arXiv:2602.14421v1 [math.RA] 16 Feb 2026

环中的高阶群逆

刘大勇 和 陈焕银

Abstract. 本文引入并研究环中的高阶群逆。我们将复矩阵的高阶群逆已知性质推广到环元素，并由此推导出新的结果。此外，我们还刻画了环元素何时可表示为一个高阶群元与一个幂零元之和。

1. Introduction

若一个环 R 配有对合 $*: R \to R$，记作 $x \mapsto x^*$，并且对所有 $x, y \in R$和 $\lambda \in \mathbb{C}$均满足以下性质，则称其为 *-环:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, (xy)^* = y^* x^*, (x^*)^* = x.$$

在线性代数中，矩阵逆的概念至关重要。然而，传统的逆仅对非奇异方阵存在。为处理奇异矩阵或矩形矩阵，发展出了弱逆理论。

其中，Moore-Penrose逆最为人熟知。若存在元素$x \in R$ 使得 $a \in R$ 满足

$$xax = x, axa = a, (ax)^* = ax, (xa)^* = xa.$$

该元素 x若存在则唯一，记作 $a^\dagger$。所有具有 Moore-Penrose 逆的元素组成的集合 R 记作 $R^\dagger$ （见 [6, 10]）。其他弱逆则针对特定的结构或代数要求而定义。

若存在元素 $x \in R$ 使得元素 $a \in R$ 具有群逆

$$xax = x, axa = a, ax = xa.$$

如果存在，这样的元素 x 是唯一的，记作 $a^\#$，并称为 a 的群逆。对于复矩阵，群逆存在当且仅当

2020 数学主题分类。16U99, 15A09, 46H05.关键词和短语。群逆；高阶群逆；弱高阶群逆；幂零，环。

矩阵的指数为一，也就是说，零特征值的代数重数与几何重数相等。

群逆已成为线性代数及其众多应用中的一种强大工具。与更广为人知的 Moore-Penrose 逆不同，对于满足指标为一这一特定条件的奇异矩阵，群逆存在。群逆已从多个角度得到广泛研究，包括探讨其理论特征、开发高效的计算算法，以及研究其在马尔可夫链、奇异微分方程、控制论和图论等领域的广泛应用（参见 [5]）。

一项重大挑战是将群逆推广到高阶情形，同时保留其大部分关键性质，并确保新定义适用于更广泛的一类环元素。Wang 通过 Hartwig-Spindelbock 分解引入并研究了复矩阵的高阶群逆（参见 [12]）。由于这一分解不适用于更广泛的一类对象，例如环上的矩阵，我们因此希望将高阶群逆的概念推广到这一新背景中。因此，本文通过提出一种新方法，研究这一一般情形下的高阶群逆。

在第 2 节中，我们引入环元素的高阶群逆，并通过环中方程组的可解性对其进行刻画R。

定义 *1.1. </style}*元素 $a \in R^{\dagger}$ 称为具有高阶群逆（简称为 $\mathcal{H}$-群逆），如果存在 $x \in aR \bigcap Ra$ 使得

$$xax = x, a^2xa^2 = a^3, (a^2xa^*)^* = a^2xa^*, (a^*xa^2)^* = a^*xa^2.$$

如果这样的 x 存在，则它是唯一的，记为 $a^{\mathcal{H}}$。所有在 R 中具有 $\mathcal{H}$-群逆的元素构成的集合记为 $R^{\mathcal{H}}$。

在第 2 节中，我们证明 $a \in R^{\dagger}$ 具有 $\mathcal{H}$-群逆当且仅当$a^{\dagger}a^3a^{\dagger} \in R^{\dagger}$。文中给出了环元素的 $\mathcal{H}$-群逆的表示。

Wang 和 Chen 首次引入并研究了方阵复矩阵的弱群逆（见 [11]）。随后，Zou 等人将这一概念从复矩阵推广到带真对合的环的元素（见 [13]）。这种逆的一个重要性质是，它刻画了可表示为群可逆元与幂零元之和的环元素。因此，弱群逆从多个角度得到了广泛研究 [3, 4, 7, 8, 9, 13]。这启发我们

刻画环元素何时可写成高阶群可逆元与幂零元之和。

设 R^{nil} 为 R中所有幂零元的集合。我们采用如下记号:

定义 1.2. 若存在x、 $y \in R$ 使得 $a \in R$ 满足

$$a = x + y, x^*y = 0, yx = 0, x \in R^{\mathcal{H}}, y \in R^{nil}.$$

我们将 $x^{\mathcal{H}}$ 记为 $a^{\textcircled{\#}}$ ，并称其为 a的弱 $\mathcal{H}$-群逆。 R 中所有弱 $\mathcal{H}$-群可逆元的集合记为$R^{\textcircled{\#}}$。

回顾一下，若存在$x \in R$ 使得 $a \in R$ 满足

$$x = xax, (ax)^* = ax, (xa)^* = xa, a - axa \in R^{nil}.$$

前述 x 若存在则唯一，记为 $a^{\textcircled{d}}$。 R 中所有广义Moore-Penrose可逆元的集合记为 $R^{\textcircled{d}}$ （见 [1]）。

在第 3 节中，我们建立了弱 $\mathcal{H}$-群逆与弱 Moore-Penrose 逆之间的关系。我们证明了 $a \in R^{\textcircled{\#}}$ 当且仅当$a \in R^{\dagger\bigcirc}$ 且 $a^{\dagger\bigcirc}a^3a^{\textcircled{d}} \in R^{\dagger}$。由此给出了弱$\mathcal{H}$-群逆的逐元刻画（见定理 3.4）。

全文中，所有 *-环都是含单位元的结合环。 R^D， $R^{\dagger}$， $R^{\dagger\bigcirc}$和 R^{nil} 分别表示环 R中所有 Drazin 可逆、Moore-Penrose 可逆、弱 Moore-Penrose 可逆和幂零元的集合。设 $a \in R$。令$im(a) = \{ax \mid x \in R\}$ 和 $ker(a) = \{x \in R \mid ax = 0\}.$。我们用 $p_{im(a)}$ 表示投影 p，使得 $im(p) = im(a)$ 。

2. THE $\mathcal{H}$-GROUP INVERSE

本节中，我们利用环元素的 Moore-Penrose 逆刻画其 $\mathcal{H}$-群逆。我们的出发点如下:

定理 2.1. 设 $a \in R$。则下列条件等价:

(1) $a \in R^{\mathcal{H}}$。(2) $a \in R^{\dagger}$ 且 $a^{\dagger}a^3a^{\dagger} \in R^{\dagger}$。

在这种情况下,

$$a^{\mathcal{H}} = [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}.$$

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 根据假设，存在 $x \in aR \bigcap Ra$ 使得

$$xax = x, a^2xa^2 = a^3, (a^2xa^*)^* = a^2xa^*, (a^*xa^2)^* = a^*xa^2.$$

令 $x = ar = sa$ 表示某个 $r, s \in R$。我们直接验证

$$\begin{aligned}
x(a^\dagger a^3 a^\dagger) &= ar(a^\dagger a^3 a^\dagger) = (aa^\dagger)ar(a^\dagger a^3 a^\dagger) \\
&= (a^\dagger)^* a^* x(a^\dagger a^3 a^\dagger) \\
&= (a^\dagger)^* a^* (saa^\dagger a)a^2 a^\dagger \\
&= (a^\dagger)^* a^* (sa)a^2 a^\dagger \\
&= (a^\dagger)^* [a^* x a^2] a^\dagger, \\
\big(a^\dagger a^3 a^\dagger\big)x &= \big(a^\dagger a^3 a^\dagger\big)ar \\
&= (a^\dagger a^2(aa^\dagger a))r = (a^\dagger a^2))x \\
&= (a^\dagger a^2))saa^\dagger a = (a^\dagger a^2))x(a^\dagger a)^* \\
&= a^\dagger(a^2 x a^*)(a^\dagger)^*, \\
\big(x(a^\dagger a^3 a^\dagger)\big)^* &= x(a^\dagger a^3 a^\dagger), \\
\big((a^\dagger a^3 a^\dagger)x\big)^* &= (a^\dagger a^3 a^\dagger)x.
\end{aligned}$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned}
(a^\dagger a^3 a^\dagger)x(a^\dagger a^3 a^\dagger) &= (a^\dagger a^3 a^\dagger)ar(a^\dagger a^3 a^\dagger) \\
&= (a^\dagger a^2)x(a^\dagger a^3 a^\dagger) = (a^\dagger a^2)sa(a^\dagger a^3 a^\dagger) \\
&= (a^\dagger a^2)x(a^2 a^\dagger) = a^\dagger(a^2 x a^2)a^\dagger \\
&= a^\dagger a^3 a^\dagger, \\
x(a^\dagger a^3 a^\dagger)x &= sa(a^\dagger a^3 a^\dagger)ar \\
&= sa(a^\dagger a^3 a^\dagger)ar = s((aa^\dagger a)a(aa^\dagger a))r \\
&= (sa)a(ar) = xax = x.
\end{aligned}$$

因此 $a^\dagger aa^\dagger \in R^\dagger$ 和 $(a^\dagger aa^\dagger)^\dagger = x$。这表明 x 是唯一的，证毕。

(2) $\Rightarrow$ (1) 令 $x = (a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger$. 那么

$$\begin{aligned}
x &= (a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger = (a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger (a^\dagger a^3 a^\dagger)(a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger \\
&= (a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger (a^\dagger a^3 a^\dagger)(aa^\dagger)(a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger \\
&= (aa^\dagger)(a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger \\
&\in aR.
\end{aligned}$$

同理，我们有 $x \in Ra$。进一步验证可得

$$\begin{aligned}
xax &= [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \\
&= [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger (a^\dagger a)a(aa^\dagger)[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \\
&= [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger][a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger = x, \\
a^2xa^2 &= a^2(a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger a^2 = a^3 a^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^\dagger a^3 \\
&= [aa^\dagger a^3]a^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^\dagger [a^3 a^\dagger a] \\
&= a[a^\dagger a^3 a^\dagger][a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]a \\
&= a[a^\dagger a^3 a^\dagger]a = a^3, \\
a^2xa^* &= a^2[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^* = a^3 a^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^* \\
&= a[a^\dagger a^3 a^\dagger][a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^* \\
a^*xa^2 &= a^*[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^2 = a^*[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^\dagger a^3 \\
&= a^*[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]a, \\
(a^2xa^*)^* &= a^2xa^*, \\
(a^*xa^2)^* &= a^*xa^2.
\end{aligned}$$

因此，$x \in aR \bigcap Ra$ 是方程组的解：

$$xax = x, a^2xa^2 = a^3, (a^2xa^*)^* = a^2xa^*, (a^*xa^2)^* = a^*xa^2,$$

如所需。 □

推论 2.2。设 $a \in R^\dagger \bigcap R^\#$。则 $a \in R^{\mathcal{H}}$ 和 $a^{\mathcal{H}} = a^\#$。

证明。我们验证

$$\begin{aligned}
a^\#[a^\dagger a^3 a^\dagger] &= [(a^\#)^2 a][a^\dagger a^3 a^\dagger] \\
&= (a^\#)^2(aa^\dagger a)a^2 a^\dagger \\
&= (a^\#)^2 a^3 a^\dagger = aa^\dagger.
\end{aligned}$$

同理，我们有 $[a^\dagger a^3 a^\dagger]a^\# = a^\dagger a$。因此

$$[a^\#(a^\dagger a^3 a^\dagger)]^* = a^\#(a^\dagger a^3 a^\dagger), [(a^\dagger a^3 a^\dagger)a^\#]^* = (a^\dagger a^3 a^\dagger)a^\#.$$

此外，我们验证

$$\begin{aligned}
[a^\dagger a^3 a^\dagger]a^\#[a^\dagger a^3 a^\dagger] &= [a^\dagger a^3 a^\dagger][aa^\dagger] = a^\dagger a^3 a^\dagger, \\
(a^3 a^\dagger)a^\#(a^3 a^\dagger) &= [aa^\dagger](a^3 a^\dagger) = a^3 a^\dagger.
\end{aligned}$$

根据定理 2.1，$a^{\mathcal{H}} = [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger = a^\#$，如所断言。 □

现在，我们利用某些投影来建立 $\mathcal{H}$-群逆的表示。

定理 2.3。设 $a \in R^{\mathcal{H}}$。由下式给出的方程组

$$ax = a[q_a a p_a]^\dagger, im(x) \subseteq im(p_a a^* q_a)$$

相容，且其唯一解为 $x = a^{\mathcal{H}}$.

证明。令 $x = a^{\mathcal{H}}$。则 $ax = a[a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger = a[q_a a p_a]^\dagger$ 且 $x = [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger = [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger][a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \in [q_a a p_a]^* R$；因此，$im(x) \subseteq [q_a a p_a]^* R$。

假设

$$ax = a[q_a a p_a]^\dagger, im(x) \subseteq im(p_a a^* q_a).$$

由于 $p_a a^* q_a = (q_a a p_a)^* = [(q_a a p_a)(q_a a p_a)^\dagger (q_a a p_a)]^* = (q_a a p_a)^\dagger (q_a a p_a)(q_a a p_a)^*$。记 $x = (q_a a p_a)^\dagger z$ 为一个 $z \in R$。那么我们验证

$$\begin{aligned} x &= (q_a a p_a)^\dagger z \\ &= (q_a a p_a)^\dagger (q_a a p_a)(q_a a p_a)^\dagger z \\ &= (q_a a p_a)^\dagger q_a (ax) \\ &= (q_a a p_a)^\dagger q_a a [q_a a p_a]^\dagger \\ &= (q_a a p_a)^\dagger [q_a a p_a][q_a a p_a]^\dagger \\ &= (q_a a p_a)^\dagger, \end{aligned}$$

正如所断言的。 □

推论 2.4. 设 $a \in R^{\mathcal{H}}$。由下式给出的方程组

$$p_a x = [q_a a p_a]^\dagger, im(x) \subseteq im(a)$$

是相容的，且其唯一解为 $x = a^{\mathcal{H}}$.

证明。 容易验证

$$p_a a^{\mathcal{H}} = a a^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger = [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger = (q_a a p_a)^\dagger.$$

由定理 2.3,

$$im(a^{\mathcal{H}}) \subseteq im(p_a a^* q_a) \subseteq im(a).$$

假设 $p_a x_i = (q_a a p_a)^\dagger$，$im(x_i) \subseteq im(a)$，其中 $i = 1, 2$。于是 $p_a x_1 = p_a x_2$；因此，$x_1 - x_2 \in ker(p_a) \bigcap im(a) = 0$。故 $x_1 = x_2$，如所断言。□

设 a，b，$c \in R$。元素 a 具有（b，c）-逆元，意味着存在$x \in R$ 使得

$$xab = b, cax = c \text{ and } x \in bRx \bigcap xRc.$$

若这样的 x 存在，则它是唯一的，记为 $a^{(b,c)}$ （见 [2]）。

定理 2.5. 设 $a \in R^{\mathcal{H}}$。则

$$a^{\mathcal{H}} = a^{\left(p_a (a^*)^2, (a^*)^2 q_a\right)}.$$

证明。 显然，我们有 $a \in R^{\dagger}$。设 $x = a^{\mathcal{H}}$。我们验证

$$\begin{aligned}
x &= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger} = [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger} \\
&= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{*}\big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}\big)^{*}x \in p_a(a^{*})^2Rx, \\
x &= x\big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}\big)^{*} = x\big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}\big)^{*}[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{*}] \\
&\in xR(a^{*})^2q_a, \\
xa[aa^{\dagger}(a^{*})^2] &= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}a[aa^{\dagger}(a^{*})^2] \\
&= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}a(a^3a^{\dagger})^{*} \\
&= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}a[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{*}a^{*} \\
&= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}[a^{\dagger}a]a[aa^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{*}a^{*} \\
&= [a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{*}a^{*} \\
&= \big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]\big)^{*}a^{*} \\
&= \big(a^{\dagger}a^3a^{\dagger}\big)^{*}a^{*} \\
&= (a^3a^{\dagger})^{*} = aa^{\dagger}(a^{*})^2, \\
(a^{*})^2a^{\dagger}a^2x &= (a^{*})^2a^{\dagger}a^2[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger} \\
&= (a^{*})^2a^{\dagger}a^2[aa^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger} \\
&= (a^{*})^2[a^{\dagger}a][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger} \\
&= [a^{\dagger}a^3]^{*}\big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}\big)^{*} \\
&= \big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}[a^{\dagger}a^3]\big)^{*} \\
&= \big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}][a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]^{\dagger}[a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]a\big)^{*} \\
&= \big([a^{\dagger}a^3a^{\dagger}]a\big)^{*} \\
&= \big(a^{\dagger}a^3\big)^{*} = (a^{*})^2a^{\dagger}a.
\end{aligned}$$

因此

$$a^{\mathcal{H}} = a^{\left(p_a(a^{*})^2,(a^{*})^2q_a\right)},$$

如所述。 □

设 $a \in R$。我们称 a 具有 $\{2\}$-逆 x，当且仅当 $x = xax$。记 $a^{(2)}_{T,S} = \{x \in R \mid xax = x, im(a) = T,\ ker(a) = S\}$。接下来，我们考察环中 $\mathcal{H}$-群逆与 $\{2\}$-逆之间的关系。

定理 2.6。设 $a \in R^{\mathcal{H}}$。则

$$a^{\mathcal{H}} = a^{(2)}_{im\left(p_a(a^{*})^2\right),ker\left((a^{*})^2q_a\right)}.$$

证明。 设 $x = a^{\mathcal{H}}$。则有 $x = xax$。

步骤 1. $im(x) = im\big(p_a(a^{*})^2\big)$。根据定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned} x &= [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \\ &= [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger][a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \\ &= \big([a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger [a^\dagger a^3 a^\dagger]\big)^* [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \\ &= [aa^\dagger (a^*)^2]\big([a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger a^\dagger\big)^* [a^\dagger a^3 a^\dagger]^\dagger \\ &\in im\big(aa^\dagger (a^*)^2\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [aa^\dagger (a^*)^2]^* &= a^3 a^\dagger = a[a^\dagger a^3 a^\dagger]x[a^\dagger a^3 a^\dagger] \\ &= a[a^\dagger a^3 a^\dagger][a^\dagger a^3 a^\dagger]^* x^*. \end{aligned}$$

因此，$aa^\dagger(a^*)^2 = x[a^\dagger a^3 a^\dagger]\big(a[a^\dagger a^3 a^\dagger]\big)^* \in im(x)$。所以 $im(x) = im\big(p_a(a^*)^2\big)$。步骤 2. $ker(x) = ker\big((a^*)^2 q_a\big)$。若 $(a^*)^2 q_a r = 0$ 对某个 $r \in R$ 成立，则

$$\begin{aligned} xr &= [q_a a p_a]^\dagger r \\ &= [q_a a p_a]^\dagger [q_a a p_a][q_a a p_a]^\dagger r \\ &= [q_a a p_a]^\dagger \big([q_a a p_a][q_a a p_a]^\dagger\big)^* r \\ &= [q_a a p_a]^\dagger \big(p_a [q_a a p_a]^\dagger\big)^* [(a^2)^* q_a r] \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此，$r \in ker(x)$。

若 $x(r) = 0$，则

$$\begin{aligned} (a^2)^* q_a r &= [a^\dagger a^3]^* r = [(a^\dagger a^3 a^\dagger)a]^* r = a^*[a^\dagger a^3 a^\dagger]^* r \\ &= a^*[(a^\dagger a^3 a^\dagger)(a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger (a^\dagger a^3 a^\dagger)]^* r \\ &= a^*[(a^\dagger a^3 a^\dagger)]^*[(a^\dagger a^3 a^\dagger)(a^\dagger a^3 a^\dagger)^\dagger]^* r \\ &= a^*[(a^\dagger a^3 a^\dagger)]^*[a^\dagger a^3 a^\dagger](xr) = 0. \end{aligned}$$

因此，$r \in ker\big((a^2)^* q_a\big)$。故 $ker(x) = ker\big((a^*)^2 q_a\big)$。

至此，证明完成。 □

3. WEAK $\mathcal{H}$-GROUP INVERSE

本节旨在确定环元素在什么条件下可以分解为一个 $\mathcal{H}$-群可逆元与一个幂零元之和。为此，我们首先建立弱高阶群逆与弱 Moore-Penrose 逆之间的联系。

定理 3.1。设 $a \in R$。则以下命题等价：

(1) $a \in R^{⑭}$。(2) $a \in R^{\dagger\bigcirc}$ 且 $a^{\dagger\bigcirc} a^3 a^{\dagger\bigcirc} \in R^\dagger$。

在这种情况下，

$$a^{⑭} = [a^{⑦} a^3 a^{⑦}]^\dagger.$$

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 由于$a \in R^{\textcircled{H}}$，存在 x， $y \in R$ 使得

$$a = x + y, x^*y = xy^* = 0, x \in R^{\mathcal{H}}, y \in R^{nil}.$$

由于 $x \in R^{\mathcal{H}}$，我们有 $x \in R^{\dagger}$。这意味着 $a \in R^{\dagger\bigcirc}$ 且 $a^{\textcircled{\dagger}} = x^{\dagger}$ 根据 [1,引理 4。1]。容易验证

$$\begin{aligned} a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}} &= x^{\dagger}(x+y)^3x^{\dagger} = x^{\dagger}(x+y)^3x^{\dagger}xx^{\dagger} \\ &= x^{\dagger}(x+y)^3(x^{\dagger}x)^*x^{\dagger} = x^{\dagger}x^3x^{\dagger} \\ &\in R^{\dagger}. \end{aligned}$$

此外，我们验证

$$\begin{aligned} a^{\textcircled{H}} &= x^{\mathcal{H}} = [x^{\dagger}x^3x^{\dagger}]^{\dagger} \\ &= [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^{\dagger}, \end{aligned}$$

如所需。

(2) $\Rightarrow$ (1) 由于 $a \in R^{\dagger\bigcirc}$，存在 $x, y \in R$ 使得

$$a = x + y, x^*y = yx = 0, x \in R^{\dagger}, y \in R^{nil}.$$

在这种情况下，$a^{\textcircled{\dagger}} = x^{\dagger}$。此外，我们有

$$\begin{aligned} x^{\dagger}x^3x^{\dagger} &= x^{\dagger}(x+y)^3x^{\dagger} \\ &= a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}} \\ &\in R^{\dagger}. \end{aligned}$$

因此， $x \in R^{\mathcal{H}}$。相应地，$a \in R^{\textcircled{H}}$。 □

推论 3.2。 设 $a \in R$。则以下命题等价:

(1) $a \in R^{\textcircled{H}}$。(2) 条件组

$$x = xax, (ax)^* = ax, (xa)^* = xa, xa^3x \in R^{\dagger}, a - axa \in R^{nil}$$

是一致的，并且具有唯一解。

在此情况下， $a^{\textcircled{H}} = (xa^3x)^{\dagger}$.

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 令 $x = a \in R^{\textcircled{H}}$。根据定理 3.1，该蕴含成立。(2) $\Rightarrow$ (1) 根据假设，我们有 $a \in R^{\dagger\bigcirc}$ 且 $a^{\dagger\bigcirc}a^3a^{\textcircled{\dagger}} = xa^3x \in R^{\dagger}$。根据定理 3.1，证明完成。□

推论 3.3. 设 a、 $b \in R^{\textcircled{H}}$。若 $ab = ba = 0$、 $a^*b = 0$，则 $a + b \in R^{\mathrm{H}\bigcirc}$。在此情形下，

$$(a+b)^{\textcircled{H}} = a^{\textcircled{H}} + b^{\textcircled{H}}.$$

证明。 根据定理 3.1，我们有 $a,\ b \in R^{\dagger\bigcirc}a^{\dagger\bigcirc}a^3a^{\dagger\bigcirc}b^{\dagger\bigcirc}b^3b^{\dagger\bigcirc} \in R^{\dagger}$且

$$a^{\textcircled{\#}} = (a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^{\dagger}, b^{\textcircled{\#}} = (b^{\textcircled{\dagger}}b^3b^{\textcircled{\dagger}})^{\dagger}.$$

由于 $ab = ba = 0,\ a^*b = b^*a = 0$，利用 [1,引理 4.1],可得 $a+b \in R^{\dagger\bigcirc}$以及 $(a+b)^{\dagger\bigcirc} = a^{\dagger\bigcirc} + b^{\dagger\bigcirc}$。我们直接验证

$$\begin{array}{rcl} & (a+b)^{\textcircled{\dagger}}(a+b)^3(a+b)^{\textcircled{\dagger}} \\ = & (a^{\textcircled{\dagger}}+b^{\textcircled{\dagger}})(a^3+b^3)(a^{\textcircled{\dagger}}+b^{\textcircled{\dagger}}) \\ = & a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}} + b^{\textcircled{\dagger}}b^3b^{\textcircled{\dagger}}. \end{array}$$

根据假设，我们验证

$$\begin{array}{rcl} \left(a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}\right)^*[b^{\textcircled{\dagger}}b^3b^{\textcircled{\dagger}}] & = & [aa^{\textcircled{\dagger}}][a^*b][bb^{\textcircled{\dagger}}] = 0, \\ \left(b^{\textcircled{\dagger}}b^3b^{\textcircled{\dagger}}\right)^*[a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}] & = & [bb^{\textcircled{\dagger}}][b^*a][aa^{\textcircled{\dagger}}] = 0. \end{array}$$

根据定理 2.1,

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^{\textcircled{\#}} & = & [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}} + b^{\textcircled{\dagger}}b^3b^{\textcircled{\dagger}}]^{\dagger} \\ & = & [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^{\dagger} + [b^{\textcircled{\dagger}}b^3b^{\textcircled{\dagger}}]^{\dagger} \\ & = & a^{\textcircled{\#}} + b^{\textcircled{\#}}, \end{array}$$

如所述。 □

我们通过以下方程组的可解性刻画弱高阶群逆。

定理 3.4. 设 $a \in R$。那么 $a \in R^{\textcircled{\#}}$ 当且仅当

(1) $a \in R^{\dagger\bigcirc}$；(2) 存在 $x \in (aa^{\dagger\bigcirc})R \bigcap R(a^{\dagger\bigcirc}a)$ 使得

$$xax = x, (a^2xa^2)a^{\textcircled{\dagger}} = a^3a^{\textcircled{\dagger}}, (a^2xa^*)^* = a^2xa^*, (a^*xa^2)^* = a^*xa^2.$$

在这种情况下， $a^{\textcircled{\#}} = x.$

证明。 $\Longrightarrow$ 令 $x = (a^{\dagger\bigcirc}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^{\dagger}$。则有

$$x = (aa^{\textcircled{\dagger}})x = x(a^{\textcircled{\dagger}}a) \in (aa^{\textcircled{\dagger}})R \bigcap R(a^{\textcircled{\dagger}}a).$$

我们验证

$$\begin{aligned}
xax &= (a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger a(a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger \\
&= (a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger a^{⑦}a^3a^{⑦}(a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger \\
&= (a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger = x, \\
(a^2xa^2)a^{⑦} &= a^2(a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger a^2a^{⑦} \\
&= a^2(a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger[a^{⑦}a^3a^{⑦}] \\
&= a^3a^{⑦}(a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger[a^{⑦}a^3a^{⑦}] \\
&= a[a^{⑦}a^3a^{⑦}](a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger[a^{⑦}a^3a^{⑦}] \\
&= a[a^{⑦}a^3a^{⑦}] = a^3a^{⑦}, \\
a^2xa^* &= a[a^{⑦}a^3a^{⑦}](a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger a^*, \\
a^*xa^2 &= a^*(a^{⑦}a^3a^{⑦})^\dagger[a^{⑦}a^3a^{⑦}]a, \\
(a^2xa^*)^* &= a^2xa^*, \\
(a^*xa^2)^* &= a^*xa^2.
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ 根据假设，存在 $x \in (aa\,{}^{\dagger}\!\bigcirc)R \bigcap R(a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc a)$，使得

$$xax = x, (a^2xa^2)a^{⑦} = a^3a^{⑦}, (a^2xa^*)^* = a^2xa^*, (a^*xa^2)^* = a^*xa^2.$$

根据假设，$x = aa\,{}^{\dagger}\!\bigcirc x = xa^{⑦}a$。接下来我们验证

$$\begin{aligned}
x[a^{⑦}a^3a^{⑦}] &= [xa^{⑦}a]a^2a^{⑦} = xa^2a^{⑦} \\
&= aa^{⑦}xa^2a^{⑦} = (a^{⑦})^*[a^*xa^2]a^{⑦}, \\
\big(a^{⑦}a^3a^{⑦}\big)x &= \big(a^{⑦}a^2\big)\big(aa^{⑦}x\big) = \big(a^{⑦}a^2\big)\big(xa^{⑦}a\big) \\
&= a^{⑦}[a^2xa^*](a^{⑦})^*, \\
x[a^{⑦}a^3a^{⑦}]x &= [xa^2a^{⑦}]x = xa[aa^{⑦}x] = xax = x, \\
\big(a^{⑦}a^3a^{⑦}\big)x\big(a^{⑦}a^3a^{⑦}\big) &= \big(a^{⑦}a^3a^{⑦}\big)xa^2a^{⑦} \\
&= a^{⑦}[a^2xa^2]a^{⑦} = a^{⑦}a^3a^{⑦}.
\end{aligned}$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned}
\big(x(a^{⑦}a^3a^{⑦})\big)^* &= x(a^{⑦}a^3a^{⑦}), \\
\big((a^{⑦}a^3a^{⑦})x\big)^* &= (a^{⑦}a^3a^{⑦})x,
\end{aligned}$$

The因此 $a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc a^3a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc \in R^\dagger$ 且 $[a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc a^3a^{⑦}]^\dagger = x$。证毕。 □

推论 3.5。 设 $a \in R$。那么 $a \in R^{\mathcal{H}}$ 当且仅当 $a \in R^\dagger \bigcap R^{④}$。在这种情况下，$a^{\mathcal{H}} = a^{④}$.

证明。 $\Longrightarrow$这是显然的。

$\Longleftrightarrow$ 由于 $a \in R^\dagger$，我们有 $a^{⑦} = a^\dagger$。根据定理 3.4，存在$x \in (aa\,{}^{\dagger}\!\bigcirc)R \bigcap R(a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc a)$ 使得

$$xax = x, (a^2xa^2)a^{⑦} = a^3a^{⑦}, (a^2xa^*)^* = a^2xa^*, (a^*xa^2)^* = a^*xa^2.$$

因此,

$$a^2xa^2 = [(a^2xa^2)a^{\textcircled{\dagger}}]a = [a^3a^{\textcircled{\dagger}}]a = a^3a^\dagger a = a^3.$$

因此 $a \in R^{\mathcal{H}}$。在这种情况下， $a^{\mathcal{H}} = x = a^{\textcircled{\#}}$，正如所期望的那样。 □

考虑由下式给出的方程组

$$xax = x, xa = [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^\dagger a, awx = aw = [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^\dagger. \qquad (*)$$

引理 3.6。 如果方程组$(*)$ 有解，则该解唯一。

证明。 假设 x_1, x_2 满足方程组 **(*)**。那么

$$x_iax_i = x_i, x_ia = [a^{\textcircled{\dagger}}a]^\dagger a^{\textcircled{\dagger}}a,$$
$$ax_i = a[a^{\textcircled{\dagger}}a]^\dagger a^{\textcircled{\dagger}}$$

当 $i = 1$,2 时。因此

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1a)x_1 = [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^\dagger ax_1 \\ &= (x_2wa)(wx_1) = x_2w(awx_1) = x_2a[a^{\textcircled{\dagger}}a]^\dagger a^{\textcircled{\dagger}} \\ &= (x_2w)awx_2 = x_2, \end{aligned}$$

按要求。 □

定理 3.7。 设 $a \in R$。则以下各条件等价:

(1) $a^{\textcircled{\#}} = x$。 （2）方程组

$$xax = x, xa = [a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^\dagger a, ax = a[a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}}]^\dagger$$

相容，且其唯一解为 x。

在此情况下， $a^{\textcircled{\#}} = x.$

证明。 （1） $\Rightarrow$ （2）取 $x = [a^{\textcircled{\dagger}}a]^\dagger a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc$。则

$$\begin{aligned} xax &= (a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger a(a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger \\ &= (a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger(a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})(a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger \\ &= (a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger \\ &= x, \\ xa &= (a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger a, \\ ax &= a(a^{\textcircled{\dagger}}a^3a^{\textcircled{\dagger}})^\dagger. \end{aligned}$$

根据引理 3.6， x 是上述方程的唯一解，证毕。

(2) $\Rightarrow$ **(1)** 根据上述论证，我们有 $x = [a^{\textcircled{\dagger}}a]^\dagger a\,{}^{\dagger}\!\bigcirc$。因此$a^{\textcircled{\#}} = x$，如所断言。 □

我们用下面的数值例子来说明定理 3.4。

例 3.8。

设 $\mathbb{C}^{3\times3}$ 为所有 3×3 复矩阵构成的环，其对合 $*$ 为复矩阵的共轭转置。设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 0\\ 1-i & 2 & 0\\ -2 & 1+i & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}.$$

则 $A=X+Y$，其中

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 0\\ 1-i & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 1+i & 0\end{pmatrix}.$$

设 $Z=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 1+i & 0\\ 1-i & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。通过直接计算，我们验证了

$$ZXZ=Z,(XZ)^*=XZ,(ZX)^*=ZX,XZX=X.$$

因此 $X^\dagger=Z$。

此外， X 和 Z 满足

$$ZXZ=Z,X^2ZX^2=X^3,(X^2ZX^*)^*=X^2ZX^*,(X^*ZX^2)^*=X^*ZX^2.$$

这意味着 X 具有高阶群逆，且 $X^{\mathcal{H}}=Z.$

我们进一步验证 Y 是幂零的，且 $X^*Y=YX=0$。根据定理 3.4， A 具有弱高阶群逆，且

$$A^{\textcircled{H}}=X^{\mathcal{H}}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 1+i & 0\\ 1-i & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

References

[1] H. Chen 和 M.Sheibani，环中的 BT 与广义 BT 逆，预印本，2025，https://doi.org/10.20944/preprints202507.1321.v1。[2] M.P. Drazin，外广义逆的一类，*Linear Multilinear Algebra*，**436**(2012)，1909–1923。

[3] D.E. Ferreyra；V. Orquera 和 N. Thome，矩形矩阵的弱群逆，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat., Ser. A Mat.，113(2019)，3727–3740。[4] W. Li；J. Chen 和 Y. Zhou，弱核逆及 m-弱群逆的刻画与表示，Turk. J. Math.，47(2023)，1453–1468。[5] N. Mihajlovic，Banach 代数和 C^*-代数中的群逆与核逆，Comm. Algebra，48(2020)，1803–1818。[6] D. Mosi´c，加权广义穆尔–彭罗斯逆，Georgian Math. J.，30(2023)，919–932。[7] D. Mosi´c；P.S. Stanimirovic 和 L.A. Kazakovtsev， m-弱群逆在求解优化问题中的应用，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat., Ser. A Mat.，118(2024)，论文编号13，共21页。[8] D. Mosi´c；P.S. Stanimirovi´c 和 L.A. Kazakovtsev，矩形矩阵的 m-弱群逆，Electronic Research Arch.，32(2024)，1822–1843。[9] D. Mosi´c 和 D. Zhang， m-弱群逆的新表示与性质，Result. Math.，78(2023)，论文编号97，共19页。[10] D.S Rakic；N.C. Dincic 和 D.S. Djordjevic，带对合环中的群逆、Moore-Penrose逆、核逆和对偶核逆，Linear Algebra Appl.，463(2014)，115–133。[11] H. Wang；J. Chen，弱群逆，Open Math.，16(2018)，1218–1232。[12] H. Wang，广义逆的一些新刻画，Front. Math.，18(2023)，1397–1402。[13] M. Zhou；J. Chen 和 Y. Zhou，正规 *-环中的弱群逆，J. Algebra Appl.，19(2020)，2050238。https://doi.org/10.1142/S0219498820502382。

College of Computer and Mathematics, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China电子邮箱地址： <liudy@csuft.edu.cn>

School of Big Data, Fuzhou University of International Studies and Trade, Fuzhou 350202, China电子邮箱地址： <huanyinchenfz@163.com>