arXiv:2602.14395v1 [math.AC] 16 Feb 2026

分配型偏序集与直化律代数

日比孝之与 Seyed Amin Seyed Fakhari

Abstract. 若有限偏序集（偏序集合） P 有 $\hat{0}$，且其每个区间 $[\hat{0},\ a]$, $a \in P$，P 都是分配格，则称其为分配型偏序集。从直化律代数（ASL）的角度看，有限分配格上的并交环面环推广为定义在有限分配型偏序集上的 ASL。我们关注的问题是：有限分配格偏序集何时为 Cohen–Macaulay，以及定义在其上的 ASL 何时为 Gorenstein。我们聚焦于一类自然的有限分配型偏序集，并研究上述问题的各个方面。

Introduction

偏序集合简称偏序集。本文中的偏序集均为有限集。$\hat{}$分配型偏序集是指具有唯一极小元 0 的偏序集 P，且其每个区间 $[\hat{0},\ a]$, $a \in P$，P都是分配格。分配型偏序集是单纯偏序集 [16]的一种推广。Stanley [16, 引理 3.4] 在单纯偏序集上引入了直化律代数 [6] 。Stanley 的构造无需修改即可适用于分配型偏序集（引理 2.3）。分配型偏序集上的直化律代数（定义 2.2）是对文献 [9]中引入的分配格上直化律代数的推广。

回顾一下，偏序集 P 的对偶序理想 [17, p. 246] 是一个子集 $I \subset P$，若 $t \in I$ 且 $s \geq t$，则 $s \in I$。如果 I 是分配格 L 的对偶序理想，那么 $L \setminus I$ 是一个分配型偏序集。特别地，如果 $a \in L$，那么$\{x \in L :\ x \geq a\}$ 是 L 的对偶序理想，而 $L_a := \{x \in L : x \not\geq a\}$ 是一个分配型偏序集。

从历史上看，20世纪70年代中期，组合学与交换代数这一研究领域从 Stanley [13]和 Reisner [12], 的工作中诞生时，研究趋势是 Cohen–Macaulay 和可壳化偏序集 [1, 2]。一个合理的研究课题是寻找一类自然的分配型 Cohen–Macaulay（或可壳化）偏序集。

我们关注形如 $L \setminus I$ 的分配型偏序集，其中 L 是分配格，I 是 L 的对偶序理想。

问题 0.1. 对满足以下条件的分配格 L 进行分类：对于所有 $a \in L$，L_a 都是 Cohen–Macaulay 的。

为了研究更有趣的问题，$L \setminus I$ 这一类相当庞大。因此，我们将注意力集中在因子格 $D_{2^n \cdot 3^m}$上。

2020 数学主题分类。 05E40,13H10, 06D05.关键词与短语。 有限格、单纯复形、分配型偏序集、具有直化律的代数、Cohen–Macaulay 偏序集。

问题 0.2. 设 $L = D_{2^n \cdot 3^m}$，且 I 为 L的一个对偶序理想。 $L \setminus I$是Cohen–Macaulay当且仅当 $L \setminus I$ 可壳化，这是否成立?

问题 0.3. 找出因子格 $L = D_{2^n \cdot 3^m}$ 的对偶序理想 I 的组合刻画，使得 $L \setminus I$ 为 Cohen–Macaulay。

我们之所以对分配型偏序集感兴趣，是为了寻找对 [9] 中引入的环的一种可能推广。设 P 为分配型偏序集， $K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}]$ 为以 K 为系数环、以 $|P|$ 个变量为元的多项式环。我们按如下方式引入一个多项式 $f_{\alpha,\ \beta}$，其中 α， $\beta \in P$:

- $f_{\alpha,\ \beta} = x_\alpha x_\beta$，如果 α 和 β 在 P 中没有公共上界;
- $f_{\alpha,\ \beta} = x_\alpha x_\beta - x_{\alpha \wedge \beta}(\sum_\gamma x_\gamma)$，其中 γ 遍历 α 和 β 的所有极小 上界，否则。

我们引入理想

$$J_P = (f_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in P) \subset K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}].$$

及其商环 $\mathcal{R}_K[P] := K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}]/J_P$。由此可知， $\mathcal{R}_K[P]$是 Cohen–Macaulay 当且仅当 P 是 Cohen–Macaulay（推论 2.4）。

问题 0.4. J_P 何时具有线性分解?

有限分配格 L的对偶序理想 I 称为秩固定的，如果 I 的极小元集合是 L中某个固定秩的元素集合。由 [1, 定理 6.4] 可知，若 L 的对偶序理想 I 是秩固定的，则 $L \setminus I$ 是 Cohen–Macaulay。特别地， $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 是 Cohen–Macaulay。

问题 0.5. 设 L 是有限分配格， I 是 L的秩固定对偶序理想。 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 何时为 Gorenstein?

本文先在第1节总结有关有限偏序集和单纯复形的基础知识；第 2 节中，为了说明我们为何对分配型偏序集感兴趣，我们回顾 [6]中的直化律代数，并推广 [9]中引入的环。第3节解决问题 0.1（定理 3.7）。第4节解决问题 0.2 和问题 0.3（定理 4.4）。第5节专门研究问题 0.4。最后，第6节给出问题 0.5 的部分答案（定理6.2、6.4和6.5）。

1. Cohen–Macaulay partially ordered sets

我们概述有限偏序集及单纯复形的基础知识。有关该主题的标准参考文献是 [10] 和 [15]。

顶点集 $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上的单纯复形是 V的子集所构成的集合 Δ，它满足：(i) 每个 $\{x_i\} \in \Delta$，以及(ii) 若 $F \in \Delta$ 且 $F' \subset F$，则 $F' \in \Delta$。每个 $F \in \Delta$ 称为 Δ的一个面 。一个极大面是关于包含的极大面。令 $d = \max\{|F| : F \in \Delta\}$，并定义 $\dim \Delta = d-1$。单纯复形 Δ是纯的，如果对 Δ的所有极大面 F都有 $|F| = d$。设 $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$为 Δ 的 f-向量 ，其中 f_i 是满足 $|F| = i+1$的 $F \in \Delta$ 的个数。令 $f_{-1} = 1$，定义 h-向量

Δ 的h(Δ) $=(h_0,h_1,\dots,h_d)$由公式 $\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i}=\sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}.$ 给出。 Δ 的约化欧拉示性数记为 $\tilde{\chi}$(Δ)。

设 $S=K[x_1,\dots,x_n]$ 表示域 K上 n 个变量的多项式环，且每个deg $x_i=1$。若 $F\subset V$，则令 $x_F:=\prod_{x_i\in F} x_i$。 Δ 的*Stanley–Reisner*理想是 S 的理想 I_Δ，由满足$\sigma\notin\Delta$的那些无平方因子单项式 x_σ 生成。 Δ 的斯坦利–赖斯纳环 是商环 $K[\Delta]=S/I_\Delta$。若 $K[\Delta]$ 是Cohen–Macaulay的，则称 Δ （在 K上）为$Cohen–Macaulay$。 $F\in\Delta$的链接 是 Δ的子复形link$_\Delta F:=\{F'\in\Delta\colon\ F\cap F'=\emptyset, F\cup F'\in\Delta\}$。Cohen–Macaulay复形的每一个链接都是Cohen–Macaulay的。每一个Cohen–Macaulay复形都是纯的。Reisner [12] 给出了 $K[\Delta]$为Cohen–Macaulay的拓扑判据。Stanley [13] 利用Reisner的判据，肯定地证明了球面的上界猜想。关于背景的简要参考文献为 [10] 和 [15]。

维数为 $d-1$ 的纯单纯复形 Δ 称为可壳化，如果其极大面存在一种排序 $F_1,\dots,F_s$，使得对于每个 $1<i\le s$，$(\bigcup_{j=0}^{i-1}\langle F_j\rangle)\cap\langle F_i\rangle$ 都是维数为 $d-2$ 的纯复形，其中 $\langle F_i\rangle=\{\sigma\in\Delta\colon\ \sigma\subset F_i\}$。每个可壳化复形都是 Cohen–Macaulay。纯单纯复形 Δ 称为顶点可分解，如果 Δ 是单纯形，或者 Δ 存在一个顶点 x，使得

(i) $\Delta-x:=\{\sigma\in\Delta\colon\ x\notin\sigma\}$ 和 link$_\Delta\{x\}$ 都是顶点可分解的，并且

(ii) link$_\Delta\{x\}$ 的任何面都不是 $\Delta-x$ 的极大面。

每个顶点可分解复形都是可壳化的。

偏序集 P 的链是 P 的全序子集。偏序集 P 的秩为 rank(P) $=d-1$，其中 d 是 P 的链的最大基数。$x\in P$ 的秩是满足存在形如 $x_0<x_1<\cdots<x_r=x$ 的 P 的链的最大 r。令 rank$_P(x)$ 表示 $x\in P$ 的秩。若偏序集 P 的所有极大链都具有相同基数，则称其为纯的。偏序集 P 的区间是子偏序集$[a,b]:=\{x\in P\colon\ a\le x\le b\}$，其中 $a,b\in P$ 满足 $a<b$。关于分配格 $L=\mathcal{J}(P)$、布尔格 B_n 和因子格 D_n 的基础材料，请参阅 [8, 第 157–159] 页。偏序集 P 的序复形是定义在 P 上的单纯复形 $\Delta(P)$，其面是 P 的链。若偏序集 P 的 $\Delta(P)$ 是 Cohen–Macaulay 的，则称该偏序集为 Cohen–Macaulay 偏序集。Cohen–Macaulay 偏序集的每个区间都是 Cohen–Macaulay 的。

2. Algebras with straightening laws

设 $R=\bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是 K 上的诺特分次代数。设 P 是一个有限偏序集，并假设给定了一个单射 $\varphi\colon P\hookrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$，使得 K-代数 R 由 $\varphi(P)$ 在 K 上生成。标准单项式是 R 中形如 $\varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)\cdots\varphi(\gamma_n)$ 的齐次元素，其中 $\gamma_1\le\gamma_2\le\cdots\le\gamma_n$ 属于 P。如果满足以下条件，我们称 R 是在 K 上的 [6] （关于） P 的直化律代数:

(ASL -1) 标准单项式构成 R 在 K上的一组基；(ASL -2) 如果 α 和 β 在 P 中不可比，并且如果

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)=\sum_i r_i\,\varphi(\gamma_{i_1})\varphi(\gamma_{i_2})\cdots,\ \ 0\neq r_i\in K,\ \ \gamma_{i_1}\le\gamma_{i_2}\le\cdots$$

是根据 (ASL -1) 得到的 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in R$ 作为不同标准单项式线性组合的唯一表示，那么对于每个 i，$\gamma_{i_1} \leq \alpha$，β。
(ASL -2) 中关系式的右侧允许为空和（$= 0$）。我们将直化律代数简称为 ASL。(ASL-2) 中的关系称为 R 的直化关系 。

令 $S = K[x_\alpha : \alpha \in P]$ 表示以 K 为系数环、含 $|P|$ 个变量的多项式环，并定义满射环同态 $\pi : S \to R$，令 $\pi(x_\alpha) = \varphi(\alpha)$。$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 的定义理想 I_R 是 π 的核 ker(π)。若 $\alpha, \beta \in P$ 不可比，则定义

$$f_{\alpha,\beta} := x_\alpha x_\beta - \sum_i r_i\, x_{\gamma_{i_1}} x_{\gamma_{i_2}} \cdots x_{\gamma_{i_{n_i}}},\ \text{with } 0 \neq r_i \in K,\ \gamma_{i_1} \leq \gamma_{i_2} \leq \cdots,$$

由 (ASL-2) 得出。于是 $f_{\alpha,\beta} \in I_R$。令 $\mathcal{G}_R$ 表示满足如下条件的多项式集合：$f_{\alpha,\beta}$ 中的 α 和 β 在 P 中不可比。令 $<_{\mathrm{rev}}$ 表示 Example 2.1.2(b)] 中的逆字典序 [8, ，该序由变量的一种排序所诱导，其中若 $\alpha < \beta$ 属于 P，则 $x_\alpha <_{\mathrm{rev}} x_\beta$。由 (ASL-1) 可知，$\mathcal{G}_R$ 是关于 $<_{\mathrm{rev}}$ 的 I_R 的 Gr¨obner 基。特别地，I_R 由 $\mathcal{G}_R$ 生成。

定义 2.1. 设 L 为一个格，$S = K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in L}]$ 为域 K上以 $|L|$个变量构成的多项式环。一个二次二项式

$$f_{\alpha,\beta} = x_\alpha x_\beta - x_{\alpha\vee\beta} x_{\alpha\wedge\beta}, \quad \alpha, \beta \in L$$

称为 L上的并交二项式。

显然，$f_{\alpha,\,\beta} \neq 0$ 当且仅当 x_α 和 x_β 在 L中不可比。理想$J_L = (f_{\alpha,\,\beta} : \alpha, \beta \in L)$及其商环 S/J_L 在 [9]中被引入。根据 Birkhoff 的经典结果 [8, 定理 9.1. 7] 以及 Dedekind 的经典结果 [17, 第 3 章，习题 30], ，可知 J_L 是素理想当且仅当 L 是分配格；并且当 L 是分配格时，S/J_L 是 L 上的一个 ASL，定义在 K 上，且是正规和 Cohen–Macaulay 的。

定义 2.2. 设 P为一个分配型偏序集，$K[P] = K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}]$ 为域 K上以 $|P|$ 个变量构成的多项式环。仿照 [16], ，我们引入多项式$f_{\alpha,\,\beta}$，其中 α，$\beta \in P$，如下所示：

- $f_{\alpha,\,\beta} = x_\alpha x_\beta$，如果 α 和 β 在 P中没有公共上界；
- $f_{\alpha,\,\beta} = x_\alpha x_\beta - x_{\alpha\wedge\beta}(\sum_\gamma x_\gamma)$，其中 γ 遍历 α 和 β的所有极小上界；否则。

显然，若 α和 β有上界 z，则 $x_{\alpha\wedge\beta}$存在，因为 $[\hat{0}_P,\ z]$是一个分配格。此外，$f_{\alpha,\,\beta} \neq 0$ 当且仅当 α 和 β 在 P中不可比。

我们引入理想

$$J_P = (f_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in P) \subset K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}]$$

及其商环

$$\mathcal{R}_K[P] := K[\{x_\alpha\}_{\alpha \in P}]/J_P.$$

特别地，若 L 是一个分配格，则 $\mathcal{R}_K[L]$ 与上一段中的 S/J_L 一致。

现在，Stanley [16, 引理 3.4] 的证明对以下引理也成立。

引理 2.3。 商环 $\mathcal{R}_K[P]$ 是 K上的 P的 *ASL*。

于是由 [6, 推论 4.2] 和 [5, 推论 2.7] 可知

推论 2.4. 商环 $\mathcal{R}_K[P]$ 是 *Cohen–Macaulay*，当且仅当 P是 *Cohen–Macaulay*。

例 2.5. 设 P 为图 1 所示的分配型偏序集。于是有

$$f_{x_2,x_3} = x_2x_3 - x_0(x_6 + x_7).$$

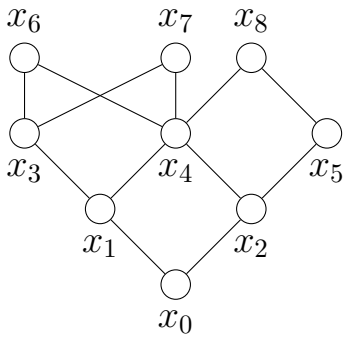


FIGURE 1. 一个分配型偏序集

我们以如下限制引理结束第 2 节。

引理 2.6。 设 P 是一个分配型偏序集，且其中任意一对元素至多有一个极小上界。设 $L' = [a, b]$ 是 P 的一个区间，并令 $S' := K[\{x_\alpha\}_{\alpha\in L'}]$。那么，对于所有 i 和 j，有

$$\beta_{i,j}^{S'}(\mathcal{R}_K[L']) \le \beta_{i,j}^{S}(\mathcal{R}_K[P]).$$

证明。 容易看出 $J_{L'} = J_P \cap S'$，这表明 $\mathcal{R}_K[L'] \subset \mathcal{R}_K[P]$是一个代数收缩核。由 [11,推论 2.5]可得 $\beta_{i,j}^{S'}(\mathcal{R}_K[L']) \le \beta_{i,j}^{S}(\mathcal{R}_K[P])$，证毕。 □

3. 问题 0.1

本节旨在解决问题 0.1。文中给出了分配格 L 的分类，使得对所有 $a \in L$， L_a 都是 Cohen–Macaulay。

引理 3.1。 设 $L = \mathcal{J}(P)$ 是一个分配格，并假设 P有三个元素 p_1、p_2、q_1 满足 $p_1 < p_2$，且 q_1 与 p_1 和 p_2均不可比较。那么存在 $a \in L$，使得 L_a 不是 *Cohen–Macaulay*。

证明。 令 $a \in L$ 表示 P 的偏序理想，其极大元为 p_1, q_1；令 $\Delta = \Delta(L_a)$ 表示 L_a的序复形。我们的目标是证明 Δ 不是 Cohen–Macaulay。假设 Δ 是 Cohen–Macaulay。令 $a_1 \in L$ （分别为 $a_2 \in L$）表示 P 的偏序理想，其唯一极大元为 p_1 （分别为 q_1）。设$a_3 := a_1 \cap a_2$。令 $F \in \Delta$ 表示由 L中一条从 $\emptyset$ 出发并终止于 a_3 的饱和链构成的面。设 $\Gamma :=$ 的链接 $_\Delta F$。

令 $b \in L$表示 L 的偏序理想，其唯一极大元为 p_2。由此可知， $e = \{a_1, b\}$ 是 Γ 的一条边，且 $v := \{a_2\}$ 是 Γ的一个顶点。因此，存在 Γ 的极大面 G_1, G_2 ，满足 $e \subseteq G_1$ 和 $v \in G_2$。由于 L_a （作为 P的偏序理想）中没有任何元素同时包含 p_1, q_1，故有 $G_1 \neq G_2$。由于 Δ 是 Cohen– Macaulay，我们推得 Γ是 Cohen–Macaulay。特别地，存在 Γ的一列极大面$G_1 = H_1, H_2, \ldots, H_s = G_2$，使得对每个 $1 \leq i \leq s$ 都有 $|H_i \cap H_{i+1}| = |H_i| - 1 = |H_{i+1}| - 1$（[8, 引理 **9.1.**12]）。回想一下，每个 H_i 都是 P的偏序理想链。对每个 $1 \leq i \leq s$，用 I_i 表示 H_i 的极大偏序理想。

Claim. One has $I_i = I_{i+1}$ for each $1 \leq i \leq s - 1$.

断言的证明。假设该断言不成立。令 i 为满足 $I_i \neq I_{i+1}$的最小整数。因此， $I_1 = \cdots = I_{i-i} = I_i$。由于 H_j 是 P的偏序理想所组成的饱和链，我们假设 H_j 的链由偏序理想给出

$$I_j^1 \subsetneq I_j^2 \subsetneq \ldots \subsetneq I_j^d = I_j.$$

由于 $I_i \neq I_{i+1}$ 和 $|H_i \cap H_{i+1}| = |H_i| - 1 = |H_{i+1}| - 1$，我们推得对每个 $1 \leq k \leq d - 1$都有 $I_i^k = I_{i+1}^k$。由于上述链是饱和的，因此

$$|I_i^d| = |I_i^{d-1}| + 1 = |I_{i+1}^{d-1}| + 1 = |I_{i+1}^d|.$$

因此，存在 x， $y \in P$，使得 $I_i^d = I_i^{d-1} \cup \{x\}$ 且 $I_{i+1}^d = I_i^{d-1} \cup \{y\}$。首先，假设 $x = p_1$ 且 $y = q_1$。那么 $p_1 \notin I_i^{d-1}$ 。由于 $p_1 <_P p_2$，有$p_2 \notin I_i^{d-1}$ 。因此，

$$p_2 \notin I_i^{d-1} \cup \{p_1\} = I_i^{d-1} \cup \{x\} = I_i^d = I_i = I_1.$$

这与 $p_2 \in I_1$ 矛盾。因此 $(x, y) \neq (p_1, q_1)$。此外，有 $(x, y) \neq (q_1, p_1)$，因为 $q_1 \notin I_1$。由此，$I_1^{d-1} \cup \{x, y\}$ 是 P 的一个偏序理想，且属于 L_a。因此，链

$$I_1^1 \subsetneq I_1^2 \subsetneq \ldots \subsetneq I_1^d \subsetneq I_1^{d-1} \cup \{x, y\}$$

是 P 中偏序理想组成的一条链，这些理想属于 L_a ，且真包含 H_1，矛盾。至此，断言得证。

现在，断言说明 $I_1 = I_s$。然而，这不可能，因为 $q_1 \in I_s \setminus I_1$。 □

引理 3.2。设 P 是一个偏序集，并假设若 $p_1 < p_2$ 属于 P，则每个 $q \in P$ 都与 p_1 或 p_2 可比较。那么 P 是纯的。

证明。令 C_0：$x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ 为 P 中长度最短的一条极大链，并任取 P 中的一条极大链 C：$y_1 < y_2 < \ldots < y_n$。于是 $m \leq n$。我们要证明 $m = n$。令

$$\alpha(C) := m - \max\{i \mid x_k = y_k \text{ for } k = 1, \ldots, i\}.$$

注意，若 $x_1 \neq y_1$，则 $\alpha(C) = m$ 。我们的工作通过对 $\alpha(C)$ 使用归纳法进行。若 $\alpha(C) = 0$，则 $C_0 = C$ ，且无需证明。假设 $\alpha(C) \geq 1$。为简化记号，令

$$\beta := m - \alpha(C) = \max\{i \mid x_k = y_k \text{ for } k = 1, \ldots, i\}.$$

由于 $\alpha(C) \geq 1$，可得 $\beta \leq m-1$。此外，我们知道 $x_\beta = y_\beta$ 与$x_{\beta+1} \neq y_{\beta+1}$。

现在，假设 $m < n$，并考虑元素 $x_{\beta+1}$，$y_{\beta+1}$，$y_{\beta+2} \in P$。若 $x_{\beta+1} = y_{\beta+2}$，则 $C_0 \cup \{y_{\beta+1}\}$ 是一个由 P 构成的链，且严格包含 C_0。这就产生了矛盾。因此，$x_{\beta+1} \neq y_{\beta+2}$。由假设可知，$x_{\beta+1}$与 $y_{\beta+1}$ 或 $y_{\beta+2}$可比较。因此，出现以下两种情形。

情形 1。设 $x_{\beta+1}$ 与 $y_{\beta+1}$可比较。若 $x_{\beta+1} < y_{\beta+1}$，则 $C \cup \{x_{\beta+1}\}$ 是一个由 P 构成的链，且严格包含 C，这就产生了矛盾。同理，若 $y_{\beta+1} < x_{\beta+1}$，则 $C_0 \cup \{y_{\beta+1}\}$ 是一个由 P构成的链，且严格包含 C_0，同样产生矛盾。

情形 2。设 $x_{\beta+1}$ 与 $y_{\beta+2}$可比较。若 $y_{\beta+2} < x_{\beta+1}$，则 $C_0 \cup \{y_{\beta+2}\}$是 P 的一条链，并且真包含 C_0，矛盾。因此，$x_{\beta+1} < y_{\beta+2}$。在此情形下，令$C' := (C \setminus \{y_{\beta+1}\}) \cup \{x_{\beta+1}\}$。由此可知，$C'$ 是 P的一条链，其长度与 C 相同。令 C'' 为包含 C'的 P 的一条极大链。则$\alpha(C'') < \alpha(C)$。因此，根据归纳假设，我们推出 C_0 和 C'' 具有相同的长度。由于 $|C_0| \leq |C| \leq |C''|$，可得 $m = n$，证毕。□

引理 3.3。设 P 是满足引理 *3.2* 条件的纯偏序集。若 p、$q \in P$，且 秩$_P(p) + 1 =$秩$_P(q)$，则 $p < q$。

证明。假设 $p \not<_P q$。那么 p 和 q 在 P中不可比较。由于 P 是纯的，存在 $p' \in P$，使得 $\mathrm{rank}_P(p') = \mathrm{rank}_P(p) + 1$且满足 $p < p'$。由此可得，p'和 q在 P中可比较，这与 $\mathrm{rank}_P(p') = \mathrm{rank}_P(q)$ 矛盾。□

引理 3.4。令 $n \geq 2$ 为一个整数，X 为 $[n] = \{1, \ldots, n\}$的一个非空子集。定义 $\Delta_{n,X}$ 为这样一个单纯复形：其极大面是 $[n]$ 中满足 $X \not\subset W$的那些$(n-1)$-子集 W。那么 $\Delta_{n,X}$ 是顶点可分解的。

证明。我们对 n使用归纳法。对于 $n = 2$，结论显然成立。令 $n \geq 3$和 $x \in X$。容易看出 $\mathrm{link}_{\Delta_{n,X}}\{x\} = \Delta_{n-1,X\setminus\{x\}}$。根据归纳假设，$\mathrm{link}_{\Delta_{n,X}}\{x\}$ 是顶点可分解的。由于 $\Delta_{n,X} - x$ 是一个有 $n-1$ 个顶点的单纯形，因此它是顶点可分解的。此外，由于 $\Delta_{n,X} - x$ 的每个极大面都是 $\Delta_{n,X}$的极大面，因此 $\Delta_{n,X}$ 是顶点可分解的，得证。□

引理 3.5. 设 L 为布尔格且 $a \in L$。则 L_a 是顶点可分解的。

^^证明。对于 $a = 0$无需证明。因此，假设 $a \neq 0$。设 $L = B_n$。于是，$a = X$，其中 X 为 $[n]$的一个非空子集。L_a 的序复形是单纯复形$\Delta_{n,X}$ 的重心细分，如引理 3.4 所述。L_a 的序复形的纯性由$\Delta_{n,X}$ 的纯性得出，而其顶点可分解性是 [3, 推论 11.7]与引理 3.4 的结果。□

引理 3.6. 关于偏序集 P 的下列条件等价：

(i) 若 $p_1 < p_2$ 在 P中，则每个 $q \in P$与 p_1 或 p_2可比较。(ii) P是纯的，并且满足：若 p、$q \in P$满足秩$_P(p) <$秩$_P(q)$，则 $p < q$。(iii) P 是反链 [8, p. 201]之和 [17,p. 246] 。

证明。首先，(i) ⇒(ii) 可由引理 3.2 和引理 3.3 得出。设 P 是一个满足 (ii) 的偏序集，A_i 是由所有秩$_P(x) = i$的 $x \in P$ 组成的 P 反链。

若 $x \in A_i$ 和 $y \in A_j$ 满足 $i < j$，则 $x < y$。因此，P 是反链A_0、A_1、.....、$A_{\mathrm{rank}(P)}$的和，正如所要求的。最后，(iii) $\Rightarrow$ (i) 显然成立。□

现在我们来完整地解决问题 0.1。

定理 3.7. 设 $L = \mathcal{J}(P)$ 为一个分配格。那么以下条件等价：

(i) P 是反链之和。(ii) 对于每个 $a \in L$，L_a 都是顶点可分解的。(iii) 对于每个 $a \in L$，L_a 都是可壳化的。(iv) 对于每个 $a \in L$，L_a 都是 *Cohen–Macaulay* 的。

证明。首先，(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) 一般都成立。其次，(iv) $\Rightarrow$(i) 可由引理 3.1 和 3.6 得出。另一方面，(i) $\Rightarrow$ (ii) 可由引理 3.5 以及（纯的且）顶点可分解偏序集之和仍是（纯的且）顶点可分解的这一事实得出。□

ˆ设 1 表示给定格 L 的唯一极大元。格 ˆ ˆL 的顶点是满足 $a \neq 0$ 和 $a \neq 1$ 的 $a \in L$，其中 a 与所有 $x \in L$ 均可比较。没有顶点的格称为简单格。

推论 3.8. 设 L 是简单分配格。则以下条件等价：

(i) L 是布尔的。(ii) 对于每个 $a \in L$，L_a 都是顶点可分解的。(iii) 对于每个 $a \in L$，L_a 都是可壳化的。(iv) 对于每个 $a \in L$，L_a 都是 *Cohen–Macaulay* 的。

4. Question 0.2 and Problem 0.3

现在我们转而讨论问题 0.2 和问题 0.3。

引理 4.1. 设 $L = D_{2^n \cdot 3^m}$，且 I 是 L 的一个对偶序理想。假设

$$2^{\alpha_1}3^{\beta_1}, \ldots, 2^{\alpha_k}3^{\beta_k}$$

是 I的极小元，其中

$$\alpha_1 > \cdots > \alpha_k, \quad \beta_1 < \cdots < \beta_k.$$

(a) 如果 $1 \leq \alpha_1 \leq n-1$ and $1 \leq \beta_1$, then $L \setminus I$ is not Cohen–Macaulay. (b) 如果 $\alpha_1 = n$ 和 $1 \leq \beta_1$，且如果 $L \setminus I$ 是 *Cohen–Macaulay*，那么 I 是秩固定的。

证明。(a) $L \setminus I$ 的区间 $L' = \{x \in L \setminus I : x \geq 2^{\alpha_1-1}3^{\beta_1-1}\}$ 是链 C 和 C' 的并，其中 $C \cap C' = 2^{\alpha_1-1}3^{\beta_1-1}$ 和 $|C| \geq 3$。因此，L' 不是 Cohen–Macaulay。由此可得，$L \setminus I$ 不是 Cohen–Macaulay，证毕。

(b) 由于 $L \setminus I$ 是 Cohen–Macaulay，$L \setminus I$ 的区间 $L' = \{x \in L \setminus I : x \geq 2^{n-1}3^{\beta_1-1}\}$ 是纯的。因此 $\alpha_2 = n-1$ 和 $\beta_2 = \beta_1 + 1$。重复这一过程可得，I 是秩固定的。□

由引理 4.1 可知，剩下的问题是 $2^{\alpha_1}3^{\beta_1} = 2^{n'}$ 与 $1 \leq n' \leq n$。此外，若 $2^{\alpha_1}3^{\beta_1} = 2^{n'}$，则 $L \setminus I = L' \setminus I'$，其中 $L' = D_{2^{n'-1}\cdot 3^m}$ 和 I' 是 L' 的对偶序理想。另一方面，若 $\alpha_1 = 0$，则 $L \setminus I = D_{2^n\cdot 3^{\beta_1-1}}$。

推论 4.2。设 $L = D_{2^n\cdot 3^m}$ 和 I 是 L的一个对偶序理想。则以下条件等价:

(i) $L \setminus I$ 是 L 的一个子格，形式为 $D_{2^{n'}\cdot 3^{m'}} \setminus I'$，其中 $n' \leq n$、$m' \leq m$，且 I' 是 $D_{2^{n'}\cdot 3^{m'}}$的一个秩固定对偶序理想。(ii) $L \setminus I$ 是 *Cohen–Macaulay*。

引理 4.3。设 $L = D_{2^n\cdot 3^m}$ 和 I 是 L的一个秩固定对偶序理想。则 $L \setminus I$是顶点可分解的。

证明。容易看出 $L \setminus I$的纯性。$L \setminus I$ 的顶点可分解性由 [3, 定理 10.11 和 11.6] 推出，再结合每个分配格都是 CL-可壳的这一事实即可。□

W现在我们来给出问题 0.2 和问题 0.3 的完整解答 .

定理 4.4. 设 $L = D_{2^n\cdot 3^m}$ 和 I 为 L的一个对偶序理想。那么以下条件等价:

(i) $L \setminus I$ 是 L 的一个子格，形式为 $D_{2^{n'}\cdot 3^{m'}} \setminus I'$，其中 $n' \leq n$、$m' \leq m$，且 I' 是 $D_{2^{n'}\cdot 3^{m'}}$的一个秩固定对偶序理想。(ii) $L \setminus I$ 是顶点可分解的。(iii) $L \setminus I$ 是可壳化的。(iv) $L \setminus I$ 是 *Cohen–Macaulay* 的。

证明。首先，(i) $\Rightarrow$ (ii)由引理 4.3 推出。其次，(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)一般都成立。最后，(iv) $\Rightarrow$ (i)由推论 4.2 推出。□

5. Question 0.4

设 P 是一个分配型偏序集，$K[P] = K[\{x_\alpha\}_{\alpha\in P}]$ 是在 K 上以 $|P|$ 个变量生成的多项式环。由于商环 $\mathcal{R}_K[P] = K[P]/J_P$ 是 K 上关于 P 的 ASL，根据第 2 节第二段可知

$$\mathcal{G}_P := \{f_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in P\}$$

是关于由变量排序所诱导的 $K[P]$ 上的反字典序 $<_{\mathrm{rev}}$ 的 J_P 的 Gr¨obner 基，其中若 $\alpha < \beta$ 属于 P，则 $x_\alpha < x_\beta$。

回忆一下，偏序集 P 的可比图是一个以 P 为顶点的图，其边是满足 $x < y$ 或 $y < x$ 的 $\{x, y\}$。

定理 5.1. 理想 J_P 有线性分解，当且仅当 P 的可比图是弦的。

证明。由于 J_P 有无平方首项理想，根据 [5, 推论 2.7]可知，J_P 有线性分解当且仅当其初始理想有线性分解。由于初始理想是 P的可比图的补图的边理想，根据弗罗贝尼乌斯判据 [8, 定理 9.2.3] 可知，初始理想有线性分解当且仅当 P 的可比图是弦的。□

推论 5.2 在 [7, 定理 4.2] 中借助希尔伯特函数得到了证明。

推论 5.2. 设 L是一个简单分配格。当且仅当 $L = D_{2\cdot 3^n}$ 满足 $n \geq 1$时， L具有线性分解。

证明。 $L = D_{2\cdot 3^n}$ 的可比图是定义在 $\{1, \ldots, n, 1', \ldots, n'\}$ 上的有限图 Com(L)，其边为 $\{i, j\}$， $\{i', j'\}$ 满足 $i < j$且 $\{i, j'\}$ 满足$j \leq i$。由于 Com(L)在 $\{1, \ldots, n\}$ 上的诱导子图以及在 $\{1', \ldots, n'\}$上的诱导子图都是完全图，因此容易看出 Com(L)是弦图。

如果 L 是非平面的，那么 L 的一个区间是布尔格 B_3。由于 B_3 的可比图不是弦图，因此 Com(L)不可能是弦图。假设 $L = \mathcal{J}(P)$是平面的。设 C: $x_0 < x_1 < \cdots < x_s$和 C': $y_0 <y_1 < \cdots < y_t$，其中 $s > 0$和 $t > 0$，是 P中满足 $P = C \cup C'$和 $C \cap C' = \emptyset$的链。由于 L 是简单的， x_0 和 y_0 （分别是 x_s 和 y_t）不可比。设 $a = P \setminus \{x_s\}$， $b = P \setminus \{y_t\}$， $a' = \{x_0\}$， $b' = \{y_0\}$ 是 $\mathcal{J}(P)$的元素。那么 Com(L)在 $\{a, b, a', b'\}$ 上的诱导子图是一个没有任何弦的长度为 4 的环。因此 Com(L)不可能是弦图，证毕。□

例 5.3。 设 L 是一个分配格， I 是一个对偶序理想。假设 $J_{L\setminus I}$ 有线性分解，并设 I' 是 L 的一个对偶序理想，且满足 $I \subset I'$。由定理 5.1 可得， $J_{L\setminus I'}$ 有线性分解。特别地，若 I 是因子格 $D_{2\cdot 3^n}$ 的一个对偶序理想，且满足 $n \geq 1$，则 $J_{D_{2\cdot 3^n}\setminus I}$ 有线性分解。

例 5.4。 设 P 是图 2 中的分配型偏序集。由于 P 的可比图是弦的，理想 J_P 有线性分解。

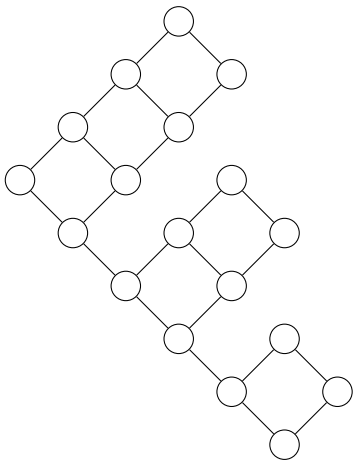


FIGURE 2. 具有线性分解的偏序集

当然，找出一类合理的具有分配类型的偏序集 P，使得 J_P 具有线性分解，将会很有意义。

6. Question 0.5

在 [9, 第 105], 页中证明了：当且仅当 P 是纯的时， $\mathcal{R}_K[L]$ 是 Gorenstein 的，其中 $L = \mathcal{J}(P)$。然而，除了 $I = \emptyset$之外，要完整解决问题 0.5 似乎很困难。我们将针对布尔格 $L = B_n$研究问题 0.5。

引理 6.1. 设 I 是 B_n 的一个秩固定对偶序理想， $d+1$ 是 I的极小元的秩。若 $1 \leq d \leq n-2$, 则 $\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]$ 不可能是 *Gorenstein*。

证明. 令 Δ 表示 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 上的单纯复形，它由满足 $|F| \leq d$的$F \subset [n]$ 组成。因此，$(B_n \setminus I) \setminus \{\hat{}0\}$ 的序复形 Γ 是 Δ的重心细分。令 $h(\Gamma) = (h_0, h_1, \ldots\ldots, h_d)$ 表示 Γ的 h向量，而 $h(\Delta) = (h'_0, h'_1, \ldots\ldots, h'_d)$表示 Δ的 h向量。于是有

$$(-1)^{d-1} h_d = \widetilde{\chi}(\Gamma) = \widetilde{\chi}(\Delta) = (-1)^{d-1} h'_d$$

利用公式 $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q}$, 可得

$$(-1)^{d-1} h'_d = -\binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{d-1} \binom{n}{d} = (-1)^{d-1} \binom{n-1}{d}.$$

由于 $0 < d < n-1$, 可得 $h'_d \geq 2$。由于 $(h_0, h_1, \ldots\ldots, h_d)$ 是 $\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]$ 的 h-向量，因此 $\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]$ 不可能是 Gorenstein。□

定理 6.2。 设 I 是 B_n 的秩固定对偶序理想。那么， $\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]$ 是 *Gorenstein*, 当且仅当 $I = \emptyset$ 或 $I = \{\hat{}1_{B_n}\}$ 或 $B_n \setminus I = \{\hat{}0_{B_n}\}$ 或 $B_n \setminus I = \emptyset$。

证明。“仅当”部分由引理 6.1 得出。由 [9, 第 105] 页可知， $\mathcal{R}_K[B_n]$ 是 Gorenstein。此外，由于 $\hat{}\, 1_{B_n}$ 是 $\mathcal{R}_K[B_n]$ 的非零因子， $\mathcal{R}_K[B_n \setminus \{\hat{}1_{B_n}\}]$ 是 Gorenstein。另一方面， $\mathcal{R}_K[\{\hat{}0_{B_n}\}]$ 是一个变量的多项式环，并且 $\mathcal{R}_K[\emptyset] = K$。□

另一方面，引理 6.1 给出了关于 $\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]$ 正则度的一个结果。

推论 6.3。 设 I 是布尔格 B_n 的一个秩固定对偶序理想，且 $d+1$ 是 I 的极小元的秩。假设 $1 \leq d \leq n-2$。那么

$$\operatorname{reg}(\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]) = \operatorname{rank}(B_n \setminus I).$$

证明。 注意，$\operatorname{rank}(B_n \setminus I) = d$。设 $(h_0, h_1, \ldots\ldots, h_d)$ 是 $\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]$ 的 h-向量。由于 $B_n \setminus I$ 是 Cohen–Macaulay 的，例如在 [4, 引理 2.5] 中明确指出：

$$\operatorname{reg}(\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]) = \max\{i : h_i \neq 0\}.$$

现在，根据引理 6.1 的证明，有 $h_d \neq 0$ ，并且

$$\operatorname{reg}(\mathcal{R}_K[B_n \setminus I]) = d = \operatorname{rank}(B_n \setminus I),$$

如所需。 □

我们给出问题 0.5 的一个有限部分解。回顾一下，对于给定的单纯复形 Δ, 其系数取自 K 的第 i 阶约化同调记作 $\widetilde{H_i(\Delta; K)}$。

定理 6.4。 设 L 是一个分配格，且 ρ_i 是 L 中秩为 i的元素个数。设 I 是 L的一个秩固定对偶序理想。

(i) 若秩$(L \setminus I) = 0$，则 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 是 *Gorenstein*。(ii) 若秩$(L \setminus I) = 1$，则 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 是 *Gorenstein* 当且仅当 $\rho_1 \leq 2$。(iii) 若秩$(L \setminus I) = 2$，则 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 是 *Gorenstein* 当且仅当

$$(\rho_1, \rho_2) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,3)\}.$$

证明。 (i) 若秩$(L \setminus I) = 0$，则 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 是一个变量上的多项式环，因而是 Gorenstein。

(ii) 若秩$(L \setminus I) = 1$，则 $J_{L\setminus I}$ 是完全图 K_{ρ_1}的边理想，当且仅当 $\rho_1 \leq 2$ ([8, 推论 9.3.3])时，它是 Gorenstein。

(iii) 设秩$(L \setminus I) = 2$。若 $\rho_1 = 1$，则 $J_{L\setminus I}$ 是完全图 K_{ρ_2}的边理想。因此，它是 Gorenstein 当且仅当 $\rho_2 \leq 2$。

假设 $\rho_1 \geq 2$。如果 $(\rho_1, \rho_2) = (2,1)$，那么 $J_{L\setminus I}$是一个主理想，并且$\mathcal{R}_K[L \setminus I]$是 Gorenstein 的。如果 $(\rho_1, \rho_2) = (3,3)$，那么 $\mathcal{R}_K[L \setminus I] = \mathcal{R}_K[B_3 \setminus \hat{1}_{B_3}]$，它是 Gorenstein 的（定理 6.2）。

现在，假设 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 是 Gorenstein 的，且满足 $\rho_1 \geq 2$。令 Δ 表示 $(L \setminus I) \setminus \{\hat{0}_L\}$ 的序复形，并令 $h(\Delta) = (h_0, h_1, h_2)$ 表示其 h-向量。令 H 表示 $(L \setminus I) \setminus \{\hat{0}_L\}$ 的哈斯图，并以显而易见的方式将其视为连通二分图。我们区分以下三种情形。

情形 1。 假设 H 至少有两个环。那么 $|E(H)| > |V(H)|$。因此，

$$h_2 = 1 - |V(H)| + |E(H)| \geq 2.$$

因此， $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$ 不可能是 Gorenstein。

情形 2。 假设 H 恰好有一个环。如果 $\rho_1 \geq 4$，那么包含 0_L 的 $L^{\hat{}}$ 的一个区间是布尔格 B_4。因此， H 至少有四个长度为 6 的环，这就矛盾了。令 $\rho_1 \leq 3$。如果 $\rho_1 = 2$，由于秩为 1 的两个元素具有一个秩为 2 的唯一并， H 不可能包含任何环，这就矛盾了。因此， $\rho_1 = 3$。由此可得， $\rho_2 \geq 3$且 H 的唯一环长度为 6。如果 $\rho_2 = 3$，则结论成立。令 $\rho_2 \geq 4$和 $V(H) = \{x_1, \ldots, x_m\}$。置 $p := \mathrm{pd}\ \mathcal{R}_K[L \setminus I]$和 $r := \mathrm{reg}\ \mathcal{R}_K[L \setminus I]$。由于 $\mathcal{R}_K[L \setminus I]$是 Cohen–Macaulay 的，且 $\dim\ \mathcal{R}_K[L \setminus I] = \mathrm{rank}(L \setminus I) + 1 = 3$，由 Auslander–Buchsbaum 公式可知

$$p = (m+1) - (\mathrm{rank}(L \setminus I) + 1) = m - 2.$$

由于 Δ 是一个连通的一维单纯复形，其 f-向量为 $f(\Delta) = (|V(H)|, |E(H)|)$，因此有

$$\dim_k \widetilde{H}_1(\Delta; K) = 1 - |V(H)| + |E(H)| = 1.$$

由 Hochster 公式 [8, 定理 8.1.1] 可得

$$\beta_{m-2,m}(K[L \setminus I]/I_\Delta) = 1.$$

由于 Δ 有 m 个顶点，$\beta_{m-2,\ s}(K[L\setminus I]/I_\Delta) = 0$ 对每个 $s \geq m+1$。由于$\beta_{p,\ p+r}((K[L\setminus I]/I_\Delta) \neq 0$，我们推出 $r = 2$。利用 [5, 推论 2.7], 可得

$$\beta_{m-2,m}(\mathcal{R}_K[L \setminus I]) = \beta_{m-2,m}(K[L \setminus I]/I_\Delta) = 1.$$

现在，我们研究 $\beta_{m-2,\ m-1}(\mathcal{R}_K[L\setminus I])$。设 C 为 H 的唯一环，并选取$x_i \in V(H)\setminus V(C)$。其秩$_L(x_i) = 2$。由于 $x_i \notin V(C)$，可知 x_i 是 H的叶节点。设 x_j 为 x_i的唯一邻点。其秩$_L(x_j) = 1$。因此，$x_ix_t \in J_{L\setminus I}$，对每个 $t = 1,$ ……，m 且 $t \neq i,\ j$。考虑 $J_{L\setminus I}$关于 $<_{\mathrm{rev}}$ 的初始理想（在第 2 节中引入），由此可得

$$(J_{L\setminus I} : x_i) = (x_t : t = 1,\dots m, t \neq i, j).$$

短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{K[L\setminus I]}{(J_{L\setminus I} : x_i)}(-1) \longrightarrow \frac{K[L\setminus I]}{J_{L\setminus I}} \longrightarrow \frac{K[L\setminus I]}{(J_{L\setminus I}, x_i)} \longrightarrow 0$$

导出正合列

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_{m-1}^{K[L\setminus I]}\Big(K, \frac{K[L\setminus I]}{(J_{L\setminus I}, x_i)}\Big)_{m-1} &\longrightarrow \mathrm{Tor}_{m-2}^{K[L\setminus I]}\Big(K, \frac{K[L\setminus I]}{(J_{L\setminus I} : x_i)}\Big)_{m-2}\\ &\longrightarrow \mathrm{Tor}_{m-2}^{K[L\setminus I]}\Big(K, \frac{K[L\setminus I]}{J_{L\setminus I}}\Big)_{m-1}.\end{aligned}$$

由于 $J_{L\setminus I}$ 由二次齐次元生成，因此有

$$\mathrm{Tor}_{m-1}^{K[L\setminus I]}\Big(K, \frac{K[L\setminus I]}{(J_{L\setminus I}, x_i)}\Big)_{m-1} = 0.$$

由于（$J_{L\setminus I}$: x_i）由 $m-2$ 个变量生成，因此有

$$\dim_K \mathrm{Tor}_{m-2}^{K[L\setminus I]}\Big(K, \frac{K[L\setminus I]}{(J_{L\setminus I} : x_i)}\Big)_{m-2} = 1.$$

上述正合列蕴含$\beta_{m-2,\ m-1}(\mathcal{R}_K[L\setminus I]) \geq 1$，结合$\beta_{m-2,\ m}(\mathcal{R}_K[L\setminus I]) = 1$，可得 $\beta_{m-2}(\mathcal{R}_K[L\setminus I]) \geq 2$。因此，$\mathcal{R}_K[L\setminus I]$不可能是 Gorenstein 的，这就产生了矛盾。

情形 3。假设 H 是一棵树。我们沿用情形 2 中的记号。~情形 2 中的论证表明 $H_1(\Delta; K) = 0$。由 Hochster 公式可得 $\beta_{m-2,m}(K[L\setminus I]/I_\Delta) = 0$。由于 Δ 有 m 个顶点，对每个 $s \geq m+1$，都有 $\beta_{m-2,s}(K[L\setminus I]/I_\Delta)$ =0。由于 $\beta_{p,p+r}((\mathcal{R}_K[L\setminus I]) = \beta_{p,p+r}((K[L\setminus I]/I_\Delta) \neq 0$，我们推得 $r \leq 1$。由于 $J_{L\setminus I}$ 由二次齐次元生成，故有 $r = 1$。换言之，$J_{L\setminus I}$ 有线性分解。由于 $\mathcal{R}_K[L\setminus I]$ 是 Gorenstein 的，我们推得 $J_{L\setminus I}$ 是一个主理想。最后，由 $\rho_1 \geq 2$ 可得 $(\rho_1, \rho_2) = (2, 1)$，证毕。□

Stanley [14] 引入的 ***level***环 是指典范模由同一次数的元素生成的 Cohen–Macaulay分次环。每个 Gorenstein环都是 level环。

定理 6.5. 设 B_n 是一个布尔格，I 是 B_n的一个秩固定对偶序理想。那么 $\mathcal{R}_K[B_n\setminus I]$ 是 ***level***环。

证明。设 $K[B_n\setminus I] = K[\{x_A : A \subset [n], A \in B_n\setminus I\}]$ 以及 $\Delta B_n\setminus I$的序复形。由于 I_Δ是 $J_{B_n\setminus I}$ 的初始理想，只需证明 $K[B_n\setminus I]/I_\Delta$是一个 level环。令 $r := \mathrm{rank}(B_n\setminus I) = \dim\Delta$。若 $r = n$，则 $I = \emptyset$ 且 $B_n\setminus I = B_n$ 是 Gorenstein。若 $r = n-1$，则该断言由定理 6.2 得出。因此，假设

满足 $r \leq n-2$。由推论 6.3 可知 $r = \mathrm{reg}(K[B_n \setminus I]/I_\Delta)$。令$p := \mathrm{pd}(K[B_n \setminus I]/I_\Delta)$。

我们证明，对于每个 $\ell < r$，$\beta_{p,p+\ell}(K[B_n \setminus I]/I_\Delta) = 0$。令 I_0 表示 B_n 的秩为固定值的对偶序理想，使得 $\mathrm{rank}(B_n \setminus I_0) = r+1$，且 Δ_0 是 $B_n \setminus I_0$ 的序复形。令 $A_1, \ldots, A_k$ 表示 $B_n \setminus I_0$ 的极大元。换言之，$I \setminus I_0 = \{A_1, \ldots, A_k\}$。有 $\mathrm{pd}(K[B_n \setminus I_0]/I_{\Delta_0}) = p+k-1$。特别地，对于每个 ℓ，$\beta_{p+k,p+k+\ell}(K[B_n \setminus I_0]/I_{\Delta_0}) = 0$。设 $J_0 := I_{\Delta_0}$，且 $J_t := I_{\Delta_0} + (x_{A_1}, \ldots, x_{A_t})$，其中 $1 \leq t \leq k$。对于 $t \leq k-1$ 和 $\ell < r$，短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{K[B_n \setminus I_0]}{(J_t : x_{A_{t+1}})}(-1) \longrightarrow \frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_t} \longrightarrow \frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_{t+1}} \longrightarrow 0$$

诱导出正合列

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_{p+k}^{K[B_n \setminus I_0]}\Big(K, \frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_t}\Big)_{p+k+\ell} &\longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+k}^{K[B_n \setminus I_0]}\Big(K, \frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_{t+1}}\Big)_{p+k+\ell} \\ &\longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+k-1}^{K[B_n \setminus I_0]}\Big(K, \frac{K[B_n \setminus I_0]}{(J_t : x_{A_{t+1}})}\Big)_{p+k+\ell-1}.\end{aligned}$$

上述正合列表明

$$\beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\tfrac{K[B_n \setminus I_0]}{J_{t+1}}\Big) \leq \beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\tfrac{K[B_n \setminus I_0]}{J_t}\Big) + \beta_{p+k-1,p+k+\ell-1}\Big(\tfrac{K[B_n \setminus I_0]}{(J_t : x_{A_{t+1}})}\Big). \tag{1}$$

注意

$$(J_t : x_{A_{t+1}}) = (I_{\Delta_0} : x_{A_{t+1}}) + (\text{some variables}) = I_{\mathrm{link}_{\Delta_0}(A_{t+1})} + (\text{some variables}).$$

由于 A_{t+1}是 $B_n \setminus I_0$的极大元，我们推出 $I_{\mathrm{link}_{\Delta_0} A_{t+1}}$是 $B_{|A_{t+1}|} = B_{r+1}$的序复形的Stanley–Reisner理想。因此，$(J_t : x_{A_{t+1}})$的正则度为 r。另一方面，由同样的论证，

$$\mathrm{pd}\left(K[B_n \setminus I_0]/I_{\mathrm{link}_{\Delta_0}(A_{t+1})}\right) = 2^{|A_{t+1}|} - (|A_{t+1}|+1) = 2^{r+1} - r - 2.$$

由于属于$(J_t : x_{A_{t+1}})$的变量是所有使得 B 不包含于 A_{t+1}的变量 $x_B \in K[B_n \setminus I_0]$，我们推出这些变量的个数为$|B_n \setminus I_0| - 2^{|A_{t+1}|} = |B_n \setminus I_0| - 2^{r+1}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{pd}\left(K[B_n \setminus I_0]/(J_t : x_{A_{t+1}})\right) &= 2^{r+1} - r - 2 + |B_n \setminus I_0| - 2^{r+1} \\ &= |B_n \setminus I_0| - r - 2 = p + k - 1.\end{aligned}$$

由于$K[B_n \setminus I_0]/I_{\mathrm{link}_{\Delta_0}(A_{t+1})}$是Gorenstein的，从而 $K[B_n \setminus I_0]/(J_t : x_{A_{t+1}})$是Gorenstein的。特别地，

$$\beta_{p+k-1,p+k+\ell-1}\Big(\frac{K[B_n \setminus I_0]}{(J_t : x_{A_{t+1}})}\Big) = 0, \quad \ell < r.$$

由不等式 (1) 可得

$$\beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_{t+1}}\Big) \leq \beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_t}\Big).$$

反复应用上述不等式可得

$$\beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_k}\Big) \le \beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_0}\Big).$$

回顾一下，$J_0 = I_{\Delta_0}$ 以及 pd $(K[B_n \setminus I_0]/I_{\Delta_0}) = p + k - 1$。因此，上述不等式的右边为零。于是

$$\beta_{p+k,p+k+\ell}\Big(\frac{K[B_n \setminus I_0]}{J_k}\Big) = 0, \quad \ell < r.$$

由于 $J_k = I_{\Delta_0} + (x_{A_1}, \ldots, x_{A_k}) = I_\Delta + (x_{A_1}, \ldots, x_{A_k})$，且 I_Δ的生成元不能被 $x_{A_1}, \ldots, x_{A_k}$整除，由上面的等式可得

$$\beta_{p,p+\ell}(K[B_n \setminus I]/I_\Delta) = 0.$$

这表明 $K[B_n \setminus I]/I_\Delta$ 是一个 level 环，正如所需。 □

定理 6.5 自然引出了下面的猜想。

猜想 6.6。设 Δ是一个球面的三角剖分，P_Δ 是其面偏序集。换句话说，P_Δ 由 Δ 的所有面（包括 $\emptyset$）组成，并按包含关系排序。回顾一下，P_Δ 是一个单纯偏序集 [16]。设 I 是 P_Δ的一个秩固定对偶序理想。那么$\mathcal{R}_K[P_\Delta \setminus I]$ 是 level 的。

当然，若能找到一类合理的分配型 Cohen–Macaulay偏序集 P，使得 $\mathcal{R}_K[P]$ 为 Gorenstein，将会很有意义。

Acknowledgments

第二作者获得了安第斯大学的 FAPA资助。

Statements and Declarations

作者声明，与本文内容相关的利益冲突均不存在。

Data availability

本文不适用数据共享，因为本研究未创建或分析任何新数据。

References

[1] K. Baclawski，Cohen–Macaulay有序集，《代数杂志》 **63** （1980），226–258。[2] A. Bj¨orner，可剖分与Cohen–Macaulay偏序集，《美国数学会汇刊》**260**（1980），159–183。[3] A. Bj¨orner与M. Wachs，可剖分非纯复形与偏序集 II，《美国数学会汇刊》 **349** （1997），3945–3975。[4] B. Benedetti与M. Varbaro，论Cohen–Macaulay代数的对偶图，《国际数学研究通知》 **17**（2015），8085–8115。[5] A. Conca与M.Varbaro，无平方Gr¨obner退化，《数学发明》**221**（2020），713–730。

[6] D. Eisenbud，直化律代数导论，载于《环论与代数 III》（B. R. McDonald编），第三届俄克拉荷马会议论文集，《纯粹与应用数学讲义》第55号，Dekker，1980，243–268。[7] V. Ene、J. Herzog与T. Hibi，线性相关的多联骨牌，《代数组合学杂志》41（2015），949–968。[8] J. Herzog与T. Hibi，《单项式理想》，GTM 260，Springer，2011。[9] T. Hibi，分配格、仿射半群环与直化律代数，载于《交换代数与组合学》（永田雅宜与松村英之编），《纯粹数学高等研究》第11卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987，第93–109页。[10]T. Hibi，《凸多面体上的代数组合学》，Carslaw出版社，格利布，新南威尔士，澳大利亚，1992。[11] 大杉英史、J. Herzog与T. Hibi，组合纯子环，《大阪数学杂志》37（2000），745–757。[12] G. Reisner，多项式环的Cohen–Macaulay商，《数学进展》21（1976），30–49。[13] R. P. Stanley，上界猜想与Cohen–Macaulay环，《应用数学研究》54（1975），135–142。[14] R. P. Stanley，Cohen–Macaulay复形，《高等组合学，第二版》（M. Aigner编），北约高级研究学院丛书，Reidel出版社，多德雷赫特/波士顿，1977，第51–62页。[15] R. P. Stanley，《组合学与交换代数，第二版》，Birh¨auser，波士顿，1996。[16] R. P. Stanley，单纯偏序集的 f-向量与 h-向量，《纯粹与应用代数杂志》71（1991），319–331。[17] R. P. Stanley，《计数组合学，第一卷，第二版》，剑桥高等数学研究第49卷，剑桥大学出版社，2012。

(Takayuki Hibi) Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565–0871, Japan电子邮箱：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

(Seyed Amin Seyed Fakhari) Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia电子邮箱：s.seyedfakhari@uniandes.edu.co