = M_{\omega^2}$.2. $\delta = \delta_M$.
3. 序数类 $\alpha < \omega^2$.

现在，证明根据所考虑的方括号运算类型分为不同情形。我们先讨论由 C-序列诱导的运算情形，记作 $\mathcal{C}$。 我们假设 $\mathcal{C} \in M_0$. 为方便本部分证明中的记号，我们将记 T为 $T(\rho_0)$ $[\gamma\xi]$为 $[\gamma\xi]_{\mathcal{C}}$，并将 $\triangle(\gamma, \xi)$ 记作 $\triangle_{\mathcal{C}}(\gamma, \xi)$（对任意 $\gamma, \xi \in \omega_1$）。为简化记号，我们有时会将子集 $W \subseteq \omega_1$ 与对应集合 $\{\rho_{0\alpha} \mid \alpha \in W\}$。视为相同。

固定一个枚举 $T_\delta = \{s_n \mid n \in \omega\}$，使得 T_δ 中的每个元素都出现无穷多次。现在我们将递归地构造一个序列$\langle \varepsilon_n, \gamma_n, \mu_n, q_n, z_n, t_n, \triangle_n \rangle_{n\in\omega}$，满足以下性质[3]:

1. $\omega n < \varepsilon_n < \mu_n < \gamma_n < \omega^2$.2. $\gamma_n < \varepsilon_{n+1}$.3. $q_{n+1} \leq q_n \leq p$ 和 $q_n \in M$. 4. q_n 既是 $(M_{\varepsilon_n}, \mathbb{SC})$-泛型的，也是 $(M_{\mu_n}, \mathbb{SC})$-泛型的。 5. $\max(q_n) = \delta_{\gamma_n}+1$ 和 $\delta_{\gamma_n} \notin q_n$（特别地，$q_n$ 不是 $(M_{\gamma_n}, \mathbb{SC})$-泛型的）。 6. $z_n \in T_{\delta_{\varepsilon_n}}$ 和 q_n B将其冻结。此外，若 q_n B冻结 $s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$，则$z_n = s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$.7. $t_n \in M_{\varepsilon_n}$.8. t_n 和 z_n 是 T的不相容节点 9. $\triangle_n = \triangle(z_n, t_n)$。 10. $\lambda(\delta_{\gamma_n}, \delta) < \triangle_n$11. $\mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta) = \mathrm{Tr}(\delta_{\gamma_n}, \delta) \cup \mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n})$。 12. $\mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n}) \setminus \{\delta_{\gamma_n}\} \subseteq \delta_{\mu_n}$.13. $q_n \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \alpha \in B(t \subseteq \rho_{0\alpha})$”。

该构造通过递归进行。为方便记号，令$q_{-1} = p$, $\varepsilon_{-1} = \mu_{-1} = \gamma_{-1} = 0$.假设我们已将序列构造到阶段 $n-1$，现在定义阶段 n. 的各项。由于 ω^2 是极限序数的极限，我们可以找到 $\gamma_n < \omega^2$，使其为一个极限序数，并且满足 γ_{n-1}, $\omega n < \gamma_n$以及 $q_{n-1} \in M_{\gamma_n}$.。现在，由于 γ_n 是极限，可以找到 $\varepsilon_n < \gamma_n$，使得 γ_{n-1}, $\omega n < \varepsilon_n$ 以及 λ（δ_{γ_n}, δ） $q_{n-1} \in M_{\varepsilon_n}$.。现在我们可以应用引理50, 找到一个扩张 q_{n-1} 的（M_{ε_n}, $\mathbb{SC}$）-泛型条件 $p_n \in M_{\gamma_n}$，使得 $\max(p_n) = \delta_{\varepsilon_n}$.

由于 p_n M_{ε_n} $\mathbb{SC}$ 57 p_n B $s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$. 是(,)-泛型的，根据引理，可决定。如果 p_n B 冻结 $s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$,，我们令 $z_n = s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$.。反之，如果 p_n B 消灭 $s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$,，我们。令 z_n 为 $T_{\delta_{\varepsilon_n}}$ 中任意一个被 p_n 冻结的节点 B（根据引理 57 $\eta < \delta_{\varepsilon_n}$ λ δ_{γ_n} δ λ δ_{ε_n} δ_{γ_n} <，此类节点必定存在）。找到，使得(,) (,,) η.。由于 p_n B 冻结 z_n,，因此 $p_n \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \alpha \in B(z_n \restriction \eta \subseteq \rho_{0\alpha})$”。根据命题 15，且由于 p_n 是 $(M_{\varepsilon_n}, \mathbb{SC})$-完全殊的，可以找到 $t_n \in T$，满足以下性质:

[3]读者或许可以先跳过这份冗长的列表，因为这些性质的动机将在接下来的段落中逐渐明了。

1. $t_n \in M_{\varepsilon_n}$.2. z_n 和 t_n 是 $T.$的不相容节点 3. $z_n \restriction \eta \subseteq t_n$.4. $p_n \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \alpha \in B$ $(t \subseteq \rho_{0\alpha})$”。

令 $\triangle_n = \triangle(z_n, t_n)$。显然 $\eta \leq \triangle_n$，因此特别有 $\lambda(\delta_{\gamma_n}, \delta)$，$\lambda(\delta_{\varepsilon_n}, \delta_{\gamma_n}) < \triangle_n \cdot$。现在我们可以应用命题 22，得出 $\mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta) = \mathrm{Tr}(\delta_{\gamma_n}, \delta) \cup \mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n})$。由于 γ_n是一个极限序数，我们可以找到$\mu_n < \gamma_n$，使得 $\mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n}) \setminus \{\delta_{\gamma_n}\} \subseteq \delta_{\mu_n}$, $\varepsilon_n < \mu_n$ 且 $p_n \in M_{\gamma_n}$.。根据引理50，存在 $p_n \in M_{\gamma_n}$ 一个延伸 p_n.的 $(M_{\mu_n}, \mathbb{SC})$-泛型条件。最后，令 $q_n = p_n \cup \{\delta_{\gamma_n} + 1\}$。至此，构造完成。

定义 $q = \bigcup q_n \cup \{\delta\}$。不难验证，$q \in \mathbb{SC}$ 和$n \in \omega$延伸了 $p.$。此外，q 是 $(M, \mathbb{SC})$-泛型的，因为对于每个 $n \in \omega$，它都是 $(M_{\varepsilon_n}, \mathbb{SC})$-泛型的（见引理 52）。由于 B 被强迫为不可数，我们可以找到$r \leq q$ 和 $\beta > \delta$，使得 $r \Vdash$“$\beta \in B$”。

引理 24 蕴含序列 $\lambda(\delta_{\gamma_m}, \delta)_{m \in \omega}$ 收敛到 $\delta.$。特别地，$\lambda(\delta_{\gamma_m}, \delta) > \lambda(\delta, \beta)$ 对几乎所有 $m \in \omega.$ 都成立。此外，由于在我们的枚举 $T_\delta = \{s_n \mid n \in \omega\}$ 中，每个元素都出现无穷多次，因此可以找到一个 $n \in \omega$ $\lambda\ \delta\ \beta < \lambda\ \delta_{\gamma_n}\ \delta$ $s_n = \rho_{0\beta} \restriction \delta.$，使得 $(\ ,\ )$ $(\ ,\ )$ 并且鉴于 q B-冻结 s_n，我们得出 q_n B-冻结 $s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$，因此$z_n = s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$.。由于 r 是 $(M_{\mu_n}, \mathbb{SC})$-完全脱殊的，因此存在 $\alpha < \delta_{\mu_n}$，使得 $r \Vdash$“$\alpha \in B$”，$t_n \subseteq \rho_{0\alpha}$ 且 $\mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n}) \setminus \{\delta_{\gamma_n}\} = \mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n}) \cap M_{\mu_n} \subseteq \alpha.$。现在我们来计算 $[\alpha\beta].$。首先注意:

$$\begin{array}{rcl} \triangle(\alpha, \beta) & = & \triangle(t_n, s_n) \\ & = & \triangle(t_n, z_n) \\ & = & \triangle_n \end{array}$$

回顾 $\lambda(\delta,\ \beta) < \lambda(\delta_{\gamma_n},\ \delta) < \triangle_n \cdot$由命题 22:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(\triangle_n, \beta) & = & \mathrm{Tr}(\delta, \beta) \cup \mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta) \\ & = & \mathrm{Tr}(\delta, \beta) \cup \mathrm{Tr}(\delta_{\gamma_n}, \delta) \cup \mathrm{Tr}(\triangle_n, \delta_{\gamma_n}) \end{array}$$

由于 $\mathrm{Tr}(\triangle_n,\ \delta_{\gamma_n}) \setminus \{\delta_{\gamma_n}\} \subseteq \alpha < \delta_{\gamma_n}$，因此 $[\alpha\beta] = \min\{\mathrm{Tr}(\triangle_n,\ \beta) \setminus \alpha\} = \delta_{\gamma_n}.$最后，回顾 $r \Vdash$“$\alpha,\ \beta \in B$” 和 $\delta_{\gamma_n} \notin r$.至此，完成了对由 C-序列诱导的方括号运算的证明。

现在考虑由实数序列$\mathcal{R} = \{r_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ 和良序列 $e = \langle e_\beta \mid \beta \in \omega_1 \rangle$ 所诱导的运算情形，其中 $T = T(e)$ 是一棵阿隆佐恩树。我们假设$\mathcal{R}$ $e \in M_0.$。为

了本证明这一部分的记号便利，我们将用 $[\gamma\xi]$ 表示 $[\gamma\xi]_{\mathcal{R},\, e}$ 并用 $\triangle(\gamma,\ \xi)$ 表示 $\triangle_{\mathcal{R}}$ $(\gamma,\ \xi)$（对任意 $\gamma,\ \xi \in \omega_1$）。固定一个枚举 $T_\delta = \{s_n \mid n \in \omega\}$。

令 X 为集合$\{r_\alpha \mid \alpha \in B\}$。根据引理 54, 其核树被强迫为一棵萨克斯树。此外，由于 $\mathbb{SC}$ 是 σ-闭的，（必要时延伸 p 后）我们可以假定存在一棵萨克斯树 S，使得 $p \Vdash$“$S = S(X)$”。由于 p 和 B 都属于 M_0, 因此可得 $S \in M_0$. 。现在我们将递归地构造一个序列 $\langle \gamma_n, \mu_n, q_n, m_n \rangle_{n\in\omega}$，使其满足以下性质:

1. $\omega n < \mu_n < \gamma_n < \omega^2$.2. $\gamma_n < \mu_{n+1}$.3. $q_{n+1} \leq q_n \leq p$ 和 $q_n \in M$.4. q_n 是 $(M_{\mu_n}, \mathbb{SC})$-泛型。 5. $\max(q_n) = \delta_{\gamma_n} + 1$ 且 $\delta_{\gamma_n} \notin q_n$（特别是，$q_n$ 不是 $(M_{\gamma_n}, \mathbb{SC})$-泛型）。 6. $s_n(\delta_{\gamma_n}) < m_n$ 且 $\mathrm{split}_{s_n(\delta_{\gamma_n})}(S) \subseteq 2^{<m_n}$.7. $\{\xi \in M_{\gamma_n} \mid s_n(\xi) \leq m_n\} \subseteq \delta_{\mu_n}$.

该构造通过递归进行。为方便记号，令$q_{-1} = p, \mu_{-1} = \gamma_{-1} = 0$. 假设我们已经构造了截至阶段$n-1$的序列，现在定义阶段 n. 的各项。由于 ω^2 是极限序数的极限，我们可以找到 $\gamma_n < \omega^2$，它是一个极限序数，满足 $\gamma_{n-1}, \omega n < \gamma_n$ 和 $q_{n-1} \in M_{\gamma_n}$。选择 m_n，使得 $\mathrm{split}_{s_n(\delta_{\gamma_n})}(S) \subseteq 2^{<m_n}$。注意，$s_n(\delta_{\gamma_n}) < m_n$. 。由于$\gamma_n$ 是极限序数，我们现在可以找到 $\mu_n < \gamma_n$，使得 $\gamma_{n-1}, \omega n < \mu_n$, $q_{n-1} \in M_{\mu_n}$，并且 $\{\xi \in M_{\gamma_n} \mid s_n(\xi) \leq m_n\} \subseteq \delta_{\mu_n}$. 。最后一个要求之所以能够满足，是因为 s_n是一个单射。现在可以应用引理50，找到一个扩张 q_{n-1}的（M_{μ_n}, $\mathbb{SC}$）-泛型条件 $p_n \in M_{\gamma_n}$。定义 $q_n = p_n \cup \{\delta_{\gamma_n} + 1\}$。构造至此完成。

定义 $q = \bigcup q_n \cup \{\delta\}$。由于对于每个 $n \in \omega$,$n\in\omega$, q都是 $(M_{\mu_n}, \mathbb{SC})$-泛型，引理52表明 q 是 $(M, \mathbb{SC})$-泛型。选取 $r \leq q$ 和 $\beta > \delta$，使得$r \Vdash$“$\beta \in B$”。由引理 55可得 $r_\beta \in [S]$.

令 $n \in \omega$ 使得 $s_n = e_\beta \restriction \delta$ 和 $t \in S$ 是满足$t \subseteq r_\beta$ 且 $t \in$ 分裂$_{s_n(\delta_{\gamma_n})}(S)$ 的唯一节点。定义 $\triangle = |t|$，并注意到 $s_n(\delta_{\gamma_n}) \leq \triangle < m_n$。由于 t 是 S的分裂节点，节点 $z = t^\frown 1 - r_\beta$ $S.(\ (\triangle))$ 也属于。因此，我们有 $r \Vdash$“$\exists^{\omega_1} \alpha \in B(z \subseteq r_\alpha)$”。现在利用$r$ 是（M_{μ_n}, $\mathbb{SC}$）-完全脱殊这一事实，找到 $\alpha \in M_{\mu_n}$ 使得 $z \subseteq r_\alpha$, $r \Vdash$“$\alpha \in B$” 且 $\{\xi < \delta_{\mu_n} \mid e_\beta(\xi) \leq m_n\} \subseteq \alpha$.

我们断言 $[\alpha\beta] = \delta_{\mu_n}$. 。回想一下， $[\alpha\beta]$ 是使得$e_\beta(\xi) \leq \triangle(\alpha, \beta) = \triangle$. 的最小 $\xi \in [\alpha, \beta]$ 。一方面，我们已经知道 $e_\beta(\delta_{\gamma_n}) = s_n(\delta_{\gamma_n}) \leq \triangle$。另一方面，对于满足 $e_\beta(\xi) \leq \triangle$, 的 $\xi < \delta_{\gamma_n}$ ，我们有如下结论：

$$\begin{array}{rcl} e_\beta(\xi) \leq \triangle & \longrightarrow & e_\beta(\xi) < m_n \\ & \longrightarrow & s_n(\xi) < m_n \\ & \longrightarrow & \xi < \delta_{\mu_n} \end{array}$$

由于 $\xi < \delta_{\mu_n}$ 和 $e_\beta(\xi) \leq m_n$，由此可得 $\xi < \alpha$. 。我们得出结论，$[\alpha\beta] = \delta_{\mu_n}$. 。最后，回想一下 $r \Vdash$“$\alpha,\ \beta \in B$”以及 $\delta_{\gamma_n} \notin r$. 。这就完成了对这个方括号运算的证明。

最后一种情形是，该运算由一棵豪斯多夫特殊的 Aron- szajn 树 T 和 a: $T \longrightarrow \omega$ 一个特化映射所诱导。为方便记号起见，我们现在将 $[st]$ 记作 $[st]_{T,r}$。我们可以假设 T， $a \in M_0$. 。还需要再作一项修改：现在强迫 B 成为 T. 的一个不可数子集。固定一个枚举 $T_\delta = \{s_n \mid n \in \omega\}$。现在我们将递归地构造一个序列$\langle \varepsilon_n,\ \gamma_n,\ \mu_n,\ q_n,\ z_n,\ w_n,\ m_n,\ \triangle_n\rangle_{n\in\omega}$ ，满足以下性质：

1. $\omega n < \varepsilon_n < \mu_n < \gamma_n < \omega^2$.2. $\gamma_n < \varepsilon_{n+1}$.3. $q_{n+1} \leq q_n \leq p$ 和 $q_n \in M$. 4. q_n 既是 $(M_{\varepsilon_n}, \mathbb{SC})$-泛型的，也是 $(M_{\mu_n}, \mathbb{SC})$-泛型的。 5. $\max(q_n) = \delta_{\gamma_n}+1$ 和 $\delta_{\gamma_n} \notin q_n$ （特别是， q_n 不是 $(M_{\gamma_n}, \mathbb{SC})$-泛型的）。 6. $m_n = a(s_n \restriction \delta_{\gamma_n})$。 7. $z_n \in T_{\delta_{\varepsilon_n}}$ 和 q_n B将其冻结。此外，若 q_n B冻结 $s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$，则$z_n = s_n \restriction \delta_{\varepsilon_n}$.8. $w_n \in T \cap M_{\varepsilon_n}$ 且与 z_n.不相容 9. $w_n \Vdash$“$\exists^{\omega_1} t \in B(w_n \subseteq t)$”。 10. $\triangle_n = \triangle(z_n, w_n)$ 。 11. $\{\xi < \delta_{\gamma_n} \mid a(s_n \restriction \xi) \leq m_n\} \subseteq \triangle_n$.12. $\{\xi < \delta_{\gamma_n} \mid a(s_n \restriction \xi) \leq a(z_n \wedge w_n)\} \subseteq \delta_{\mu_n}$.

该构造通过递归进行。为方便记号，令$q_{-1} = p$， $\varepsilon_{-1} = \mu_{-1} = \gamma_{-1} = 0$. 假设我们已将序列构造至阶段 $n-1$，现在定义阶段 n. 的各项。由于 ω^2 是极限序数的极限，我们可以找到 $\gamma_n < \omega^2$ 这样的极限序数，使得 γ_{n-1}， $\omega n <\gamma_n$ 且 $q_{n-1} \in M_{\gamma_n}$. 定义 $m_n = a(s_n \restriction \delta_{\gamma_n})$ 并找到 $\eta < \delta_{\gamma_n}$ 使得$\{\xi < \delta_{\gamma_n} \mid a(s_n \restriction \xi) \leq m_n\} \subseteq \eta$. 由于 γ_n 是极限序数，我们可以找到 $\varepsilon_n < \gamma_n$

使得 γ_{n-1}，$\omega n<\varepsilon_n$ 且 η，$q_{n-1}\in M_{\varepsilon_n}$. 现在我们可以应用引理50，找到 $p_n\in M_{\gamma_n}$ 一个扩张 q_{n-1} 的 $(M_{\varepsilon_n}$，$\mathbb{SC})$-泛型条件，使得$\max(p_n)=\delta_{\varepsilon_n}$. 由于 p_n 是 $(M_{\varepsilon_n}$，$\mathbb{SC})$-泛型的，引理 57 推出 p_n B-决定 $s_n\restriction\delta_{\varepsilon_n}$. 如果 p_n B-冻结 $s_n\restriction\delta_{\varepsilon_n}$，我们令 $z_n=s_n\restriction\delta_{\varepsilon_n}$. 。如果. . p_n B-杀死 $s_n\restriction\delta_{\varepsilon_n}$，则令 z_n 为 $T_{\delta_{\varepsilon_n}}$ 中的任意一个节点，该节点被 p_n B-冻结（引理 57 保证这样的节点存在）。

回想一下，$p_n\Vdash$“$\exists^{\omega_1}t\in B(z_n\restriction\eta\subseteq t)$”且 p_n 是一个（M_{ε_n},$\mathbb{SC}$）-全泛型条件。我们可以使用命题 14 找到两个不相容节点$w^0,w^1\in T\cap M_{\varepsilon_n}$，使得 $z_n\restriction\eta\subseteq w^0,w^1$，并且对每个 $i\in 2.$ 都有 $p_n\Vdash$“$\exists^{\omega_1}t\in\dot{B}\left(w^i\subseteq t\right)$”。任取一个与 $z_n.$ 不相容的 $w_n\in\left\{w^0,w^1\right\}$。定义$\triangle_n=\triangle\left(z_n,w_n\right)$，并注意到 $\eta<\triangle_n$，因此$\{\xi<\delta_{\gamma_n}\mid a(s_n\restriction\xi)\leq m_n\}\subseteq\triangle_n$.。由于 γ_n 是一个极限序数，我们可以找到 $\mu_n<\gamma_n$，使得 $\varepsilon_n<\mu_n$，$p_n\in M_{\mu_n}$，并且$\{\xi<\delta_{\gamma_n}\mid a(s_n\restriction\xi)\leq a(z_n\wedge w_n)\}\subseteq\delta_{\mu_n}$.。根据引理50，存在一个延伸 $p_n.$ 的 $p_n\in M_{\gamma_n}$（M_{μ_n},$\mathbb{SC}$）-泛型条件。现在我们定义 $q_n=p_n\cup\{\delta_{\gamma_n}+1\}$，并完成递归构造。

定义 $q=\bigcup q_n\cup\{\delta\}$，根据引理$n\in\omega$52，这是一个 $(M,\mathbb{SC})$-泛型条件。选取 $r\leq q$ 和 $s\in T$，使得 $|s|>\delta$，且满足 $r\Vdash$“$s\in B$”。令 $n\in$. ω，使得 $s_n=s\restriction\delta$.。鉴于 r B-冻结了 s_n，我们得出 q_n B- 冻结了 $s_n\restriction\delta_{\varepsilon_n}$. 。因此 $z_n=s_n\restriction\delta_{\varepsilon_n}$. 。由于 r 是 $(M_{\mu_n}$,$\mathbb{SC})$-完全脱殊的，由此可知存在 $t\in T\cap M_{\mu_n}$，使得 $w_n<_T t$, $r\Vdash$“$t\in B$” 且 $\{\xi<\delta_{\gamma_n}\mid a(s_n\restriction\xi)\leq a(z_n\wedge w_n)\}\subseteq|t|$.

现在我们断言 $[ts]=s\restriction\delta_{\gamma_n}$.。回顾 $m_n=a(s\restriction\delta_{\gamma_n})$，并注意到 $\triangle(t,s)=\triangle(z_n,w_n)=\triangle_n$，因此 $t\wedge s$ 等于 $z_n\wedge w_n$.。此外，$\{\xi<\delta_{\gamma_n}\mid a(s_n\restriction\xi)\leq m_n\}\subseteq\triangle_n$，且 $m_n\leq a(t\wedge s)$。于是可得$a(s\restriction\delta_{\gamma_n})\leq a(t\wedge s)$。此外，若 $\xi<\delta_{\gamma_n}$ 且 $a(s_n\restriction\xi)\leq\triangle_n$，则 $\xi<|t|$. .。我们得出 $[ts]=s\restriction\delta_{\gamma_n}$.。最后，回顾 $r\Vdash$“$\alpha,\beta\in B$” 且 $\delta_{\gamma_n}\notin r$.。证明至此完成。

现在我们将证明，一个 σ-闭的力迫无法修复 Ramseyclub 性质的失效。

引理 59 设 $[\cdot\cdot]$ 是一个方括号运算，且 $C\subseteq\omega_1$ 是一个非$[\cdot\cdot]$-拉姆齐的闭无界集。若 $\mathbb{P}$ 是一个 σ-闭的力迫，则 $\mathbb{P}$ 强迫 C 不是 $[\cdot\cdot]$-拉姆齐的。

证明。假设存在 $p\in\mathbb{P}$ 和 B，其中 B 是一个以 ω_1 为底集的不可数子集的 $\mathbb{P}$-名称，并且满足 $p\Vdash$“$\{[\alpha\beta]\mid\alpha,\beta\in B\}\subseteq C$”。递归地，找出$\{(p_\alpha,\gamma_\alpha)\mid\alpha\in\omega_1\}$，使得对每个，以下条件成立：

1. $p_\alpha\leq p$.2. $p_\beta\leq p_\alpha$ 和 $\gamma_\alpha<\gamma_\beta$.3. $p_\alpha\Vdash$“$\gamma_\alpha\in B$”。

令 $E = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$。由于 C 不是 $[\cdot]$-拉姆齐，因此存在 $\alpha < \beta$ 使得 $[\gamma_\alpha\gamma_\beta] \notin C$. 由此可知，$p_\beta$ 强迫 γ_α，γ_β 属于 B，但 $[\gamma_\alpha\gamma_\beta]$ 不属于 C，这就产生了矛盾。

■

本节的主要结果现在很容易得出：

定理 60 “不存在具有拉姆齐俱乐部性质的 *Aronszajn* 方括号运算”这一陈述与 $\diamondsuit$. 相容

证明。我们从一个满足 $\diamondsuit$ 和广义连续统假设的模型开始。令 $\mathbb{SC}_{\omega_2}$ 为长度为 ω_2 、以力迫 $\mathbb{SC}$. 进行的可数支撑迭代。此迭代是 σ-闭的，保留 $\diamondsuit$（参见 [24]的引理 V.5.8 和习题 IV.7.46），并且满足 ω_2-链条件（参见 [1]的定理 2.10）。由此可知，每个 Aronszajn 方括号运算都会出现在某个中间扩张中。根据命题 58，任何此类运算在某个中间模型中都不具有拉姆齐俱乐部性质。最后，根据引理 59，这一性质的失败在迭代剩余部分中得以保持。 ■

13 PFA 与由实数序列诱导的方括号运算

到目前为止，我们研究了拉姆齐俱乐部性质失效的情形。现在我们转而证明该性质可以相容地成立。正如引言中提到的，第二位作者（回答伍丁提出的一个问题）证明了真力迫公理（PFA）蕴含：由特殊阿隆佐恩树诱导的方括号运算具有拉姆齐俱乐部性质（参见 [40]的引理 5.4.4）。我们将证明，对于另外两类方括号运算，结论也同样成立。本节重点讨论由实数序列和良序列定义的方括号运算的拉姆齐俱乐部性质。这个证明是三个证明中最简单的。在本节余下部分，固定一个闭无界集 $C \subseteq \mathrm{LIM}(\omega_1)$、一个序列 $\mathrm{R} = \{r_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ 以及一个良序列 $e = e_\beta \mid \beta \in \omega_1$。为方便记号，本节中我们将用 $[\gamma\xi]$ 表示$[\gamma\xi]_\mathcal{R}$，用e表示 $\triangle(\gamma,\xi)$，而将 $\triangle_\mathcal{R}(\gamma,\xi)$简记为 $\gamma,\xi \in \omega_1$（对于任意 $\beta \in \omega_1, n \in \omega$）。此外，对于 F_n和β，我们定义集合 $=(\xi \le \beta \mid e_\beta)\ \xi\{ \le n(\ \beta\ \in\ F_n)\ \beta\}$（注意 $\alpha < \beta(\ [\alpha\beta]\ =)$）。这样显然可知，若$\left(F_{\triangle(\alpha,\beta)}\right.$，则$\beta\min\alpha)$.() \

我们引入更多记号。若对每个 $\xi < \omega_1$，都存在 $b \in E$ 使得 $\xi < \min(b)$。，则称集合 $E \subseteq [\omega_1]^m$ 无界。对于 $s = \langle s_i\rangle_{i<m} \in (2^{<\omega})^m$，定义$\langle s\rangle$ 为所有满足以下条件的 $(f_i)_{i<m}^{-} \in (2^\omega)^m$ 组成的集合：对于每个 $i < m$.，都有 $f_i \in \langle s_i\rangle$。给定，记$\mathcal{R}$ $_Y = \langle r_\alpha\rangle_{\alpha\in Y}$ · 。下面的引理可能广为人知；为方便读者，我们给出证明。

引理 61 设 $m \in \omega$、$E \subseteq [\omega_1]^m$ 和 M 是一个可数初等子模型，使得 E, $R \in M$. 。假设存在 $X = \{\alpha_i \mid i < m\} \in E$，且满足 $X \cap M = \emptyset$.

对于每个 $n \in \omega$，都存在 $s = \langle s_i \rangle_{i<m} \in (2^{<\omega})^m$，使得对于所有 i、$j < m$，以下条件成立：

1. $|s_i| = |s_j|$ *2.* $s_i \restriction n = r_{\alpha_i} \restriction n$*3.* 对每个 $\alpha \in X$，$\langle s_i \rangle$。*4.* 集合 $\{Y \in E \mid R_Y \in \langle s \rangle\}$ 是无界的。

–

证明。对于每个 $i < m$，记作 $t_i = r_{\alpha_i} \restriction n$. 令 D 为所有满足以下条件的 $Y = \{\beta_i \mid i < m\} \in E$ 的集合：对于每个 $i < m.$，t_i。注意到 $D \in M$ 和 $X \in D.$。由于 $X \cap M = \emptyset$，由初等性可得 D 是无界的。这样，我们可以找到 $Y = \{\beta_i \mid i < m\} \in D$，使得 $Y \cap M$ 和 $Y \cap X$ 都为空。找出 $l \in \omega$，使得对所有 i、$j < m$，$\triangle(r_{\alpha_i}, r_{\beta_i})$、$\triangle\left(r_{\beta_i}, r_{\beta_j}\right)$、$\triangle\left(r_{\alpha_i}, r_{\alpha_j}\right) < l$，并定义– $s_i = r_{\beta_i} \mid l.$。容易看出，$s$ ■ $\{s_i \mid i < m\}$ 正是所需的。

下面的力迫概念受到了[40]中引理 5.4.4所述力迫概念的启发。

定义 62 将 $\mathbb{P}(C)$ 定义为满足以下性质的所有 $p = (M, N)$ 的集合：

1. N 是 $H(\omega_2)$ 的可数初等子模型构成的有限 $\in$-链，并且 R e 和 C 属于其中的每一个。*2.* $M \subseteq N$。*3.* 完备性条件。若 M、$L \in M$ 互不相同，则 $[\delta_M \delta_L] \in C$*4.* 交叉模型条件。对于任意互不相同的 M、$L \in M$ 以及 $N \in N$，若 $N \in M$，则 $min(F_{\triangle(\delta_M, \delta_L)}(\delta_M) \restriction N) \in C.$

我们强调关于这一力迫概念的几个关键点。设 $p = (\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 是 $\mathbb{P}(C)$的一个元素。

1. 如果 $N \in \mathcal{N}$，那么 $\delta_N \in C$（见命题 8）。2. 在交叉模型条件中，情形 $N = L$ 是完备性条件的推论。因此，在验证 $\mathbb{P}(C)$，中某个潜在元素的这一条件时，我们总可以假设 $N \neq L$.3. 在交叉模型条件中，除了 $N \in M$ 和 $M \neq L.$ 之外，不假设 M，N 与 L 之间存在任何关系。特别地，$N \in L \in M$，$L \in N \in M$ 或 $N \in M \in L$.都有可能

设 $p=(\mathrm{M}_p, \mathrm{N}_p)$ 和 $q=(\mathrm{M}_q, \mathrm{N}_q)$ 属于 $\mathbb{P}(C)$。定义 $p \leq q$，如果 $\mathrm{M}_q \subseteq \mathrm{M}_p$、$\mathrm{N}_q \subseteq \mathrm{N}_p$ 且 $\mathrm{M}_q = \mathrm{M}_p \cap \mathrm{N}_q$。对于 $p, q \in \mathbb{P}(C)$，如果存在 $N \in \mathrm{N}_p$，使得 $\mathrm{M}_q = \mathrm{M}_p \cap N$ 且 $\mathrm{N}_q = \mathrm{N}_p \cap N.$，则定义 $q \sqsubseteq p$。显然，如果 $q \sqsubseteq p$，那么 $p \leq q$.

现在我们为 $\mathbb{P}(C)$ 中的条件引入几个“不变量”，它们将有助于分析力迫的组合性质。

定义 63 令 $p=(M, N) \in \mathbb{P}(C)$。定义以下各项：

1. $\mathit{ht}(p)=\{\delta_N \mid N \in \mathcal{N}\}$ *and* $\mathit{ht}_{\mathcal{M}}(p)=\{\delta_M \mid M \in \mathcal{M}\}$.
2. d_p 是大于以下所有数的最小自然数：
   (a) $\triangle(\delta_M, \delta_N)$ *for* $M, N \in \mathcal{N}$ *distinct.*
   (b) $e_{\delta_M}(\delta_N)$ *for* $M, N \in \mathcal{N}$ *with* $N \in M$.
3. $T_p=\langle r_{\delta_N} \restriction d_p \rangle_{N \in \mathcal{N}_p}$.
4. $S(p)=\bigcup\{F_{d_p}(\delta_N) \mid N \in \mathcal{N}\}$。
5. $H(p)=(S(p), <, \mathit{ht}(p), \mathit{ht}_{\mathcal{M}}(p), d_p, e, T_p, \triangle)$。

由此可知，$S(p)$ 是 ω_1 的有限子集，其中包含 $\mathrm{ht}(p)$。令 $p, q \in \mathbb{P}(C)$ 以及 $f: S(p) \longrightarrow S(q)$ 是一个双射。若对于每个 $\alpha, \beta \in S(p)$，满足以下条件，我们称 f 是从 $H(p)$ 到 $H(q)$ 的同构：

1. $\alpha<\beta$ 当且仅当 $f(\alpha)<f(\beta)$。 2. $\alpha \in \mathrm{ht}(p)$ 当且仅当 $f(\alpha) \in \mathrm{ht}(q)$。 3. $\alpha \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(p)$ 当且仅当 $f(\alpha) \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(q)$。 4. $d_p=d_q$.
5. $e_\beta(\alpha)=e_{f(\beta)}(f(\alpha))$。 6. 如果 $\alpha \in \mathrm{ht}(p)$，那么 $r_\alpha \restriction d_p=r_{f(\alpha)} \restriction d_q$.7. $\triangle(\alpha, \beta)=\triangle(f(\alpha), f(\beta))$。

如果 $H(p)$ 与 $H(q)$ 之间存在同构，我们就称它们同构。由于这种同构是有限线性序 $(S(p), <)$ 与 $(S(q), <)$ 之间的同构，因此它必然是唯一的。容易看出，同构类型只有可数多个。

定义 64 如果满足以下条件，我们称 M 是一个大模型：

1. 存在一个足够大的正则基数 $\kappa > \omega_2$，使得 M 是 $H(\kappa)$ 的可数初等子模型。

2. $C, R\ e, \mathbb{P}\ (C)\ \in M.$

对于 M一个大模型，记 $\overline{M} = M \cap \mathrm{H}(\omega_2)$，它是 $\mathrm{H}(\omega_2)$ 的一个初等子模型。现在我们证明下面这个关键命题，它将用于建立本节的主要结果。

命题 65 设 M是一个大模型，且 $p = (M_p, N_p) \in \mathbb{P}(C)$。若 $M \in N_p$，则 $\overline{p}$是$(M, \mathbb{P}(C))$-泛型。

证明。设 $D \in M$ 是 $\mathbb{P}(C)$ 的一个开稠密集。必要时扩充 p，可假设 $p \in D$。我们需要证明 p与 $D \cap M.$ 中的某个元素相容。记 $\delta = \delta_M$，它是 $C.$ 的一个元素。定义 $X = \mathrm{ht}(p) \setminus M$，并按递增顺序枚举 $X = \{\delta_i \mid i < m\}$（因此 $\delta_0 = \delta$）。

令 $p_M = (\mathcal{M}_p \cap M,\ \mathcal{N}_p \cap M)$。容易看出，$p_M \in \mathbb{P}(C) \cap M$且$p_M \sqsubseteq p.$。求出 $\eta_0 < \delta$ 使得 $S(p) \cap M \subseteq \eta_0.$。现在我们将 E 定义为所有满足以下性质的 $Y \in [\omega_1]^m$ 的集合：存在 $r \in D$，使得：

1. $p_M \sqsubseteq r.$
2. $\mathrm{ht}(r) = \mathrm{ht}(p_M) \cup Y.$
3. $S(r) \cap \eta_0 = S(p) \cap \eta_0$（这与 $S(p) \cap M$ 相同）。
4. $H(p)$ 和 $H(r)$ 同构，且该同构在$S(p) \cap M.$上是恒等映射

我们断言 $E \in M.$。尽管第三和第四个条件涉及 M 和p，但它们只取决于 p 的同构类型（它属于 M）以及有限集 $S(p) \cap M \in M.$。因此，这两个条件都可以改写为不涉及 $M.$ 之外对象的形式。对于上述的 $Y \in E$ 和 r，我们称 r 是 $Y \in E.$的见证。

应用引理 61，找出具有以下性质的 $s = \langle s_i \rangle_{i<m}$：

1. $|s_i| = |s_j|$ 对所有 $i,\ j < m$.2. $r_{\delta_i} \restriction d_p = s_i \restriction d_p$ 对于 $i < m$.3. $r_\alpha \notin \langle s_i \rangle$ 对所有 $\alpha \in X$ 和 $i < m$.4. 集合 $\{Y \in E \mid \mathcal{R}_Y \in \langle s \rangle\}$ 是无界的。

–

记作 $l = |s_0|$ （这与每个 $i < m$ 的 $|s_i|$ 相同）。求 $\eta \in (\eta_0,\ \delta)$，使得对每个 $\beta \in X.$，$F_l(\beta) \cap M \subseteq \eta$。现在我们可以找到 $Y \in E \cap M$，使得$\eta < \min(Y)$ 并且 $\mathcal{R}_Y \in \langle s \rangle$。根据初等性，存在 $r \in D \cap M$，它是 $Y \in E.$ 的一个见证。令 $h: S(p) \longrightarrow S(r)$ 为从$H(p)$ 到 $H(r)$ 的唯一同构。回想一下，h 是 $M.$上的恒等映射

我们断言，p 和 r 相容。只需证明 $q = (\mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_r,\ \mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_r)$属于 $\mathbb{P}(C)$。显然，$\mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_r$是一个有限的 $\in$-链，并且包含$\mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_r$. 还需验证 q 满足完备性条件和交叉模型条件。

为验证 q 满足完备性条件，只需证明对于任意 $\alpha,\ \beta \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(p) \backslash M,$ 都有 $[h(\alpha)\ \beta] \in C.$。记$\triangle = \triangle(h(\alpha)\ \beta)$。回忆 $h(\alpha) \in M$，而 $\beta \notin M$，因此 $h(\alpha) < \beta.$。我们根据 α 和 β 是否相等分情形讨论。

情形： $\alpha \neq \beta$

由此可得$\triangle = \triangle(h(\alpha)\ \beta) = \triangle(\alpha,\ \beta)$，且小于 d_p，因此$F_\triangle(\beta) \cap M \subseteq \eta_0 \subseteq h(\alpha)$。我们有如下结论：

$$\begin{array}{rcl} [h(\alpha)\,\beta] & = & \min(F_\triangle(\beta) \setminus h(\alpha)) \\ & = & \min(F_\triangle(\beta) \setminus M) \\ & = & \min\big(F_{\triangle(\alpha,\beta)}(\beta) \setminus M\big) \end{array}$$

若 $\delta < \beta$，则 $\min\big(F_{\triangle(\alpha,\beta)}(\beta) \setminus M\big) \in C$，由$p.$的交叉模型条件可知。另一方面，若 $\delta = \beta$，则 $\min\big(F_{\triangle(\alpha,\beta)}(\beta) \setminus M\big) = \beta$，它属于 $C.$

情形： $\alpha = \beta$

这里有 $e_\beta(\delta) < d_p \leq \triangle < l$。由此可得 $F_\triangle(\beta) \cap M \subseteq F_l(\beta) \cap M \subseteq \eta \subseteq h(\beta)$。我们有如下结论：

$$\begin{array}{rcl} [h(\alpha)\,\beta] & = & \min(F_\triangle(\beta) \setminus h(\beta)) \\ & = & \min(F_\triangle(\beta) \setminus M) \\ & = & \delta \in C. \end{array}$$

这就完成了证明：q 满足完备性条件。现在我们验证交叉模型条件。只需证明，对于任意不同的$\alpha,\ \beta \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(p) \cup \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(r)$，以及任意满足 $\delta_N < \beta$且 $\alpha \neq \delta_N$，的 $N \in \mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_r$，都有 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) \in C$，其中 $\triangle = \triangle(\alpha,\ \beta)$。证明分情形进行，具体取决于 $N.$的归属

情形： $N \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_r$

注意，如果两者均为 $\alpha, \beta \in \mathrm{ht}(p)$，或者两者均为 $\alpha, \beta \in \mathrm{ht}(r)$,那么结论便立即成立，因为 p和 r是 $\mathbb{P}(C)$ 中的条件。接下来根据$\triangle$ 与 d_p之间的关系，分子情形进行证明

子情形： $N \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_r$ 且$\triangle < d_p$.

首先假设 $\alpha \in \mathsf{ht}(p) \setminus \mathsf{ht}(r)$（因此 $\alpha \notin M$），且 $\beta \in \mathsf{ht}(r) \setminus \mathsf{ht}(p)$。由 $\triangle < d_p$ 可得 $h(\alpha) \neq \beta$，且 $\triangle = \triangle(h(\alpha)\ \beta)$。由于 $N \in \mathbf{N}_r$， r 的交叉模型性质蕴含 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) \in C$. 现在假设 $\beta \in \mathsf{ht}(p) \setminus \mathsf{ht}(r)$（因此 $\beta \notin M$），且 $\alpha \in \mathsf{ht}(r) \setminus \mathsf{ht}(p)$。同样，由于 $\triangle < d_p$，我们有 $h(\beta) \neq \alpha$，且 $\triangle = \triangle(h(\beta)\ \alpha)$。由于 $N \in \mathbf{N}_p$， p 的交叉模型性质蕴含 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) \in C$.

子情形： $N \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_r$ 且 $d_p \leq \triangle$。

我们有 $r_\alpha \restriction d_p = r_\beta \restriction d_p$. 注意到 $e_\beta(\delta_N) < d_p \leq \triangle$。由此可得 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) = \delta_N \in C$.

情形： $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$

注意，若 $\alpha, \beta \in \mathsf{ht}(r)$，则结论立即成立，因为 r 是 $\mathbb{P}(C)$ 中的一个条件。证明现在按子情形展开，具体取决于 β 是否属于 $\mathsf{ht}(r)$。

Subcase: $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$ and $\beta \notin \mathsf{ht}(r)$.

由于 $\beta \notin \mathsf{ht}(r)$，因此 $\beta \notin M$. 此外， $F_\triangle(\beta) \cap M \subseteq \eta < \delta_N$. 由此，$\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) = \min(F_\triangle(\beta) \setminus M)$。若 $\beta = \delta$，则 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus M) = \delta$，它属于 C.。假设 $\beta \neq \delta$ （因此 $\delta < \beta$）。若 $\triangle \geq d_p$，由于 $e_\beta(\delta) < d_p$，可得 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus M) = \delta$.。现在假设 $\triangle < d_p$.。令 $\gamma \in \mathsf{ht}_\mathcal{M}(p)$ 满足 $\triangle(\gamma, \beta) = \triangle$。根据 p. 的交叉模型性质，我们得到 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus M) \in C$

子情形： $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$ 且 $\beta \in \mathsf{ht}(r)$。

注意， $\beta \in M$. 如果 α 也属于 M，那么 $\alpha, \beta \in \mathsf{ht}(r)$，结论由此得出，因为 r 是一个条件。假设 $\alpha \notin M$. 如果 $h(\alpha) \neq \beta$，那么$\triangle = \triangle(h(\alpha)\ \beta)$，且比 d_p. 小。我们有 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) = \min(F_{\triangle(h(\alpha),\beta)}(\beta) \setminus N)$，并且它属于 C，这是因为 r.的交叉模型性质。现在我们假设$h(\alpha) = \beta$.。由此可得 $e_\beta(\delta_N) < d_p \leq \triangle$。这样一来， $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) = \delta_N$，它属于 C.

情形： $N \in \mathcal{N}_p \setminus \mathcal{N}_r$

必然有 $N \notin M$.。由于 $\delta_N < \beta$，因此 $\beta \notin M$，所以 $\beta \in \mathsf{ht}(p)$。如果 α 也属于$\mathsf{ht}(p)$，结论便立即得出，因为 $p \in \mathbb{P}(C)$。假设 $\alpha \in \mathsf{ht}(r) \setminus \mathsf{ht}(p)$。如果 $h(\beta) \neq \alpha$，那么$\triangle < d_p$且$\triangle = \triangle\left(\beta, h^{-1}(\alpha)\right)$.。由此可得 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) = \min(F_{\triangle(\beta,h^{-1}(\alpha))}(\beta) \setminus N)$，并且它属于 C，这是因为 p. 的交叉模型性质。假设 $h(\beta) = \alpha$，因此 $d_p \leq \triangle$，所以$e_\beta(\delta_N) < d_p \leq \triangle$。我们得出 $\min(F_\triangle(\beta) \setminus N) = \delta$，它属于 C.。我们终于完成了证明。■

我们得出以下结论:

推论 66 $\mathbb{P}(C)$ 是正规迫。

证明。设 M是一个大模型，且 $q \in M \cap \mathbb{P}(C)$。定义 $p = (\mathcal{M}_q, \mathcal{N}_q \cup \{M\})$。由此可得 $p \leq q$，并且根据命题 65，它是 $(M, \mathbb{P}(C))$-泛型的。 ■

本节的主要结果现在很容易得出。这与 [40] 中引理 5.4.4 的论证相同。

定理 67 *PFA* 蕴含，每个形如 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{R},\, e}$ 的方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质。

证明。假设 PFA，并令 C，$\mathcal{R}$ 和 e 如前所述，其中 $\mathbb{P}(C)$ 是相应的力迫概念。给定一个滤子 $G \subseteq \mathbb{P}(C)$，定义集合 $W(G) = \bigcup\{\delta_M \mid \exists p \in G(M \in \mathcal{M}_p)\}$。根据力迫的定义可得$\{[\alpha\beta] \mid \alpha,\ \beta \in W(G)\} \subseteq C$. 要完成证明，只需证明存在一个 $p \in \mathbb{P}(C)$，它强迫 $W(G)$ 是不可数的（其中 G 是泛型滤子的规范名称）。

设 M 是一个大模型。定义 $p = (\{M\}, \{M\})$。由于 p 是 $(M, \mathbb{P}(C))$-泛型，且 $p \Vdash$“$\delta_M \in W(G)$”，由引理 9 可知，p 强迫 $W(G)$ 是不可数的。 ■

14 PFA 与由 C-序列诱导的方括号运算

还需证明 PFA 蕴含由 C-序列产生的方括号运算具有拉姆齐俱乐部性质。这个情形的证明似乎是三者中最困难的。在本节余下部分，固定一个闭无界集 $C \subseteq \mathrm{LIM}(\omega_1)$ 以及一个 C-序列 $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$。为方便记号，本节中我们将用 $[\gamma\xi]$ 表示 $[\gamma\xi]_{\mathcal{C}}$，并用 $\triangle(\gamma,\ \xi)$ 表示 $\triangle_{\mathcal{C}}(\gamma,\ \xi)$（对任意 $\gamma,\ \xi \in \omega_1$）。我们需要证明一些预备结果。

定义 68 令 $X \subseteq \omega_1$.。我们定义如下：

1. 迹$[X] = \bigcup\{\text{迹}(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in X\}$。
2. $\triangle(X) = \{\triangle(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in X\}$。
3. $\lambda(X) = \{\lambda(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in X\}$。
4. $S(X)$ 是包含 X 且在前述运算下封闭的最小集合。

现在我们有如下结论：

命题 69 如果 $X \subseteq \omega_1$ 是有限的，那么 $S(X)$ 也有限。

证明。 设 $X \subseteq \omega_1$ 是一个有限集。递归地定义一个集合序列：$X_0 = X$ 且 $X_{n+1} = X_n \cup \mathrm{Tr}[X_n] \cup \triangle(X_n) \cup \lambda(X_n)$。 容易验证， $S(X) = \bigcup X_n$ ，并且当 $n \leq m.$ 时， $X_n \subseteq X_m$ 。由此$n\in\omega$可得， $|S(X)| \leq \omega$ （这也可以从观察到 $S(X) \subseteq \max(X) + 1$ 推导出来）。假设 $S(X)$ 是无限的。令 $S'(X)$ 表示 $S(X)$ 的聚点集。 由于 $S(X)$ 是可数无穷的，我们得出 $S'(X)$ 有最大值，我们将 $\gamma.$ 注意， γ 是一个极限序数。

记 $Y = S(X) \setminus \gamma.$ 由于 γ 是 $S(X),$ 的最大聚点，集合 Y 必须是有限的。因此，存在 $n \in \omega$ 使得 $Y \subseteq X_n$.现在，选取 $\gamma_m \in C_\gamma$ 使得：

1. $X_{n+1} \cap \gamma \subseteq \gamma_m.$
2. 对所有满足 $\gamma < \beta.$ 的 $\beta \in Y$， $\lambda(\gamma, \beta) < \gamma_m$

我们断言 $S(X) \cap (\gamma_m, \gamma)$ 为空。这将导致矛盾，因为 γ 是 $S(X)$ 的一个聚点。我们将通过归纳法证明 $X_l \cap (\gamma_m, \gamma) = \emptyset.$ 当 $l \leq n+1.$ 时，这显然成立。现在假设 $n+1 \leq l$ 且 $X_l \cap (\gamma_m, \gamma) = \emptyset$，我们将证明对 $l+1.$ 也成立。由于 λ 和 $\triangle$ 是退化函数，且 $X_l \setminus \gamma = Y$，因此 $\lambda[X_l]$ 与 $\triangle(X_l)$ 和 (γ_m, γ) 不相交。剩下需要证明的是，若 $\beta \in Y$ 且 $\alpha \in X_l \cap \gamma$，则 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) \cap (\gamma_m, \gamma) = \emptyset.$ 我们根据 γ 是否属于 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta)$ 分情形讨论。

首先假设 $\gamma \in \mathrm{Tr}(\alpha, \beta)$。由于 $\alpha \leq \gamma_m$，从 β 到 α的游走必须经过 γ，然后跳到 $\min(C_\gamma \setminus \alpha) \leq \gamma_m.$。由此可得 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) \cap (\gamma_m, \gamma) = \emptyset$。现在假设 $\gamma \notin \mathrm{Tr}(\alpha, \beta)$。令 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) = \{\beta_0, ..., \beta_n\}$，其中$\beta_0 = \beta$, $\beta_n = \alpha$ 且 $\beta_{i+1} = \mathrm{stp}(\alpha, \beta_i)$。令 i 满足 $\beta_i > \gamma$但 $\gamma < \beta_{i+1}.$。 命题 22 蕴含 $\beta_{i+1} \leq \lambda(\gamma, \beta)$。根据我们对 γ_m的选择，有$\lambda(\gamma, \beta) < \gamma_m$，因此 $\beta_{i+1} < \gamma_m.$。我们再次得出 $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta) \cap (\gamma_m, \gamma) = \emptyset$。

■

设 T为一棵阿隆佐恩树， $A \subseteq T^{n+1}$， $\gamma \in \omega_1$ 且 $F = (t_0, ..., t_n) \in (T_\gamma)^{n+1}$（我们不要求 $t_i \neq t_j$ 对 $i \neq j$成立）。博弈G_F (T, A) 定义如下：

I	ξ_0		ξ_1		...	ξ_n	
II		s_0		s_1			s_n

该博弈持续 $n+1$ 轮。在第 i，玩家 I 出 $\xi_i \in \omega_1$ ，玩家 II 则以 $s_i \in T$，回应，并须遵守以下规则：

1. $\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_n.$
2. $\xi_i < |s_i|$ 每个 $i \leq n.$

3. $t_i = s_i \restriction \gamma$ 每个 $i \leq n$.

玩家 II 赢得博弈 当所得序列 $(s_0, \ldots\ldots, s_n)$ 属于 A. 玩家 I 是男性，玩家 II 是女性。由于这是一个闭开博弈，根据 Gale-Stewart 定理，该博弈是确定的（参见 [22] 的定理 20.1）。

命题 70 设 T 是一棵阿隆佐恩树，$A \subseteq T^{n+1}$ 且 $\{M_0, \ldots, M_n\}$ 是一个$\in$-链，由可数初等子模型组成，并且 $T, A \in M_0$. 。假设存在 $(s_0, \ldots, s_n) \in A$，使得 $\delta_{M_0} \leq |s_0| < \delta_{M_1} \leq |s_1| \leq \ldots \leq \delta_{M_n} \leq |s_n|$. 。对于每个 $\gamma \in \omega_1$，存在 $F \in (T_\gamma)^{n+1}$，使得玩家 II 在 $\mathrm{G}_F(T, A)$ 中有获胜策略。

证明。由初等性可知，只需证明命题结论对 $\gamma < \delta_{M_0}$. 成立。令 $F = (s_0 \restriction \gamma, \ldots\ldots, s_n \restriction \gamma)$。我们断言，玩家 II 在博弈 $G_F(T, A)$ 中有获胜策略。假设这不成立，那么玩家 I 在该博弈中有获胜策略。由初等性可知，存在 $\sigma \in M_0$，它是这个博弈的获胜策略。考虑博弈过程：玩家 I 按照 σ 行动，而玩家 II 在第 i. 回合出 s_i 。很容易看出，这是一个有效的博弈过程，而且玩家 II 获胜，这与 σ 是玩家 I 的获胜策略这一假设矛盾。 ■

利用这个命题，我们可以证明以下推论：

推论 71 设 T 是一棵阿隆佐恩树，$A \subseteq T^{n+1}$ 且 $\{M_0, \ldots, M_n\}$ 是一条由可数初等子模型组成的 $\in$-链，使得 $T, A \in M_0$. 。假设存在$(s_0, \ldots, s_n) \in A$，使得 $\delta_{M_0} \leq |s_0| < \delta_{M_1} \leq |s_1| \leq \ldots \leq \delta_{M_n} \leq |s_n|$. 。存在γ 和 F，满足以下性质：

1. $\gamma < \delta_{M_0}$ 2. $F = (t_0, \ldots, t_n) \in T^{n+1}$，并且对于每个 i, 都有 $j \leq n$.。3. 玩家 II 在$\mathrm{G}_F(T, A)$中有一个获胜策略。

证明。根据前一个命题，我们知道存在 $B = \{F_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$，使得对于每个 $\alpha \in \omega_1$, 都有 $F_\alpha \in (T_\alpha)^{n+1}$，并且玩家 II 在$G_{F_\alpha}(T, A)$ 中有一个获胜策略。根据初等性，我们甚至可以假设 $B \in M_0$.。命题 13 意味着存在 $\gamma_0 \in M_0$，使得 B 在层 γ_0. 上是 $(n+1)$-分布的。现在我们可以找到 $\gamma \in M_0$，满足 $\gamma > \gamma_0$，使得 F_γ 和 $(s_0, \ldots, s_n)$ 的 γ_0 投影互不相交。因此，γ 和 F 正是所需的。 ■

现在我们将定义证明本节主要结果所需的力迫概念。它与上一节中的力迫概念相似，同样基于 [40]，中引理 5.4.4 的力迫，但这一版本是三个版本中最复杂的。

定义 72 将 $\mathbb{P}$（C）定义为所有满足以下性质的 $p =$（M, N）的集合：

1. N 是一个由 $H(\omega_2)$ 的可数初等子模型组成的有限 $\in$-链，并且 C 和 C 属于其中每一个模型。

2. $M \subseteq N$。

3. 完备性条件。若 $M, L \in \boldsymbol{M}$ 互不相同，则 $[\delta_M \delta_L] \in C$ ***4.*** 第一交叉模型条件。若 $M \in \boldsymbol{M}$ 且 $N, L \in \boldsymbol{N}$ 满足 $N \in L \in M$，则 $\boldsymbol{min(Tr(\delta_N, \delta_M) \restriction L)} \in C$ ***5.*** 第二交叉模型条件。设 $M, L \in \boldsymbol{M}$ 互不相同，且 $N \in \boldsymbol{N}$ 满足 $N \in M.$。若 $\triangle = \triangle(\delta_M, \delta_L) \in N$，则 $\boldsymbol{min(Tr(\triangle\ \delta_M) \restriction N)} \in C.$

与上一节中的力迫类似，在第二交叉模型条件中，情形 $N = L$ 是完备性条件的推论。因此，在针对 $\mathbb{P}(C)$, 的潜在元素验证此条件时，我们总可以假设 $N \neq L.$。此外，在同一条件中，除了 $N \in M$ 和 $M \neq L.$ 之外，并未假设 M, N 与 L 之间存在任何关系。特别地，可能有 $N \in L \in M, L \in N \in M$ 或 $N \in M \in L.$

设 $p = (\mathrm{M}_p, \mathrm{N}_p)$ 和 $q = (\mathrm{M}_q, \mathrm{N}_q)$ 属于 $\mathbb{P}(C)$。定义 $p \leq q$，若 $\mathrm{M}_q \subseteq \mathrm{M}_p$、$\mathrm{N}_q \subseteq \mathrm{N}_p$ 且 $\mathrm{M}_q = \mathrm{M}_p \cap \mathrm{N}_q$。对于 p、$q \in \mathbb{P}(C)$，定义 $q \sqsubseteq p$，若存在 $N \in \mathrm{N}_p$，使得 $\mathrm{M}_q = \mathrm{M}_p \cap N$ 且 $\mathrm{N}_q = \mathrm{N}_p \cap N.$。显然，若 $q \sqsubseteq p$，则 $p \leq q.$

现在我们介绍 $\mathbb{P}(C)$ 中元素的不变量。

定义 73 设 $p = (M, N) \in \mathbb{P}(C)$。定义以下各项：

1. $ht(p) = \{\delta_N \mid N \in \boldsymbol{N}\}$ 以及 $ht_{\mathcal{M}}(p) = \{\delta_M \mid M \in \boldsymbol{M}\}$。*2.* $S(p) = S(ht(p))$（见定义 *68*）。*3.* $H(p) = (S(p) <, ht_{\mathcal{M}}(p), ht(p),$迹$, \triangle, \lambda, C)$。

设 $p,\ q \in \mathbb{P}(C)$ 与 $h\colon S(p) \longrightarrow S(q)$ 是一个双射。若对每个 $\alpha,\ \beta \in S(p)$, 都满足以下条件，则称 h 是从 $H(p)$ 到 $H(q)$ 的同构：

1. $\alpha < \beta$ 当且仅当 $h(\alpha) < h(\beta)$。

2. $\alpha \in \mathrm{ht}(p)$ 当且仅当 $h(\alpha) \in \mathrm{ht}(q)$。3. $\alpha \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(p)$ 当且仅当 $h(\alpha) \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(q)$。4. $h[\mathrm{Tr}(\alpha, \beta)] = \mathrm{Tr}(h(\alpha)\ \ h(\beta))$。5. $h(\triangle(\alpha, \beta)) = \triangle(h(\alpha)\ \ h(\beta))$。6. $h(\lambda(\alpha, \beta)) = \lambda(h(\alpha)\ \ h(\beta))$。

7. $\alpha \in C$ 当且仅当 $h(\alpha) \in C$.

如果存在 $H(p)$ 与 $H(q)$ 之间的同构，我们就称它们同构。与上一节一样，从 $H(p)$ 到 $H(q)$ 至多存在一个同构，并且只有可数多个同构类型。

定义 74 我们称 M 为一个大模型，如果满足以下条件：

1. 存在一个足够大的正则基数，使得 M 是 $H(\kappa)$的可数初等子模型。

2. $C, \mathcal{C} \in \mathbb{P}(C) \in M$.

对于 M一个大模型，记 $M \overline{=} M \cap \mathrm{H}(\omega_2)$，它是 $\mathrm{H}(\omega_2)$ 的一个初等子模型。现在我们证明以下命题

命题 75 设 M是一个大模型，且 $p = (M^p, N^p) \in \mathbb{P}(C)$。如果 $M \in \overline{N^p}$，那么 p 是$(M, \mathbb{P}(C))$-泛型。

证明。为方便起见，我们将 $T = T(\rho_0)$。为简化记号，有时会将子集 $W \subseteq \omega_1$ 视为对应集合$\{\rho_{0\alpha} \mid \alpha \in W\}$。

设 $D \in M$ 是 $\mathbb{P}(C)$的一个开稠密子集。必要时扩充 p，我们可以假设 $p \in D$.我们要证明 p与 $D \cap M$. 中的一个元素相容。记 $\delta = \delta_M$，它是 C. 的一个元素。定义 $X = \mathrm{ht}(p) \setminus M$，并令 m 为 X. 的大小。注意， δ 是X. 的最小元素。令 $p_M = (\mathcal{M}_p \cap M, \mathcal{N}_p \cap M)$。容易看出 $p_M \in \mathbb{P}(C) \cap M$并且$p_M \sqsubseteq p$.

找出 $\eta_0 < \delta$ 使得 $S(p) \cap M \subseteq \eta_0$. 现在我们将 E 定义为所有满足以下性质的$Y \in [\omega_1]^m$ 所组成的集合：存在 $r \in D$

1. $p_M \sqsubseteq r$.
2. $\mathrm{ht}(r) = \mathrm{ht}(p_M) \cup Y$.
3. $S(r) \cap \eta_0 = S(p) \cap \eta_0$ （这与 $S(p) \cap M$ 相同）。
4. $H(p)$ 和 $H(r)$ 同构；如果 $h: S(p) \longrightarrow S(r)$ 表示这个（唯一的）同构，则：

   (a) h 是 $S(p) \cap M$.上的恒等映射(b)
   $\rho_{0\alpha} \restriction \eta_0 = \rho_{0h(\alpha)} \restriction \eta_0$ 对所有 $\alpha \in X$.

注意， $X \in E$. 此外， E 属于 M. 这是因为，可以重新表述 E 的定义，而不必引用 M. 之外的对象。对于上述的 $Y \in E$ 和r ，我们称 r 是 $Y \in E$. 的见证

断言 76 存在 η_1 和 $F = (t_0, ..., t_{m-1})$ ，满足以下性质：

1. $\eta_1 \in M$ 和 $\eta_0 < \eta_1 < \delta$*2.* $F = (t_0, ..., t_{m-1}) \in (T_{\eta_1})^m$ ，并且对于每个 $\alpha \in X$ 和 $i < m$*3.* 玩家 II 在博弈 $\mathrm{G}_F(T, E)$中有获胜策略。

事实上，由推论 71 可得 F 和 η_1 的存在。现在我们可以找到η ，满足以下性质：

1. $\eta_1 < \eta < \delta$2. 如果 $\alpha, \beta \in X$ 和 $t \in F$, 那么 $\mathrm{Tr}(\triangle(t, \rho_{0\alpha}) \beta) \cap \delta \subseteq \eta$.

现在我们有如下结论：

断言 77 存在 $Y \in E \cap M$ ，满足以下性质：

1. $\eta <$ 最小(Y)。*2.* Y 的每个元素都扩展了 F.中的一个元素。*3.* 如果 $\gamma \in X$ 和 α满足条件 $\beta \in Y$，使得 $\alpha < \beta$，那么 $Tr(\alpha, \gamma) \cap M \subseteq \beta$.

设 $\sigma \in M$ 是博弈$G_F(T, E)$ 中玩家 II 的获胜策略。考虑以下博弈过程（其中玩家 II 按照她的策略[4]σ行棋）。

I	η		ξ_0		...
II		$\rho_{0\varepsilon_0}$		$\rho_{0\varepsilon_1}$	

玩家 I 的行棋方式如下：

1. 他的第一步是 η.2。玩家 II 走出一步（假设是 $\rho_{0\varepsilon_0}$）后，玩家 I 选择 $\xi_0 \in M$ ，且该值大于 η， ε_0 ，并且 $\bigcup \mathrm{Tr}(\varepsilon_0, \gamma) \cap M.\gamma \in X$

[4]请注意，要使 σ 成为获胜策略，玩家 II 的所有着法都必须具有 $\rho_{0\varepsilon}$ 的形式，其中 $\varepsilon < \omega_1$ （否则她会立即输掉博弈）。

3. 玩家 II 走出一步（假设是 $\rho_{0\varepsilon_1}$）后，玩家 I 选择 $\xi_1 \in M$，且该值大于 ε_1，并且 $\bigcup_{\gamma\in X} \mathsf{Tr}(\varepsilon_1, \gamma) \cap M.$

⋮⋮ ⋮ ⋮

由于 σ 是玩家 II 的获胜策略，因此 $Y = (\varepsilon_0, \ldots\ldots, \varepsilon_{m-1})$属于 E，且显然具有所需的性质。至此，断言的证明完成。

固定断言中的 Y。由初等性可知，存在 $r \in D \cap M$ 作为 $Y \in E.$ 的见证。令 $h: S(p) \longrightarrow S(r)$为从$H(p)$到 $H(r)$的唯一同构。回忆一下， h 是 $M.$ 上的恒等映射。我们断言 p 与 r 相容。只需证明 $q = (\mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_r, \mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_r)$属于 $\mathbb{P}(C)$。显然$\mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_r$ 是一个有限的 $\in$-链，并包含$\mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_r$.

为了验证 q 满足完备性条件，只需证明对于任意 $\alpha, \beta \in \mathsf{ht}_{\mathcal{M}}(p)\backslash M,$ 都有 $[h(\alpha)\ \beta] \in C.$。记$\triangle = \triangle(h(\alpha)\ \beta)$。回忆一下， $h(\alpha) \in M$，而 $\beta \notin M$，所以 $h(\alpha) < \beta.$。由此可得 $[h(\alpha)\ \beta] = \min(\mathsf{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus h(\alpha))$。我们按情形讨论，具体取决于 $\rho_{0\alpha} \restriction \delta$和$\rho_{0\beta} \restriction \delta$ 是否相等。

情形： $\rho_{0\alpha} \restriction \delta \neq \rho_{0\beta} \restriction \delta$（等价地，$\triangle(\alpha, \beta) < \delta$）

在此情形中，我们有$\triangle = \triangle(\alpha, \beta)$，且迹$(\triangle\ \beta) \cap M \subseteq \eta_0 \subseteq h(\alpha)$。由此可得迹$(\triangle\ \beta) \setminus h(\alpha) =$迹$(\triangle\ \beta) \setminus \delta$因此$[h(\alpha)\,\beta] = \min($迹$(\triangle\ \beta) \setminus \delta)$。证明现在按子情形进行，取决于 β 是否等于 δ。

子情形： $\rho_{0\alpha} \restriction \delta \neq \rho_{0\beta} \restriction \delta$ 且 $\beta = \delta.$

We have that $\mathsf{Tr}(\triangle, \beta) \setminus \delta = \{\delta\}$, so $[h(\alpha)\,\beta] = \delta \in C.$

子情形： $\rho_{0\alpha} \restriction \delta \neq \rho_{0\beta} \restriction \delta$ 且 $\beta \neq \delta.$

我们知道 $[h(\alpha)\ \beta] = \min($迹$(\triangle\ \beta) \setminus \delta)$，它属于 C，这是根据 p.的第二交叉模型条件

Case: $\rho_{0\alpha} \restriction \delta = \rho_{0\beta} \restriction \delta$ (equivalently, $\delta \leq \triangle(\alpha, \beta)$)

接下来根据 α 和β 与 δ之间的关系，分情形进行证明。

Subcase: $\rho_{0\alpha} \restriction \delta = \rho_{0\beta} \restriction \delta$ and $\alpha = \delta$ or $\beta = \delta.$

由引理 23 可知，若 $\rho_{0\alpha} \restriction \delta = \rho_{0\beta} \restriction \delta$ 和 $\alpha = \delta$ 或 $\beta = \delta$，则$\alpha = \beta = \delta.$。我们有 $\mathsf{Tr}(\triangle(h(\delta)\ \ \delta)\ \ \delta) \cap \delta \subseteq \eta \subseteq h(\delta)$，因此 $[h(\delta)\ \delta] = \delta \in C.$

子情形： $\rho_{0\alpha} \restriction \delta = \rho_{0\beta} \restriction \delta$ 和 $\alpha, \beta \neq \delta.$

回想一下，$\lambda(\delta,\ \beta) < \eta_0 < \triangle$。命题 22 表明 $\delta \in \mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)$。由于 $\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \cap M \subseteq \eta \subseteq h(\alpha)$，因此可得 $[h(\alpha)\ \beta] = \delta \in C$.

这就完成了 q 满足完备性条件的证明。现在我们验证第一交叉模型条件。只需证明，对于每个$\alpha < \beta < \gamma$，若 $\gamma \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(p) \setminus M$且 $\alpha, \beta \in \mathrm{ht}(p) \cup \mathrm{ht}(r)$,则有 $\min(\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma) \setminus \beta) \in C$. 证明分情形进行。

情形： $\alpha \in \mathrm{ht}(p)$

如果 β也属于 ht(p),，那么无需进一步处理，因为 $p \in \mathbb{P}(C)$. 假设 $\beta \in \mathrm{ht}(r) \setminus \mathrm{ht}(p)$. 注意，$\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma) \cap M \subseteq \eta_0 \subseteq \beta$. 由此可得 $\min(\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma) \setminus \beta) = \min(\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma) \setminus \delta)$，它属于 C，这是由 p.的第一交叉模型条件得出的。

情形： $\alpha \in \mathrm{ht}(r) \setminus \mathrm{ht}(p)$ 且 $\beta \in \mathrm{ht}(p)$

注意到 $\delta \leq \beta$. 由于 $\lambda(\delta,\ \gamma) < \eta_0 < \alpha$，命题 22 蕴含 $\mathrm{Tr}(\delta,\ \gamma)$ 是 $\mathrm{Tr}(\alpha,\ \gamma)$ 的一个初始段。因此，$\min(\mathrm{Tr}(\alpha,\ \gamma) \setminus \beta) = \min(\mathrm{Tr}(\delta,\ \gamma) \setminus \delta)$，根据 C 的第一交叉模型条件，这属于 p.

情形： $\alpha \in \mathrm{ht}(r) \setminus \mathrm{ht}(p)$ 且 $\beta \in \mathrm{ht}(r)$

由于 $\lambda(\delta,\ \gamma) < \eta_0 < \alpha$，命题 22 蕴含 $\delta \in \mathrm{Tr}(\alpha,\ \gamma)$。此外，由于 $\mathrm{Tr}(\alpha,\ \gamma) \cap M \subseteq \beta$（见断言 77），因此 $\min(\mathrm{Tr}(\alpha,\ \gamma) \setminus \beta) = \delta \in C$.

这就完成了 q 满足第一交叉模型条件的证明。现在我们验证第二交叉模型条件。只需证明，对于任意 $N \in \mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_r$ 以及 $\alpha,\ \beta \in \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(p) \cup \mathrm{ht}_{\mathcal{M}}(r)$，使得 $\triangle = \triangle(\alpha,\ \beta) \in N$ 且 $\delta_N < \beta,\ \alpha \neq \delta_N$，都有 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus N) \in C$.。读者大概已经猜到，证明将按情形进行。

情形： $N \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_r$（等价地，$\mathcal{N} \in \mathcal{N}_p \cap M$）

如果 $\alpha,\ \beta \in \mathrm{ht}(p)$ 或 $\alpha,\ \beta \in \mathrm{ht}(r)$ ，那么无需进行任何操作，因为两者p 和 r 都是条件，所以我们假设情况并非如此。

Subcase: $N \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_r$, $\alpha \in \mathrm{ht}(p) \setminus \mathrm{ht}(r)$ and $\beta \in \mathrm{ht}(r) \setminus \mathrm{ht}(p)$.

注意，$\alpha \notin M$. 此外，由于 $\triangle \in N$，可推出 $\triangle < \eta_0$，这意味着 $\triangle = \triangle$（$h(\alpha)\ \beta$）。这样，$\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus N) = \min(\mathrm{Tr}(\triangle(h(\alpha)\ \beta)\ \beta) \setminus N)$，根据 r. 的第二交叉模型条件，这属于 C

Subcase: $N \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_r$, $\alpha \in \mathrm{ht}(r) \setminus \mathrm{ht}(p)$ and $\beta \in \mathrm{ht}(p) \setminus \mathrm{ht}(r)$.

注意到 $\beta \notin M$. 由于$\triangle < \eta_0$，因此$\triangle = \triangle(h^{-1}(\alpha)\ \beta)$。这样，

$\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)\setminus N)\ =\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \left(h^{-1}(\alpha)\ \ \beta\right),\ \ \beta)\setminus N)$，这由 C 中 $p.$的第二交叉模型条件保证

情形： $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$

如果 α, β 都属于 $\mathrm{ht}(r),$，那么就无需处理，因此我们假设情况并非如此。

子情形： $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$, $\alpha \in \mathrm{ht}(r)$ 且 $\beta \notin \mathrm{ht}(r)$。

注意，$\beta \notin M.$令 $\alpha = h^{-1}(\alpha)$。首先考虑 $\rho_{0\beta} \restriction \delta \neq \rho_{0\alpha} \restriction \delta.$ 的情形。由此可得$\triangle\ =\triangle(\alpha, \beta)$ 且 $\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)\ \cap M \subseteq\ \eta_0 \subseteq \eta.$此外，$\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ N)\ = \min(\mathrm{Tr}(\triangle\ (\alpha, \beta)\ \ \beta) \setminus\ M)$。如果 $\overline{\beta} = \delta$，那么该最小值为$\delta$，它属于 $C.$ 如果 $\delta < \beta$，则由 $p.$ 的第二个交叉模型可得结论。现在我们假设 $\rho_{0\beta} \restriction \delta = \rho_{0\alpha} \restriction \delta.$。我们有 $\lambda(\delta, \beta)\ < \eta_0 < \triangle$。命题 22 表明 $\overline{\delta} \in \mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)$。此外，
$\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)\ \cap M \subseteq \eta \subseteq N.$由此可得 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ N)\ = \delta \in C.$

子情形： $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$, $\alpha \notin \mathrm{ht}(r)$ and $\beta \in \mathrm{ht}(r)$。

注意到 $\alpha \notin M.$令 $\beta = h^{-1}(\beta)$。首先考虑 $\rho_{0\alpha} \restriction \delta \neq \rho_{0\beta} \restriction \delta.$ 成立的情形。由此可得 $\triangle\ =\triangle(h(\alpha)\ \ \beta)$。此外，$\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ N)\ =\min(\mathrm{Tr}(\triangle\,(h(\alpha)\ \ \beta)\ \ \beta) \setminus\ N)$，根据 $r.$ 的第二交叉模型条件，它属于 C。现在假设 $\rho_{0\alpha} \restriction \delta = \rho_{0\beta} \restriction \delta.$。由于 $\lambda(\delta,\ \beta)\ \in M$ 且 h 是在 M 上恒等的同构，我们有如下结论：

$$\begin{aligned}\lambda(\delta, \overline{\beta}) &= h(\lambda(\delta, \overline{\beta})) \\ &= \lambda(h(\delta), h(\overline{\beta})) \\ &= \lambda(h(\delta), \beta)\end{aligned}$$

由于 $\lambda(\delta,\ \beta)\ < \eta_0\ <\triangle$，因此 $\lambda(h(\delta)\ \beta)\ <\triangle$。命题 22 蕴含 $\mathrm{Tr}(h(\delta)\ \beta)$ 是 $\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)$ 的一个初始段。由于 $h(\delta)\ \leq \delta_N$，我们得到 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ N)\ =\min(\mathrm{Tr}(h(\delta)\ \ \beta) \setminus\ N)$，根据 $p.$的第一交叉模型条件，它属于 C

子情形： $N \in \mathcal{N}_r \setminus \mathcal{N}_p$ 且 $\alpha,\ \beta \notin \mathrm{ht}(r)$。

由于 $\triangle \in N$，因此 $\triangle\ \in M$，这意味着 $\triangle < \eta_0.$ 此外，$\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \cap M \subseteq \eta_0 \in N.$由此可得 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ N)\ =\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ M)$，根据 $p.$的第二交叉模型条件，它属于 C

Case: $N \in \mathcal{N}_p \setminus \mathcal{N}_r$

由于 $\delta_N < \beta$，可得 $\beta \in \mathrm{ht}(p) \setminus \mathrm{ht}(r)$。如果 α 也在 $\mathrm{ht}(p)$ 中，那么无需进一步处理，因此假设 $\alpha \in \mathrm{ht}(r) \setminus \mathrm{ht}(p)$。令 $\alpha = h^{-1}(\alpha)$。若 $\rho_{0\alpha} \restriction \overline{\delta} \neq \rho_{0\beta} \restriction \delta$，则 $\triangle^{-} = \triangle(\alpha, \beta)$，所以 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ \overline{N})$ 等于 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle(\alpha, \beta)\ \beta) \setminus N)$，并且根据 $p.$的第二交叉模型条件，它属于 C。现在假设 $\rho_{0\alpha} \restriction \delta = \rho_{0\beta} \restriction \delta.$。由此可得 $\lambda(\delta_N,\ \beta)\ <\triangle$。命题 22 意味着 $\delta_N\ \in \mathrm{Tr}(\triangle\ \beta)$，所以 $\min(\mathrm{Tr}(\triangle\ \beta) \setminus\ N)\ =\ \delta_N\ \in C.$。最后，我们完成了证明。

仿照上一节的论证，我们得到以下结果：

定理 78 *PFA* 意味着，每个形如 $[\cdot\cdot]_C$ 的方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质。

结合这一结果以及定理 67 和定理 7，我们得出：

推论 79 *PFA* 意味着，每个方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质。

15 开放问题

我们认为，本文探讨的主题仍有许多值得发现之处。在最后一节中，我们提出若干尚未解决的开放问题，希望它们能为该主题的后续研究指明方向。

我们证明了，马丁公理与由 C-序列诱导的方括号运算不具有拉姆齐俱乐部性质这一结论相容。我们想知道，对于其他类型的方括号运算，这一结论是否也成立。

问题 80 “任何方括号运算都不具有拉姆齐俱乐部性质”这一陈述与马丁公理相容吗？

如前所述，如果我们能对其余方括号运算证明命题 41，则上述问题将得到肯定的解决。我们猜想情况确实如此，但未能加以证明。

在命题 58 中，对于由一个实数集与一个良序列所诱导的方括号运算这一情形，我们额外假设由该良序列生成的树是 Aronszajn 树。目前尚不清楚这一假设是否必要。

问题 81 “由实数集与良序列所诱导的方括号运算都不具有拉姆齐俱乐部性质”这一陈述是否与 $\diamondsuit$相容？

我们猜想命题 58 对所有方括号运算都成立。对此的一个证明将解决前一个问题。

关于这一主题，最有趣的问题或许是下面这个：

问题 82 连续统假设是否与“每个方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质”这一陈述相容？其他猜测原理呢，例如$\diamondsuit$、$\diamondsuit^*$、$\diamondsuit^+$ 或 $\diamondsuit^\#$？

Asper´o 和 Mota 在 [8] 中提出的方法或许能为问题第一部分的肯定回答提供一条路径。了解第二位作者在 [45] 中引入的*P*-理想二分法 （PID；另见 [3] 和 [41]）是否会对这一主题产生影响，也会很有意思。

问题 83 *PID* 是否意味着每个方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质？

我们想知道是否存在这样的模型：其中两个方括号运算在拉姆齐俱乐部性质方面表现不同。

问题 84 两个 *C*-序列 C 和 D 满足 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{C}}$ 具有拉姆齐俱乐部性质，而 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{D}}$ 不具有该性质，这是否相容？（对于其他类别的方括号运算，也有类似的问题。）

比较不同类别的方括号运算的行为也很有意思。例如：

问题 85 每个由 *C*-序列诱导的方括号运算都具有 *Ramseyclub* 性质，而没有任何由实数序列和良序列诱导的方括号运算具有此性质，这是否相容？

自然地，我们对上一个问题的所有变体都感兴趣。

方括号运算背后的组合结构所产生的影响尚未被完全理解。例如，我们可以提出以下问题：

问题 86 设 $R = \{r_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ 和 $e = \langle e_\beta \mid \beta \in \omega_1\rangle$ 是一个良序列。R 的组合性质如何反映在 $[\cdot\cdot]_{\mathcal{R},\, e}$ 的性质上？例如，当 R 是 *Luzin* 集或 *Sierpi´nski* 集时，有什么值得一提的结果吗？

固定一个方括号运算 $[\cdot]$。对于一个子集 $A \subseteq \omega_1$，定义 $C(A) = \{[\alpha\beta] \mid \alpha, \beta \in A\}$。自然会考虑以下问题：

问题 87 对于以下陈述，我们能说些什么：“对于每个 $A, B \in [\omega_1]^{\omega_1}$，都存在 $D \in [\omega_1]^{\omega_1}$，使得 $C(D) \subseteq C(A) \cap C(B)$”。

当然，这一陈述可由 PFA 推出，但除此之外我们所知甚少。既然我们使用真力迫公理证明所有方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质，自然会提出以下问题：

问题 88 “所有方括号运算都具有拉姆齐俱乐部性质”这一陈述是否与连续统可以任意大相容？

问题 89 能否在不需要任何大基数假设的情况下，通过强迫使所有方括号运算都具有拉姆齐闭无界集性质？

参考资料

[1] Uri Abraham. 正规迫。在集合论手册，第*1*、*2*、*3*卷中，第333–394页。Springer，多德雷赫特，2010。[2] Uri Abraham and Saharon Shelah. 力迫闭无界集。*J.Symbolic Logic*，48(3)：643–657，1983。[3] Uri Abraham and Stevo Todor˘cevi´c. 与连续统假设相容的分割性质。*Fund. Math.*，152(2)：165–181，1997。[4] David Asper´o. 添加许多鲍姆加特纳俱乐部。*Arch. Math. Logic*，56(7- 8)：797–810，2017。[5] David Asper´o and Miguel Angel Mota. 连续统很大时 PFA 的力迫推论。*Trans. Amer. Math. Soc.*，367(9)：6103–6129，2015。[6] David Asper´o and Miguel Angel Mota. 马丁公理的一个推广。*Israel J. Math.*，210(1)：193–231，2015。[7] David Asper´o and Miguel Angel Mota. 胖强迫公理下区分 club 猜测原理。*Ann. Pure Appl. Logic*，167(3)：284–308，2016。[8] David Asper´o and Miguel Angel Mota. 少量新实数。《数学逻辑杂志》，24(2)：论文编号 2350009，35页，2024。[9] J. E. Baumgartner, L. A. Harrington, and E. M. Kleinberg. 添加一个闭无界集。*J. Symbolic Logic*，41(2)：481–482，1976。[10] James E. Baumgartner. 所有$\aleph_1$-稠密实数集都可以同构。*Fund.Math.*，79(2)：101–106，1973。[11] James E. Baumgartner. 迭代力迫。载于集合论综述，第87卷伦敦数学学会讲义丛书，第1–59页。剑桥大学出版社，剑桥，1983。[12] James E. Baumgartner. 正规迫公理的应用。载于集合论拓扑手册，第913–959页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984。

[13] James Earl Baumgartner. 组合集合论中的结果与独立性证明。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1970。博士论文——加州大学伯克利分校。[14] M. Bekkali. 集合论专题，数学讲义第1476卷。施普林格出版社，柏林，1991。勒贝格可测性、大基数、强迫公理、rho 函数，Stevo Todorˇcevi´c 讲座笔记。[15] Jeffrey Bergfalk. 前ω个阿列夫：从单形到树的树，再到高阶行走。《Adv. Math.》，393：论文编号 108083，74页，2021。[16] Alan Dow. 初等子模型在拓扑学中的应用简介。《Topology Proc.》，13(1)：17–72，1988。[17] Todd Eisworth, Justin Tatch Moore, and David Milovich. 迭代力迫与连续统假设。载于《阿巴拉契亚集合论 2006–2012》，伦敦数学学会讲义丛书第406卷，第207–244页。剑桥大学出版社，剑桥，2013。[18] Martin Goldstern. 正规迫初探。载于《集合论（库拉索，1995；巴塞罗那，1996）》，第71–82页。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1998。[19] Michael Hrusak. 与疯狂相约。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1999。博士论文——约克大学（加拿大）。[20] Michael Hruˇs´ak and Carlos Mart´ınez Ranero. 关于非特殊凝聚阿龙沙因树的一些评论。《Acta Univ. Carolin. Math. Phys.》，46(2)：33–40，2005。[21] T. Jech. 多重力迫，剑桥数学丛书第88卷。剑桥大学出版社，剑桥，1986。[22] Alexander S. Kechris. 经典描述集合论，研究生数学丛书第156卷。施普林格出版社，纽约，1995。[23] Kenneth Kunen. 集合论，逻辑与数学基础研究第102卷。North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1980。独立性证明导论。[24] Kenneth Kunen. 集合论，伦敦逻辑研究第34卷。College Publications，伦敦，2011。[25] Chris Lambie-Hanson and Assaf Rinot. Knaster 及其同伴 I：闭着色与预口径。《Algebra Universalis》，79(4)：论文编号 90，39页，2018。[26] Hossein Lamei Ramandi and Stevo Todorcevic. 能否消除 Komjath 的不可达基数？《Ann. Pure Appl. Logic》，175(7)：论文编号 103452，24页，2024。[27] Alan H. Mekler. 无组合学的可数链条件力迫。《J. Symbolic Logic》，49(3)：830–832，1984。

[28] Stepan Milovsevi´c 和 Stevo Todorcevic. 可数序数上的游走所产生的群. Topology Appl., 373:论文编号 109480, 13, 2025.[29] Justin Tatch Moore. 不可数线性序的五元素基. Ann. of Math. (2), 163(2):669–688, 2006.[30] Justin Tatch Moore. L 空间问题的一个解. J. Amer. Math. Soc., 19(3):717–736, 2006.[31] Justin Tatch Moore. 一个带有 d-可分平方的 L 空间. Topology Appl., 155(4):304–307, 2008.[32] Yinhe Peng 和 Liuzhen Wu. 一个平方不是 Lindel¨of 的 Lindel¨of 群. Adv. Math., 325:215–242, 2018.[33] Yinhe Peng 和 Liuzhen Wu. L 向量空间和 L 域. Sci. China Math., 67(10):2195–2216, 2024.[34] D. Raghavan 和 S. Todorcevic. rho 函数的一个组合性质. Acta Math. Hungar., 167(1):355–363, 2022.[35] Assaf Rinot 和 Stevo Todorcevic. 正则基数后继上的矩形方括号运算. Fund. Math., 220(2):119–128, 2013.[36] Assaf Rinot 和 Jing Zhang. 复杂着色再探. Ann. Pure Appl. Logic, 174(4):论文编号 103243, 11, 2023.[37] S. Todorcevic. 可数序数上的游走与选择超滤子. Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math., (35):65–78, 2010.[38] Stevo Todorcevic. 可数序数序偶的划分. Acta Math., 159(3-4):261–294, 1987.[39] Stevo Todorˇcevi´c. 拓扑学中的划分问题，收入 Contempo- rary Mathematics 第 84 卷. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989.[40] Stevo Todorcevic. 序数上的游走及其特征，收入 Progress in Mathematics 第 263 卷. Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007.[41] Stevo Todorcevic. 强迫公理札记，收入 Lecture Notes Series 第 26 卷. 数学科学研究所. 新加坡国立大学. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，哈肯萨克，新泽西州，2014.[42]Stevo Todorcevic. P-理想二分法与图基序. Fund. Math., 267(2):181–194, 2024.[43] S. Todorˇcevi´c. 树与线性有序集. 收入《集合论拓扑学手册》，第 235–293 页. North-Holland，阿姆斯特丹，1984.[44] Stevo Todorˇcevi´c. 有向集与共尾类型. Trans. Amer. Math. Soc., 290(2):711–723, 1985.

[45] Stevo Todorˇcevi´c. 可数集合的 P-理想二分法. *Fund. Math.*, 166(3):251–267, 2000.[46] W. Hugh Woodin. 决定公理、强迫公理与非平稳理想，收入逻辑及其应用德格鲁伊特丛书第 1 卷. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG，柏林，修订版，2010.[47] Teruyuki Yorioka. 与矩形细化性质相关的马丁公理的一些弱片段. *Arch. Math. Logic*, 47(1):79–90, 2008.[48] Jindrich Zapletal. 闭无界集强迫的刻画. 收入一般拓扑与应用论文集（缅因州戈勒姆，*1995*），收入纽约科学院年刊第 806 卷，第 476–484 页. 纽约科学院，纽约，1996.[49] Jindˇrich Zapletal. ω_1上的可定义强迫分类. *Fund. Math.*, 153(2):141–144, 1997. Osvaldo Guzm´an 数学科学中心，墨西哥国立自治大学.
oguzman@matmor.unam.mx

Stevo Todorcevic，多伦多大学数学系，加拿大
stevo@math.toronto.edu

Jussieu 数学研究所，法国国家科学研究中心，巴黎，法国
stevo.todorcevic@imj-prg.fr

塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所，贝尔格莱德，塞尔维亚
stevo.todorcevic@sanu.ac.rs