arXiv:2602.14424v1 [math.CT] 16 Feb 2026

幺半双范畴的高阶代数与几何

RAFFAEL STENZEL

摘要。我们证明，对于相应的整数 k，辫状、交错和对称幺半双范畴恰好是笛卡尔幺半 $(\infty, 1)$-范畴中双范畴的 E_k-幺半群。为处理底层计算，我们借助小立方体拟运算的几何，在前者的二维代数与后者的 ∞-范畴代数之间建立联系。

1. 引言

范畴化是一项研究计划，旨在将对定义在集合上的代数结构的研究——也就是幺半群、群、环等的零维代数——推广到对定义在（可能是高维）范畴上的代数结构的研究。它在代数、拓扑学、几何、物理学和逻辑学等领域都发挥着重要作用，尤其是在拓扑量子场论、K 理论和表示论领域 [BD98, SP09, Lur17]。这项计划中的核心基本概念，是相应的幺半群实例，以及与之对应的交换性和可逆性的具体形式。在这一背景下，一维代数的基础——即（交换）幺半范畴理论——已成为一种必不可少的工具，为过去几十年间涌现的大量数学构造奠定了基础 [JS93]。然而，拓扑学和几何学背景下出现的各种代数结构往往天然具有更高维度，而这些结构的某些重要特征无法通过这种方式刻画。因此，Kapranov 和 Voevodsky[KV94a, KV94b]提出了（交换）幺半二维范畴理论，旨在涵盖其中一些应用。由此，二维代数研究从多个不同角度展开，历经漫长的发展 [JY21, GFH24]。另一方面，近年来，人们沿着拓扑学的拟运算传统发展出了一套 ∞-范畴化代数理论 [May72, Lur17]。

本文为一部至少分两部分——也很可能恰好分为两部分——的系列著作奠定基础，该系列探讨双范畴的 ∞-范畴代数。这个系列的最终目标，是运用 [Lur17] 中充分发展的高阶代数成果，为低维范畴论中那些原本冗长繁琐、依赖计算的结果给出相当直接的证明。因此，从某种意义上说，这项研究沿袭 K-Theory 的传统，将拓扑代数应用于问题；这与沿袭同调代数传统、反向将代数拓扑应用于问题的做法相对。这里我们充分运用了一个相当基本却至关重要的事实：二维代数中的所有对象都只通过要求可逆高阶胞腔存在来定义；因此，它们都由双范畴的 ∞-范畴所刻画。[1]

本文的主要贡献，是确定 ∞Lur17] 的 ∞-范畴化代数在双范畴的笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{BiCat}^{\times}$ 中的取值，以及 [DS97] 和 [Cra98] 的二维代数——进而扩展 [KV94a, KV94b] ——其范围由定理1.1 指定。鉴于“对称幺半双范畴曲折的发展历程” [SP09], ，本文也因此证明了：最终在 [BN96] 中给出的幺半双范畴上编织、对称编织和对称性的代数定义，正是所期望的定义。事实上，人们早就预期以下定理成立（例如参见 [Hau23], ），但迄今尚无论证足以证明其正确性。

定理1.1。 以下是相应等价类集合之间的双射：

*(1) {*幺半双范畴*}* $\cong$*{*E_1-代数于 $\mathrm{BiCat}^{\times}$*}*；*(2) {*辫编织幺半双范畴*}* $\cong$ *{*E_2-代数于 $\mathrm{BiCat}^{\times}$*}*；*(3) {Sylleptic* 幺半双范畴*}* $\cong$*{*E_3-代数于 $\mathrm{BiCat}^{\times}$*}*；

日期：2026年2月17日。[1]这里，“∞”应按惯例读作“$(\infty, 1)$”。此外还应指出，Day 和 Street [DS97] 也定义了能够刻画二维代数对象之间的松弛态射和不可逆变换的概念。不过，这些内容超出了 ∞-范畴论的范围，需要采用$(\infty, 2)$-范畴论的处理方式。因此，本文不讨论二维代数的这一方面。

(4) *{对称幺半双范畴}* $\cong$*{*E_∞-代数于 $\mathrm{BiCat}^\times$*}*。

这些双射关于从底层到顶层的显然遗忘映射是自然的。对应的它们之间态射的概念也同样如此。

这些集合作为其商所对应的等价概念，在每种情形下都是自然的，并将在本文正文中加以精确说明。为了正确理解该定理，我们回顾：幺半范畴正是 E_1-代数，即范畴的笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Cat}^\times$ 中的代数。Joyal 和 Street [JS93第 5] 节证明，幺半范畴$\mathcal{C}^\otimes$ 上的编织与乘法 $m\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$（即$\mathcal{C}^\otimes$的乘法）上的幺半结构一一对应。如 [Lur17例5.1.2.4], 中所指出的，这导出编织幺半范畴与 E_2-代数（于 $\mathrm{Cat}^\times$中）之间的一一对应。随后在同处进一步指出，这一一对应还可限制为编织是对称的编织幺半范畴与 E_∞-代数（于 $\mathrm{Cat}^\times$中）之间的等价。因此，定理1.1是 [Lur17例5.1.2.4], 的高维推广，其中 Joyal 和 Street 关于幺半范畴的结果 [JS93] 被替换为 Day 和 Street 关于幺半2-范畴的相应结果 [DS97]。

简而言之，其证明过程如下。在一个方向上，我们注意到，根据 Day 和 Street 的结果，Gray 幺半群上的每个（交错的）编织都直接定义了 $\mathrm{BiCat}^\times$ 中相应 E_k-幺半群初始段的一半。接着我们证明，先在代数上反转、再在几何上反射这些（交错的）编织，会得到初始段的另一半。将这两半粘合起来，便可得到一个满的 E_k-幺半群。在另一个方向上，我们将可加性定理的 Eckmann–Hilton 型推论与一系列半严格化结果结合使用；这些结果运用了同伦和代数技术。

纲要。第 2 节介绍所需的 ∞-范畴工具。在这里，我们提醒读者有关（非幺元的）E_k-代数和 A_n-代数的若干事实，给出一个关于 ∞-幺半群 E_k 的 Eckmann–Hilton 型论证（命题 2.10），并定义 E_k-代数的对角反射（第2.4节）。在第 2.5 节中，我们定义对称幺半∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 中 E_k-代数初始段的 ∞-范畴；并在$\mathcal{C}$ 是 n-范畴的前提下，给出初始段的满 E_k-代数扩张空间同伦类型的精确界限。第3节以 Gray 幺半群的形式回顾双范畴的二维代数，定义这一语境下编织及 syllepsis 的逆，并讨论它们相关的同伦论。第 4 节结合前两节的结果，给出定理1.1的证明。

相关工作。Gurski 和 Gurski–Osorno [Gur11, GO13] 分别为辫编织幺半双范畴和对称幺半双范畴给出了一系列相干性结果。作为应用，作者表明，每个 E_k-空间都可通过同伦双群胚三函子 $\Pi\colon \mathrm{Top}^\times\to\mathrm{BiCat}^\times$ 分别对应的整数 k，产生一个幺半（辫编织的／交错的／对称的）双群胚。他们还表明，每个对称幺半双范畴都会产生一个特殊的 Γ-双范畴，也就是说，本质上是三范畴 $\mathrm{BiCat}^\times$ 中的一个 E_∞-幺半群。我们注意到，这些关于函子 Π 的应用同样是定理1.1的推论。

未来工作。随之而来的众多自然后续问题之一是：Baez–Neuchl [BN96]（以跨越许多页面的代数方式）所定义的幺半双范畴 $\mathcal{C}$ 的中心 $Z(\mathcal{C})$，是否确实是笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{BiCat}^\times$ 中的中心；该范畴由 [Lur17, 第 5.3 节.1] 通过一个简洁的泛性质定义。二者本质上都是为编织 $\mathcal{C}$ 上的编织构造的模空间。该等价的 1-范畴版本同样见于 [Lur17, 例 5.3.1.18]。

可能的替代方法。本文给出的证明融合了代数、同伦、组合与几何论证。一种更适合范畴论学者的证明或许可以按如下方式进行。幺半双范畴三范畴就是双范畴三范畴中的伪幺半群三范畴。类似地，我们应当能够证明，带编织（交错／对称）结构的双范畴所构成的高阶范畴，就是带编织／交错结构的幺半双范畴这一高阶范畴中的伪幺半群所构成的高阶范畴。接着，我们应当能够进一步构造一个性质良好的脉络函子，将所有维数为 $n>1$ 的胞腔均可逆的（幺半）高阶范畴这一高阶范畴映至（幺半） ∞-范畴的 ∞-范畴。此脉络应当将任何一个高阶胞腔均可逆的幺半高阶范畴中的伪幺半群高阶范畴，映至其相应脉络中的 E_1-代数的 ∞-范畴。脉络函子通常具有的性质随后应当可以推出该定理。之所以不采用这一策略，主要是因为实施该策略需要开发大量繁复的工具，尤其是根据具体实现方式，“高阶”很可能会超出三维。

致谢。本文是 Nicola Gambino 发起的一项课题的组成部分；若没有他的推动和持续支持，本文便不会问世。更大的课题最终受到 Clark Barwick 和 James Cranch 的建议启发。作者谨向 John Bourke 致谢，感谢他提出的深刻意见；向 Amar Hadzihasanovic 致谢，感谢他盛情邀请作者前往塔林交流想法；也向 Adrian Miranda 和 Mike Shulman 致谢，感谢他们进行了许多有益的讨论。本材料基于美国空军科学研究办公室资助项目（编号 FA9550-21-1- 0007）的研究成果，也基于空军科学研究办公室资助项目（编号 FA9550-21-1-0009）的研究成果。

2. 幺半的 (∞，1)-范畴与迭代结合结构

第 2.1 节简要回顾 ∞-运算子的理论。第 2.2 节讨论 ∞-运算子 E_k、它们的可加性定理，以及一种 Eckmann–Hilton 类型的推论。第 2.3 节讨论（非幺元的）A_m-代数，第 2.4 节则介绍对称幺半∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中 E_k-代数的对角反射。第 2.5 节介绍 E_{k+1}-代数初始段的概念，并在 $\mathcal{C}$ 是一个 n-范畴时，为将其扩张为满的 E_{k+1}-代数结构的扩张空间的同伦类型给出精确界限。第 2.6 节中，我们将前一节的结果应用于小型 n。这在 $n = 1, 2$ 的情形下恢复了构造 E_{k+1}-代数的一些已知判据，并给出了我们将在第 4 节应用于双范畴的笛卡尔3-范畴的判据。

2.1. **预备知识**。

∞-Operad。 ∞-Operad的概念以本质上与 ∞-范畴概念推广范畴概念相同的方式，推广了（有色）对称多重范畴的概念。更确切地说，令 Fin_* 表示有限尖点集及保基点函数所构成的范畴。我们将 Fin_* 视为一个 ∞-范畴。回顾一下， ∞-Operad $\mathrm{O} \to \mathrm{Fin}_*$ 定义为满足Segal条件的单纯集合态射，并且还对 Fin_* [中的所有惰性映射给出余笛卡尔提升（Lur17，定义 2.1.1.10]）。每个这样的态射 $\mathrm{O} \to \mathrm{Fin}_*$ 都是同构纤维化，因此 ∞-Operad的定义域 O 总是一个 ∞-范畴。后者有时称为与该 ∞-Operad相关联的算子 ∞-范畴。我们通常会直接通过其算子 ∞-范畴来指称一个 ∞-Operad。根据定义， ∞-Operad的纤维 $\mathrm{O}(n)$ 与 n-元积$\prod_{1\le i\le n}\mathrm{O}(1)$典范等价；特别地，$\mathrm{O}(n)$中的元素本质上是 O(1)中元素组成的 n-元组。给定一个 n-元组 $\vec{x} \in \mathrm{O}(n)$和一个对象 $\mathrm{O}([1])$，定义还允许我们将映射空间 $\mathrm{O}(\vec{x}, y)$视为 ∞-Operad O中从 $\vec{x}$ 到 y 的多重态射空间。对于一般的对象 $\vec{y} \in \mathrm{O}(m)$，映射空间 $\mathrm{O}(\vec{x}, \vec{y})$可直接分解为映射空间 $\mathrm{O}(\vec{x}, y_i)$的积。特别地，当 ∞-Operad为单色时，也就是说，当 O(1)可缩且其收缩中心为 x时，映射空间 $\mathrm{O}((x, \dots, x)\ x)$可视为由该 ∞-Operad关联的 n-元运算所组成。

我们进一步回顾，对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes} \twoheadrightarrow \mathrm{Fin}_*$ 是一个 ∞-幺半运算，它为 Fin_* [中的所有态射赋予余笛卡尔提升（Lur17，例 2.1.2.18]）。特别地，对称幺半∞-范畴是一个余笛卡尔纤维化 $\mathcal{C}^{\otimes} \twoheadrightarrow \mathrm{Fin}_*$。通过 ∞-范畴的格罗滕迪克构造，它也可以等价地描述为一个塞加尔对象 $\mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Cat}_\infty$ ，其对象构成的 ∞-范畴是可缩的。实质上，也就是说，它是 Cat_∞ 中一个只有单个对象且合成交换的 ∞-范畴对象。对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 的底层 ∞-范畴是纤维 $\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\otimes}(*)$，它位于单位元 $* \in \mathrm{Fin}_*$ 上方。

例2.1. 每个具有有限积的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 都会给出一个笛卡尔对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\times} \twoheadrightarrow \mathrm{Fin}_*$ [（Lur17，第2.4节.1]）。特别地，存在一个由 ∞-范畴构成的笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Cat}_\infty^{\times}$。此外，具有有限积的 ∞-范畴之间的每个保有限积函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 都会诱导出一个对称幺半函子 $F\colon \mathcal{C}^{\times} \to \mathcal{D}^{\times}$ [（Lur17，推论 2.4.1.8]）。

关于 ∞-幺半范畴的代数。给定一个 ∞-幺半范畴$\mathcal{O}$，$\mathcal{O}$ 中位于有限集$_*$ 的惰性映射之上的余笛卡尔态射构成的类，称为$\mathcal{O}$中的惰性态射类。给定另一个 ∞-幺半范畴$\mathcal{V}$，可以考虑∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Fun}^{\mathrm{Fin}_*}(\mathcal{O},\mathcal{V})$的满子$\infty$-范畴，它由那些保持惰性态射的、位于有限集$_*$之上的单纯集态射所张成。这个 ∞-范畴通常称为从$\mathcal{O}$ 到$\mathcal{V}$的∞-幺半范畴态射的 ∞-范畴，或者等价地，称为$\mathcal{V}$中的$\mathcal{O}$-代数的 ∞-范畴。

注 2.2. ∞-幺半范畴构成的类，正是切片范畴 (S^+/(有限集$_*$,惰性)) 中纤维对象的类。该切片范畴由配备模型结构 Op_∞ 的标记单纯集构成，此模型结构用于 ∞-幺半范畴 [Lur17，第 2 节 2.1.4]。因此，$\mathcal{O}$-代数在$\mathcal{V}$ 中就是模型范畴中纤维对象$\mathcal{O}$ 与$\mathcal{V}$ 之间的态射。

命题 2.3。 设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个对称幺半 ∞-范畴，V 是一个 ∞-幺半子。则 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^\otimes)$ 继承 $\mathcal{C}^\otimes$的对称幺半结构。

证明。 [Lur17，例 3.2.4。4]。 □

例 2.4。 命题 2.3 使我们能够在从一个对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}^\otimes$出发时，迭代构造 ∞-代数范畴。也就是说，给定 ∞-幺半子$\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{V}$，我们可以构造 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^\otimes))$，即$\mathcal{C}^\otimes$中$\mathcal{V}$-代数里的$\mathcal{O}$-代数。此外， ∞-范畴的 ∞-幺半子本身带有闭对称幺半结构 [Lur17，第 2.2 节。5]。两个 ∞-幺半子$\mathcal{O}$ 和$\mathcal{V}$ 的相应张量积 $\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{V}$ 是（导出）Boardman-Vogt 张量积的 ∞-幺半子版本。它诱导出一个自然等价

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^\otimes)) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{V}}(\mathcal{C}^\otimes)$$

对称幺半 ∞-范畴。

例 2.5. 本文的核心是小立方体 ∞-运算子 E_n for $0 \le n \le \infty$。关于其精确定义，请参阅 [Lur17, 定义 5.1.0.2] 。给定一个对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$， ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathcal{C}^\otimes)$（本质上）是 $\mathcal{C}^\otimes$中结合幺半群构成的 ∞-范畴。∞-运算子 E_∞ 由范畴 Fin_* 本身给出（或者说，由其到自身的恒等映射给出）。 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathcal{C}^\otimes)$ 是 $\mathcal{C}^\otimes$ 中交换结合幺半群构成的 ∞- 范畴。我们将在下文讨论中间的整数 $1 < n < \infty$ 。

记号 2.6. 设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。若 $\mathcal{C}^\otimes$ 是笛卡尔的，则 $\mathcal{C}^\otimes$ 中的 E_k-代数通常称为 E_k-幺半群。此外，一般而言， ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_k}(\mathcal{C}^\otimes)$ 本身也再次成为对称幺半范畴，这由命题 2.3 得出。特别地，给定 $\mathcal{C}^\otimes$中的一个 E_k-代数 A，我们可以考虑它在 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_k}(\mathcal{C}^\otimes)$ 中的幂 $A^{\otimes n}$。若以 $m\colon A_1\otimes A_1 \to A_1$ 表示 A 在其底对象 A_1 （位于 $\mathcal{C}$ 中）上的底乘法，则我们将 E_k-代数 $A^{\otimes n}$ 所诱导的乘法记为 $m^\otimes$: $A_1^{\otimes n}\otimes A_1^{\otimes n} \to A_1^{\otimes n}$。

注 2.7。 设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。 ∞-幺半代数之间的任意单态射 $\iota\colon \mathcal{O} \to \mathcal{V}$ 都会诱导一个同构纤维化

$$\iota^*\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}^\otimes) \twoheadrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^\otimes)$$

∞-范畴之间的同构纤维化。特别地，给定 $\mathcal{V}$-代数 A （位于 $\mathcal{C}^\otimes$ 中），以及 $\mathcal{C}^\otimes$中的 $\mathcal{O}$-代数之间的一个等价$f\colon \iota^*(A) \simeq B$，则 B 可以扩展为一个 $\mathcal{V}$-代数 $\bar{B}$，并且伴有一个等价$\bar{f}\colon A \to B$，使得 $\iota^*(\bar{f}) = f$。这一结论对 Fin_*上的标记单纯集之间的任意包含 $\iota\colon (S,E) \to (T,F)$ 都成立。我们将反复（有时隐式地）把这一结论应用于形如 $B_k \hookrightarrow \mathrm{E}_k$ 的包含，以将一组具体的部分数据扩展为完整的 E_k-代数结构，前提是我们知道这些数据等价于另一个 E_k-代数的部分数据。

例 2.8. ∞-范畴 $\mathrm{SMonCat}_\infty := \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$ 中笛卡尔幺半∞-范畴 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 里的 E_∞-幺半群，与对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴等价。事实上，根据定义，其对象是从 Fin_* 到 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 的 ∞-运算子的态射，因此通过上文提到的 ∞-范畴格罗滕迪克构造，它们呈现了对称幺半 ∞-范畴。可以将 $\mathrm{SMonCat}_\infty$ 中的态射视为对称幺半 ∞-范畴之间的强对称幺半函子。相比之下，对称幺半 ∞-范畴之间一般的 ∞-运算子态射则是松对称幺半函子。

例 2.9. 类似地，笛卡尔幺半范畴 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 中的 E_1-幺半群所构成的 ∞-范畴 $\mathrm{MonCat}_\infty := \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$ 等价于幺半 ∞-范畴所构成的范畴。$\mathrm{MonCat}_\infty = \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$中的态射仍然是幺半 ∞-范畴之间的强幺半函子（而不是它们的松幺半版本）。为了将幺半 ∞-范畴的定义与低维范畴论中更熟悉的 Cat_∞ 中幺半群的概念联系起来，我们回顾一下，有一个嵌入 Δ^{op}，$\to$ 有限集$_*$，它将自然数 n 映射到与之关联的“切割” [Lur17，第 4.1 节。2]。余笛卡尔纤维化的拉回

纤维化 $\mathrm{Cat}_\infty^\times \to \mathrm{Fin}_*$ 沿此嵌入拉回后得到一个余笛卡尔纤维化 $\mathrm{Cat}_\infty^\times \to \Delta^{op}$。这定义了与 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 关联的“平面”幺半 ∞-范畴，即遗忘其对称性。现在，∞-范畴 MonCat_∞ 是由平面 ∞-幺半运算的态射张成的满子-∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\Delta^{op}}(\mathrm{Cat}_\infty^\times) \subseteq \mathrm{Fun}_{\Delta^{op}}(\Delta^{op}, \mathrm{Cat}_\infty)$。同样，后者定义为保持惰性态射的截面 $\Delta^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$；或者在此情形下，等价地，定义为将 $[0]$ 映射到终端∞-范畴且满足 Segal条件的函子 $\Delta^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty$。从本质上说，这些是 Cat_∞中具有单个对象的 ∞-范畴对象。

2.2. 作为迭代幺半结构的交换性片段。如上所述，对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 中的 E_1-代数，应被视为 $\mathcal{C}^\otimes$中一个同伦相干地结合且幺元的代数。将给定的 $\mathcal{C}^\otimes$ 中的 E_1-代数 A 扩张为 $2 \le m \le \infty$ 的 E_m-代数，通常被理解为一种同伦相干交换性的程度；它只在 $m = \infty$时才体现出完全交换性。事实上，对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 中 E_∞-代数的 ∞-范畴，是如下遗忘函子塔的极限

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\mathcal{C}^\otimes) \to \cdots \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{m+1}}(\mathcal{C}^\otimes) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}^\otimes) \to \cdots \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^\otimes)$$

遗忘函子 [Lur17, 推论 5.1.1。5] .

由可加性定理 [Lur17, 定理 5.1.2。2], 可知，∞-运算子 E_m 是 m重 Boardman-Vogt 张量幂，作用于 ∞-运算子 E_1。更准确地说，该定理指出，对于任意一对正整数 k_1和 k_2，典范代数 $\rho\colon \mathrm{E}_{k_1} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{E}_{k_2} \to \mathrm{E}_{k_1+k_2}$ 是 ∞-运算子的等价，详情见 [Lur17, 第 5.1 节。2] 非正式地说，当 $k_1 = k_2 = 1$ 时，它表明，在一个对象上给出两个彼此作用、同伦相干且幺元的结合幺半结构，等同于在该对象上给出一个 E_2-交换幺半群结构。这构成了经典 Eckmann-Hilton 论证的一个 ∞-范畴版本。为此，下文将阐明这一事实：E_2-代数结构引入的是其底层 E_1-代数结构中既有乘法与自身之间的相互作用，而不是引入第二个新的乘法。因此，我们回顾一下，经典 Eckmann-Hilton 论证实质上表明，在对称幺半范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 中，若要在一个已确定的 E_1-代数 A 之上赋予 E_1-代数结构，并不是赋予一个满足额外相干律的任意新乘法，而是直接在已有乘法上施加额外相干律（注 2.12，注 2.39）。在一般的 ∞-范畴情形下，我们从[Lur17, 第 2.2 节5] 回顾 Fin_* 上的粉碎积对称幺半结构

$$\wedge\colon \mathrm{Fin}_* \times \mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Fin}_*.$$

元素 $\{\langle 1\rangle\}$：$* \to \mathrm{E}_1$ 诱导出两个嵌入

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{E}_1 & \overset{(1,\{\langle 1\rangle\})}{\underset{(\{\langle 1\rangle\},1)}{\rightrightarrows}} & \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_1 & \xhookrightarrow{\sim} & \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Fin}_* & \overset{(1,\{\langle 1\rangle\})}{\underset{(\{\langle 1\rangle\},1)}{\rightrightarrows}} & \mathrm{Fin}_* \times \mathrm{Fin}_* & \xrightarrow[\wedge]{} & \mathrm{Fin}_*
\end{array}$$

∞-范畴。底部的两个复合水平映射都是 Fin_*上的恒等映射，因此顶部的两个复合水平映射导出了两个嵌入

$$\iota_i\colon \mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \tag{1}$$

∞-歌剧 子，其中 $i = 0,1$。对于任意其他给定的 ∞-歌剧 $\mathcal{V}$，这两个嵌入 (1) 诱导出两个投影 ns

$$U, \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{V})) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{V}).$$

前一个投影 U 将 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{V})$中的一个 E_1-代数 A 映射到其底层的（例如垂直的）E_1-代数$U(A) := A_1 \in \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{V})$。后一个投影 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)$ 将 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{V})$中的一个 E_1-代数 A映射到其底层的水平 E_1-代数，该代数由 A 逐点给出：$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)(A)_n := A_{n,1}$。因此，$U(A)$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)(A)$ 都为 $\mathcal{V}$ 中的底对象（即底层的平凡代数）$A := U(A)_{1,1} = \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)(A)_{1,1}$赋予一个 E_1-代数结构。

在 f ollowing，我们证明两个 ∞-算子嵌入 (1) 在有限集$_*$ 上是同伦的，作为 a 结果 可加性定理。事实上，我们更一般地证明，所有这类（$k+1$）个包含映射 ns

$$s_i\colon (\mathsf{E}_1)^{\otimes_{\mathrm{BV}}^k} \to (\mathsf{E}_1)^{\otimes_{\mathrm{BV}}^{k+1}}$$

定义为 $1^{\otimes^i}\otimes(\mathsf{E}_0 \xrightarrow{s_0}\mathsf{E}_1)\otimes 1^{\otimes^{k-i-1}}$，其中 $0\le i\le k$（因此省略了（$i+1$）-第一个分量中的 E_1），它们在 Fin_* 上相干等价。根据可加性定理，来自 [Lur17, Definition 2.2.5.3] 的典范 k 重函子 $\rho\colon (\mathsf{E}_1)^{\otimes^k}{}_{\mathrm{BV}}\to\mathsf{E}_k$，是 ∞-运算子的等价，对每个 $0\le k$ 都成立。因此，只需证明所有这类（$k+1$）个包含映射 $s_i\colon \mathsf{E}_k\to\mathsf{E}_{k+1}, 1\le i\le k+1$ —— 它们在阶段 $1\le i+1\le k+1$ 将区间（-1,1）上的恒等映射插入 —— 在 Fin_* 上相干等价。为此，我们注意到，$\mathsf{E}_\bullet$ 可以组织成一个余半单纯 ∞-运算子。确实，令 $\Delta_s\subset\Delta$ 为由满射张成的 Δ 的宽子范畴。令

$$\mathsf{E}_\bullet\colon \Delta_s^{op}\to \mathrm{Op}_\infty$$

为典范嵌入所给出的图表

$$\mathsf{E}_0 \xrightarrow{s_0} \mathsf{E}_1 \underset{s_1}{\overset{s_0}{\rightrightarrows}} \mathsf{E}_2 \underset{s_2}{\overset{s_0}{\overset{\xrightarrow{s_1}}{\rightrightarrows}}} \mathsf{E}_3 - - \to \dots \tag{2}$$

其中 $s_i\colon \mathsf{E}_k\to\mathsf{E}_{k+1}$ 在阶段 $i+1$插入区间 $(-1,1)$ 的恒等映射。

命题 2.10。设 $1\le k<\infty$ 和 $0\le i<k$。那么，这两个 ∞-幺半范畴嵌入 $s_i, s_{i+1}\colon \mathsf{E}_k\to\mathsf{E}_{k+1}$ 通过同伦 $\phi_k^i\colon \mathsf{E}_k\to P(\mathsf{E}_{k+1})$ 在模型范畴 Op_∞ 中同伦，且满足

(1) ϕ_k^i 是相对于子对象 $s_i\colon \mathsf{E}_{k-1}\to\mathsf{E}_k$的同伦：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathsf{E}_{k+1} & \xrightarrow{c} & P(\mathsf{E}_{k+1}) \\ & {\scriptstyle s_is_i}\nearrow & & \nearrow{\scriptstyle \phi_k^i} & \downarrow{\scriptstyle (s,t)} \\ \mathsf{E}_{k-1} & \xrightarrow{s_i} & \mathsf{E}_k & \underset{s_{i+1}}{\overset{s_i}{\rightrightarrows}} & \mathsf{E}_{k+1}\times\mathsf{E}_{k+1}; \end{array}$$

(2) 对所有 $i+1<j<k+2$，图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{E}_{k-1} & \xrightarrow{s_i} & \mathsf{E}_k & \underset{s_{i+1}}{\overset{s_i}{\overset{\phi_k^i}{\rightrightarrows}}} & \mathsf{E}_{k+1} \\ \downarrow{\scriptstyle s_{j-2}} & & \downarrow{\scriptstyle s_{j-1}} & & \downarrow{\scriptstyle s_j} \\ \mathsf{E}_k & \xrightarrow[s_i]{} & \mathsf{E}_{k+1} & \underset{s_{i+1}}{\overset{s_i}{\overset{\phi_{k+1}^i}{\rightrightarrows}}} & \mathsf{E}_{k+2} \end{array}$$

交换，即 $s_j * \phi_k^i = \phi_{k+1}^i * s_{j-1}$。

证明。我们将 k 维立方体 $(-1,1)^k$ 记作 $\square^k$。我们先给出 $k=2$ 的证明以作说明。在这里，在相应的拓扑范畴上，嵌入 $s_0, s_1\colon \mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_2$ 局部上只是由两个显然的正交嵌入诱导得到的

$$(f\colon \square^1\to\square^1)\mapsto(f, 1_{(-1,1)})\colon \square^2\to\square^2),$$

and

$$(f\colon \square^1\to\square^1)\mapsto(1_{(-1,1)}, f)\colon \square^2\to\square^2).$$

这里，每个映射 $f\colon (-1,1)\to(-1,1)$ 都是形如 $x\mapsto ax+b$ 的仿射映射。首先通过同伦 $(ax+b,(\,y(ax+b))),$，将水平矩形 $(1-t, t\in[0,1])$ 变为大小适当的正方形；然后再通过同伦 $((a-t(a-1))x+(1-t)b, y)$，将这些正方形变为大小相应的竖直矩形，从而这两个嵌入自然同伦。这样便如第（1）部分所述，固定了由恒等映射 $(x,y)\mapsto(1x+0, y)$ 给出的公共边界 $s_0\colon \mathsf{E}_0\to\mathsf{E}_1$。对于任意给定的有限集 S 以及任意直线型嵌入 $f\colon \square^1\times S\to\square^1$，同样的构造也成立，因为其像始终是直线型的，且彼此不相交。

一般而言，在相关的拓扑范畴上，嵌入 $s_i, s_{i+1}\colon \mathsf{E}_k\to\mathsf{E}_{k+1}$ 在局部也以类似方式由 $\square^k$ 到 $\square^{k+1}$ 的两个显然正交嵌入诱导，这些嵌入由以下映射

$$(f_1,\dots,f_k)\colon \square^k\to\square^k)\mapsto(f_1,\dots,f_i,1_{(-1,1)},f_{i+1},\dots,f_k)\colon \square^{k+1}\to\square^{k+1}),$$

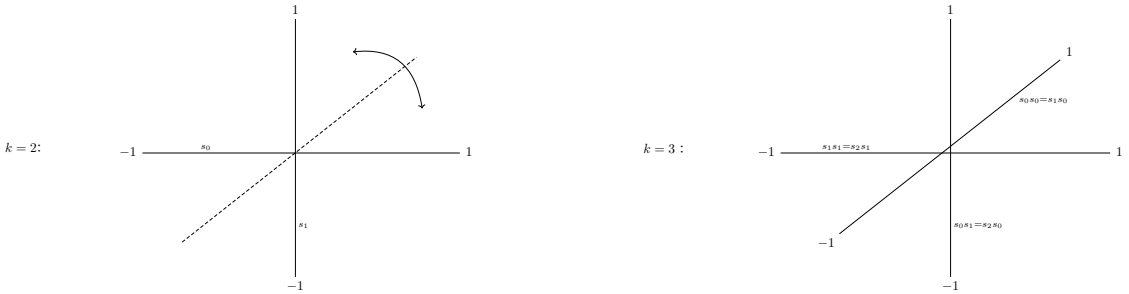
and

$$(f_1,\dots,f_k)\colon \square^k\to\square^k)\mapsto(f_1,\dots,f_{i+1},1_{(-1,1)},f_{i+2},\dots,f_k)\colon \square^{k+1}\to\square^{k+1}).$$

这里，每个 $f_i\colon (-1,\ 1)\to(-1,\ 1)$ 都是形如 $x\mapsto a_ix+b_i$ 的仿射映射。这两个嵌入再次自然同伦：先将水平矩形变为大小适当的正方形，然后

再将这些正方形变为大小相应的竖直矩形。此过程可以固定公共边界s_i: $\mathsf{E}_{k-1} \to \mathsf{E}_k$，如第 (1) 部分所述；并且很容易看出，它与第 (2) 部分一样是相容的。□

注 2.11。命题 2.10 中的同伦 ϕ_k^i: $s_i \simeq s_{i+1}$ 可以形象地理解为：沿由公共轴 $s_{i+1}s_i = s_is_i$确定的对角超曲面，将 k 维立方体的（余）面s_i 折叠到（余）面 s_{i+1} 上。



同样的几何折叠构造可以直接用于联系嵌入 s_i, s_j: $\mathsf{E}_k \to \mathsf{E}_{k+1}$ 对所有成对的 $0 \le i < j \le k$；然而，这通常不会产生如命题 2.10 中的相对同伦。例如，沿轴 $s_2s_0 = s_0s_1$ 将嵌入 s_0: $\mathsf{E}_2 \to \mathsf{E}_3$ 折叠到嵌入 s_2: $\mathsf{E}_2 \to \mathsf{E}_3$ 上，会得到从 s_0: $\mathsf{E}_2 \to \mathsf{E}_3$ 到 $s_2 \circ$ 交换: $\mathsf{E}_2 \to \mathsf{E}_3$, 的同伦；后者将一对 ($f_1, f_2$) 映射为三元组 ($f_2, f_1$,1)，而不是映射为 ($f_1, f_2$, 1)，正如 s_2 所做的那样。不过，命题 2.10 通过先沿 $s_1s_0 = s_0s_0$-轴、再沿 $s_2s_1 = s_1s_1$-轴进行折叠，确实给出了一个复合同伦 $s_0 \simeq s_1 \simeq s_2$。

注 2.12。特别地，对于每个对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$，两个遗忘函子

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \underset{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)}{\overset{U}{\rightrightarrows}} & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \\ & {\scriptstyle U}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle U} & \\ & \mathcal{C}^{\otimes} & \end{array}$$

根据命题 2.10，它们在 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 上等价。这意味着，它们的底垂直和水平 E_1-代数通过一个在公共底对象上限制为恒等映射的等价而等价。特别地，在一个对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中，在一个已经确定的 E_1-代数 A 之上给出一个 E_1-代数结构，并不是给出一个还需满足额外相干律的任意新 E_1-代数结构，而是在已有乘法上直接给出额外的相干律。

为便于后续应用，我们记录命题 2.10 的以下技术性推论。我们将($\mathsf{E}_\bullet$)中的L_k($\mathsf{E}_\bullet$)记为式 (2)中余半单纯对象 $\mathsf{E}_\bullet$ 的第 k 个闩对象。

注 2.13。设 X: $\Delta_s^{op} \to \mathcal{C}$ 是余完备范畴 $\mathcal{C}$中的一个余半单纯对象。对于 $0 \le n < \infty$，我们可以考虑移位复形 $X_{\bullet+n}$: $\Delta_s^{op} \to \mathcal{C}$，其定义为

$$X_n \xrightarrow{s_0} X_{n+1} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\rightrightarrows}} X_{n+2} \underset{s_2}{\overset{s_0}{\overset{\xrightarrow{s_1}}{\rightarrow}}} X_{n+3} - - \to \dots$$

它还伴随一个自然变换 $s_\bullet$: $X_{\bullet+n} \to X_{\bullet+n+1}$，由 s_k: $X_{k+n} \to X_{k+n+1}$ 在 $0 \le k < \infty$ 给出。于是，闩对象 $L_{k+1}(X) \to X_{k+1}$，即 X 的闩对象，可以计算为诱导的余间隙映射

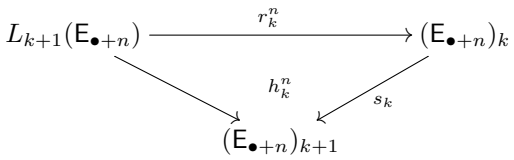
$$L_k(X_{\bullet+1}) \sqcup_{L_k(X)} X_k \to (X_{\bullet+1})_k.$$

推论 2.14. 对于每个 $0 \le k < \infty$，典范嵌入

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{E}_k & & \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & \searrow{\scriptstyle s_k} & \\ L_{k+1}(\mathsf{E}_\bullet) & \longrightarrow & \mathsf{E}_{k+1} \end{array}$$

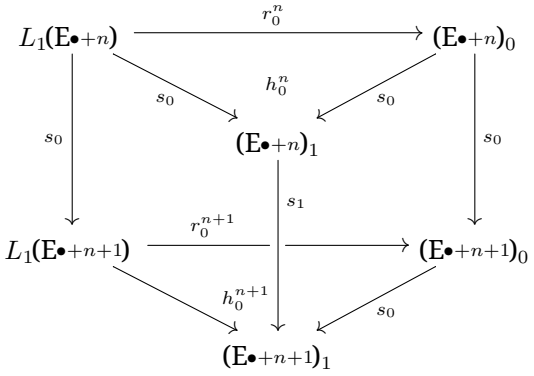
在 ∞-范畴的 ∞-运算子中，有一个在E_{k+1} 上的收缩。

证明。 我们在模型范畴 Op_∞中工作。我们同时对所有 $0 \le k < \infty$ 和所有$0 \le n < \infty$ 构造一个同伦交换三角

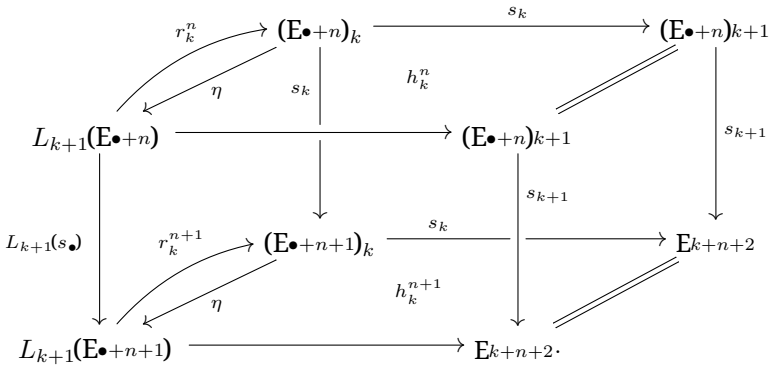


(3)

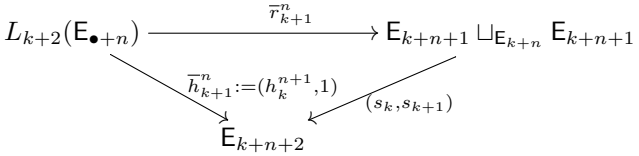
使得 $h_k^n * \eta = 1_{s_k}$ 在 $(\mathsf{E}_{\bullet+n})_{k+1}$ 上，并且存在一个 3-胞 $\psi_k^n\colon\ s_{k+1} * h_k^n \simeq h_k^{n+1} * L_{k+1}(s_\bullet)$，沿着 $\eta\colon (\mathsf{E}_{\bullet+n})_k \to L_{k+1}(\mathsf{E}_{\bullet+n})$ 限制后，在方形 $s_{k+1}s_k = s_k s_k$上为恒等映射。这尤其证明了对于 $n = 0$需要证明的陈述。我们对 k使用归纳法。如果 $k = 0$，那么$\eta\colon (\mathsf{E}_{\bullet+n})_0 \to L_1(\mathsf{E}_{\bullet+n})$ 是恒等映射（在 $(\mathsf{E}_{\bullet+n})_1$上），因此我们可以选取 r_0^n 为恒等映射，且 h_0^n 也为恒等映射。图表



于是显然交换。假设我们已证明该命题对给定的 k 以及所有 $n \ge 0$ 都成立。根据注 2.13 和归纳假设，我们得到一个图表

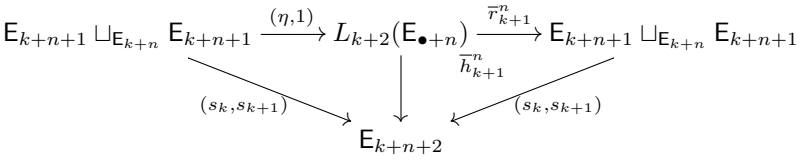


该图表通过 3-胞 ψ_k^n 在同伦意义下交换。这由此产生一个态射及其同伦

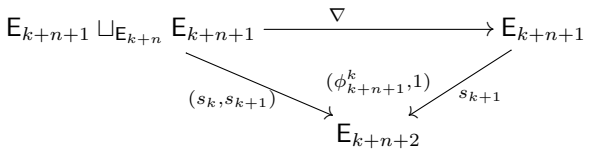


(4)

在两个相应的（同伦）推出之间，使得粘合



在 E_{k+n+2} 上是恒等映射。根据命题 2.10，存在一个同伦



(5)

使得 t 粘合 $(\phi^k_{k+n+1},\ 1) * \iota_R$：$s_{k+1} \to s_{k+1}$ 是 E_{k+n+2} 上的恒等映射。将这两个 o 三角形（ 4）和（5）粘合，得到一个态射

$$r^n_{k+1} := \nabla \circ \overline{r}^n_{k+1}$$

以及一个同伦

$$h^n_{k+1} := (\phi^k_{k+n+1}, 1) * \overline{h}^n_{k+1}$$

如 (3) 中所要求的。为了结束证明，我们还需证明，对于所有 $0 \le n$，相对于 $(\mathsf{E}_{\bullet+n})_{k+1}$，$s_{k+2} * h^n_{k+1} \simeq h^{n+1}_{k+1} * L_{k+2}(s_\bullet)$。这由 h^n_{k+1} 的定义、命题 2.10.2 以及关于 ψ^n_k 存在性的归纳假设可得。

□

2.3. **结合律和幺性的片段**。在第 2.2 节中，我们回顾了

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\mathcal{C}^\otimes) \simeq \lim_{n<\infty} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_n}(\mathcal{C}^\otimes).$$

类似地， ∞-范畴 E_1-代数的对称幺 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 本身可以表示为 ed 塔的极限 t 的塔

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^\otimes) \to \cdots \to \mathrm{Alg}_{A_{m+1}}(\mathcal{C}^\otimes) \to \mathrm{Alg}_{A_m}(\mathcal{C}^\otimes) \to \cdots \to \mathrm{Alg}_{A_1}(\mathcal{C}^\otimes)$$

遗忘函子的.....这是 [Lur17，命题 4.1.1。9] 针对纯结合非幺情形；结合且含幺情形实际上更为简单。与 E_k 层级类似，A_m-代数是带有乘法映射的对象，该映射满足一定程度的同伦相干结合性和幺性。从这个意义上说，E_1-代数有时也称为 A_∞-代数 [Lur17，定义 4.1.3.16，命题 4.1.3.19]。

注 2.15。更准确地说，A_∞ 是一个平面 ∞-幺半子，因此属于非对称语境；E_1 是 A_∞ 的对称化。因此，在非对称幺半 ∞-范畴中讨论 E_1-代数，在形式上并无意义。

为将结合律的研究与幺性的研究区分开来，Lurie 引入了非幺元 A_m-代数的概念。因此，我们回顾一下幺半 ∞-范畴 $\mathsf{C}^\otimes$ [中非幺元 A_m-代数的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathsf{C}^\otimes)$∞Lur17，第 4.1 节。4]。这很有用，因为它使我们能够分两个连续步骤在对象 $A \in \mathsf{C}^\otimes$ 上构造 A_∞-代数结构，而不必在每个层级同时完成这两件事。首先，可以在 $A \in \mathsf{C}^\otimes$ 上为所有 $m \ge 0$ 构造非幺元 A_m-结构，并使它们递归地彼此延拓。[2] 由此在 $\mathsf{C}^\otimes$ 中的 A 上得到非幺元 A_∞-代数结构。其次，要证明这个非幺元 A_∞-代数可以延拓为一个真正的 A_∞-代数，只需证明它是拟幺的 [Lur17，定理 5.4.3。5]。我们回顾一下，幺半范畴 $\mathsf{C}^\otimes$ 中的非幺元 A_∞-代数 A 是拟幺的，当且仅当它在 $\mathsf{C}^\otimes$ 的幺半同伦范畴中的导出代数 $A \in h(\mathsf{C}^\otimes)$ 是幺元的 [Lur17，定义 5.4.3.1]。

定义 2.16. 设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个幺的 ∞-范畴，m：$A \otimes A \to A$ 是 $\mathcal{C}^\otimes$ 中的非幺元 A_2-代数，其拟单位为 u：$I \to A$。$\mathcal{C}^\otimes$ 中非幺元 A_2-代数的态射 f：$A \to B$ 称为拟幺的，如果 fu：$I \to B$ 是 B 的拟单位。我们将 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}{}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^\otimes) \subset \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^\otimes)$ 定义为 $\mathcal{C}^\otimes$ 中拟幺 A_2- 代数构成的子范畴，其对象为拟幺 A_2- 代数，态射为它们之间的拟幺 A_2- 代数态射。

注记 2.17。根据定义，非幺元的 A_∞-代数的准幺性归结为其底层非幺元的 A_2-代数的准幺性。对于这类代数之间的态射，同样如此。这定义了一个

[2] 事实上，我们将通过在低次数中使用幺性来实现这一点，而不直接将幺性本身扩展到更高次数。

子范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes}) & \hookrightarrow & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow U \\ \mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) & \hookrightarrow & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) \end{array}$$

对所有 $2 \leq m \leq \infty$。容易看出，包含 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}{}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 是充实的，因此是一个 (-1)-截断纤维化。因此，包含 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}{}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 也是一个 (-1)-截断纤维化。

我们还回顾一下，∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 也是由相关的（非幺元的）∞-运算子 $\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_m$ [Lur17, Remark 4.1.4.8] 在 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的代数组成的 ∞-范畴。特别地，对于任意 $m \geq 1$，∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 都配备了一个对称幺半结构，使得遗忘函子 $U\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathcal{C}^{\otimes}$ 将代数 A 映射到其底对象 $U(A) := \mathsf{A}_1$，且该函子是对称幺半的[Lur17, Example 3.2.4.4]。

记号 2.18。为方便起见，我们记 $\mathsf{E}^{\mathrm{nu}}_0 := \mathrm{Triv}^{\otimes}$ 为平凡的 ∞-运算子 [Lur17，例 2.1.1。20]，并记 $\mathsf{E}^{\mathrm{nu}}_k := (\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{\infty})^{\otimes^k}{}_{\mathrm{BV}}$ 为 $1 \leq k < \infty$。这里，$\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{\infty}$ 表示由 [Lur17，注 4.1.4.8]中的非幺元 A_∞-代数组成的 ∞-运算子。每当 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴时，我们令 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) := \mathrm{Alg}^{\mathsf{E}^{\mathrm{nu}}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$。我们将 $U_i\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_i}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 记为显然的遗忘函子，它遗忘最前面的 $(k-i)$ 个分量。

注 2.19。每当 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴时，对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{\mathsf{E}^{\mathrm{nu}}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 可能并不等价于 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$；后者是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中意义下的非幺元 E_k-代数 [Lur17，第 4.5 节。5]。不过，作者尚未对此进行验证。

注 2.20. 将（高维）幺性约化为（一维）准幺性的能力，似乎是完全同伦相干结合性的一个特有性质（就 A_∞ 相对于有限的 A_m 而言）。作者尚不清楚，是否存在类似的、将 A_m-结构适当地约化为拟幺 A_m-结构的做法。这意味着，尽管我们从一开始就可能知道给定的 A_m-代数具有拟单位，但在知道可以将该结构延拓为满的（非幺元的）A_∞-代数结构之前，我们仍必须基本上以非幺元的方式来处理它。

下列引理对于在幺元的与非幺元的情形之间转换将非常有用 t.

引理 2 .21. 设 $C^{\otimes}$ 为一个对称幺半 ∞-范畴。对所有有限整数 $k \geq 1$，下列 ng 成立。

（*1*）遗忘函子是单的。

（*2*）遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_\infty}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \tag{6}$$

is fully faithf

ul. (3) 设 A、B 是 $C^{\otimes}$ 中的 E_k-代数，且 $f\colon A \to B$ 是底层非幺元 E_k-代数之间的态射。只要其底层态射 $f\colon U(A) \to U(B)$ 是 $C^{\otimes}$ 中 E_1-代数之间的拟幺态射，f 就可提升为 E_k-代数之间的态射。*(4)* 设 A 是 $C^{\otimes}$ 中的非幺元 E_k-代数。只要 $U_1(A) \in Alg^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(C^{\otimes})$ 是拟幺的，A 就可提升为 E_k- 代数；并且对于每个 $i \leq k$，其 i 次乘法 $m_i\colon U_i(A) \otimes U_i(A) \to U_i(A)$ 在 $Alg^{\mathrm{nu}}_{E_i}(C^{\otimes})$ 中是拟幺的，且随后在 $Alg_{E_i}(C^{\otimes})$ 本身中呈现一个拟单位。

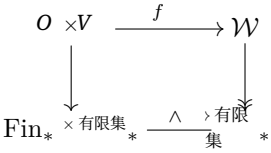
证明。第 (1) 部分同样由反复应用 [Lur17, 推论 5.4.3.6]，以及对任意 ∞-幺半范畴 $\mathcal{O}$，$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(-)$ 保持极限这一事实得出。

对于第 (2) 部分，由可加性定理，我们不妨假设 $k = 1$。由第 (1) 部分，函子 (6) 是单的，因此我们只需证明它是满的。于是，设 A、B 为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中的 E_1-代数，并设 $f\colon A \to B$ 为其底层非幺元的 A_∞-代数的一个态射。设 $u_A\colon 1 \to A$ 与 $u_B\colon 1 \to B$ 分别为 A 与 B 的拟单位元。为证明 f 提升为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}))$ 中的一个态射，根据 [Lur17，定理 5.4.3.5]，我们需要给出一个等价 $fu_A \simeq u_B$

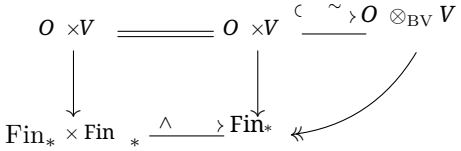
在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中。但单位元 $1 \in \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 是一个始对象 [Lur17，命题 3.2.1.8]，，它平凡地给出了这样一个等价。

（3）由（2）推出。（4）也可通过归纳法直接证明，使用前面各部分以及以下事实：若 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{E_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中一个非幺元 E_1-代数的底对象 A 和乘法 $m\colon A \otimes A \to A$ 都是拟幺的，那么整个 E_1-代数也是拟幺的。□

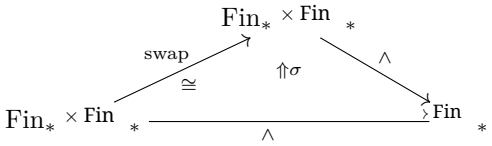
2.4. E结构的对角反射。给定一组三个 ∞-幺半群 $\mathcal{O}$、$\mathcal{V}$ 和$\mathcal{W}$，从 $(\mathcal{O},\mathcal{V})$ 到 $\mathcal{W}$ 的 ∞-幺半群双函子是一个单纯集合态射 $f\colon \mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$，使得方块



交换，并且使得 f 将 $\mathcal{O} \times \mathcal{V}$ 中的惰性态射对映到 $\mathcal{W}$ [Lur17，第 2.2 节。5]中的一个惰性态射。此处底部的水平函子再次表示有限尖点集范畴上的粉碎积。例 2.4 中的 Boardman–Vogt 张量积 $\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{V}$被定义为一个纤维化替换



复合态射 $\mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathrm{Fin}_* \times \mathrm{Fin}_* \xrightarrow{\wedge} \mathrm{Fin}_*$ 在模型范畴 Op_∞ 中。因此，它在 ∞-范畴的 ∞-幺半范畴中表示从一对 $(\mathcal{O},\ \mathcal{V})$ 出发的 ∞-幺半范畴的双函子。我们回顾一下，有限尖点集范畴上的粉碎积也是对称的，尽管并非严格对称。采用 [Lur17，记号 2.0.0.2]，中的记法，自然同构



对一对 $(\langle n\rangle,\ \langle m\rangle)$，它逐点由以下复合给出

$$\langle nm\rangle \xleftarrow{\simeq} (\langle n\rangle^\circ \times \langle m\rangle^\circ)_* \xrightarrow{\mathrm{swap}_*} (\langle m\rangle^\circ \times \langle n\rangle^\circ)_* \xrightarrow{\simeq} \langle mn\rangle. \tag{7}$$

由此可知，Boardman–Vogt 张量积也是对称的：给定 ∞-幺半范畴 $\mathcal{O}$ 和$\mathcal{V}$，幂等交换同构 swap: $\mathcal{O} \times \mathcal{V} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V} \times \mathcal{O}$ 诱导出一个自然幂等等价

$$(-)^\rho\colon \mathcal{O} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathcal{V} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathcal{O}$$

通过沿$\mathcal{V} \otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{O} \twoheadrightarrow$ 有限集$_*$ [Lur17，命题 2.2.5.13]提升自然同构 σ，从而得到 ∞-预运算子。在$\mathcal{V} = \mathcal{O}$ 的情形下，这特别给出一个自同构 $(-)^\rho\colon \mathcal{O} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathcal{O} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathcal{O}$。例如，在特殊情形$\mathcal{O} = \mathsf{E}_1$ 下，我们得到一个自然的幂等但非平凡的等价

$$(-)^\rho\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}))$$

对于每个对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}$。借助可加性定理，这等价地导出一个自然的幂等但非平凡的等价

$$(-)^\rho\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}).$$

定义 2.22。 我们将$\mathcal{C}^{\otimes}$ 中与一个 E_2-代数 A相关联的 E_2-代数 A^ρ 称为 A的对角反射。

更一般地，对于每个 $k \geq 2$ 以及对称群中阶为 k 的每个元素 $s \in \Sigma_k$，分量置换 $s^*\colon \mathsf{E}_1^k \to \mathsf{E}_1^k$ 会诱导一个幂等的非平凡自同构

$$(-)^{\rho(s)}\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}).$$

根据定义，对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的一个 E_k-代数 A 的 s-对角反射 $A^{\rho(s)}$，是本质上唯一的 E_k-代数，其底层 k 元双函子 $\mathsf{E}_1^k \to \mathcal{C}^{\otimes}$ 由以下复合给出

$$\mathsf{E}_1^k \xrightarrow{s^*} \mathsf{E}_1^k \xhookrightarrow{\sim} \mathsf{E}_k \xrightarrow{A} \mathcal{C}^{\otimes}.$$

注 2.23。从几何意义上看，等价关系 $(-)^{\rho}\colon \mathsf{E}_2 \xrightarrow{\simeq} \mathsf{E}_2$ locally 将二维单位立方体的 x 轴和 y 轴（内外各一次）局部翻转。为了解释这一点，令 $\mu\colon (-1,1)^2 \to (-1,1)^2, (x,y) \mapsto (y,x)$ 表示关于 $(x=y)$轴的反射。定义 $\mu\colon\colon \mathsf{E}_2 \xrightarrow{\simeq} \mathsf{E}_2$—作为拓扑范畴的函子—为对象上恒等的函子，该函子在 $\mathsf{E}_2(\langle m\rangle, \langle n\rangle)$ 上通过与 μ 共轭作用。也就是说，

$$\mu\colon \coprod_{f\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle} \prod_{1\le j\le n} \mathrm{Rect}(\square^2 \times f^{-1}\{j\}, \square^2) \to \coprod_{f\colon \langle m\rangle \to \langle n\rangle} \prod_{1\le j\le n} \mathrm{Rect}(\square^2 \times f^{-1}\{j\}, \square^2)$$

它由自同构 $\mathrm{Rect}(\square^2 \times S, \square^2) \to \mathrm{Rect}(\square^2 \times S, \square^2)$ 以显然的方式诱导，对于任意集合 S，该集合将映射 g 取为 $\mu g(\mu \times 1)$。我们得到一个外方形

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_1 & \xhookrightarrow{\sim} & \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \xhookrightarrow{\sim} \mathsf{E}_2 \\ & \overset{\mathrm{swap}}{\nearrow}_{\cong} & & & \nearrow_{\mu} \\ \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_1 & \xhookrightarrow{\sim} & \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 & \xhookrightarrow{\sim} & \end{array}$$

它在提升 σ 的拓扑范畴的显然自然同构意义下交换。也就是说，该自然同构由对 σ ——重新排列指标——以及 $(-1,1)^2$ 上的恒等映射给出。这意味着所诱导的方块

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \xhookrightarrow{\sim} \mathsf{E}_2 & \\ \overset{(-)^{\rho}}{\nearrow} & & \nearrow_{\mu} \\ \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 & \xhookrightarrow{\sim} & \mathsf{E}_2 \end{array}$$

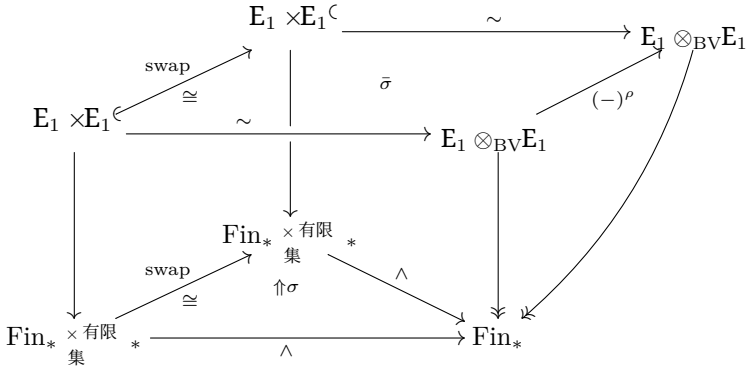
由 Boardman–Vogt 张量积的泛性质，在等价意义下交换。

在第 3.1 节中，我们将定义幺半双范畴上编织的逆。在第 4.1 节中，我们将看到由反向编织诱导的 E_2-结构恰好是由编织本身诱导的 E_2-结构的对角反射。在第 4.2 节中，我们将看到对称编织也有类似的情形。在此意义上，对角反射是对低维对称性取逆的推广（而不对幺半结构本身取逆）。

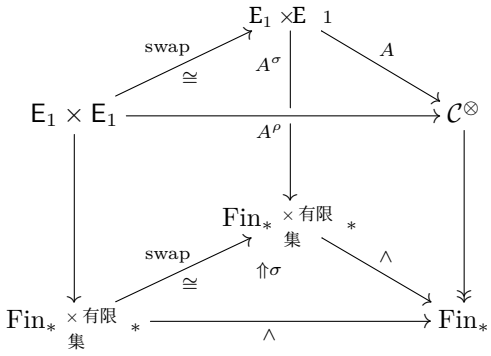
警告 2.24. 需要指出，E_k-代数的对角反射不同于 [Lur17, Construction 5.2.5.18] 中定义的 E_k-代数的反向结构。后者将 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中的 E_1-代数赋予 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中定义的反向 E_1-结构，参见 [Lur17, Remark 4.1.1.7]。特别地，它将$\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 E_1-代数 A（其乘法为 $a \otimes b$）赋予反向 E_1-代数 A^{rev}（其乘法为$b \otimes a$）。然而，对角反射对于一般的对称幺半∞-范畴中的 E_1-代数甚至都未定义。尽管如此，A^{rev} 也有一个几何呈现：自同构 $(-)^{\mathrm{rev}}\colon \mathsf{E}_k \to \mathsf{E}_k$ 是由 k-立方体绕 x_k-轴的反射诱导的。

在能够手工构造这类具体模型的低维情形中，拥有一个对角反射的具体模型会很有用。因此，我们注意到，对角反射随之伴有一个

以及一个提升



自然同构 σ。特别地，对于每个对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}$ 以及$\mathcal{C}^{\otimes}$中的每个 E_2-代数 A，我们得到一个自然等价



(8)

等价 $A^{\sigma}(\langle n\rangle,\ \langle m\rangle)\colon (A^{\otimes n})^{\otimes m} \to (A^{\otimes m})^{\otimes n}$ 是根据公式 (7) 对张量幂 $A^{\otimes nm}$ 的各分量进行的（本质上的）置换。

备注 2.25。 自然同构 σ 是对称的，因为 $\sigma(\langle n\rangle,\langle m\rangle) = \sigma(\langle m\rangle,\langle n\rangle)^{-1}$ 对所有 n, m都成立。然而，一般来说 σ 不是恒等映射。但当 $n = 1$ 或 $m = 1$成立时，它就是恒等映射：

$$\sigma(\langle 1\rangle, -) = \sigma(-, \langle 1\rangle) = 1.$$

可以利用这一点构造一个提升 $\bar{\sigma}$，其限制在两个嵌入 $\mathrm{E}_1 \hookrightarrow \mathrm{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{E}_1$ 上时为恒等映射；这只需利用 ∞-拟 operad 的模型范畴中的同伦提升性质即可。

例 2.26 （维数 2 中的对角反射）。 直观地说，对角反射

$$(-)^{\rho}\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

取一个 E_2-代数 A in $\mathcal{C}^{\otimes}$，考察其底层双函子，将其翻转，然后通过沿着 σ 的一个提升交换输入，修正由此在 Fin_* 上的参数化中引入的误差，从而将其转化为一个 ∞- 算子。进一步说，对角反射是自然的；特别是，要计算对角反射的一部分，只需单独计算这一部分的对角反射。例如，设 A 是一个

$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中具有如下形式的非幺元的 A_2-结构

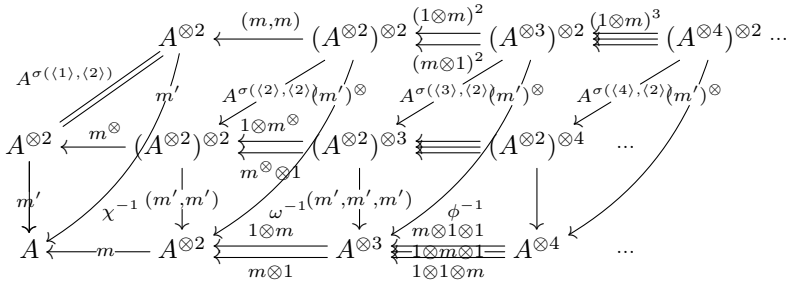
$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
A^{\otimes 4} & \longleftarrow & (A^{\otimes 2})^{\otimes 4} \\
\Downarrow & \phi & \Downarrow \\
A^{\otimes 3} & \xleftarrow{(m',m',m')} & (A^{\otimes 2})^{\otimes 3} \\
\Downarrow & \omega & \Downarrow \\
A^{\otimes 2} & \xleftarrow{(m',m')} & (A^{\otimes 2})^{\otimes 2} \\
{\scriptstyle m}\downarrow & \chi & \downarrow{\scriptstyle m^{\otimes}} \\
A & \xleftarrow{m'} & A^{\otimes 2},
\end{array}
\tag{9}
$$

其中 χ、ω、ϕ 表示填充相应 Stasheff 多边形的胞腔。与交换同构作后复合，得到一个形如 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}} \to \mathcal{C}^{\otimes}$ 的双函子

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A^{\otimes 2} & \xleftarrow{m^{\otimes}} & (A^{\otimes 2})^{\otimes 2} & \underset{m^{\otimes}\otimes 1}{\overset{1\otimes m^{\otimes}}{\leftleftarrows}} & (A^{\otimes 2})^{\otimes 3} & \leftleftarrows & (A^{\otimes 2})^{\otimes 4} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle m'} & \chi^{-1}\ (m',m') & \downarrow & \omega^{-1}\ (m',m',m') & \downarrow & \phi^{-1} & \downarrow & \\
A & \xleftarrow{m} & A^{\otimes 2} & \underset{m\otimes 1}{\overset{1\otimes m}{\leftleftarrows}} & A^{\otimes 3} & \underset{1\otimes 1\otimes m}{\overset{m\otimes 1\otimes 1}{\leftleftarrows}} & A^{\otimes 4} & \cdots
\end{array}
\tag{10}
$$

事实上，注意到若要保持胞腔的方向，交换自同构会反转所有维数为 $n \geq 2$ 的胞腔。更确切地说，这里发生了两件事。首先，在 (9) 中，我们将 2-胞 χ 视为从 $m^{\otimes}$ 到 m 的态射；特别地，在相应的映射空间中，它是从（本质上唯一确定的）复合 $m(m',m')$ 到 $m^{\otimes}m'$ 的态射。在图（10）中，我们将 2-胞 χ^{-1} 视为从 (m',m') 到 m' 的态射；特别地，在相应的映射空间中，它是从（本质上唯一确定的）复合 $m^{\otimes}m'$ 到 $m(m',m')$ 的态射。

图（8）现在对应如下等价，其中后侧面按定义确定了对角反射后的双函子 $A^{\rho}\colon \mathsf{E}_1 \times \mathsf{A}_2 \to \mathcal{C}^{\otimes}$。



(11)

这给出了对角反射 A^{ρ} 的一个公式：将由σ置换给出的顶方形与由翻转 A 本身给出的前方形复合。此外，方形

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow{(-)^{\rho}} & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) \\
{\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)} \\
\mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_2}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow[(-)^{\rho}]{} & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}))
\end{array}
\tag{12}
$$

由对角反射的自然性可知，该图表可交换。因此，每当 A 是$\mathcal{C}^{\otimes}$中的一个 E_2-代数时，其对角反射 A^{ρ} 的底层 $\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$-代数，就是 A底层 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1$-代数的对角反射。

例 2.27（维数 3 中的对角反射）。这里有三个对角反射操作，分别对应于沿着穿过三条坐标轴之一的对角超平面所作的反射

于 $\square^3$ 中。令 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 为一个对称幺半 ∞-范畴。那么，首先，例 2.26 中讨论的对角反射尤其适用于对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$。这是由置换 $(\pi_2,\ \pi_1,\ \pi_3)$：$(\mathsf{E}_1)^3 \to (\mathsf{E}_1)^3$ 诱导的。几何上，相应的自同构

$$\rho_{x_1} \colon \mathsf{E}_3 \to \mathsf{E}_3$$

由反射 $\mu_x \colon \square^3 \to \square^3$ 在 $(x_2 = x_3)$-超平面处诱导，采用与注 2.23 相同的构造。其次，如例 2.26 所述，对角反射本身是对称幺半的，因此诱导出一个自同构

$$(-)^{\rho_{x_3}} := \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}((-)^{\rho}) \colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes})).$$

这是由置换 $(\pi_1,\ \pi_3,\ \pi_2)$: $(\mathsf{E}_1)^3 \to (\mathsf{E}_1)^3$诱导的对角反射。几何上，相应的自同构

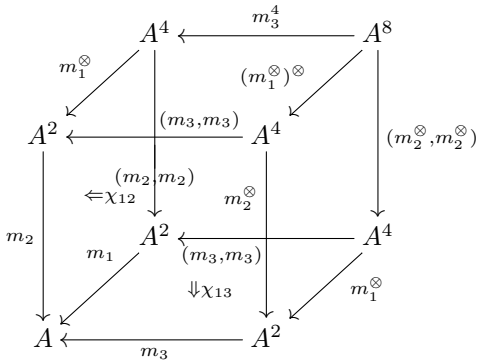
$$\rho_{z} \colon \mathsf{E}_3 \to \mathsf{E}_3$$

由反射 $\mu_z \colon \square^3 \to \square^3$ 在 $(x_1 = x_2)$-超平面处诱导。第三种情况对后续应用并不重要，但为求完整，可以考虑置换 $(\pi_3,\ \pi_2,\ \pi_1)$: $(\mathsf{E}_1)^3 \to (\mathsf{E}_1)^3$,，其相应的自同构

$$\rho_{x_2} \colon \mathsf{E}_3 \to \mathsf{E}_3$$

在几何上由反射 $\mu_y \colon \square^3 \to \square^3$ 在 $(x_1 = x_3)$-超平面处诱导。

设给定如下的 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes \mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes \mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$-代数。



(13)

这里，对角底部乘法 $m_1 \colon A^2 \to A$ 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中底层的 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$-代数，而左面 χ_{12} 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中底层的 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes \mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$-代数。前面由某个 2-胞 χ_{23} 给出。其余三个面由各自对面的相应成对面给出。立方体 (13) 给出一个从右面 (χ_{12}, χ_{12}) 到左面 χ_{12} 的态射。每当立方体 (13) 是某个 E_3-代数的底层结构时，三个面 χ_{12}、χ_{23} 和 χ_{13} 彼此等价；事实上，根据命题 2.10 和注 2.7，它们可以取为重合。或许值得注意的是，将对角反射直观地理解为一种折叠运算，这一想法在代数图景中也有所体现。沿边 $m_1 \colon A^2 \to A$ 将面 χ_{12} 和 χ_{13} 折叠在一起，它们便彼此等价；对于具有公共边 $m_3 \colon A^2 \to A$ 的面 χ_{13} 和 χ_{23}，情况也一样。然而，直接沿 $m_2 \colon A^2 \to A$ 折叠面 χ_{12}，只能在分量扭转后得到 $\chi_{23} = \chi_{12}$。这与注 2.11 中的折叠会引入分量扭转这一观察相符。

2.5. 在 n-范畴中迭代结合结构的片段。本节讨论一组命题，使我们能够将对称幺半n-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中 E_m-代数的构造归约为数量相当少的数据（命题 2.32 和 2.33，以及推论 2.36 和 2.37）。关键在于，在第 4 节中我们将看到，这些少量数据恰好恢复了 [DS97] 为笛卡尔幺半 3-范畴中的双范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 的各种对称性概念所提供的公理。为此，我们引入非幺元的 E_k-代数结构的初始片段。它们的组合复杂性弥补了这样一个事实：迭代的非幺元 A_n-代数结构通常不满足 Eckmann-Hilton 型论证。尽管我们希望应用这些命题的具体幺半 3-范畴是笛卡尔的，但似乎笛卡尔性并不会使定义或证明变得更简短。因此，本节中的结果将涉及一般的对称幺半 n-范畴。在第 2.6 节中，将通过把这些初始片段应用于笛卡尔幺半 n-范畴来说明其用法。

在本节余下部分，我们固定一个有限整数 $n \geq -2$，以及一个对称幺半 n-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}$。也就是说，一个对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}$，其底层 ∞-范畴$\mathcal{C}$ 是一个 n-范畴，

其含义见 [Lur09，第 2.3 节4]。容易看出，对于任意 $0 \leq k \leq \infty$，$\mathcal{C}^{\otimes}$中的 E_k-代数所构成的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 也是一个 n-范畴。非幺版本同样适用。此外，根据 Baez–Dolan–Lurie 稳定化定理 [Lur17，推论 5.1.17]，遗忘函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

对所有 $k > n$ 都是等价。类似地，遗忘函子

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_\infty}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

对所有 $m > n+1$ [都是 n-范畴之间的等价 Lur17，推论 4.1.6。16]。结合可加性定理，这意味着要在对象 A in$\mathcal{C}^{\otimes}$ 上定义 E_m-幺半结构，只需在 A 上构造 m 个（至多 $(n+1)$ 个）相容的 A_{n+2}-代数结构。对于$n > 1$，这仍然需要处理相当多的数据，事实上我们可以做得好得多。从某种意义上说，结合律的复杂性会随着交换性片段的增加而降低（推论 2.37）。

记号 2.28。下文中，K_m 表示 [Lur17，定义 4.1.6.1], 中定义的第 m 个 Stasheff 结合多面体，而 ∂K_m 表示其边界 [Lur17，定义 4.1.6.4]。按照 [Lur17，构造 4.1.6.12] 的记法，边界包含沿其自身的推出 $K_m \sqcup_{\partial K_m} K_m$ 记作 $\Sigma \partial K_m$。

引理 2.29。设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 n-范畴，且 $2 \leq m < \infty$ 是一个整数。那么遗忘函子

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

是局部$(n-m)$-截断的。特别地，遗忘函子 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}{}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}{}_{\mathsf{A}_{m-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$也是如此。

证明。设 $2 \leq m < \infty$ 是一个整数。我们要证明，对于任意两个非幺元的 A_m-代数 A, B，它们属于$\mathcal{C}^{\otimes}$，遗忘函子

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,B) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,B)$$

同态空间的映射是 $(n-m)$-截断的。论证基本上沿用 [Lur17，推论 4.1.6.16]。设A, B 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$中的非幺元 A_m-代数。根据假设，$\mathcal{C}$ 是一个 n-范畴。因此，它们的底对象在$\mathcal{C}$ 中的同态空间$\mathcal{C}(A,B)$是 $(n-1)$-截断的。此外，空间 $\Sigma\partial K_m$ 是 $(m-3)$-连通的。由 [Rez10，命题 8.13]可知，对角

$$\mathcal{C}(\mathsf{A}_1^{\otimes m}, B_1) \to \mathcal{C}(\mathsf{A}_1^{\otimes m}, B_1)^{\Sigma\partial K_m} \tag{14}$$

是 $((n-1) - (m-3) - 2)$-截断的。现在，给定任意态射 $f \in \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})(A, B)$，遗忘函子的纤维

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_m}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,B) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,B) \tag{15}$$

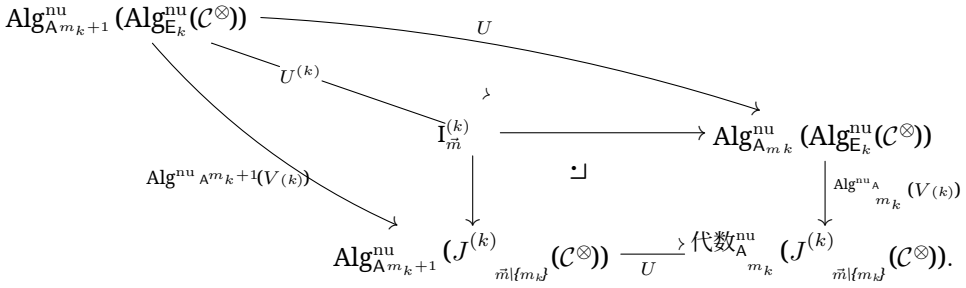
在 f 处等价于映射 (14) [Lur17, Theorem 4.1.6.13] 的一个纤维。因此，(15) 的所有纤维都是 $(n-m)$-截断的，这意味着它本身是 $(n-m)$-截断的。□

现在，我们定义对称幺半∞-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}$ 中迭代的非幺元 A_m-幺半结构的初始段。在这里，我们广泛利用遗忘函子 $\mathrm{SMonCat}_\infty \to \mathrm{Cat}_\infty$ 保持所有极限这一性质。

定义 2.30。设$\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。令 $J^{(0)}_{\emptyset}(\mathcal{C}^{\otimes}) := *$ 且 $V_{(0)}\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to J^{(0)}_{\emptyset}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 为本质唯一的遗忘函子。给定 $1 \leq k < \infty$ 和整数 $1 \leq m_0, \ldots, m_{k-1} < \infty$，我们递归定义

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) & & \xrightarrow{\quad U \quad} & & \\
& \searrow^{V^{(k)}} & & & \\
& & \mathrm{J}^{(k)}_{\vec{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k-1}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \\
& \swarrow_{\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(V^{(k-1)})} & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(V^{(k-1)})} \\
\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(J^{(k-1)}_{(\vec{m}\setminus\{m_0\})}(\mathcal{C}^{\otimes})) & & \xrightarrow[U]{} & & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(J^{(k-1)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes})).
\end{array} \tag{16}$$

此外，对于 $0 \le k < \infty$ 和整数 $1 \le m_0, \dots, m_k < \infty$，我们定义



(17)

我们将 $I^{(k)}_{\vec{m}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 称为带有参数 $\vec{m} = (m_0, \dots, m_k)$ 的 k-重结合初始段对称幺半 ∞-范畴。

举例来说， ∞-范畴 $I^{(0)}_{m_0}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 就是 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{m_0}(\mathcal{C}^{\otimes})$。遗忘函子 $U_{(0)}$ 是典范遗忘函子 $U\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{m_0+1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{m_0}(\mathcal{C}^{\otimes})$。 ∞-范畴中的一个对象

$$\begin{array}{ccc} I^{(1)}_{(m_0,m_1)} & \longrightarrow & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_1}}(U)} \\ \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_1+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow[U]{} & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \end{array}$$

非正式地说，由一个 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 $\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{m_1} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{m_0}$-代数 A，以及将 A 扩张为 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 $\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{m_1+1} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{m_0}$-代数组成；此外，还将 A 扩张为 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 $\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{m_1} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}^{\mathrm{nu}}_1$-代数。式 (17) 中，遗忘函子 $U^{(1)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_1+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(1)}{}_{(m_0,m_1)}$ 在此对象上的纤维，由一个同时扩张这两个部分的 $\mathsf{A}^{\mathrm{nu}}_{m_1+1} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}^{\mathrm{nu}}_1$- 代数组成。

注记 2.31. 递归定义 2.30 也可以针对每个整数k直接以组合方式给出。不过，给出的递归描述更有利于下文的证明，因为这些证明采用归纳法。在所有参数 m_i 均为最小值的特殊情形下，对象 $J^{(k)}_{\vec{1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$中 $L_k(\mathbf{E}_\bullet)$-代数的 ∞-范畴的非幺版本，其中 $L_k(\mathbf{E}_\bullet)$ 是第 2.2 节中引入的闩对象。这将在推论 2.36 中使用。

以下两个命题是 Schlank–Yanovski 的 ∞-范畴 Eckmann–Hilton 论证 [SY19] 在非幺的部分结合结构情形下的精细版本。

命题 2.32. 设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 n-范畴。设 $0 \le k < \infty$ 为一个整数，且$1 \le m_0$、……、$m_k < \infty$ 为一列其他整数。那么遗忘函子

$$U^{(k)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(k)}_{\vec{m}}$$

是局部 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断的。

证明。 证明通过对整数 k 使用归纳法进行。我们同时证明，对于每个整数$0 \le k < \infty$ 以及每个由整数构成的序列 $1 \le m_0, \dots, m_k < \infty$，两个遗忘函子都

$$U^{(k)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(k)}_{\vec{m}}$$

and

$$V^{(k+1)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to J^{(k+1)}_{\vec{m}}$$

是局部 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断的。

对于 $k=0$，我们回顾一下，遗忘函子 r

$$U^{(0)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{I}^{(0)}_{m_0}$$

根据引理 2.29，是局部 $(n-m_0)$-截断的。因此，遗忘函子

$$V^{(1)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{J}^{(1)}_{m_0}$$

是 $(n-m_0)$-截断态射的超限复合，因而其本身也是 $(n-m_0)$-截断的。

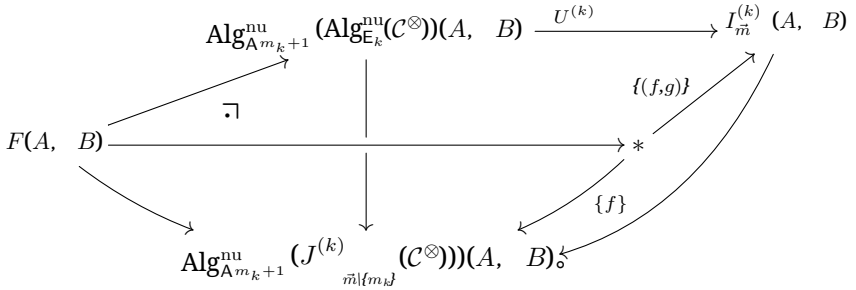
设 $k \geq 1$，并假设我们已经证明了遗忘函子

$$V^{(k)} \colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{J}^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}$$

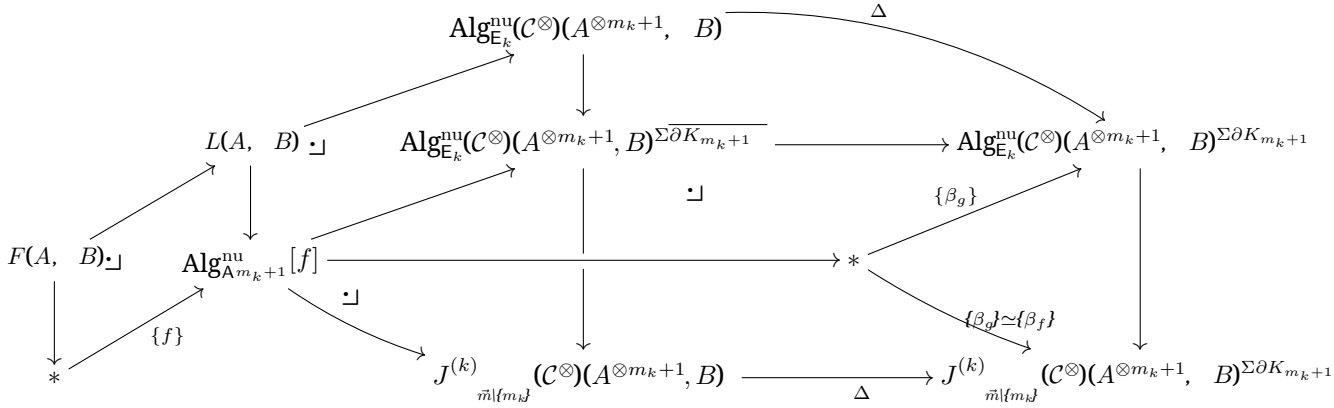
是局部 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k-1} m_i\right)$-截断的。令 A, B 为 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中的非幺元 A_{m_k+1}-代数。我们要证明遗忘函子

$$U^{(k)} \colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}))(A,B) \to I^{(k)}_{\vec{m}}(A,B)$$

的同态空间是 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断的。设 $(f,g) \in I^{(k)}_{\vec{m}}(A,B)$ 是陪域同态空间中的一个元素。我们要计算纤维



借助于 [Lur17，定理4.1.6.13], 该纤维等价于以下图表中的纤维 $F(A,B)$。



这里，函子 Δ 表示由与 $\Sigma\partial K_{m_k+1} \to *$作余张量给出的对角。因此，图表中间的纤维积 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_k+1},\ B)^{\Sigma\partial K_{m_k+1}}$ 是遗忘函子的 $\Sigma\partial K_{m_k+1}$-余张量

$$V^{(k)} \colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_k+1}, B) \to J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_k+1}, B)$$

在其基底上的空间。空间 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}[f]$ 由所有可能的扩张组成：将 $J^{(k)}_{\vec{m}}$ \\{m_k}($\mathsf{C}^{\otimes}$) 中的非幺元 A_{m_k}-代数态射 f 延拓为非幺元 A_{m_k+1}-代数态射，见 [Lur17, Theorem 4.1.6.13]。出于同样的原因，图表中的中间空间 $L(A,B)$ 由所有可能的扩张组成：将 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathsf{C}^{\otimes})$ 中的非幺元 A_{m_k}-代数态射 g 延拓为 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathsf{C}^{\otimes})$ 中的非幺元 A_{m_k+1}-代数态射。空间 $K(A,B)$ 由 $L(A,B)$ 中那些以 f 作为底层非幺元 A_{m_k}-代数态射的底层延拓的扩张组成。现在，空间$\Sigma\partial K_{m_k+1}$是 (m_k-2)-连通的，而遗忘函子 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathsf{C}^{\otimes})(A,B) \to J^{(k)}_{\vec{m}}$ \\{m_k}($\mathsf{C}^{\otimes}$)$(A^{\otimes m_1}, B)$ 按假设是 $(n-1-\sum_{i=0}^{k-1} m_i)$-截断的。由 [Rez10, Proposition 8.13] 可知，缺口映射

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_1}, B) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_1}, B)^{\overline{\Sigma\partial K_{m_1}}}$$

是 $\left((n-1-\sum_{i=0}^{k-1} m_i) - (m_1-2) - 2\right)$-截断的。这意味着空间 K 也被 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断。

为了使归纳法成立，我们还需证明遗忘函子

$$V^{(k+1)} \colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{J}^{(k+1)}_{\vec{m}} \tag{18}$$

也具有 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断性。

因此，我们注意到， ∞-范畴 $\mathbf{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C})$ 是遗忘函子塔的一个序列极限

$$\begin{array}{c} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \times_{\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p+1}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes}))} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \\ \downarrow \\ \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \times_{\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes}))} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \end{array} \tag{19}$$

其指标取遍整数 $m_0 \le p < \infty$。超限复合

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \times_{\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_0}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes}))} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes}))$$

根据定义 (23)，这恰好是遗忘函子 (18)。在任意给定的阶段 $m_0 \le p < \infty$ ，遗忘函子 (19) 等价于函子

$$\begin{array}{c} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \times_{\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p+1}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes}))} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \\ \downarrow{\scriptstyle (U^{(k)},1)} \\ I^{(k)}_{(m_1,\dots,m_k,p)}(\mathcal{C}^{\otimes}) \times_{\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{p+1}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes}))} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_0\}}(\mathcal{C}^{\otimes})) \end{array}$$

如上所示，它是一个局部 $\left(n-1-\sum_{i=1}^{k} m_i - p\right)$-截断函子（的拉回）。特别地，对于所有 $m_0 \le p < \infty$，遗忘函子 (19) 都是局部 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断的。因此，超限复合 (18) 也具有这一性质。□

命题 2.33。设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 n-范畴。设 $0 \le k < \infty$ 为一个整数，且$1 \le m_0$、……、$m_k < \infty$ 为若干其他整数。则遗忘函子的纤维

$$U^{(k)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(k)}_{\vec{m}}$$

$I^{(k)}_{\vec{m}}$ 的任意对象都是一个 $\left(n-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断空间。

证明。 考虑以下遗忘函子的图表。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow{U} & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow{U} & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(V^{(k)})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k}}(V^{(k)})} & & \downarrow{\scriptstyle V^{(k)}} \\ \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow[U]{} & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k}}(J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes})) & \xrightarrow[U]{} & J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \end{array} \tag{20}$$

对于 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中任意给定的 E_k-代数 A ，点

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\{A\}} & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle V^{(k)}} \\ * & \xrightarrow[\{V^{(k)}(A)\}]{} & J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \end{array}$$

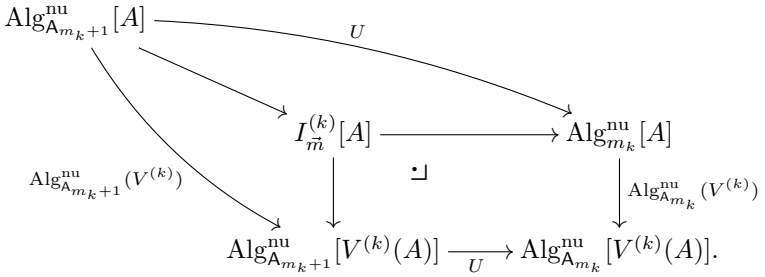
由此得到如下（顶端和底端的）(20) 的纤维。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}[A] & \xrightarrow{U} & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k}}[A] & \longrightarrow & * \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(V^{(k)})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k}}(V^{(k)})} & & \| \\ \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}[V^{(k)}(A)] & \xrightarrow[U]{} & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k}}[V^{(k)}(A)] & \longrightarrow & * \end{array}$$

相应的缺口映射的拉回

$$U^{(k)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m_k+1}}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(k)}_{\vec{m}}$$

是缺口映射



(21)

由于 $I^{(k)}_{\vec{m}}$ 的每个点都可以通过某个 E_k-代数 A in$\mathcal{C}^{\otimes}$ 因子分解，因此只需证明，对于所有 E_k-代数 A in $\mathcal{C}^{\otimes}$，(21) 中的缺口映射是一个逐纤维 $\left(n-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断空间。于是设$A$ 是$\mathcal{C}^{\otimes}$中的一个 E_k-代数。根据 [Lur17，定理 4.1.6.8]，(21) 的外方形带有一个自然变换，指向图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_k+1},A)^{K_{m_k+1}} & \longrightarrow & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_k+1},A)^{\partial K_{m_k+1}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes})(V^{(k)}(A)^{\otimes m_k+1},V^{(k)}(A))^{K_{m_k+1}} & \longrightarrow & J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes})(V^{(k)}(A)^{\otimes m_k+1},V^{(k)}(A))^{\partial K_{m_k+1}}
\end{array} \tag{22}$$

其中顶端方形和底端方形都是笛卡尔的。因此，只需证明与方形 (22) 相关联的同态空间的缺口映射是 $\left(n-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断的（因为其纤维确实是空间）。但是，包含 $\partial K_{m_k+1} \hookrightarrow K_{m_k+1}$ 是 (m_k-3)-连通的；遗忘函子

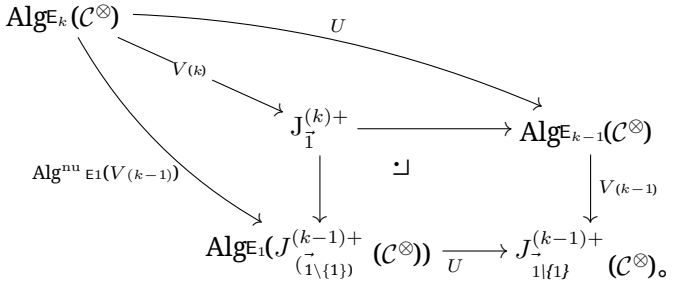
$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A^{\otimes m_k+1},A) \to J^{(k)}_{\vec{m}\setminus\{m_k\}}(\mathcal{C}^{\otimes})(V^{(k)}(A)^{\otimes m_k+1},V^{(k)}(A))$$

根据命题 2.32 的证明，它是 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k-1} m_i\right)$-截断的。这意味着（22）的缺口映射也是 $\left(n-\sum_{i=0}^{k} m_i\right)$-截断的，这同样由 [Rez10，命题 8.13] 得出。

□

我们还需要两个推论，以便将上述结果也应用于含幺情形。我们将通过定义 2.30 和命题 2.10 的 Eckmann-Hilton 论证来推导它们。或许也可以直接从 Schlank 和 Yanovsky 的 Eckmann-Hilton 论证[SY19], 推导出它们，不过作者未能看出如何做到。因此，我们引入一种特别简单的初始段的中间含幺版本。

定义 2.34. 设$\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。设 $J^{(0)+}_{\emptyset}(\mathcal{C}^{\otimes}) := *$ 且 $V^{(0)}\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to J^{(0)+}_{\emptyset}(\mathcal{C}^{\otimes})$是本质唯一的遗忘函子。给定 $1 \le k < \infty$，令 $\vec{1}$为长度为 $k+1$的序列 (1，…，1)。我们递归地定义



(23)

引理 2.35. 设 $C^{\otimes}$ 为一个对称幺半 n-范畴，且 $1 \le k < \infty$。

(1) 遗忘函子

$$V^{(k+1)}\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{J}_{\vec{1}}^{(k+1)+}$$

局部是$(n-k-2)$截断的。

(2) 对称幺半 ∞-范畴 $J_{\vec{1}}^{(k+1)+}$ 与$\mathrm{Alg}_{L_{k+1}(\mathsf{E}_\bullet)}(\mathcal{C}^{\otimes})$自然等价，其中 $L_{k+1}(\mathsf{E}_\bullet)$ 是第 *2.2* 节中引入的余半单纯 ∞-运算子$\mathsf{E}_\bullet$ 的$(k+1)$阶闩对象。

证明。 遗忘函子 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 诱导出一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) & \xrightarrow{\quad U \quad} & \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle V^{(k+1)}} & \searrow \quad \swarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle V^{(k+1)}} \\ \mathrm{J}_{\vec{1}}^{(k+1)+} & \xrightarrow[\quad U \quad]{} & \mathrm{J}_{\vec{1}}^{(k+1)} \end{array} \tag{24}$$

右侧的垂直遗忘函子 $V^{(k+1)}$ 根据命题 2.32 是局部 $\left(n-1-\sum_{i=0}^{k}1\right)$-截断的。因此，要证明第 (1) 部分，只需证明 (24) 中的对角间隙映射 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}\otimes) \dashrightarrow \bullet$ 是完全忠实的。(24) 外方形中的两个水平函子根据引理 2.21.1 都是单的，因此其中的缺口映射也是单的。因此，只需证明它是满的。于是，设 A 和 B 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 E_{k+1}-代数，并假设给定一对态射 $f\colon U(A) \to U(B)$，它们属于 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$，且有一个将其扩张到 $\mathrm{J}_{\vec{1}}^{(k+1)+}$ 的扩张 f^+。要沿着 (24) 的顶部垂直遗忘函子 U 提升 f，只需证明 f 是拟幺的（引理 2.21.3）。这由 f^+ 到 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 的投影保证。

第 (2) 部分可由注 2.13 中给出的 $L_k(\mathsf{E}_\bullet)$ 的公式，经归纳法相当直接地得出。 □

推论 2.36. 设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 为对称幺半 n-范畴。设 $1 \le k < \infty$ 为整数，且A、$B \in \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 为 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的 E_{k+1}-代数。设 $f\colon A \to B$ 为底 E_k-代数的态射。则空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,B) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,B)} \{f\} \tag{25}$$

f 的 E_{k+1}-代数延拓空间是 $(n-k-2)$-截断的。

证明。 由推论 2.14 与引理 2.35.2 可知，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle V^{(k+1)}} & \searrow^{U} & \\ J_{\vec{1}}^{(k+1)+} & \longrightarrow & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes}) \end{array}$$

表明 U 是 $V^{(k+1)}$ 的一个收缩。由引理 2.35.1，后者是局部 $(n-k-2)$-截断的。 □

推论 2.37. 设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 为对称幺半 n-范畴。设 $1 \le k < \infty$ 为整数，且$A \in \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 为 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的一个 E_k-代数。则空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})} \{A\} \tag{26}$$

的 E_{k+1}-代数扩张 A 是$(n-k-1)$-截断的。

证明。 若 $k > n$ 这由 Baez–Dolan–Lurie 稳定化定理得出。假设 $k \le n$。纤维 (26) 是序列极限中 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{qu}}{}_{\mathsf{A}_m}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})} \{A\}$ 的一个子范畴，而其中每一个都是空间；因此它本身也是一个空间。这同样可以通过归纳得到（任何纤维化到一个空间、且其纤维为空间的总 ∞-范畴也是一个空间）。由于 $k \le n$，只需证明空间 (26) 是局部 $(n-k-2)$-截断的。事实上，对于纤维 (26) 中的每一对对象 A_1, A_2，它们的同态空间就是该纤维

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathcal{C}^{\otimes})(A_1,A_2) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^{\otimes})(A,A)} \{1_A\}.$$

根据推论 2.36，这是 $(n-k-2)$-截断的。 □

2.6. **低维幺半范畴中的高阶代数**。 我们以命题 2.32 和命题 2.33 在低维情形中的一个应用结束本节。

推论 2.38。 设 $C^{\otimes}$ 是一个对称幺半 *1*-范畴。那么，$C^{\otimes}$ 中的E_2-代数范畴等价于 C 中如下形式的图表范畴

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes A\otimes A & & & & \\ {\scriptstyle m\otimes 1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle 1\otimes m} & & & & \\ A\otimes A & \xleftarrow{m'\otimes m'} & (A\otimes A)^{\otimes 2} & & \\ \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m^{\otimes}} & & \\ A & \xleftarrow{\quad m'\quad} & A\otimes A & \underset{m'\otimes 1}{\overset{1\otimes m'}{\leftleftarrows}} & A\otimes A\otimes A. \end{array} \tag{27}$$

其中 m 和 m' 具有相同的（拟）单位元。换言之，给出 $C^{\otimes}$ 中的一个E_∞-代数，等同于给出 $C^{\otimes}$ 中对象 A 上的两个幺半结构，它们共享同一个单位元，并使 *(27)* 中的方块交换。

证明。 遗忘函子

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \twoheadrightarrow \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_3}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

是一个等价。此外，遗忘函子

$$U^{(1)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_2}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_3}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(1)}_{(2,1)}$$

and

$$U^{(1)}\colon \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_3}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_3}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(1)}_{(1,2)}$$

根据命题 2.32，它们同样是等价。空间 $I^{(1)}{}_{(1,2)}$ 由形如 (27) 的图表组成，这是通过在定义 2.30 中将 $\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_2}(\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_3}(\mathcal{C}^{\otimes}))$ 替换为 $I^{(1)}{}_{(2,1)}$ 而得到的。因此，每一个形如 (27) 的图表都给出一个本质上唯一的非幺元的 E_2-代数 A于$\mathcal{C}^{\otimes}$中。根据引理 2.21.4，若乘法 m具有拟单位 u，且乘法 m' 是拟幺的并在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 自身中展现一个拟单位 u'，则它可延拓为一个 E_2-代数。只要 m 与 m' 具有相同的拟单位，这三个条件便得到满足。反之，只要 A 可延拓为一个 E_2-代数，这两个拟单位元必然相同。由此我们得到一个 (-1)-截断纤维化

$$U^{(1)}\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to I^{(1)}_{(1,2)}$$

其像由那些使得 m 与 m' 具有相同拟单位的图表 (27) 组成。最后，投影

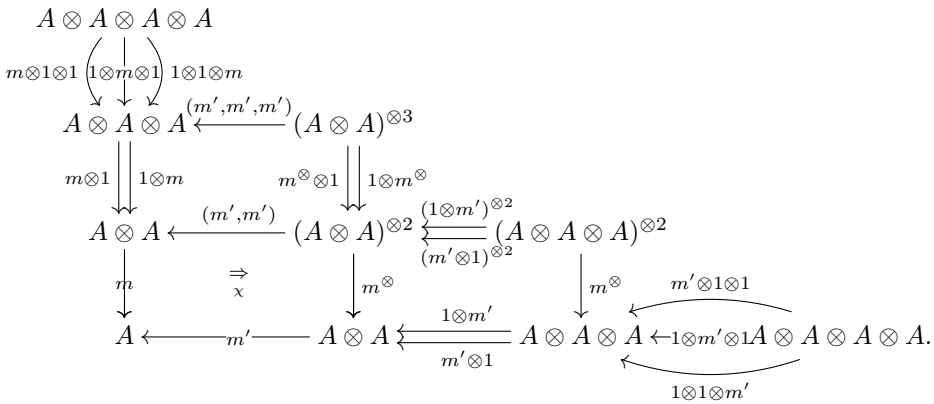
$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\mathcal{C}^{\otimes}) \twoheadrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

根据 Baez–Dolan–Lurie 稳定化定理，这是一个等价。 □

注 2.39. 经典的 Eckmann–Hilton 论证本质上是指出，形如 (27) 的每个图表都允许将其中的正方形与映射 $(\mathbf{1}, u, u, \mathbf{1})\colon A\otimes A \to (A\otimes A)^{\otimes 2}$ 预复合。这给出了 $m = m'$，进而由正方形本身得到 m 的交换性。

在维数 2 和 3 中，我们得到以下约化结果。

推论 2.40. 设 $C^{\otimes}$ 是一个对称幺半*2*-范畴。那么，$C^{\otimes}$中 E_2-代数构成的 *2*-范畴等价于如下形式的图表构成的 *2*-范畴



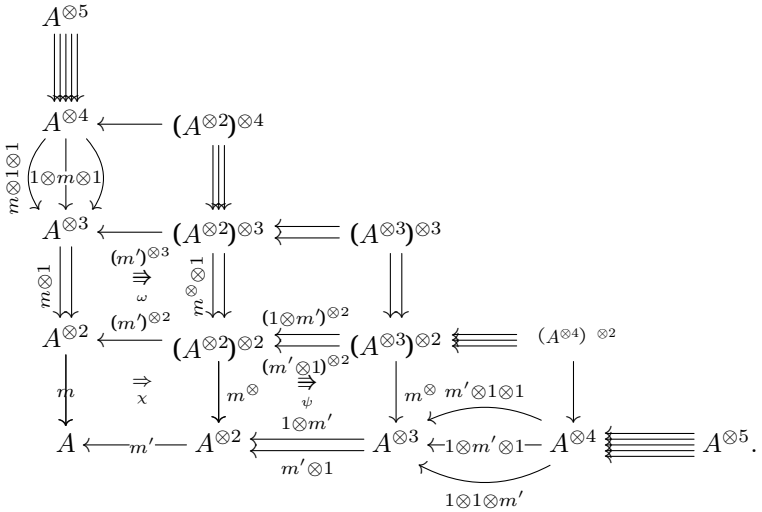
(28)

使得 m 具有拟单位 u， m' 是拟幺的，并且使得 u为 m' 本身诱导一个拟单位。这里，χ 是一个可逆 *2*-胞腔。

证明。 证明相同。 □

例 2.41。 考虑范畴 $\mathrm{Cat}^{\times}$ 所成的笛卡尔幺半2-范畴。与之关联的幺半范畴的 ∞-范畴等价于 $\mathrm{Cat}^{\times}$ 中的 E_1-幺半群的 ∞-范畴（例如参见 [Lur17, 例 5.1.2.4], , 其本质上是一个类似于下文引理 3.22 的论证）。由可加性定理可知，$\mathrm{Cat}^{\times}$ 中的 E_2-代数等价地由 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}^{\times})$中的 E_1-代数给出。根据推论 2.40，这类代数可化简为形如 (28) 的图表。由 Eckmann–Hilton论证可得 $m' \simeq m$。此外，固定给定的（竖直）$\mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{E}_1{}^{\mathrm{nu}}$-代数结构后，底部二维的水平 $\mathrm{E}_1^{\mathrm{nu}} \otimes \mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}}$-代数由 $\mathrm{Cat}^{\times}$中的一个 3-胞腔的存在性所确定，因此仅是一个性质。通过对角反射论证，该性质自动成立；我们将在第 4 节详细阐述此论证。由此可知，$\mathrm{Cat}^{\times}$ 中的 E_2-幺半群的 ∞-范畴等价于 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}^{\times})$中拟幺 A_2-幺半群的 ∞-范畴。这便得到了 Joyal–Street 关于编织幺半范畴与带乘法的幺半范畴之间的等价，见 [JS93, 注 5.1]。

推论 2.42。 设 $C^{\otimes}$ 是一个对称幺半 *3*-范畴。那么 $C^{\otimes}$中的E_2-代数所构成的 *3*-范畴等价于如下形式的图表所构成的 *3*-范畴



(29)

使得 m 具有拟单位 u， m' 是拟幺的，并且使得 u为 m' 本身诱导出一个拟单位。这里，χ 是一个可逆 *2*-胞腔， ω 和 θ 是可逆 *3*-胞，而未标记的方框表示方程。

证明。 证明相同。 □

鉴于我们将在第 4 节中把推论 2.42 应用于笛卡尔幺半 3-范畴 $\mathrm{BiCat}^{\times}$ ，因此在三个推论中，它与我们的讨论最为相关。尽管形如 (29) 的图表仍需手动处理

大量数据，但我们将看到，在这种情况下，可以借助各种半严格化结果进一步精简其中一部分数据。

3. 双范畴的笛卡尔幺半 ∞-范畴

范畴论在 ∞-范畴论中的典范嵌入，将许多范畴化的代数构造转化为相应的 ∞-范畴构造。这是 [Lur17] 很多工作的出发点。因此，前者可以理解为后者的子理论。与 1-范畴不同，一般的双范畴 $\mathcal{C}$ 具有不可逆的 2-胞，因此不能轻易简化为一个（∞，1）-范畴结构。特别是，要赋予一般双范畴 $\mathcal{C}$ 幺半结构，所需的不仅仅是为其底层的局部群胚双范畴赋予幺半结构。然而，无论采用哪种方式，整体的双范畴同伦论都抽象地定义了一个笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{BiCat}^{\times}$。因此，本节的目标是将第 2 节中一般讨论的 $\mathrm{BiCat}^{\times}$内 ∞-范畴代数的一些基本概念，与 [DS97]的相应双范畴代数概念进行比较。我们将通过双范畴范畴上的 Lack 模型结构所提供的同伦代数来完成这一工作。为简单起见，我们将用 Gray 幺半群代替幺半双范畴，后文将对此给出论证。

在第 3.1 节中，我们回顾 [DS97]，最基本的半严格代数定义，并在（编织）幺半 2-范畴上构造编织和对称编织的逆。在第 3.2 节中，我们以众所周知的方式定义 Gray 幺半群的同伦论 GrMon，并在此背景下讨论第 3.1 节中的一些概念。

3.1. 二维代数的半严格模型。我们回顾一下，Gray 幺半群是幺半范畴 $\mathrm{Gray} := (\text{2-Cat}\ \otimes_{\mathrm{Gr}})$ 中的一个（严格）幺半对象，其中该范畴由 2-范畴及其（严格）2-函子构成，并配备 Gray 张量积。因此，每个 Gray 幺半群都是一个幺半双范畴。反过来，有如下基本定理。

T 定理 3.1。*每个幺半双范畴 C 都与某个 Gray 幺半群 C 幺半双等价。*

证明。 这是三范畴相干定理 [GPS95] 的一个广为人知的特例。 □

定理 3.1 的核心内容是：带有严格笛卡尔幺半结构的双范畴三范畴中的伪幺半群，本质上与带有伪笛卡尔幺半结构的 2-范畴三范畴中的严格幺半群相同 $\otimes_{\mathrm{Gr}}$。因此，我们可以将引言中的定理1.1的证明归结为关于 2-范畴及其间 2-函子的一个定理。严格来说，这对证明并非必需，但能大大简化其中的一些计算。事实上，双范畴代数的基本概念是等价不变的，因此我们得到以下推论。

推论 3.2。 *设 C 是一个幺半双范畴，且令 C 为定理 3.1 中与之关联的 Gray 幺半范畴。那么，在以下对象之间存在一一对应*

(1) C 上的编织和 C 上的编织；(2) C 上的交错的编织和 C 上的交错的编织；(3) C 上的对称编织和 C 上的对称编织。

□

备注 3.3。 我们对半严格和全弱二维代数结构作如下评论。

- Gray 幺半群是半严格幺半双范畴。然而，根据上述定理，它们与幺半双范畴本质等价。
- DS97 的定义 [中的 Gray 幺半群之间的幺半同态（即强幺半拟函子）恰好是 Gray 幺半群之间的幺半双函子，因此已经是全弱的。
- DS97 定义 12] 中定义的 Gray 幺半群上的（半严格）编织，与 [Gur11 第 2 节4]中定义的 Gray 幺半群上的全弱双范畴编织的区别，在于前者满足严格的额外单位方程。 然而，对于任意给定的 Gray 幺半群，前者与后者是等价的，见 [Gur11 定理 27]。我们将前者简称为编织，将后者称为全弱编织。我们将在注 4.10 中进一步讨论这一选择。

- 在 [DS97 定义 15] 中，带编织 Gray 幺半群上的对称编织恰好就是其上的双范畴对称交换子，见 [GO13 定义 11]（假设该编织是半严格的）。
- DS97 中定义 17] 所说的编织 Gray 幺半群上的对称对称交换子，[恰好就是其上的双范畴对称对称交换子 [GO13，定义 1.1]。
- DS97 中定义 14、定义 16]所说的编织／对称交换同态——即编织／交错／对称 Gray 幺半群之间的同态——恰好就是完全弱的双范畴概念。[

研究半严格对象及其之间完全弱态射所构成的高阶范畴，是三维单子理论中普遍存在的一项原则，参见例如 [Gar10]。由此自动得到一个典范全忠实嵌入：从 Gray 幺半群与幺半同态构成的三范畴嵌入幺半双范畴三范畴。

记号 3.4。底层伪函子为 2-函子的 Gray 幺半群之间的幺半同态，称为幺半 2-函子。给定两个 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$，我们常用大写字母 F 表示幺半 2-函子：$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，也就是说，它是一个元组 $F = (f、\chi、\omega、\iota、\zeta、\kappa)$，其中$f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 2-函子，而 $(\chi、\omega、\iota、\zeta、\kappa)$ 是 Day–Street 意义下的幺半结构。幺半 2-函子之间的幺半伪自然变换，以及幺半伪自然变换之间的幺半修正，随后在 [DS97，定义 3] 中定义。

定义 3.5. 设$\mathcal{C}$ 是一个 Gray 幺半群。若恒等 1：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}$（视为幺半 2-函子）可以提升为带编织的幺半 2-函子 $1\colon (\mathcal{C}\ \beta_1) \to (\mathcal{C}\ \beta_2)$，则称$\mathcal{C}$ 上的两个（全弱）编织 β_1, β_2 等价。我们将$\mathcal{C}$上编织的等价类集合定义为 $\beta(\mathcal{C})$。给定$\mathcal{C}$上的一个编织 β，我们进一步将带编织的 Gray 幺半群 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 上对称编织的集合定义为 $\zeta(\mathcal{C}\ \beta)$。

下文中我们将自由采用 [DS97] 的定义，并沿用其记号。

记号 3.6. 设$\mathcal{C}$是一个 2-范畴。给定两个可逆态射 $f, g\colon A \to B$，以及$\mathcal{C}$中的一个可逆 2-胞腔 $\alpha\colon f \to g$，我们将由粘合$f^{-1} * \alpha^{-1} * g^{-1}$给出的 α 的水平逆记为 $\alpha^{-1_h}\colon f^{-1} \to g^{-1}$。给定两个复合之间的一个 2-胞腔 $\alpha\colon if \to gh$，图示为一个方形

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\alpha & \downarrow{\scriptstyle i} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D, \end{array}$$

我们也将类似地诱导出的 2-胞称为

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^{-1}} & A \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \Downarrow f^{-1}*\alpha^{-1}*g^{-1} & \downarrow{\scriptstyle h} \\ D & \xrightarrow[g^{-1}]{} & C, \end{array}$$

as α^{-1_h} as。它的垂直逆

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ {\scriptstyle h^{-1}}\downarrow & \Downarrow h^{-1}*\alpha^{-1}*\iota^{-1} & \downarrow{\scriptstyle \iota^{-1}} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B, \end{array}$$

将记为 α^{-1_v}。这两个指派的拼接得到一个 2-胞

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g^{-1}} & C \\ {\scriptstyle \iota^{-1}}\downarrow & \Downarrow\alpha^{-1_v h} & \downarrow{\scriptstyle h^{-1}} \\ B & \xrightarrow[f^{-1}]{} & A. \end{array}$$

由 $(if)^{-1} * \alpha * (gh)^{-1}$ 给出。这里，给定一对可水平复合的 2-胞

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{k} & E \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\alpha & \downarrow{\scriptstyle i} & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle m} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D & \xrightarrow[l]{} & F, \end{array}$$

注意 $(\beta * \alpha)^{-1_{vh}} = \alpha^{-1_{vh}} * \beta^{-1_{vh}}$。

3.1.1. *Gray* 幺半群上的编织及其反向编织。 众所周知，编织是可对偶化的概念。事实上，幺半范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 上的每个编织 β 都会在 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 上诱导出一个反向编织 β^{rev}，其定义逐点给出为 $\beta^{\mathrm{rev}}_{A,B} := \beta^{-1}_{B,A}$ [JS93，定义 2.1]。类似地，有如下命题。

命题 3.7。 设 C 是一个 *Gray* 幺半群，且 $\beta = (\rho, \bar{\omega})$ 是 C 上的一个编织。那么，由下式给出的元组 $\beta^{\mathrm{rev}} := (\rho^{\mathrm{rev}}, \bar{\omega}^{\mathrm{rev}})$

$$\rho^{\mathrm{rev}}_{A,B} := \rho^{-1}_{B,A} \colon A \otimes B \xrightarrow{\simeq} B \otimes A$$

and

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B \otimes C \otimes D & \xrightarrow{1\otimes\rho^{\mathrm{rev}}_{C,D}} & A \otimes B \otimes D \otimes C \\ {\scriptstyle \rho^{\mathrm{rev}}_{A,B}\otimes 1}\downarrow & \Rightarrow\bar{\omega}^{\mathrm{rev}}_{A,B,C,D} & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\mathrm{rev}}_{A,B\otimes D}\otimes 1} \\ B \otimes A \otimes C \otimes D & \xrightarrow[1\otimes\rho^{\mathrm{rev}}_{A\otimes C,D}]{} & B \otimes D \otimes A \otimes C \end{array}$$

定义为如下粘合

$$\left(\begin{array}{ccc} A \otimes B \otimes C \otimes D & \xleftarrow{1\otimes\rho_{D,C}} & A \otimes B \otimes D \otimes C \\ \uparrow{\scriptstyle \rho_{B,\,A}\otimes 1} & 1 \quad \nearrow{\scriptstyle \rho_{B,\,A}\otimes 1} & \uparrow{\scriptstyle \rho_{B\otimes D,A}\otimes 1} \\ & B \otimes A \otimes D \otimes C \quad {\scriptstyle \bar{\omega}_{B,\,I,\,D,\,A}\otimes 1}\Leftarrow & \\ & {\scriptstyle 1\otimes\rho_{D,\,C}}\swarrow \quad \Downarrow 1\otimes\bar{\omega}_{D,\,A,\,I,\,C} \quad \nwarrow{\scriptstyle 1\otimes\rho_{D,A}\otimes 1} & \\ B \otimes A \otimes C \otimes D & \xleftarrow[1\otimes\rho_{D,\,A\otimes C}]{} & B \otimes D \otimes A \otimes C \end{array} \right)^{-1_{vh}} \tag{30}$$

又是 C 上的一个编织。我们将 β^{rev} 称为与 β相关联的 C 上的反向编织。

证明。从 $\bar{\omega}_{-,I,I,-} = 1$ 以及 $\bar{\omega}$ 的结合律可得 $\bar{\omega}_{I,I,-,-} = 1$ （将结合律用于最左侧四个变量中的 1）以及 $\bar{\omega}_{-,-,I,I} = 1$ （将结合律用于最右侧四个变量中的 1）。因此，根据定义可得 $\bar{\omega}^{\mathrm{rev}}_{A,I,C,D} = \bar{\omega}_{D,A,I,C}$ 以及 $\bar{\omega}^{\mathrm{rev}}_{A,B,I,D} = \bar{\omega}_{B,I,D,A}$。于是，对于 β^{rev}，与 $r^{\mathrm{rev}}_{A,B|C} := \bar{\omega}^{\mathrm{rev}}_{A,I,B,C}$ 和 $r^{\mathrm{rev}}_{A|B,C} := \bar{\omega}^{\mathrm{rev}}_{A,B,I,C}$ 相关联的两个 Young–Baxter胞之间的方程，直接由与 β对应的两个 Young–Baxter胞之间的同一方程推出。直接验证 $\bar{\omega}^{\mathrm{rev}}$ 的结合律稍有难度。不过，根据 [DS97，第109], 页，也可以改为验证 Baez–Neuchl 关于定义幺半2-范畴上编织的相应公理；Crans 在 [Cra98] 中给出了更易读的表述。这些公理以胞腔 r^{rev}_{A}, $_{B|C} = r^{-1_{hv}}_{C|A},_{B}$ 和 $r^{\mathrm{rev}}_{A|B,C} = r^{-1_{hv}}_{B},_{C|A}$[3]来表述。它们都很容易推出： β^{rev} 的 Cra98 定义 2.2] 中的方程 (2.4)，可由 β的 Cra98 定义 2.2] 中的方程 (2.5) 推出，反之亦然。Cra98 定义 2.2] 中的方程 (2.6) 在这方面是自对偶的。□

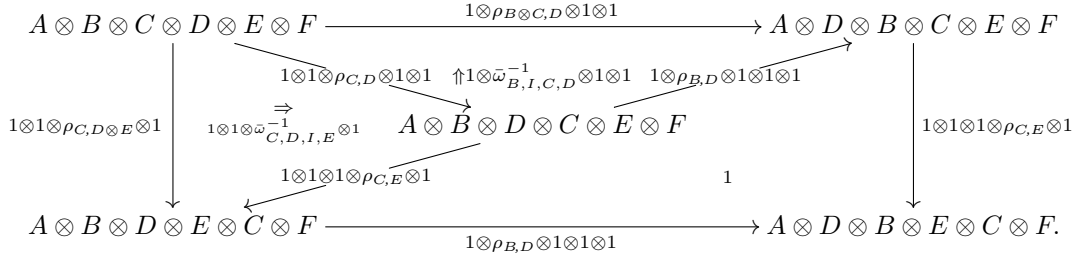
注 3.8. 给定一个编织 Gray 幺半群 $(\mathcal{C}\ \beta)$，还可以通过对元组 (A, B, C, D, E, F) 的结合律，分别令 $A = B = C = 1$ 和 $D = E = F = 1$，证明 $\bar{\omega}(I, -, -, -) = 1$ 以及 $\bar{\omega}(-, -, -, I) =$1 也成立。

注 3.9. 我们回顾一下 [JS93，定义 2.1] 指出，在 1-范畴语境中，编织的反向编织仍然是编织，因为“(B2) 只需将 ρ 替换为 ρ^{rev}，即可从 (B1) 得到”。这里，

[3]为保持一致，我们沿用 Day–Street 的记号；若要使用 [Cra98]，中的公理，就必须定义 $\tilde{R}_{A,B|C} := r_{A,B|C}$ 和 $\tilde{R}_{A|B,C} = r^{-1}_{A|B,C}$。

(B1) 和 (B2) 是两个胞腔 $r_{-,\,-|-}$ 和 $r_{-|-,\,-}$。实际上，在 2-范畴语境中，计算胞 $r^{\mathrm{rev}}_{A,\,B|C} := r^{-1_{hv}}_{C|A,\,B}$和 $r^{\mathrm{rev}}_{A|B,\,C} := r^{-1_{hv}}_{B,\,C|A}$ 也比计算 $\bar{\omega}^{\mathrm{rev}}$ 更直观。

记号 3.10。我们回顾第2.4节中对称幺半范畴有限集$_*$的自然同构 σ 部分。设 $\mathcal{C}$ 为一个 Gray 幺半群，且 $\beta = (\rho, \bar{\omega})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个编织。其对应的反向编织 β^{rev} 诱导出一个修正 $(1 \otimes (\bar{\omega}^{\mathrm{rev}})^{-1} \otimes 1)(\sigma^*_{(\langle 3\rangle,\langle 2\rangle)}(-))$，根据 (30)，它由以下自然 3-胞定义



仿照第2.4节中富有启发性的类比，我们将这个胞腔称为 $1 \otimes \bar{\omega}^{\mathrm{rev}} \otimes 1$ 的对角反射，并记作 $(1 \otimes \bar{\omega}^{\mathrm{rev}} \otimes 1)^{\rho}$。为便于后文引用，我们指出，对于任何一对作为编织基础的可逆胞腔 $(\rho,\ \bar{\omega})$，只要 $\rho_{I,\,-} = \rho_{-,\,I} = 1$，都可以定义这个胞腔 $(1 \otimes \bar{\omega}^{\mathrm{rev}} \otimes 1)^{\rho}$。关于$\bar{\omega}$ 的两条公理（结合律，以及关联的两个 Yang–Baxter 胞腔之间的关系式）均非必需。

注记 3.11。在例 2.41 中，我们讨论了幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的编织与其乘法 $[$ 的幺半结构之间的一一对应，见 JS93，命题 5.3]。类似地，设 $\beta = (\rho,\ \bar{\omega})$ 是 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 上的一个编织。Day 和 Street [DS97，定义 12] 指出，每个这样的编织都会在 $\mathcal{C}$ 的乘法 2-函子 $m\colon \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 上诱导出一个幺半结构，其

- $\chi_\beta := 1 \otimes \rho \otimes 1$,
- $\omega_\beta := 1 \otimes \bar{\omega} \otimes 1$,
- $\iota\colon\ I \to m(I,\ I)$ 是 I 上的恒等映射,
- $\zeta\colon\ m(-,\ I) \simeq 1,\ \ \kappa\colon\ m(I,\ -) \simeq 1$ 都是 $\mathcal{C}$ 上的恒等映射,

并且满足恒等映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} & \xrightarrow{1 \otimes_{\mathrm{Gr}} m} & \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \\ {\scriptstyle m \otimes_{\mathrm{Gr}} 1}\downarrow & 1 & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} & \xrightarrow[m]{} & \mathcal{C} \end{array} \tag{31}$$

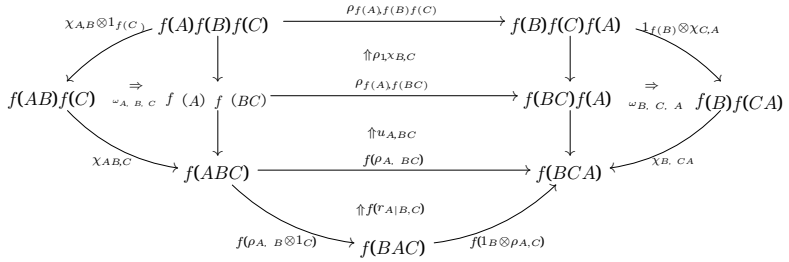
将其视为（幺半的）2-函子的伪自然变换时，本身也成为幺半的，具体而言，配备修正 $1_0 = 1$ 和 $1_2 := (1 \otimes \bar{\omega}^{\mathrm{rev}} \otimes 1)^{\rho}$ 时即是如此。编织的半严格性进一步意味着 $\chi_{I,\,-},\ \chi_{-,\,I}\colon\ m(-,\ -) \simeq m(-,\ -)$ 都是 $\mathcal{C}$ 上的恒等映射。进一步可由单位元公理得出 $\omega(-,\ -,\ \mathbf{1},\ \mathbf{1},\ -,\ -) = 1$；该公理规定了 ω 与 ζ 和 κ 之间的相互作用。

类似地，我们可以对幺半 2-函子上的编织进行反向处理，随后也可以对编织 Gray 幺半群上的对称编织进行反向处理。因此，我们对幺半 2-函子上的编织的定义 [DS97, Definition 14] 中的图表稍作重新编排，使其更具对称性。这样一来，证明就容易得多。

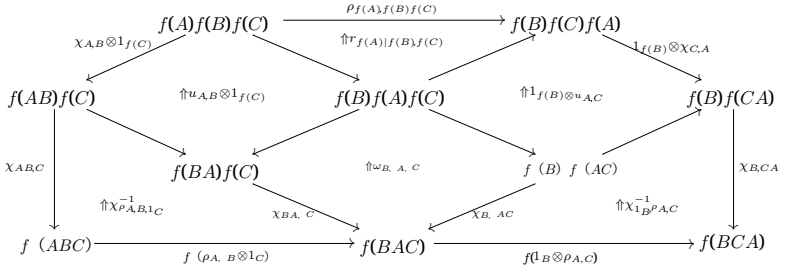
引理3.12。设$(\mathcal{C},\ \beta)$和$(D,\ \beta)$为编织 *Gray* 幺半群，且 $F\colon \mathcal{C} \to D$ 为幺半 *2*-函子（或者说，弱幺半同态）。那么 F 上的编织 u是一个可逆修正

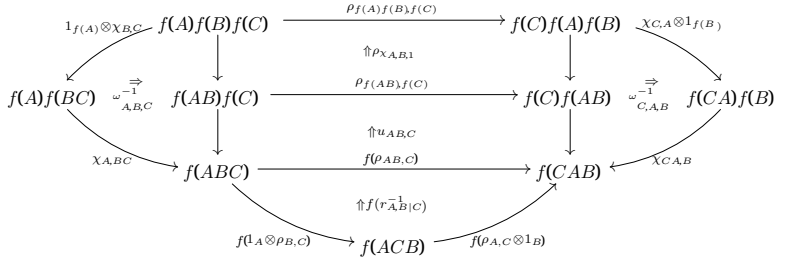
$$\begin{array}{ccc} f(A)f(B) & \xrightarrow{\rho_{f(A),f(B)}} & f(B)f(A) \\ {\scriptstyle \chi_{A,B}}\downarrow & \Rightarrow_{u_{A,B}} & \downarrow{\scriptstyle \chi_{B,A}} \\ f(AB) & \xrightarrow[f(\rho_{A,B})]{} & f(BA) \end{array}$$

使得以下两个方程成立。

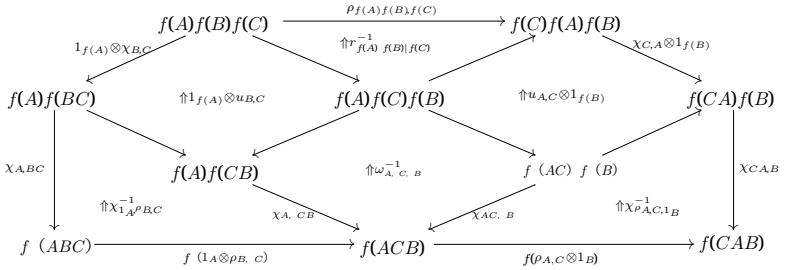


$$\Vert \tag{32}$$





$$\Vert \tag{33}$$



证明。该陈述恰好是 [DS97，定义 14]，至多差一个与相应实例复合的自然可逆 2-胞腔 χ^{-1} 在两种情况下。□

将 Day–Street 的定义以相同方式重新组织，也有助于下文对对称编织进行同类计算。这里，相应的重新组织正是 [Cra98] 所阐述的对称编织定义。

引理 3.13。设 $(F,u)\colon (C\ \beta)\ \to (D\ \beta)$ 是辫单*oidal Gray* 幺半群之间的带编织的幺半 *2*-函子。那么，由相同的幺半结构以及 $u^{\mathrm{rev}}_{A,B} := u^{-1_v}_{B,A}$ 定义的 $(F,u^{\mathrm{rev}})\colon (C\ \beta^{\mathrm{rev}})\ \to (D\ \beta^{\mathrm{rev}})$ 同样是带编织的幺半 *2*-函子。

证明。我们需要证明 u^{rev} 满足方程（32）和（33）。等价地，我们可以证明相应自然 2-胞的垂直逆（相对于其顶部和底部的水平态射）满足这两个方程。对 u^{rev} 计算（32）中的两个图表所得的垂直逆为

恰好是对 u 计算（33）中的两个图表，并将 (A,B,C) 替换为 (B,C,A) 后所得的两个图表，反之亦然。因此，u^{rev} 的方程（32）由 u的方程（33）推出，反之亦然。□

引理 3.14. 设 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 是一个交错的 *Gray* 幺半群。设 $v^{\mathrm{rev}}_{A,B}$ 为 *2*-胞

$$\begin{array}{ccccccc} A\otimes B & \xrightarrow{\rho_{A,B}} & B\otimes A & = & B\otimes A & \xrightarrow{\rho^{\mathrm{rev}}_{B,A}} & A\otimes B. \\ & \searrow^{\rho^{\mathrm{rev}}_{B,A}} & & \Uparrow v^{-1_h}_{B,A} & & \nearrow_{\rho^{\mathrm{rev}}_{A,B}} & \\ & & & A\otimes B & & & \end{array}$$

那么 $(\mathcal{C}\ \beta^{\mathrm{rev}}, v^{\mathrm{rev}})$ 仍是一个交错的 *Gray* 幺半群。我们称 v^{rev} 为 $(\mathcal{C}\ \beta)$上与 ζ 相关联的反向 *syllepsis*。

证明. 利用 Cra98 定义 4.1] 中塞尔莱对称的等价定义，计算会更容易。这里，Cra98 定义 4.1] 中的方程（4.1）对于 $(\mathcal{C}\ \beta^{\mathrm{rev}}, v^{\mathrm{rev}})$ 成立，是因为 Cra98 定义 4.1] 中的方程（4.2）对于 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 成立，反之亦然。□

注 3.15. 设 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 是一个交错的 Gray 幺半群。修正 v 也可以等价地视为一个伪自然等价 $z_{A,B}\colon \rho_{A,B}\to \rho^{\mathrm{rev}}_{A,B}$，其定义为 $z_{A,B} := v_{A,B} * \rho^{\mathrm{rev}}_{A,B}$，例如参见 Cra98 第 4] 节。在此等价下，反向 syllepsis $v^{\mathrm{rev}}_{A,B}$ 对应于水平逆 $z^{-1_h}_{B,A}$。

最后，为了后续使用，我们记录如下事实：带有幺半结构的伪自然等价的逆，也可以赋予典范的逆幺半结构。

引理 3.16. 设 *C* 和 *D* 是 *Gray* 幺半群，且 $F, G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是幺半 *2*-函子。设 $(\theta, \theta_2, \theta_0)\colon F\to G$ 是一个幺半伪自然等价。那么 $(\theta^{-1}, \theta_2^{-1_h}, \theta_0^{-1_h})\colon F\to G$ 也是一个幺半伪自然等价。它在从 *C* 到 *D* 的幺半 *2*-函子的 *2*-范畴中定义了 $(\theta, \theta_2, \theta_0)$ 的逆 [DS97，第107]。

证明。 直接计算即可。 □

3.2. **Gray 幺半群的典范同伦论。** 我们考虑 2-范畴与 2-函子构成的范畴 2-Cat，并赋予它 Lack 引入的典范模型结构 [Lac02]。我们回顾 loc. cit. 中的结果：典范包含 2-Cat $\to$ BiCat 关于 BiCat 上的典范模型结构是一个右 Quillen 等价 [Lac04]。因此它诱导出一个等价

$$\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{BiCat}) \tag{34}$$

底层 ∞-范畴。这意味着从同伦论的角度来看，我们也可以用 2-范畴和 2-函子取代双范畴和双函子。更准确地说，Ho∞(2-Cat) 的对象是余纤维化 2-范畴 $\mathcal{C}$，态射 $f\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是它们之间的 2-函子。给定一个 2-范畴$\mathcal{C}$，它在 2-Cat 中的路径对象 $[E,\mathcal{C}]_{\mathrm{Gr}}$ 由其与伴随等价的步行对象$E\in$ 2-Cat [Lac04]的 Gray 指数对象给出。由此可知，2-胞

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D} & & \\ & \nearrow^{f} & \phi & \searrow^{g} & \\ \mathcal{C} & & \xrightarrow[h]{} & & \mathcal{E} \end{array}$$

在 Ho∞(2-Cat) 中是伪自然等价 $\phi\colon gf\to h$，而 3-胞相应地是可逆修改。Ho∞(2-Cat) 是一个 3-范畴 [Lur09，第 2.3 节。4]，因此所有维数为 >3 的胞都由其边界唯一确定。

备注 3.17. 正如 [Lac07], 所观察到的，2-范畴、2-函子、伪自然变换和修正构成的三范畴，与双范畴、伪函子、伪自然变换和修正构成的三范畴并不三等价。这是因为 2-范畴之间存在一些伪函子，它们并不等价于 2-函子（具有相同的定义域和陪域）。不过，有两种方法（左方法和右方法）可以解决这一差异：可以通过考虑 2-范畴之间的所有伪函子来扩充 2-Cat，也可以将 2-Cat 限制为余纤维化 2-范畴构成的满子三范畴。第一种解决方法遵循备注 3.3 中已提及的方案。第二种解决方法则源于这样一个事实：当定义域是

余纤维化时，伪函子与 2-函子一致。正是后一种解决方法隐含地带来了 3-范畴的等价（34）。同样的“右”原则也适用于幺半双范畴三范畴和余纤维化 Gray 幺半群三范畴，这正是我们下面许多论证在概念上得以成立的原因。

我们进一步回顾 [Lac02]：Gray $=$ (2-Cat $\otimes_{\mathrm{Gr}}$) 是一个幺半模型范畴。令 GrMon 表示 Gray 幺半群及（严格）Gray 幺半 2-函子所构成的范畴。它是 Gray 上自由幺半群单子的代数范畴，因此带有如下（单子）伴随。

$$\mathrm{GrMon} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} 2\text{-Cat} \tag{35}$$

命题 3.18。伴随 *(35)* 使得可以将 2-*Cat* 上的 *Gray* 张量积提升为GrMon 上的幺半结构，从而使遗忘函子 U 成为对称幺半函子。

证明。例如，由于 Gray 是对称幺半范畴，这可直接由 [Ste26, 定理 3.4.(2).(a)]，得出。□

命题 3.19。伴随 *(35)* 使得可以将 2-*Cat* 上的典范模型结构转移到 GrMon上的模型结构，使得GrMon 中的态射 f 是（平凡）纤维化，当且仅当 $U(f)$在2-*Cat* 中是（平凡）纤维化。

证明。要构造这个模型结构，只需证明幺半模型范畴 Gray 满足幺半群公理 [SS00，定义 3.3，定理 4.1]。这一点已由 [Lac02，定理 7.7] 证明。□

注 3.20。命题 3.19 中 GrMon 上的模型结构，是 Lack 在 Gray 范畴范畴上所构造模型结构 [Lac11] 的单对象版本。

It 记录伴随 (3 的以下附加同伦性质将很有用 5).

引理 3.21。遗忘函子

$$U\colon \mathrm{GrMon} \to 2\text{-}Cat$$

保余纤维化对象，也保余纤维化对象之间的余纤维化。

证明。这直接由 [SS00，定理 4.1.(3)] 得出。□

特别地，两个余纤维 Gray 幺半群的提升的 Gray 张量积$\mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{D}$（由命题 3.19.1 得到）的底层 2-范畴是余纤维 2-范畴。特别地，余纤维 Gray 幺半群的幂$\mathcal{C}^{\otimes^n}{}_{\mathrm{Gr}}$ 是余纤维 2-范畴。

为了理解通过形式方法得到的 ∞-范畴 Ho$_\infty$(GrMon)，我们陈述以下引理，它将其精确刻画为 Ho$_\infty$(2-Cat) 中 E_1-幺半群的 ∞-范畴。

引理 3.22. 遗忘函子 $U\colon \mathrm{GrMon} \to 2$-*Cat* 诱导出一个右伴随

$$\mathrm{Ho}_\infty(U)\colon \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon}) \to \mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}Cat)$$

它提升为一个等价

$$\mathrm{Ho}_\infty(U)\colon \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}Cat)^\times). \tag{36}$$

证明。作为一个模型范畴的底层 ∞-范畴，∞-范畴 Ho$_\infty$(2-Cat) 拥有所有小极限。Ho$_\infty$(2-Cat) 上由幺半模型范畴 Gray 诱导的幺半结构是笛卡尔积，这是通过自然的逐点平凡纤维化 $\otimes_{\mathrm{Gr}} \to \times$ in 2-Cat [BG17] 给出的。因此，该陈述直接由 [Lur17 的整直化定理（定理 4.1.8）得出，4] 因为所有条件均已满足。□

推论 3.23。复合 $\mathrm{GrMon} \xrightarrow{U} 2$-*Cat* $\xrightarrow{\iota}\mathrm{BiCat}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon})^\times \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{BiCat})^\times).$$

笛卡尔幺半 *Cat*-范畴。

□

为了从1 ∞-范畴的角度研究第3节中的二维代数，必须注意到，Gray 幺半群上的全弱编织、对称编织和对称性都是等价不变的概念。特别地，给定一个 Gray 幺半群$\mathcal{C}$，不失一般性，我们可以考虑它在 GrMon 中的余纤维替换 $\mathbb{L}\mathcal{C} \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} \mathcal{C}$ 。

L引理 3.24。 设 C 是一个 *Gray* 幺半群，且 $p\colon \mathbb{L}C \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} C$ 是 GrMo 中的一个余纤维替换 n.

(1) 那么，C 上的每个（半严格/全弱）编织 β 都可以提升为 $\mathbb{L}C$ 上本质唯一的（半严格/全弱）编织 $\mathbb{L}\beta$，使得 $p(\mathbb{L}\beta) = \beta$。*(2)* C 上编织 β 的每个 *syllepsis* ζ 都可以提升为 $\mathbb{L}\beta$ 上唯一的 *syllepsis* $\mathbb{L}\zeta$，使得 $\mathbb{L}(C)$ 且$p(\mathbb{L}\zeta) = \zeta$。*(3)* C 上编织 β 的 *syllepsis* ζ 是对称的，当且仅当 $\mathbb{L}(C)$ 上 $\mathbb{L}\beta$ 的 *syllepsis* $\mathbb{L}\zeta$ 是对称的。

证明。 这直接源于以下事实： p 是一个（严格）Gray 函子，并且 2-Cat 中的平凡纤维化既是满射，又是局部满射且全忠实。□

在下一节中，直接用 2-范畴上的相关双范畴幺半结构来理解 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times)$ 中的数据将很有帮助。因此，我们回顾第 2 节的结论：对称幺半 3-范畴中的 E_1-代数 A 由其底层的拟幺 A_5-代数唯一确定。也就是说，E_1-代数本质上是如下形式的图表

$$I \xrightarrow[u]{} A \underset{1\otimes u}{\overset{u\otimes 1}{\leftarrow\!m\!-}} A^{\otimes 2} \underset{m\otimes 1}{\overset{1\otimes m}{\leftleftarrows}} A^{\otimes 3} \underset{1\otimes 1\otimes m}{\overset{m\otimes 1\otimes 1}{\leftleftarrows\!1\otimes m\otimes 1\!\rightleftarrows}} A^{\otimes 4} \equiv\!\equiv\!\equiv A^{\otimes 5}\ . \tag{37}$$

特别地，Gray 幺半群 A 是幺半 1-范畴 Gray 中的一个幺半群，因此本质上具有如下形式

$$I \xrightarrow[u]{} A \underset{1\otimes u}{\overset{u\otimes 1}{\leftarrow\!m\!-}} A \otimes_{\mathrm{Gr}} A \underset{m\otimes 1}{\overset{1\otimes m}{\leftleftarrows}} A \otimes_{\mathrm{Gr}} A \otimes_{\mathrm{Gr}} A$$

位于 2-Cat 中。这个图表可以直接扩充为 Gray 中的拟幺 A_5-结构。通过 Ho_∞(2-Cat) 中的等价 $\otimes_{\mathrm{Gr}} \xrightarrow{\simeq} \times$，等价 (36) 将一个余纤维 Gray 幺半群 A 映射到 $\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times$ 中与之相关的图表 (37)。给定两个余纤维 Gray 幺半群 A和 B，$\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times)$ 中的一个态射$f\colon U(A) \to U(B)$（在等价意义下）由如下形式的图表唯一确定

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes_{\mathrm{Gr}} A \otimes_{\mathrm{Gr}} A & & \xrightarrow{(f,f,f)} & & B \otimes_{\mathrm{Gr}} B \otimes_{\mathrm{Gr}} B \\
{\scriptstyle 1\otimes m}\downarrow\downarrow{\scriptstyle m\otimes 1} & & \omega & & {\scriptstyle 1\otimes m}\downarrow\downarrow{\scriptstyle m\otimes 1} \\
A \otimes_{\mathrm{Gr}} A & & \xrightarrow{(f,f)} & & B \otimes_{\mathrm{Gr}} B \\
\otimes\downarrow & & \chi & & \otimes\downarrow \\
A & & \xrightarrow{\quad f\quad} & & B \\
u\uparrow & & \iota & & u\uparrow \\
* & & = & & *
\end{array} \tag{38}$$

它以显而易见的方式扩展为 $(f,\ f,\ f,\ f)\colon A^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4} \to B^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}$。这一扩张是命题性的，因此可由一组相应的方程见证。根据引理 2.29，扩展到五次幂（进而到所有其他幂）是平凡的。

注 3.25。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为余纤维 Gray 幺半群。由上文可知，幺半 2-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 这一概念介于 E_1-幺半群态射与拟单位 A_4-幺半群态射之间，并且与两者等价。可以明确地说，它们是带有指定拟单位元的 A_4-幺半群的态射。

只要 A 和 B 在 GrMon 中是余纤维化的，Gray 幂 $A^{\otimes_{\mathrm{Gr}}n}$ 和 $B^{\otimes_{\mathrm{Gr}}n}$ 就是余纤维化 2-范畴。因此，$\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times)$ 中一个态射 $F\colon U(A) \to U(B)$ 的数据，便产生了如下数据：

¯一个幺半 2-函子。反过来，每个幺半 2-函子 F 都可以沿着等价 (36) 提升为一个 Gray 函子 $F\colon A \to B^{-}$，使得 $U(F) \simeq F$。这纯粹是同一表示结果的同伦论实现；在低维单子理论中，这类结果十分典型且广为人知，其实现方式是相应的代数余纤维替换 [Gar10]。事实上，根据上述推理可知，余纤维化 Gray 幺半群之间的幺半 2-函子具有过多的结构：由于准幺性蕴含幺性，幺半 2-函子的高阶幺性定律可以不予说明。更确切地说，见证该 2-函子的左幺性和右幺性的自然等价κ 和 ζ，以及结合子ω 与 κ 和 ζ 的相容性，都可以推导出来。事实上，幺性定律可以选为平凡的，正如下列引理序列所示。

引理 3.26。设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Gray* 幺半群，且包含 $* \to \mathcal{C}$ 是 *2*-范畴之间的余纤维化（例如，$\mathcal{C}$ 是一个余纤维 *Gray* 幺半群）。那么每个幺半 *2*-函子

$$(f, \chi, \omega, \iota, \zeta, \kappa)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

都等价于一个幺半 *2*-函子 $(f, \chi', \omega', \iota', \zeta', \kappa')$，其中 $\iota' = 1_I$。

证明。态射 $\iota\colon I \to f(I)$ 是 2-Cat 中一个如下形式的交换方块

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\iota} & [E, \mathcal{C}]_{\mathrm{Gr}} \\ {\scriptstyle \{I\}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \wr} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{D} \end{array}$$

。根据引理 3.21，左侧的竖直映射是余纤维化。因此我们得到一个提升 $l\colon \mathcal{C} \to [E, \mathcal{D}]_{\mathrm{Gr}}$。2-函子 $f' := sl\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 将 $\mathcal{C}$ 的单位元 I 映射到 $\mathcal{D}$ 的单位元 I。现在可以沿着 l 将 f 上的幺半结构传递过去，得到幺半结构 $(f',\ \chi',\ \omega',\ 1,\ \zeta',\ \kappa')$，如所述。□

引理 3.27。设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Gray* 幺半群，且包含 $* \to \mathcal{C}$ 是 *2*-范畴中的余纤维化。那么对于任意 *Gray* 幺半群 $\mathcal{D}$，以及任意如下形式的幺半 *2*-函子

$$(f, \chi, \omega, 1, \zeta, \kappa)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

存在一个 *2*-胞 χ' 和一个 *3*-胞 ω'，使得 f 上的恒等映射可扩张为幺半 *2*-函子之间的一个等价 $(f, \chi, \omega, \iota, \zeta, \kappa) \simeq (f, \chi', \omega', 1, 1, 1)$。特别地，对于所有 $A \in \mathcal{C}$，$\chi'_{A,\ I} = \chi'_{I,\ A} = 1_A$。

证明。由于 Gray 是幺半的，因此脉络 $N(\mathcal{C})$ 的 2-粘合映射——即典范包含

$$(* \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C}) \sqcup_{*} (\mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} *) \hookrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C}$$

分别将 A 映射到 $(I,\ A)$ 或 $(A,\ I)$——是 2-Cat 中的余纤维化。给定一个幺半 2-函子 $(f,\ \chi,\ \omega,\ \iota,\ \zeta,\ \kappa)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，伪自然变换 χ、ζ 和 κ 导出如下图表

$$\begin{array}{ccc} (* \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C}) \sqcup_{*} (\mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} *) & \xrightarrow{(\Delta f, \Delta f)} & [E, \mathcal{D}]_{\mathrm{Gr}} \\ \downarrow & \overset{\simeq(\zeta,\kappa)}{\nearrow_{\ulcorner \chi \urcorner}} & \downarrow{\scriptstyle (s,t)} \\ \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} & \xrightarrow[(m(f,f), fm)]{} & \mathcal{D} \times \mathcal{D} \end{array}$$

在 2-Cat 中。这里，外方形和下方三角形都严格交换，而上方三角形的交换则恰好由这对 (ζ, κ) 给出的同伦来实现。事实上，只要 $\iota = 1$，这个同伦就是切片 2-Cat$/\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ 中的一个同伦，因为复合 $(s,t)(\zeta,\kappa)$ 是常值的。这意味着，我们有一个同伦交换三角

$$\begin{array}{ccc} (* \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C}) \sqcup_{*} (\mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} *) & \xrightarrow{(\Delta f,\ \Delta f)} & [E, D]_{\mathrm{Gr}} \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \nearrow_{\ulcorner \chi \urcorner} & \\ \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} & & \end{array}$$

在模型范畴 2-Cat$/\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ 中，其中左侧的垂直映射是余纤维化，右侧的对象是纤维。因此，根据同伦延拓性质，我们可以找到一个同伦

Ξ: $\chi' \simeq \chi$ 在 2-Cat$/\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ 中，使得 $\Xi\iota = (\zeta,\ \kappa)$，并且使得该三角形

$$\begin{array}{ccc} (*\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C})\sqcup_{*}(\mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}*) & \xrightarrow{(\Delta f,\Delta f)} & [E,\mathcal{D}]_{\mathrm{Gr}} \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & \nearrow_{\ulcorner\chi'\urcorner} & \\ \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C} & & \end{array}$$

严格交换。接着，通过将 3-胞 ω 与其边界处相应的 Ξ 实例粘合，定义一个 3-胞 ω'。直接计算可知，$(f,\ \chi',\ \omega',\ 1,\ 1,\ 1)$ 是一个幺半 2-函子，且它与我们最初给定的幺半结构 $(f,\ \chi,\ \omega,\ \iota,\ \zeta,\ \kappa)$ 等价。□

注 3.28。在幺半 1-范畴之间的幺半函子的情形中，同样的约化早已可在 [JS93], 的多个部分找到，尽管其中并未明确说明所采用的方法。

推论 3.29。设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Gray* 幺半群，且包含映射 $*\to\mathcal{C}$ 是 *2*-范畴间的余纤维化。那么，对于乘法上的每个幺半结构 $(\chi,\omega,1,\zeta,\kappa)$

$$m\colon \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C}\to\mathcal{C}$$

存在一个 *2*-胞 χ' 和一个 *3*-胞 ω'，使得 $(m,\chi,\omega,\iota,\zeta,\kappa)\simeq(m,\chi',\omega',1,1,1)$ 作为幺半 *2*-函子相等；此外，伪自然等价 $\chi'_{-,\ I,\ I,\ -}$ 是恒等映射。

证明。由于 Gray 是幺半的，Gray 幺半群的包含 $*\to\mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C}$ 仍是底层 2-范畴的余纤维化。因此我们可以应用引理 3.27，等价地将 $(\chi,\omega,1,\zeta,\kappa)$ 替换为 m 上形如 $(\chi,\omega,1,1,1)$ 的幺半结构。为证明第二个断言，我们可以将幺半结构 $(\chi,\omega,1,1,1)$ 在 m 上沿伪自然等价 $\chi_{-,I,I,-}\colon m\to m$ 迁移如下。

考虑伪自然等价 $\chi_{A,1,1,B}\colon AB\to AB$。我们定义复合伪自然等价

$$\chi'_{A,B,C,D}\colon ABCD\xrightarrow{\chi_{A,1,1,B}\otimes\chi_{C,1,1,D}}ABCD\xrightarrow{\chi_{A,B,C,D}}ACBD\xrightarrow{\chi^{-1}_{AC,1,1,BD}}ACBD,$$

以及修正 $\omega'_{A,B,C,D,E,F}$，其定义为晶须化

$$(\chi_{A,I,I,B}\otimes\chi_{C,I,I,D}\otimes\chi_{E,I,I,F})*\omega_{A,B,C,D,E,F}*\chi_{ACE,1,1,BDF}.$$

于是容易验证 $(\chi',\omega',1,1,1)$ 仍是 m 上的幺半结构，并且 $\chi_{-,1,1,-}\colon m\to m$ 连同恒等映射方块

$$\begin{array}{ccc} ABCD & \xrightarrow{\chi'_{A,B,C,D}} & ACBD \\ {\scriptstyle\chi_{A,1,1,B}\otimes\chi_{C,1,1,D}}\downarrow & 1 & \downarrow{\scriptstyle\chi_{AC,1,1,BD}} \\ ABCD & \xrightarrow[\chi_{A,B,C,D}]{} & ACBD \end{array}$$

以及恒等三角形

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \swarrow\ 1\ \searrow & \\ I & = & I \end{array}$$

依构造定义了一个幺半等价 $(m,\ \chi,\ \omega,\ 1,\ 1,\ 1)\ \simeq(m,\ \chi',\ \omega',\ 1,\ 1,\ 1)$。此外，我们有

$$\chi'_{A,1,1,D}=\chi^{-1}_{A,1,1,D}\circ\chi_{A,1,1,D}\circ(\chi_{A,1,1,1}\otimes\chi_{1,1,1,D})=1.$$

事实上，$\chi_{A,\ 1,\ 1,\ 1}=\chi_{1,\ 1,\ 1,\ A}=1_A$，因为 $\zeta_A=\kappa_A=1_{1_A}$ 同样是依构造得出的。 □

注 3.30。推论 3.29 的证明中所用的传递论证，将乘法 m 上的给定幺半结构替换为伪自然等价 χ，使其满足 $\chi'_{-,\ I,\ I,\ _}=1$，本质上是对注 2.7 后所述的 ∞-范畴结构提升论证的一种代数版本。我们将在下文更频繁地运用这类论证。

对于幺半伪自然等价，也可以证明同样的结论；不过我们并不需要这一点。我们将本节关于 2-范畴上的基本幺半结构及其上的基本高阶代数结构的讨论总结如下。

引理 3.31。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是余纤维 *Gray* 幺半群。那么遗忘函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathcal{C}at)^\times)(U(\mathcal{C}),U(\mathcal{D})) \twoheadrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_4^{\mathrm{qu}}}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathcal{C}at)^\times)(U(\mathcal{C}),U(\mathcal{D})) \tag{39}$$

是一个平凡纤维化。特别地，

(1) 每个幺半 *2*-函子都可以本质上唯一地扩张为相关联的E_1-幺半群在2-$\mathcal{C}at^\times$中的一个态射；反之，每个相关联的E_1-幺半群在2-$\mathcal{C}at^\times$ 中的态射都有一个底层幺半 *2*-函子；*(2)* 两个幺半 *2*-函子 $F,G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 之间的每个幺半伪自然等价，都可以本质上唯一地扩张为相关联的E_1-幺半群态射在$\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathcal{C}at)$中的一个 *2*-胞；反之，每个相关联的$\mathsf{E}_1$-幺半群态射在$\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathcal{C}at)$ 中的 *2*-胞都有一个底层幺半伪自然等价；*(3)* 可逆幺半修正和$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at^\times)$中的 *3*-胞也同样如此。

证明。 映射 (39) 是平凡纤维化这一事实直接由 [Lur17, 推论 4.1.6.17] 和 [Lur17, 定理 5.4.3.5] 得出。因此，对于第 1 部分，只需构造拟幺 A_4-幺半群结构的相应胞腔。此类 1-胞恰好由幺半 2-函子这一概念刻画，此事已在图 (38) 中讨论。第 2 部分和第 3 部分依此类推。□

4. 主定理的证明

在上一节中，我们根据 ∞-范畴 Ho_∞(2-Cat) 中相应的胞腔，刻画了 Gray 幺半群及其间 2-函子上的各种幺半结构概念。本节将结合这一对应关系与第 2 节的结果，证明定理1.1。

记号 4.1。 以下我们将笛卡尔幺半 ∞-范畴 Ho_∞(2-Cat)$^\times$ 简记为 2-Cat$^\times$。在本文的语境中，这种记法不会产生歧义，因为只有当 1-范畴 2-Cat 配备 Gray 张量积时，我们才将其视为对称幺半范畴。此外，我们在记号上将余纤维 Gray 幺半群 A 与其在 2-Cat$^\times$ 中对应的 E_1-幺半群 $U(A)$ 视为相同。

4.1. 编织与 E_2-结构。

本节证明 Gray 幺半群上的编织具有如下刻画。

定理 4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *Gray* 幺半群，$\beta(\mathcal{C})$是 $\mathcal{C}$ 上编织的等价类集合。那么存在一个双射

$$\beta(\mathcal{C}) \cong \pi_0\left(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}\mathcal{C}at^\times) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at^\times)} \{\mathcal{C}\}\right).$$

也就是说，$\mathcal{C}$ 上的每个编织都会在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at^\times)$中诱导出 $\mathcal{C}$ 上本质唯一的E_1-幺半群结构，反之亦然。

我们进一步证明如下相对化结果。

命题 4.3. 设$(\mathcal{C}\ \beta)$ 和$(\mathcal{D}\ \beta)$ 是编织 *Gray* 幺半群，并设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是底层 *Gray* 幺半群之间的一个幺半 *2*-函子。令 $\beta(F)$ 为 F上的编织集合。那么

$$\beta(F) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}\mathcal{C}at^\times)(\mathcal{C},\mathcal{D}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at^\times)(\mathcal{C},\mathcal{D})} \{F\}.$$

也就是说， F上的每个编织都会在$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at)^\times$中诱导出 F 上本质唯一的E_1-幺半群结构，反之亦然。特别地，后者是一个 h-集。

我们将这两个证明拆分为多个部分。

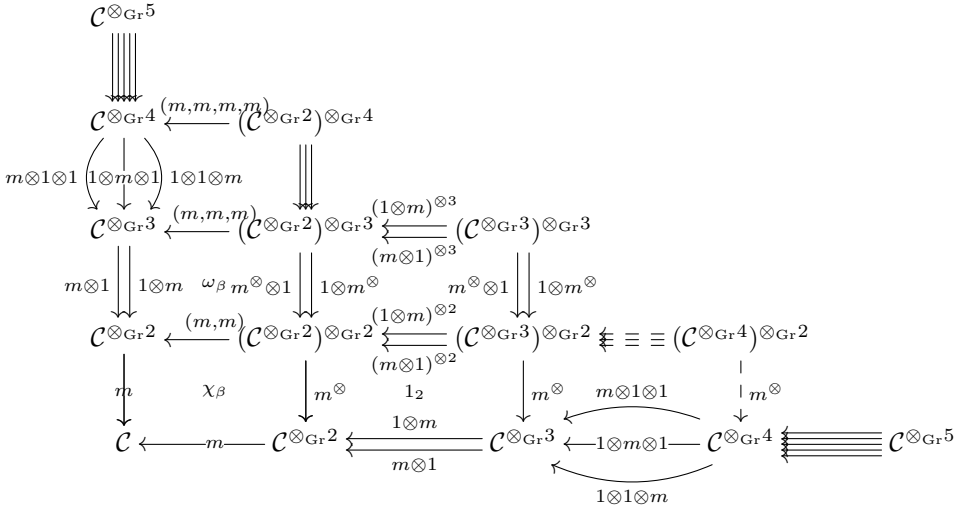
引理 4.4。 设 $\mathcal{C}$ 为 *Gray* 幺半群。那么 $\mathcal{C}$ 上的每个编织 β 都会在E_1-幺半群 $\mathcal{C}^\beta$上诱导出一个$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at)^\times$结构。

证明。 不失一般性，根据引理 3.24，我们可以假设 $\mathcal{C}$ 是余纤维化的。设我们在 $\mathcal{C}$ 上给定了一个编织 $\beta = (\rho, \bar{\omega})$。根据注记 3.11，这在 2-函子上诱导出一个幺半结构

$m\colon \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，使得恒等映射

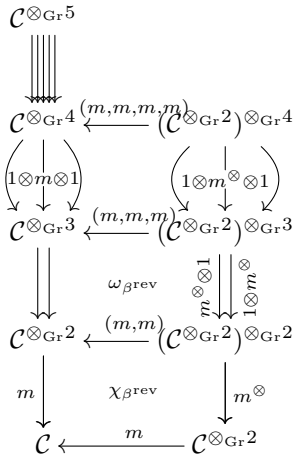
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C} & \xrightarrow{1\otimes_{\mathrm{Gr}} m} & \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C} \\ {\scriptstyle m\otimes_{\mathrm{Gr}}1}\downarrow & 1 & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C} & \xrightarrow[m]{} & \mathcal{C} \end{array}$$

借助 $1_0 = \iota = 1$ 和 $1_2 = (1 \otimes \bar{\omega}^{\mathrm{rev}} \otimes 1)^{\rho}$，它成为一个幺半 2-函子。由引理 3.31，这会在 2-Cat$^{\times}$ 中导出一个由实线箭头构成的图表，以及它们之间相应的胞腔，如下所示。

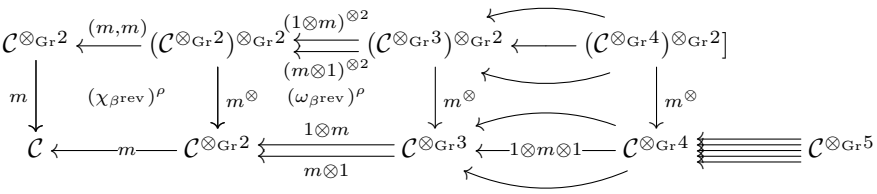


(40)

要将其扩展为$\mathcal{C}$上的非幺元 E_1-结构，根据推论 2.42，只需在 2-Cat$^{\times}$($\mathcal{C}^{\otimes^8{}_{\mathrm{Gr}}}$，$\mathcal{C}$)中用一个 4-胞腔扩展图表的实线部分，从而得到右下方的虚线方框。因此，我们利用截至此处的构造适用于$\mathcal{C}$上的任意编织 β；特别地，它们也适用于与证明开头固定的编织 β 相对应的反向编织 β^{rev}。由此，我们在同一个 2-函子 $m\colon \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 上得到一个幺半结构 $(\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\ \omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})$，它对应于一个 $\mathrm{A}_2^{\mathrm{qu}} \otimes \mathrm{E}_1$- 结构



在 2-Cat$^{\times}$ 中。其对角反射是一个具有以下形式的 $\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{A}_2^{\mathrm{qu}}$ -代数



(41)

根据例 2.26 和胞腔 1_2的定义，这恰好是图表 (40) 中相应部分的底层结构。因此，图表 (40) 和图表 (41) 共同给出了所需的非幺元 E_2-幺半群结构 $\mathcal{C}^\beta$，由推论 2.42 得出。根据引理 2.21，该结构可提升为一个 E_2-幺半群。事实上，其底层的非幺元 E_1-幺半群——即图表 (40) 最左侧的垂直 E_1-幺半群——由 $\mathcal{C}$ 给出，因此是幺元的。它在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^\times)$ 中的水平乘法由幺半 2-函子 $(m,\ \chi_\beta,\ \omega_\beta,\ 1,\ 1,\ 1)$ 给出，其单位元则由反向编织的幺性定律经过对角反射得到。□

注记 4.5. 为进一步说明反向编织在引理 4.4 证明中的作用，我们强调这里主要用到了它的两个性质。首先，我们用到编织的反向 β^{rev} 本身确实是编织 β；其次，β^{rev} 的对角反射的底层 $\mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}}$-幺半群结构，恰好就是 β 本身的底层 $\mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}}$-幺半群结构。举例来说，如果我们天真地要求 β 自身的对角反射的底层 $\mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}}$-幺半群结构等价于 β 的底层 $\mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathrm{A}_2^{\mathrm{nu}}$-幺半群结构，我们要求的便是一个等价

$$\chi_\beta \xrightarrow{\simeq} \chi_\beta^{-1}(\sigma^*_{\langle 2\rangle,\langle 2\rangle})(-)).$$

也就是说，等价地，要求一个自然等价 $u_{A,\ B}\colon \rho_{A,\ B} \to \rho^{-1}_{B\ A,\ }$。这意味着我们要求的是 syllepsis 的底层修改，而这当然通常并不存在。

为提取出 $2\text{-}\mathrm{Cat}^\times$ 中一般 E_2-幺半群的编织，我们进行一系列半严格化 s.

引理 4.6. 设 C 是一个余纤维 *Gray* 幺半群。设 C^+ 是 C 在$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathit{Cat}^\times)$中的一个$\mathsf{E}_1$-幺半群结构，其来自推论 *2.42* 的底层图 *(29)* 满足以下方程：

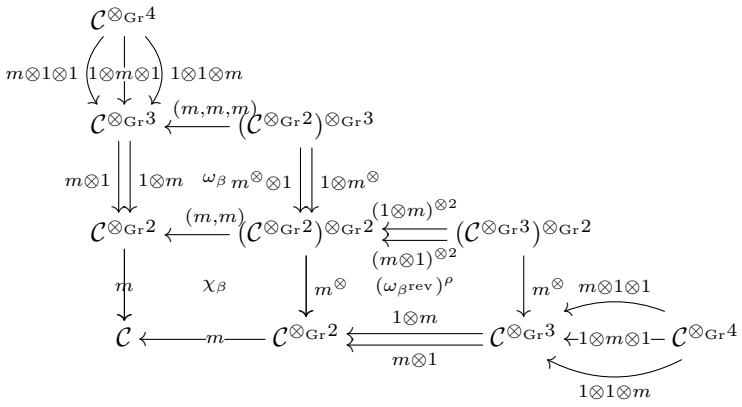
(1) $U(C^+) = \mathit{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)(C^+) = C$, *(2)* $\chi_{I,I,_,_} = \chi_{_,_,I,I,_} = 1$, *(3)* $\omega_{_,_,I,I,_,_} = \omega_{_,I,I,_,_,_} = \omega_{_,_,_,I,I,_} = 1$, *(4)* $\psi_{_,I,_,_,I,_} = 1$.

则该元组

- $\rho_{A,B} := \chi_{I,A,B,I_}$
- $\omega_{A,B,C,D} := \omega_{I,A,B,C,D,I}$

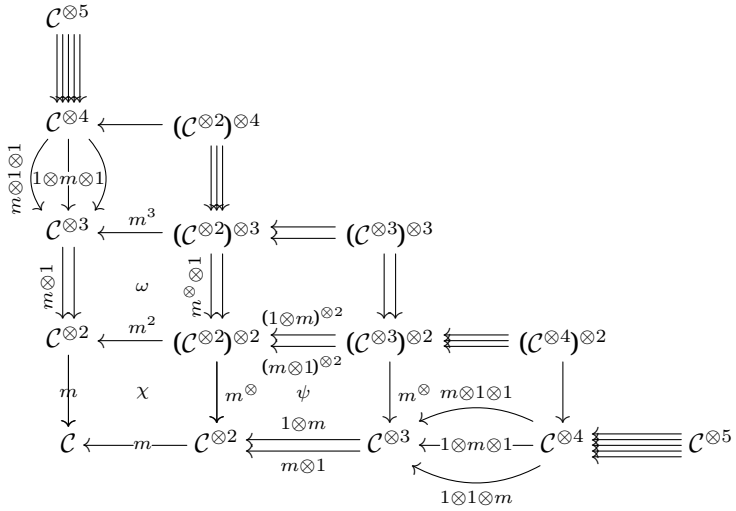
定义了 C 上的一个编织 β，使得 C 上的恒等映射延拓为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathit{Cat}^\times)$ 中的一个等价 $C^\beta \simeq C^+$。任意两个等价的此类 E_1-幺半结构诱导等价的编织。

证明。为了证明 $\beta := (\rho,\ \bar{\omega})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的编织，我们需要证明 $\bar{\omega}$ 满足结合律，并验证两个 Young–Baxter胞 $r_{_,\ _|_} = \bar{\omega}_{_,\ I,\ _,\ _}$ 与 $r_{_|_,\ _} == \bar{\omega}_{_,\ _,\ I,\ _}$之间的关系式。因此，根据推论 2.42，只需证明诱导出的图表



(42)

恰好是该图表中相应的部分



(43)

与我们起初给定的$\mathcal{C}$ 上的 E_1-幺半群 $\mathcal{C}^+$ 相关。鉴于此，根据假设，图（42）可以扩展为$\mathcal{C}$ 上的一个满的 E_1-幺半结构。特别地，乘法 $(m,\ \chi_\beta,\ \omega_\beta):\mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C}\to\mathcal{C}$是幺半的，并且根据引理 3.31，伪自然等价 $(\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})^\rho:\ m(m\otimes_{\mathrm{Gr}}1)\to m(1\otimes_{\mathrm{Gr}}m)$ 也是幺半的。根据 [DS97，第 117 页-118]，可知 β是$\mathcal{C}$上的一种编织。此外，根据推论 2.42，$\mathcal{C}$ 上的恒等映射自动扩展为$\mathcal{C}^\beta\simeq\mathcal{C}^+$ 之间的一个等价。显然，该构造会将 E_1-幺半结构之间的等价映射为编织之间的等价。

为证明 (42) 与 (43) 相等，我们需要证明

$$\text{i. }\chi_{\beta A,B,C,D}:=1_A\otimes\rho_{B,C}\otimes1_D:=1_A\otimes\chi_{I,B,C,I}\otimes1_D=\chi_{A,B,C,D};\ \text{ii. }\omega_{\beta A,B,C,D,E,F}:=1_A\otimes\bar{\omega}_{B,C,D,E}\otimes1_F:=1_A\otimes\omega_{I,B,C,D,E,I}\otimes1_F=\omega_{A,B,C,D,E,F};\ \text{以及 iii. }\psi_{\beta A,B,C,D,E,F}:=(\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})_{A,B,C,D,E,F}:=(1\otimes\bar{\omega}^{\mathrm{rev}}\otimes1)_{A,B,C,D,E,F}=\omega_{A,B,C,D,E,F},$$

其中，在最后一种情况下，我们回顾记号 3.10。首先证明，引理假设中的方程 (1)-(4) 蕴含 i. 和 ii. 确实，$\omega_{-,I,I,-,-,-}=1$ 以及 $\chi_{-,I,I,-}=1$ 共同直接推出$\chi_{A,B,C,D}=1_A\otimes\chi_{I,B,C,D}$。类似地，由 $\omega_{-,-,-,I,I,-}=1$ 可得到 $\chi_{A,B,C,D}=1_A\otimes\chi_{I,B,C,I}\otimes1_D$。同理可证明

$$\omega=1\otimes\omega_{I,-,-,-,-,-} \tag{44}$$

同样成立。更确切地说，胞腔 ω 是一个 $\mathrm{E}_1\otimes\mathrm{E}_1$-幺半群结构的一部分，因此单位元 I 也是 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}($2-Cat$^\times$) 中的一个水平单位。这意味着

$$\omega_{-,I,-,I,-,I}=\omega_{I,-,I,-,I,-}=1$$

成立。由此我们计算得到

$$\begin{aligned}\omega_{A,I,C,D,E,F}&=\omega_{A,I,C,I,E,DF}\\&=(\omega_{A,I,C,I,E,I}\otimes1_{DF})*\omega_{A,I,CE,I,I,DF}\\&=1*1\end{aligned}$$

对 C 中的所有 A、C、D、E、F 都成立。这里，第一个等式是 ω 对元组 (A,I,C,I,I,D,E,F) 的结合律，第二个等式则是对 (A,I,C,I,E,I,I,DF) 再次应用结合律。再对 ω 应用一次结合律，令 $B=C=1$，即可得到（44）。类似地可以证明

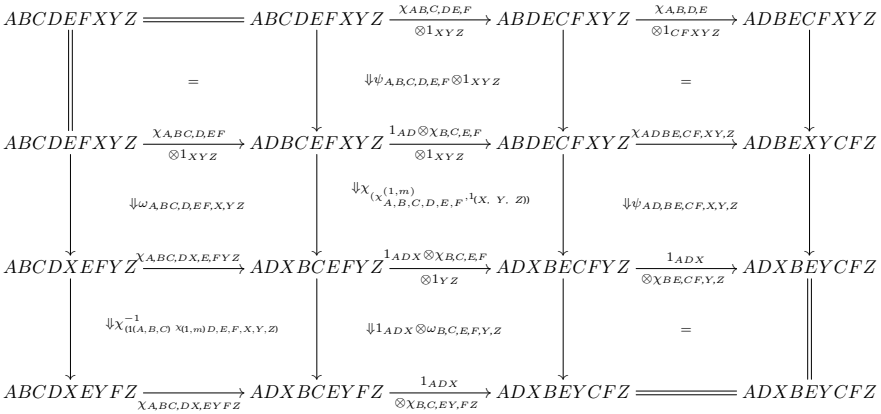
$$\omega_{A,B,C,D,1,F}=1$$

对 C 中的所有 A，B，C，D，F 同样成立。随后，计算可得

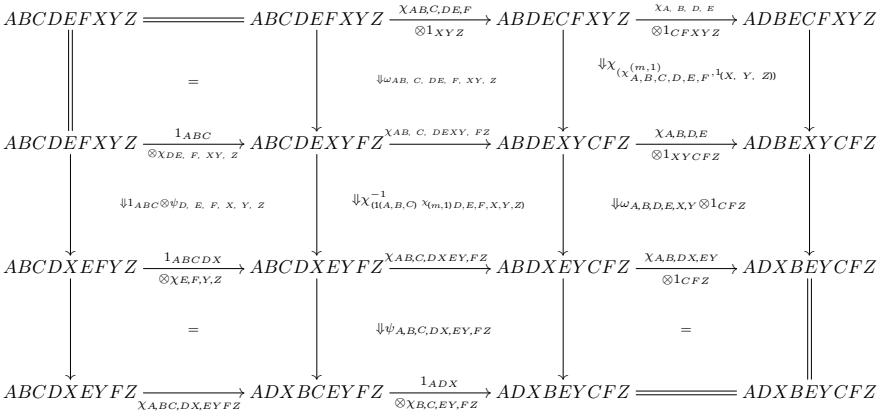
$$\begin{aligned}\omega_{A,B,C,D,E,F}&=1_A\otimes\omega_{I,B,C,D,E,F}\\&=1_A\otimes\omega_{A,B,C,D,E,I}\otimes1_F\end{aligned} \tag{45}$$

和之前一样。因此，我们已经证明了 $\chi=\chi_\beta$ 和 $\omega=\omega_\beta$。接下来只需证明 iii。

因此，我们考察图（43）中的 4-胞腔，它始于 $(\mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}^3}})^{\otimes_{\mathrm{Gr}^3}}$。它表示以下两个自然粘贴的 2-胞之间的等式。



$$\Vert \tag{46}$$



由此，我们来证明$\psi = 1 \otimes \psi_{I,-,-,-,-,I} \otimes 1$ 同样成立。我们利用如下断言。

断言 4.7. 在给定假设下，方程

$$\psi_{-,I,I,I,-,-} = 1 \tag{47}$$

也成立。

我们将该断言的证明推迟到最后，现在先假设它成立。于是，为了重用我们已经完成的一些计算，我们可以改为考察 C^+ 的对角反射，因此假设 $\psi = 1 \otimes \psi_{I,-,-,-,-,I} \otimes 1$，以便改为证明 $\omega = 1 \otimes \omega_{I,-,-,-,-,I} \otimes 1$。那么，两个方程 $\psi_{-,I,-,-,I,-} = \psi_{-,I,I,I,-,-} = 1$ 就转化为如下假设：

$$\begin{aligned} &\omega(-,-,I,I,-,-) = 1, \text{ and} \\ &\omega(-,I,I,-,I,-) = 1. \end{aligned} \tag{48}$$

由这两个方程以及用于 E_2-幺半群 $(\mathcal{C}^+)^\rho$ 的图 (46)，可得

- $\omega_{A,I,I,F,Y,Z} = \omega_{A,I,I,F,I,YZ}$ 和 $\omega_{A,B,D,I,I,Z} = \omega_{AB,I,D,I,I,Z}$ 分别由 (46) 在 $B,C,D,E,X = 1$ 和 $C,E,F,X,Y = 1$ 的情况下得到；
- $\omega_{A,\ I,\ E,\ I,\ I,\ Z} = \omega_{A,\ I,\ I,\ E,\ I,\ Z}$ 由（46）可得 $B,\ C,\ D,\ F,\ X,\ Y = 1$。

特别地，根据假设（48），所有这些胞腔都是退化的。由上文关于（44）和（45）的计算可知，

$$\omega = 1 \otimes \omega_{I,-,-,-,-,I} \otimes 1.$$

这反过来意味着，$\psi = 1 \otimes \psi_{I,\ -,\ -,\ -,\ -,\ I} \otimes 1$ 以及 $\omega = 1 \otimes \omega_{I,\ -,\ -,\ -,\ -,\ I} \otimes 1$ 在$\mathcal{C}^+$本身中也成立。现在，对于$\mathcal{C}^+$，由此可得

- $\psi_{A,I,C,D,Y,Z} = \omega^{-1_v}_{A,C,D,I,Y,Z}$ by (46) with $B, E, F, X = 1$, and
- $\psi_{A,B,F,X,I,Z} = \omega^{-1_v}_{A,B,I,F,X,Z}$ by (46) with $C, D, E, Y = 1$.

此外，胞腔 ω （连同 $D = E = 1$）的结合律表明

$$\omega_{A,B,C,F,G,H} = (1_A \otimes \omega_{I,B,C,I,G,I} \otimes 1_{FH}) * (1_{AC} \otimes \omega_{I,B,I,F,G,I} \otimes 1_H).$$

进而，胞腔 ψ 的（水平）结合律表明

$$\psi_{A,B,C,D,E,F} = (1_{AD} \otimes \psi_{I,I,C,B,E,I} \otimes 1_F) * (1_A \otimes \psi_{I,B,E,D,I,I} \otimes 1_{CF}).$$

综合以上，最终可得

$$\psi_{A,B,C,D,E,F} = (1_{AB} \otimes \omega^{-1_v}_{I,C,D,I,E,I} \otimes 1_F) * (1_A \otimes \omega^{-1_v}_{I,B,I,C,D,I} \otimes 1_{EF}).$$

因此，胞腔 ψ 确实正是记号 3.10 中所定义的胞腔 $(1 \otimes \bar{\omega}^{\mathrm{rev}} \otimes 1)^\rho$。这意味着，通过延拓 $\mathcal{C}$ 上的恒等映射，可将 $\mathcal{C}^+ \simeq (\mathcal{C}\ \beta)$ 视为 E_2-幺半群，此即所要证明的。至此，证明在断言 4.7 的前提下完成。

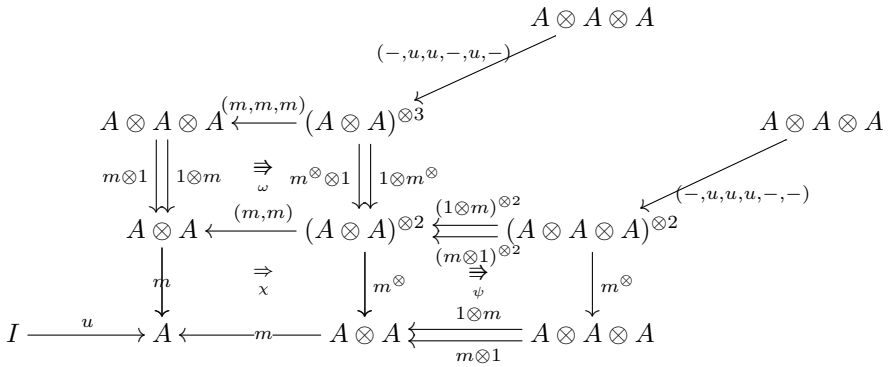
断言 4.7 的证明。由定义，$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^\times)$ 中的 E_1-幺半群 $\mathcal{C}^+$ 是一个代数

$$\mathcal{C}^+ \colon \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \to 2\text{-}\mathrm{Cat}^\times.$$

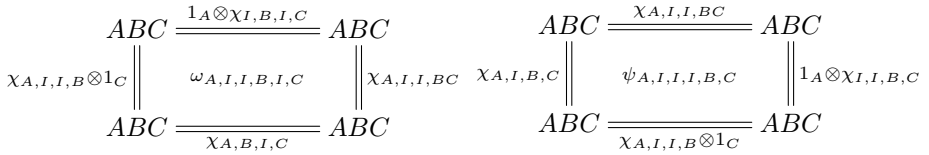
根据可加性定理，比较映射 $\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2$ 是 ∞-代数的一个等价。特别地，对于每个 $n \geq 0$，所诱导的函子

$$\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle) \to \mathsf{E}_2(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$$

n-元运算的函子是空间的一个等价。进而，空间 $\mathsf{E}_2(n, 1)$等价于构形空间 $\mathsf{C}_n(\mathbb{R}^2)$，即 $\mathbb{R}^2$ [中含有 n 个点的构形空间，见 Lur17，引理 5.1.1.3]。后者由[FN62，推论 2.1]知是 1-截断的。因此，空间 $\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1(n, 1)$同样是 1-截断的。此外，为简便起见，考虑幺半包络 $y^\otimes$：$\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \to \mathrm{Env}(\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1)^\otimes$ [，见 Lur17，第 2.2 节.4]函子 $y^\otimes$ 是满忠实的，见 Lur17，注记 2.2.4.10], 因此，包络 $\mathrm{Env}(\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1)^\otimes$在 $y^\otimes$ 像中的对象上仍然是局部 1-截断的。代数 C^+ 经过嵌入$y^\otimes$分解：$\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1 \to \mathrm{Env}(\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1)^\otimes$。因此，它是对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Env}(\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1)^\otimes$中的 $\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1$-代数 $y^\otimes$ 的后合成。由于嵌入 $\mathsf{E}_1 \sqcup_{\mathsf{E}_0} \mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1$ 也是余纤维化，我们不妨假设两个 E_1-代数 $U(y^\otimes)$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(y^\otimes)$ 重合。让我们考虑该代数在 $\mathrm{Env}(\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1)^\otimes$中的以下初始段：



通过粘合这两个复合 3-胞（$-,\ u,\ u,\ -,\ u,\ -$）$* \omega$和（$-,\ u,\ u,\ u,\ -,\ -$）$* \psi$，并配以适当的一组垂直和水平单位子，它们都会在同态空间 $\mathrm{Env}(\mathsf{E}_1 \otimes_{\mathrm{BV}} \mathsf{E}_1)^\otimes(A^{\otimes 3},\ A)$中生成一个具有相同边界的复合 2-胞。由于 A 属于 $y^\otimes$的像，因此这两个复合 2-胞必然等价。由于所有单位子经$\mathcal{C}^+$ 映射后，在 $2\text{-}\mathrm{Cat}^\times$中都是恒等态射，且 $2\text{-}\mathrm{Cat}^\times$是一个 3-范畴，我们看到它们由自然 2-胞给出的像



(49)

必然相同。因此，由于左边是恒等映射，右边也必然如此。这就证明了该断言。

□

注记 4.8。下面的引理 4.11 将以 Gray 幺半群 C 上一般的 E_1-幺半群结构为输入，并输出 C 上一个等价的 E_1-幺半群结构，该结构经过半严格化，从而满足引理 4.6 的假设。特别地，它将给出乘法 2-函子 $m\colon \mathsf{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathsf{C}\to\mathsf{C}$ 上一个经过半严格化的幺半结构 $(1\otimes\chi_{I,-,-,I}\otimes 1, 1\otimes\omega_{I,-,-,-,-,I}\otimes 1, 1, 1, 1)$，并保证恒等 $1\colon m(m\otimes 1)\to m(1\otimes m)$ 上的底层幺半结构 $(\psi, 1)$ 满足一条额外的半严格幺性律。由断言 4.7 可知，这一过程也会自动将相应的水平结合子 ψ 半严格化，具体而言，$\psi = 1\otimes\psi_{I,-,-,-,-,I}\otimes 1$。我们的论证完全基于同伦论，其核心是利用胞 $\psi_{-,I,I,I,-,-}$ 与 $\omega_{-,I,I,-,I,-}$ 位于同一个方程空间中。这个空间是可缩的，而后一个胞按构造已知为恒等映射。这一策略本质上正是 [Gur11, 定理 15] 所采用的方法。显然，我们应该也能用代数方法证明这一点；然而，作者徒劳地尝试手工证明。因此值得指出的是，维数 2 中的代数相当复杂，而其构形空间的同伦论在相关维数中却是平凡的。相较之下，维数 3 中的代数可以手工处理（见下一节），而其相应构形空间的同伦论则相当复杂 [Gur11, 第4228], [FN62, 推论 2.1]。

引理 4.9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有编织 β 的 *Gray* 幺半群。令 $\mathcal{C}^{\beta}$ 为引理 *4.4* 中 $\mathcal{C}$ 在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at^{\times})$ 中的 E_1-幺半群结构。那么 $\mathcal{C}^{\beta}$ 满足引理 *4.6* 的条件。引理 *4.6* 中从 $\mathcal{C}^{\beta}$ 得到的 $\mathcal{C}$ 上的编织等于 β。

证明。设 $\mathcal{C}$ 是一个带有编织 β 的 Gray 幺半群，并令 $\mathbb{L}\beta$ 为通过引理 3.24 在余纤维替换 $\mathbb{L}\mathcal{C}$ 上与 $\mathcal{C}$ 相关联的编织。E_1-幺半群$\mathcal{C}^{\beta}$ 按定义由 $(\mathbb{L}\mathcal{C}\ \mathbb{L}\beta)$ 构造而成；它由图 (40) 中相应的 $\chi_{\mathbb{L}\beta}$ 和 $\omega_{\mathbb{L}\beta}$ 给出。根据定义，引理 4.6 的假设均得到满足。引理 4.6 的证明中在 $\mathcal{C}$ 上构造编织，恰好恢复 $\mathbb{L}\beta$。沿 Gray 函子 $\mathbb{L}\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 推前后，这也恰好恢复 β。□

注 4.10. 我们始终只考虑半严格编织，从而大幅减少计算量。再多做一些工作，便可以将注记 3.11 推广，证明每个全弱编织都会在 Gray 幺半群的乘法上诱导一个幺半结构，使得当恒等映射配备由全弱反向编织的对角反射给出的 3-胞时，它便成为幺半的。相应地，可以对全弱编织证明引理 4.4。由于引理 4.6 总是给出一个半严格编织，因此可以改述引理 4.9，证明每个全弱编织都等价于某个半严格编织。这为 [Gur11, 推论 28], 提供了另一种证明；我们正是利用该结果，以方便地论证将讨论约化到半严格编织。

我们还需证明，Gray 幺半范畴$\mathcal{C}$ 上的每个 E_1-幺半结构都等价于一个满足引理 4.6 额外假设的结构。通过对$\mathcal{C}$作余纤维化替换，可以不失一般性地假设$\mathcal{C}$ 是余纤维化的。

引理 4.11. 设 $\mathcal{C}$ 是一个余纤维 *Gray* 幺半群。设 $\mathcal{C}^{+}$ 是 $\mathcal{C}$ 上在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathcal{C}at^{\times})$中的一个 E_1-幺半群结构。那么，$\mathcal{C}$ 上的恒等映射可以延拓为 $\mathcal{C}^{+}$ 与一个 E_1-幺半群结构 $\mathcal{C}^{-}$ 之间的等价，使得后者满足引理 *4.4* 中的方程 *(1)-(4)*。

证明. 设 $\mathcal{C}^{+}$ 是一个 E_1-幺半群结构。不失一般性，我们还可以假设，其底层水平 E_1-幺半群结构 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(U)(\mathcal{C}^{+})$也由其自身的底层垂直 E_1-幺半群结构 $U(\mathcal{C}^{+}) = \mathcal{C}$ 给出。因此，根据推论 2.42，E_2-幺半群 $\mathcal{C}^{+}$ 由其在 $2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times}$ 中的底层图表决定，该图表具有形式 (43)。

$$\mathcal{C} \xleftarrow{m_-} \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} \underset{m\otimes 1}{\overset{1\otimes m}{\leftleftarrows}} \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}3} \tag{50}$$

对于 m $\mathcal{C}$ 的乘法 2-函子以及恒等结合子。由引理 3.31，胞（χ, ω）是2-函子 $m\colon \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 上幺半结构（$\chi, \omega, \iota, \zeta, \kappa$）的一部分，该2-函子表示$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times})$中(50)里的乘法 m。

态射 $\iota\colon\ I \to m(I,I)$是（幺元的）水平$\mathsf{E}_1$-幺半群(50)的一部分——因而由其决定。由此可得 $\iota = 1_I$。因此，由引理 3.27，我们可以假定 $\zeta = \kappa = 1$ ，并且同样假定$\chi_{-,I,I,-} = 1$ 。(50)中的恒等映射1：$m(m\otimes 1) \xrightarrow{\simeq} m(1\otimes m)$配备了由结合子3-胞 ψ 和单位子2-胞 1_0给出的幺半结构。后者再次是恒等映射 1_{1_I}，因为它由Gray 幺半群$\mathcal{C}$ 本身所给出的水平（幺元的）E_1-幺半群(50)所决定。由此还得出以下方程：

- $\chi_{I,\ I,\ -,\ -} = \chi_{-,\ -,\ I,\ I} = 1$ 和 $\omega_{-,\ -,\ I,\ I,\ -,\ -} = 1$，因为 $\zeta = \kappa = 1$;
- $\omega_{I,\ I,\ -,\ -,\ -,\ -} = \omega_{-,\ -,\ -,\ -,\ I,\ I} = 1$ 由 $\omega_{-,\ -,\ I,\ I,\ -,\ -} = 1$ 以及 ω [DS97，第 104] 页，分别针对 $A = B = C = D = 1$ 和 $E = F = G = H = 1$的结合律；

我们首先通过将与水平结合子 ψ 相关联的水平单位子也严格化，来满足关于该水平结合子的假设（4）。因此，我们注意到，C^+ 的水平 E_1-幺半群结构——由形如（43）的图表表示——包含一对水平单位子 $\zeta^h\colon \chi_{I,-,I,-} \to 1$和 $\kappa^h\colon \chi_{-,I,-,I} \to 1$，属于 $\mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^\times)$。根据引理 3.31，这两个等价分别对应于从复合幺半 2-自函子 $m(-,I)$（以及 $m(I,-)$）到 C 上幺半单位 (1, 1, 1, 1, 1, 1) 的幺半伪自然等价。前者是幺半 2-函子 $(1,\chi_{I,-,I,-}, 1, 1, 1, 1)$（以及 $(1,\chi_{-,I,-,I}, 1, 1, 1, 1)$），这是由 $\omega_{I,-,I,-,I,-} = \omega_{-,I,-,I,-,I} = 1$ 以及幺半 2-函子 m 上幺半结构的严格幺元选择所致。特别地，由此可得

$$\zeta^h_{-,I} = \zeta^h_{I,-} = \kappa^h_{I,-} = \kappa^h_{-,I} = 1. \tag{51}$$

我们想要证明，这两个水平单位子也可以完全替换为恒等态射。因此，为了简化起见，我们暂时可以考虑对角反射 $(\mathcal{C}^+)^\rho$。这里，

i. we still have $\iota^\rho = \iota = 1_I$, and
ii. $\chi^\rho_{-,I,I,-} = \chi^\rho_{I,-,I,-} = \chi^\rho_{-,I,-,I} = 1$, but
iii. $\psi^\rho_{-,I,-,-,I,-} = 1$,

而不对 ω^ρ 作任何假设。我们想要将 m 上的幺半结构（χ^ρ，ω^ρ，ζ^ρ，κ^ρ，1）替换为某种形式为（$(\chi^\rho)^u$，$(\omega^\rho)^u$，1，1，1）的幺半结构，并通过适当的幺半伪自然等价（θ，θ_2，θ_0）实现，使得 i.、ii. 和 iii. 仍然成立。因此，我们考虑伪自然等价

$$\begin{array}{c} {\scriptstyle (\chi^\rho)^{-1}_{A,B,I,I}\otimes (\chi^\rho)^{-1}_{I,I,C,D}} \\ ABCD \quad \Downarrow (\zeta^\rho)^{-1h}_{A,B}\otimes (\kappa^\rho)^{-1h}_{C,D} \quad ABCD, \end{array}$$

并注意到$\zeta^\rho_{-,I} = \zeta^\rho_{I,-} = \kappa^\rho_{I,-} = \kappa^\rho_{-,I} = 1$ 由 (51) 得。我们考虑由恒等映射 1 给出的诱导伪自然等价θ: $m \to m$，以及修正

$$\begin{array}{ccc} ABCD & \xrightarrow{((\chi^\rho)^{-1}_{A,B,I,I}\otimes(\chi^\rho)^{-1}_{I,I,C,D})*\chi^\rho_{A,B,C,D}} & ACBD \\ {\scriptstyle 1_{AB}\otimes 1_{CD}}\downarrow & \Downarrow\theta_2 & \downarrow{\scriptstyle 1_{ACBD}} \\ ABCD & \xrightarrow[\chi^\rho_{A,B,C,D}]{} & ACBD \end{array} \tag{52}$$

for

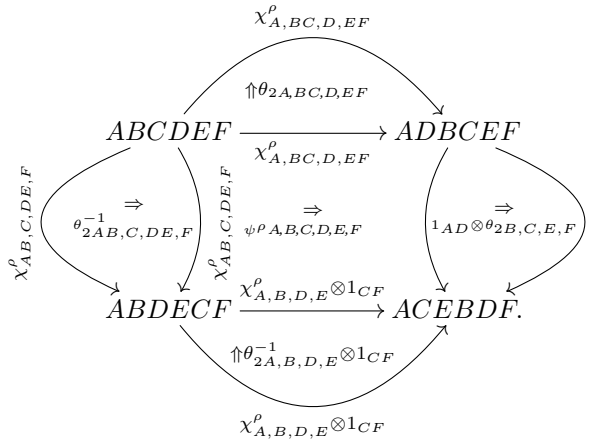
$$\theta_2 := \chi^\rho_{A,B,C,D} * \left((\zeta^\rho)^{-1}_{A,B}\otimes(\kappa^\rho)^{-1}_{C,D}\right),$$

以及 θ_0 恒等单位子。用 $(1,\theta_2,1_I)$ 对 $(\chi^\rho,\omega^\rho,\zeta^\rho,\kappa^\rho,1)$ 作共轭，得到一个等价的幺半结构 $((\chi^\rho)^u,(\omega^\rho)^u,1,1,1)$，其中 $(\chi^\rho)^u_{A,B,C,D} = (\chi^{-1}_{A},{}_{B,I,I}\otimes\chi^{-1}_{I\ I},{}_{C,D})*\chi^\rho_{A,B,C,D}$。特别地，$(\omega^\rho)^u_{-,-,I,I,-,-} = 1$ 和

$$(\chi^\rho)^u_{I,I,-,-} = (\chi^\rho)^u_{-,-,I,I} = (\chi^\rho)^u_{-,I,I,-} = (\chi^\rho)^u_{-,I,-,I} = (\chi^\rho)^u_{I,-,I,-} = 1.$$

这进一步在 $\mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^\times)$ 中为$\mathcal{C}$ 定义了一个新的、但等价的 E_1-结构，它等价于 $(\mathcal{C}^+)^\rho$。其底层的水平结合子 $(\psi^\rho)^u$ ——为恒等映射 1：$m(m\otimes 1) \to$定义了一个幺半结构。

$m(1 \otimes m)$——由共轭给出，如下所示。



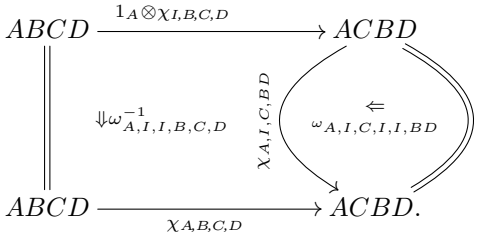
计算可得 $\theta_{2I,A,I,B} = \theta_{2A,I,B,I} = 1$，因此 $(\psi^{\rho})^{u}_{_,I,-,-,I,_} = 1$，假设 $\psi^{\rho}{}_{_,I,-,-,I,_} = 1$。于是，进而得到一个 E_1-幺半群结构$\mathcal{C}^+$，定义在$\mathcal{C}$ 上，该结构等价于我们最初得到的结构，并且满足

- $\chi_{I,I,-,-} = \chi_{-,-,I,I} = 1$;
- $\omega_{-,-,I,I,-,-} = \omega_{I,I,-,-,-,-} = \omega_{-,-,-,-,I,I} = 1$;
- $\psi(-,I,-,-,I,-) = \psi(I,-,-,I,-,-) = \psi(-,-,I,-,-,I) = 1$, because $\omega^{\rho}{}_{-,-,I,I,-,-} = 1$ by the above;
- $\chi^{-1}_{I,-,I,-} * \psi(-,I,I,-,I,I)\colon \chi_{I,-,I,-} \simeq 1$ and $\chi^{-1}_{-,I,-,I} * \psi(I,I,-,I,I,-)\colon \chi_{-,I,-,I} \simeq 1$; thus $\chi_{I,-,I,-} = \chi_{-,I,-,I} = 1$.

利用这些方程，我们可以在 m 上定义一系列新的（更严格但等价的）幺半结构，以如下方式满足引理 4.6 的假设 (3)。考虑由恒等映射 1 给出的伪自然等价 $\theta\colon m \to m$，以及修正

$$\begin{array}{ccc} ABCD & \xrightarrow{1_A\otimes\chi_{I,B,C,D}} & ACBD \\ {\scriptstyle 1_{AB}\otimes 1_{CD}}\downarrow & \Downarrow\theta_2 & \downarrow{\scriptstyle 1_{ACBD}} \\ ABCD & \xrightarrow[\chi_{A,B,C,D}]{} & ACBD \end{array} \tag{53}$$

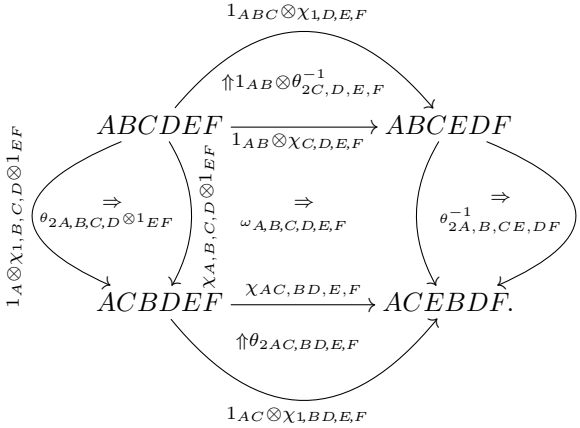
定义为以下粘合:



设 $\theta_0 := 1_{1_I}$。定义自然2-胞

$$\begin{array}{ccc} ABCDEF & \longrightarrow & ACBDEF \\ \downarrow & \omega^{l}_{A,B,C,D,E,F} \Rightarrow & \downarrow \\ ACBDEF & \longrightarrow & ACEBDF \end{array} \tag{54}$$

通过与 θ_2 共轭 ω （注 3.30）。也就是说，我们将 (54) 定义为以下粘贴图表:



于是可得，$(1\otimes\chi_{I,\,-,\,-,\,-},\ \omega^l,\ 1,\ 1,\ 1)$ 是 m 上的一个幺半结构，而 $(1,\ \theta_2,\ \theta_0)$ 是从 $(m,\ \chi,\ \omega,\ 1,\ 1,\ 1)$ 到 $(m,\ 1\otimes\chi_{I,\,-,\,-,\,-},\ \omega^l,\ 1,\ 1,\ 1)$ 的幺半伪自然等价。

对于伪自然等价 $\theta\colon\ m\to m$，我们再重复一次同样的操作，其中该等价由恒等映射 1 给出，并配以修正

$$\begin{array}{ccc} ABCD & \xrightarrow{1_A\otimes\chi_{I,B,C,I}\otimes 1_D} & ACBD \\ {\scriptstyle 1_{AB}\otimes 1_{CD}}\downarrow & \Downarrow\omega^l_{A,B,C,I,I,D} & \downarrow{\scriptstyle 1_{ACBD}} \\ ABCD & \xrightarrow[1_A\otimes\chi_{I,B,C,D}]{} & ACBD \end{array} \tag{55}$$

对于 θ_2，再次有 $\theta_0 := 1_{1_I}$。我们定义自然2-胞

$$\begin{array}{ccc} ABCDEF & \xrightarrow{1_A\otimes\chi_{I,B,C,I}\otimes 1_{DEF}} & ACBDEF \\ {\scriptstyle 1_{ABC}\otimes\chi_{I,D,E,I}\otimes 1_F}\downarrow & \omega^{lr}_{A,B,C,D,E,F}\ \Rightarrow & \downarrow{\scriptstyle 1_{AC}\otimes\chi_{I,BD,E,I}\otimes 1_F} \\ ACBDEF & \xrightarrow[1_A\otimes\chi_{I,B,CE,I}\otimes 1_{DF}]{} & ACEBDF \end{array} \tag{56}$$

通过 θ_2 对 ω^l 的共轭（注 3.30）。由此再次可得，$(1\otimes\chi_{I,-,-,I}\otimes 1,\omega^{lr},1,1,1)$ 是 m 上的一个幺半结构，并且 $(1,\theta_2,1)$ 是从 $(m,1\otimes\chi_{I,-,-,-},\omega^l,1,1,1)$ 到 $(m,1\otimes\chi_{I,-,-,I}\otimes 1,\omega^{lr},1,1,1)$ 的一个幺半伪自然等价。

根据构造，这个幺半结构满足引理 4.6 的假设（2）。结合子 ω^{lr} 满足假设 (3)，这一点通过直接计算即可得出；事实上，ω^l_{-}、$-$、I、I、$-$、$_{-}=1$ 成立，是因为 ω_{-}、$-$、I、I、$-$、$_{-}=1$ 成立，而 ω^l_{-}、I、I、$-$、$-$、$_{-}=1$ 则根据构造成立。接着，替换 ω^{lr} 处理了右侧。要证明假设（4）成立，我们注意到它根据构造在 C^+ 中成立。要证明经过两次替换后它仍然成立，只需证明对应的两个幺半伪自然等价 $(1,\theta_2,1)$ 满足 θ_{2I}、$_A$、$_I$、$_B=\theta_{2A}$、$_I$、$_B$、$_I=1$。这是显然的。因此，我们在 C 上得到一个等价的 E_1-幺半群结构，它满足引理 4.6 的所有假设。□

注记 4.12。 定理 4.2 可以看作是 Joyal–Street 将编织幺半范畴刻画为带有乘法的幺半范畴（例 2.41）这一结果的类比。这里值得注意的是，Joyal 和 Street 对编织的定义是由以下复合给出的

$$\rho_{A,B}\colon A\otimes B\xrightarrow{\chi_{I,A,B,I}} B\otimes A\xrightarrow{\chi^{-1}_{B,I,I,A}} B\otimes A$$

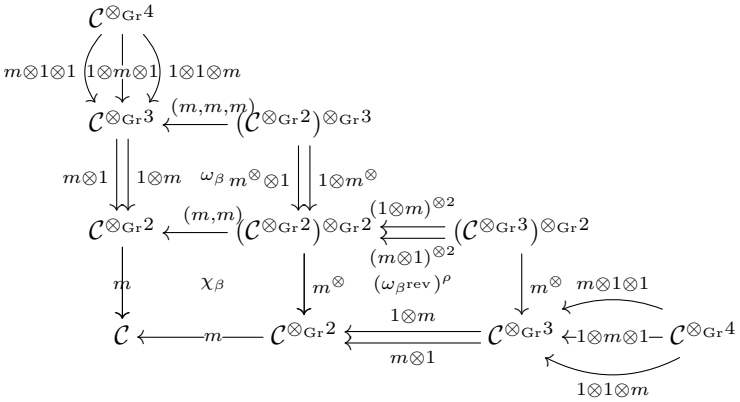
而非仅通过态射 $\chi_{I,\,A,\,B,\,I}$。在引理 4.6 的证明中，借助额外方程 $\chi_{-,\,I,\,I,\,-}=1$，修正项 $\chi^{-1}_{B\,I\,,,I,\,A}$ 变得多余。这个额外方程是通过采用引理 3.27 所给出的余纤维 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 上的一般 E_1-幺半结构的替代形式而施加的。若要直接用 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 上的 E_1-幺半结构所关联的编织来定义

表示其乘法 m上的底层幺半结构 $(\chi,\ \omega,\ \iota,\ \zeta,\ \kappa)$，那么这个修正项就会再次出现。

这就证明了定理 4.2。命题 4.3 的证明在方法上非常相似。

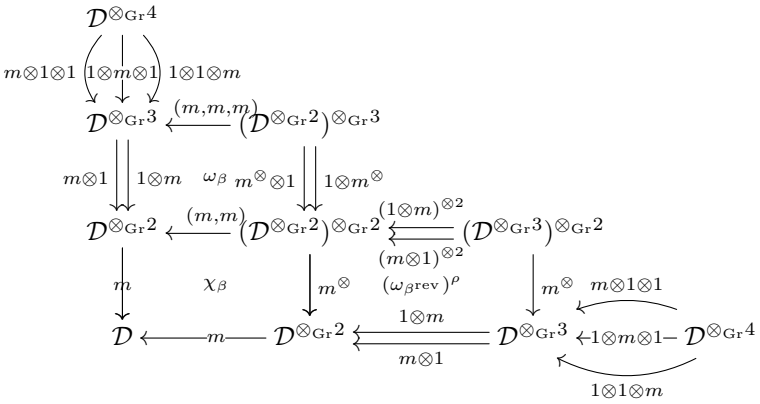
引理 4.13。 设$(C\ \beta)$和$(D\ \beta)$是编织 *Gray* 幺半群，并设 $F\colon C\ \to D$ 是底层 *Gray* 幺半群之间的一个幺半 *2*-函子。令 $f\colon C\ \to D$ 为引理 *3.31* 中关联的 E_1-幺半群在2-*Cat*$^\times$ 中的态射。令 C^+ 和 D^+ 为定理 *4.2* 中关联的E_2-幺半群在2-*Cat*$^\times$ 中。于是， F上的每个编织都可延拓为一个E_2-幺半群的态射 $f^+\colon C^+\to D^+$。

证明。 不失一般性，设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是余纤维化的。根据引理 2.32，要将 f 延拓为 E_2-幺半群的态射，只需给出从该图表出发的一个态射



(57)

到图表



(58)

左侧竖轴上的那个由 f 给出。如 [DS97, p.125], 所述， F =$(f,\chi,\omega,1,1,1)$ 上的每个编织 u 都会在 2-胞 χ 上诱导一个幺半结构 $(\chi_2,1)$，该结构相对于 C 和 D 的两个乘法 m_β 上的幺半结构，而后者由它们各自的编织诱导。由引理 3.31，$(\chi_2,1)$ 这一对确定了两个乘法 m_β 之间的自然等价，且它们是 E_1-幺半群的态射。这又意味着，我们得到了 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}$(2-Cat$^\times$) 中非幺元 A_2-幺半群之间的一个态射（分别对应于 (57) 和 (58) 中左侧的两个竖直块）。为了将这个态射扩展到整个两个图表，我们采用与引理 4.4 相同的技巧：带编织的幺半 2-函子 $(F,u)\colon(\mathrm{C}\ \beta)\ \to(\mathrm{D}\ \beta)$ 由引理 3.13 诱导出一个典范的反向辫幺半 2-函子 $(F,u^{\mathrm{rev}})\colon(\mathrm{C}\ \beta^{\mathrm{rev}})\ \to(\mathrm{D}\ \beta^{\mathrm{rev}})$。由此诱导的态射 $f^{\mathrm{rev}}\colon(\mathrm{C}\ \chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})\ \to(\mathrm{D}\ \chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})$，作为诱导的 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathsf{E}_1$-幺半群之间的态射，诱导出一个对角反射 $(f^{\mathrm{rev}})^\rho\colon\colon(\mathrm{C}\ \chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})^\rho\to(\mathrm{D}\ \chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})^\rho$。根据 DS97, p.125], 中给出的、由 u^{rev} 在 [上诱导的 χ 上的幺半结构 χ_2^{rev} 的显式公式，不难计算得出

$$(\chi_2^{\mathrm{rev}})_{A,B,C,D}=(\chi_2^{-1_h})_{A,C,B,D}.$$

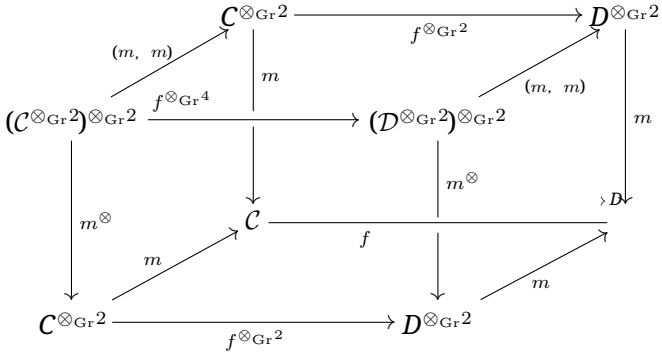
这里，我们将 χ_2 视为如下形式的自然2-胞

$$\begin{array}{ccc} f(A)f(B)f(C)f(D) & \xrightarrow{1\otimes\rho_{f(B),f(C)}\otimes 1} & f(A)f(C)f(B)f(D) \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{A,B}\otimes\chi_{C,D}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{A,C}\otimes\chi_{B,D}} \\ f(AB)f(CD) & \overset{\Rightarrow}{\underset{\chi_2}{}} & f(AC)f(BD) \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{AB,CD}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{AC,BD}} \\ f(ABCD) & \xrightarrow[f(1\otimes\rho_{B,C}\otimes 1)]{} & f(ACBD) \end{array}$$

这意味着，水平块 $(f^{\mathrm{rev}})^{\rho}$ 与 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$ 上的 f 重合。因此，借助例 2.26，它将非幺元的 A_2-幺半群态射 f 延拓为从 (57) 到 (58) 的态射。由此便得到一个如上所述的非幺元 E_2-幺半群态射。幺性同样由引理 2.21 得出。□

引理 4.14. 设$(\mathcal{C},\ \beta)$ 和$(D,\ \beta)$ 是编织 *Gray* 幺半群，且 $F\colon \mathcal{C}\ \to D$ 是一个幺半 *2*-函子。设 $f\colon \mathcal{C}\ \to D$ 是引理 *3.31* 中关联的 *2-Cat*$^{\times}$ 内的 E_1-幺半群态射。假设$f^{+}\colon (\mathcal{C}^{+},\beta)\ \to (D^{+},\beta)$ 是关联的 E_2-幺半群的一个态射，且延拓了 f。那么，关于 $\mathcal{C}$ 和 D 上给定的编织，在f 上存在一个编织。

证明。 不失一般性，我们可以假设$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 是余纤维化的。由引理 3.27，我们还可以进一步假设 $F\colon \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$ 是一个形如 $(f,\chi,\omega,1,1,1)$ 的幺半 2-函子，因此它满足退化幺律。态射 $f^{+}\colon (\mathcal{C}\ \beta)\ \to(\mathcal{D}\ \beta)$ 伴有一个形如 χ_2 的 3-胞



(59)

其后面和底面均为 χ （通过引理 2.14），其左面和右面分别是与$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$上的编织相关联的 2-胞 $\chi_\beta = 1\otimes\rho\otimes 1$，其前面和顶面则由 χ 的相应积给出。对于$\mathcal{C}$中的每个对象元组 $(A,\ B,\ C,\ D)$，这对应于如下形式的自然 2-胞

$$\begin{array}{ccccc} f(A)f(B)f(C)f(D) & \xrightarrow{1_{f(A)}\otimes\rho_{f(B),f(C)}\otimes 1_{f(D)}} & f(A)f(C)f(B)f(D) & \xrightarrow{\chi_{A,C}\otimes\chi_{B,D}} & f(AC)f(BD) \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{A,B}\otimes\chi_{C,D}} & & \overset{\Rightarrow}{\underset{\chi_{2A,B,C,D}}{}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{AC,BD}} \\ f(AB)f(CD) & \xrightarrow[\chi_{AB,CD}]{} & f(ABCD) & \xrightarrow[f(1_A\otimes\rho_{B,C}\otimes 1_D)]{} & f(ACBD). \end{array} \tag{60}$$

它赋予伪自然等价

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C} & \xrightarrow{f\otimes_{\mathrm{Gr}}f} & \mathcal{D}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{D} \\ \downarrow{\scriptstyle m} & \Downarrow\chi_2 & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{D} \end{array} \tag{61}$$

连同恒等映射 $\chi_0 := 1_{1_I}\colon\ 1_I\ \to 1_I$，其具有符合 [DS97，定义 3] 所述意义的幺半结构。在构造相应的 syllepsis 之前，我们再次对

$(\chi,\ \chi_2,\ 1)$。因此，我们沿着自然2-胞传递幺半结构 $(\chi_2,\ 1)$

$$f(A)f(B)\ \underset{\chi_{A,B}}{\overset{\chi_{A,B}}{\Rightarrow}}\ f(AB) \tag{62}$$

定义一个新的自然2-胞 χ_2'，它由共轭给出

$$\begin{array}{ccccc} f(A)f(B)f(C)f(D) & \xrightarrow{1_{f(A)}\otimes\rho_{f(B),f(C)}\otimes 1_{f(D)}} & f(A)f(C)f(B)f(D) & \xrightarrow{\chi_{A,C}\otimes\chi_{B,D}} & f(AC)f(BD) \\ {\scriptstyle \chi_{A,B}\otimes\chi_{C,D}}\searrow \ \Rightarrow_{\chi_{2A,I,I,B}\otimes\chi_{2C,I,I,D}}\ \swarrow{\scriptstyle \chi_{A,B}\otimes\chi_{C,D}} & & \Rightarrow_{\chi_{2A,B,C,D}} & & {\scriptstyle \chi_{AC,BD}}\searrow \ \Rightarrow_{\chi_{2AC,I,I,BD}^{-1}}\ \swarrow{\scriptstyle \chi_{AC,BD}} \\ f(AB)f(CD) & \xrightarrow[\chi_{AB,CD}]{} & f(ABCD) & \xrightarrow[f(1_A\otimes\rho_{B,C}\otimes 1_D)]{} & f(ACBD). \end{array} \tag{63}$$

那么 $(\chi,\chi_2',1)$ 定义了一个幺半伪自然等价，而根据构造，(62) 按照 [DS97, Definition 3] 定义了幺半伪自然等价 $(\chi,\chi_2,1)$ 与 $(\chi,\chi_2',1)$ 之间的可逆幺半修正。由引理 3.31，后者因此可以（唯一地）扩展为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^\times)$ 中的一个3-胞。

现在，只要 $A=D=I$，图表（63）就是一个自然2-胞

$$\begin{array}{ccc} f(B)f(C) & \xrightarrow{\rho_{f(B),f(C)}} & f(C)f(B) \\ {\scriptstyle \chi_{B,C}}\downarrow & \Rightarrow_{\chi_2(I,A,B,I)} & \downarrow{\scriptstyle \chi_{C,B}} \\ f(BC) & \xrightarrow[f(\rho_{B,C})]{} & f(CB). \end{array}$$

我们声称 $u_{A,B}:=\chi_2(I,A,B,I)$ 是 F 上的一个编织。为证明这一点，我们只需验证所需的两个方程。因此，在引理4.16中，我们将再次看到，由元组 (F,u) 经由引理 4.13 诱导出的形式为 (59) 的3-胞（即与 u 在 [DS97, p.125]上给出的 χ_2^u 相关联的粘合3-胞）恰好就是自然2-胞（63）。这意味着，$(\chi,\chi_2^u,1)$ 是一个幺半伪自然等价。根据 [DS97, p.125]，可知 u 是 F上的一个编织。 □

引理 4.15. 设$(\mathcal{C},\ \beta)$ 和$(\mathcal{D},\ \beta)$ 是编织 *Gray* 幺半群，并设 $f\colon \mathcal{C}\ \to \mathcal{D}$ 是底层 *Gray* 幺半群之间的幺半 *2*-函子。那么空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}Cat^\times)(\mathcal{C},\mathcal{D})\times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}Cat^\times)(\mathcal{C},\mathcal{D})}\{f\}. \tag{64}$$

由 f 的 E_2-幺半扩张构成的集合是一个 h-集合。

证明. 这直接由 $n=3$ 和 $k=1$ 的推论 2.36 得出。 □

引理 4.16. 引理 *4.13* 和引理 *4.14* 中的两个构造互为逆函数，且定义在 *h*-集合之间。

证明. 首先，我们可以将问题约化到余纤维 Gray 幺半群$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 以及严格幺元的幺半 2-函子$F\colon \mathcal{C}\ \to \mathcal{D}$的情形。若从 F 上的编织 u 出发，直接计算可得$\chi_2^u(I,A,B,I)\ =\ u(A,B)$。这里用到了假设条件 $\chi_{-,I}\ =\ \chi_{I,-}\ =\ 1$，此外还用到了$\omega_{-,I,-}=\omega_{I,-,-}=\omega_{-,-,I}$。这就证明了一个方向。

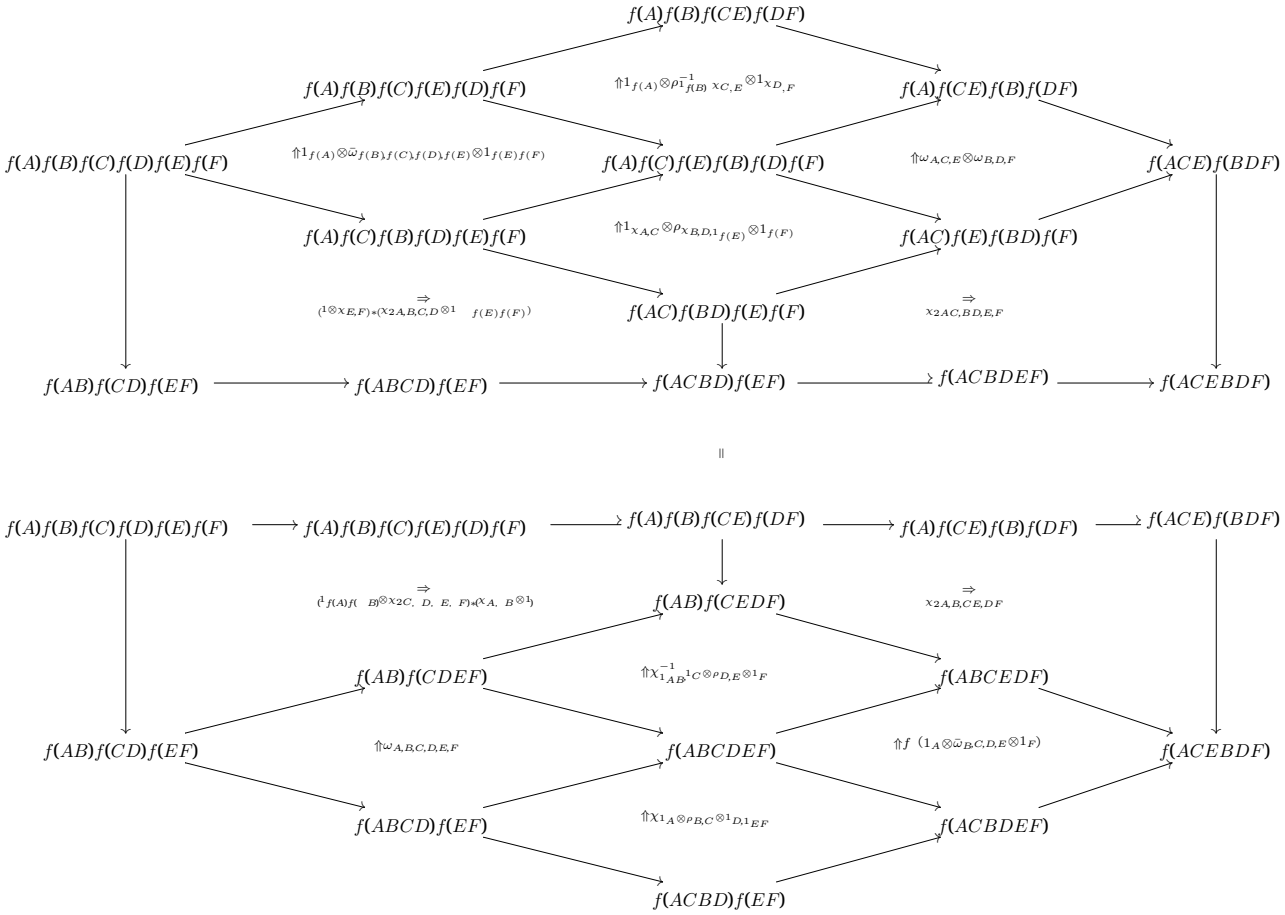
对于反方向，设 $f^+\colon(\mathcal{C}\ \beta)\ \to(\mathcal{D}\ \beta)$ 是一个关联的 E_2-幺半群态射，并延拓$F=(f,\chi,\omega,1,1,1)$。令 $(\chi_2,1)$ 为伪自然等价χ上的底层幺半结构。由此可得

- $\chi_{2I,I,A,B}=\chi_{2A,B,I,I}=\chi_{2A,I,B,I}=\chi_{2I,A,I,B}=1$ by the vertical and horizontal unitality laws.

按照引理 4.14 证明中将 χ_2 替换为 χ_2' 的做法，我们还可以不失一般性地假设

- $\chi_{2A,I,I,B}=1$。

由于 χ_2 是式（61）中伪自然等价 χ 上幺半结构的一部分，因此得到以下自然 2-胞方程:



特别地，我们得到

- $\chi_{2A,\ D,\ E,\ F} = \omega_{A,\ D,\ EF} * (1_A \otimes \chi_{2I,\ D,\ E,\ F}) * \chi_{2A,\ I,\ E,\ DF}$（带有 $B = C = 1$），等等
- $\chi_{2A,D,I,F} = \omega_{A,D,F}$;
- $\chi_{2A,\ B,\ C,\ F} = \omega^{-1}_{AB,\ C,\ F} * (\chi_{2A,\ B,\ C,\ 1} \otimes 1_F) * \chi_{2AC,\ B,\ I,\ F}$，等等
- $\chi_{2A,I,C,F} = \omega^{-1}_{A\ C,,F}$。

将这些结果合并可得

$$\chi_{2A,B,C,D} = \omega_{A,B,CD} * (1_A \otimes \omega^{-1}_{B,C,D}) * (1_A \otimes \chi_{2I,B,C,I} \otimes 1_D) * (1_A \otimes \omega_{C,B,D}) * \omega^{-1}_{A,C,BD}$$

除了我们省略的与伪自然等价χ 相关的自然性方块的两个非平凡情形之外。这恰好是 [DS97, p.125] 上与 $u := \chi_2(I, -, -, I)$ 相关联的胞腔。

这意味着，E_2-幺半群的两个态射 f^+ 和 (F, u) 是 $\mathrm{Alg}_{E_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times})$ 中同一个 3-胞 (59) 的扩张。因此，根据命题 2.32，E_2-幺半群的两个态射 f^+，$(F, u) : (\mathcal{C}\ \beta) \to (\mathcal{D}\ \beta)$ 等价。□

这就证明了命题 4.3。

注 4.17。设$\mathcal{C}$ 是一个 Gray 幺半群。其纤维

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat})^{\times}} \{\mathcal{C}\}$$

根据推论 2.37，这是一个 h-群胚。再做一些工作，便可从上述内容推出，这个群胚等价于按定义 3.5 所给出的$\mathcal{C}$ 上的编织群胚。

4.2. **对称编织与 E_3-结构**。本节证明 braided Gray 幺半群上的 syllepsis 的如下刻画。

定理 4.18。 设 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 是一个编织 *Gray* 幺半群， $\zeta(\mathcal{C}\ \beta)$ 是 $(\mathcal{C}\ \beta)$上 *syllepsis* 的集合。那么存在一个等价

$$\zeta(\mathcal{C},\beta) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(2\text{-}Cat^{\times}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}Cat^{\times})} \{(\mathcal{C},\beta)\}$$

空间。特别是，后者是一个 *h*-集合。也就是说，$(\mathcal{C}\ \beta)$ 上的每个 *syllepsis* 都在 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 上诱导出一个本质唯一的 E_1-幺半群结构，该结构位于 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathrm{Ho}\infty(2\text{-}\boldsymbol{Cat}))^{\times}$ 中；反之亦然。

证明。 设 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 是一个编织 Gray 幺半群，并设 $m\colon \mathcal{C}\otimes_{\mathrm{Gr}}\mathcal{C}\to\mathcal{C}$配备了注记 3.11 中关联的幺半结构 $(\chi_\beta,\omega_\beta)$。不失一般性，假设 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 是余纤维化的。根据 [DS97，第 5], 节，集合 $\zeta(\mathcal{C}\ \beta)$ 与 $(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 上编织的集合 $\beta(m)$ 之间存在双射。根据命题 4.3，后者等价于以下 h-集合

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times})(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times})(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})} \{(m,\chi_\beta,\omega_\beta)\} \tag{65}$$

由 $(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 的 E_2-幺半群扩张构成。我们证明这个 h-集合等价于该空间 e

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}\mathrm{Cat})^{\times}} \{(\mathcal{C},\beta)\}. \tag{66}$$

因此，我们首先注意到，根据推论 2.37，后一个空间确实也是一个 h-集合。现在，首先，任何在 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 上、底层图表为

$$(\mathcal{C},\beta) \leftarrow\!\!-\ (\mathcal{C},\beta)^2 \underset{m'\times 1}{\overset{1\times m'}{\leftleftarrows}} (\mathcal{C},\beta)^3 \underset{1\times 1\times m'}{\overset{m\times 1\times 1}{\leftleftarrows}} (\mathcal{C},\beta)^4$$

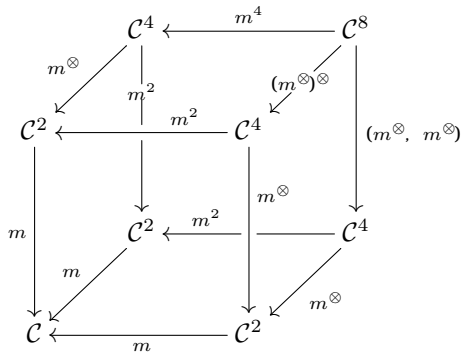
的 E_2-幺半群结构，都可以视为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times})$ 中 $\mathcal{C}$ 上的 E_2-幺半群结构（其底层 E_1-幺半群为 $(\mathcal{C}\ \beta)$）。将命题 2.10 应用于 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^{\times})$ 中的这个 E_2-幺半群，便可（特别地）推出 $m'\simeq(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 是幺半 2-函子。根据假设，态射 m'带有一个扩张，使其成为 E_2-幺半群的态射，因此 $(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 也如此。

反过来，假设给定一个幺半 2-函子 $(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 的 E_2-幺半扩张，或者等价地，给定 $(\mathsf{C}\ \beta)$ 上的一个 syllepsis v 。我们希望将其扩张为 C 上的 E_3-幺半群结构。为说明这一构造的动机，可以将 E_3-幺半群结构 $(\mathsf{C}\ \beta)^v\colon \mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1\to\mathsf{C}$（它扩张了 E_2-幺半群 $(\mathsf{C}\ \beta)$）想象为一个三维（无限延伸的）立方体形图表：它的三条边界棱 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{E}_1\otimes\{1\}\otimes\{1\}}$、$(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\{1\}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\{1\}}$ 和 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\{1\}\otimes\{1\}\otimes\mathsf{E}_1}$ 均由 E_1-幺半群 C 给出；它的三个边界面 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1\otimes\{1\}}$、$(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{E}_1\otimes\{1\}\otimes\mathsf{E}_1}$，和 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\{1\}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1}$ 均由 E_1-幺半群 $(\mathsf{C}\ \beta)$ 给出（根据命题 2.10）。这一假设确定了该立方体的边界，并给出了块 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1}$ 的一个“填充子”。接下来，我们希望将这个块扩张为整个边界 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{L_3(\mathsf{E}_\bullet)}$ 的填充子。基本上，我们采用与引理 4.4 相同的方法：首先，适当地反转由幺半 2-函子 $(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 的 E_2-幺半扩张所给出的块 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1}$ ；然后，沿着适当的对角将其反射；第三，证明由此得到的 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1}$ 块与原块在它们的公共片段 $(\mathsf{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1}$ 上重合。这样便得到第 2.5 节意义下的一个初始段，它可通过命题 2.33 和引理 2.21 扩张为一个满的 E_3-幺半群结构。

更准确地说，幺半 2-函子（m， χ_β， ω_β）的 E_2-幺半群扩张定义了伪自然等价上的幺半结构 χ_2 （不失一般性，$\chi_0=1$）

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m^{\otimes},\chi_\beta^{\otimes},\omega_\beta^{\otimes})} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4} \\ \downarrow{\scriptstyle (m,\chi_\beta,\omega_\beta)} & \Uparrow\chi_\beta & \downarrow{\scriptstyle (m,\chi_\beta,\omega_\beta)^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}} \\ \mathcal{C} & \xleftarrow[(m,\chi_\beta,\omega_\beta)]{} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} \end{array} \tag{67}$$

它扩张为 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 上的非幺元 A_2-幺半群结构，所在范畴为 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\text{2-Cat}^\times)$。这个 A_2-幺半群结构由一个 3-胞给出



(68)

在 $\text{2-Cat}^\times$ 中，它可以以本质上唯一的方式向后方和上方扩张（这两个扩张给出了上文 $(\mathcal{C}\ \beta)^v|_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1}$ 所指的“块”）。其左面、前面和底面都由χ_β给出，对面则是相应的积。作为 $\mathcal{C}$ 中的一个修正，它由一个自然 2-胞给出

$$\begin{array}{ccccc}
A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2 & \xrightarrow{\chi_\beta(\vec{A},\vec{B})\otimes\chi_\beta(\vec{C},\vec{D})} & A_1B_1A_2B_2C_1D_1C_2D_2 & \xrightarrow{\chi_\beta(\vec{A}\otimes\vec{B},\vec{C}\otimes\vec{D})} & A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_\beta(A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2,D_1D_2)} & & \Downarrow\chi_2 & & \downarrow{\scriptstyle \chi_\beta(A_1,B_1,C_1,D_1)\otimes\chi_\beta(A_2,B_2,C_2,D_2)} \\
A_1A_2C_1C_2B_1B_2D_1D_2 & \xrightarrow[\chi_\beta(\vec{A},\vec{C})\otimes\chi_\beta(\vec{B},\vec{D})]{} & A_1C_1A_2C_2B_1D_1B_2D_2 & \xrightarrow[\chi_\beta(\vec{A}\otimes\vec{C},\vec{B}\otimes\vec{D})]{} & A_1C_1B_1D_1A_2C_2B_2D_2,
\end{array}$$

或者用 (68) 来表示,

$$\begin{array}{ccccc}
A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2 & \xrightarrow{\text{back}} & A_1B_1A_2B_2C_1D_1C_2D_2 & \xrightarrow{\text{bottom}} & A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \text{left}} & & \Downarrow\chi_2 & & \downarrow{\scriptstyle \text{right}} \\
A_1A_2C_1C_2B_1B_2D_1D_2 & \xrightarrow[\text{top}]{} & A_1C_1A_2C_2B_1D_1B_2D_2 & \xrightarrow[\text{front}]{} & A_1C_1B_1D_1A_2C_2B_2D_2.
\end{array} \tag{69}$$

要将其扩张为 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 上的 E_1-幺半群结构（位于 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\text{2-Cat}^\times)$ 中）——从而得到 h-集 (66) 的一个元素——只需根据命题 2.33（以及引理 2.21），将其扩张为 $I^{(2)}{}_{(2,\ 1,\ 2)}(\text{2-Cat}^\times)$ 的一个元素。也就是说，给定 $(\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1)$-代数 $\mathsf{A}^{(2,\infty,\infty)}:=(m,\ \chi_\beta,\ \omega_\beta,\ (\chi_\beta)_2)$，它属于 $\text{2-Cat}^\times$，我们要构造一个 $(\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1)$-代数 $\mathsf{A}^{(\infty,2,\infty)}$，使得

(1) $\mathsf{A}^{(2,\infty,\infty)}=\mathsf{A}^{(\infty,2,\infty)}$ on $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1^{\mathrm{nu}}$，并且使得 (2)

$\mathsf{A}^{(\infty,2,\infty)}=(m,\ \chi_\beta,\ \omega_\beta)$ 在 $\mathsf{E}_1^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_0^{\mathrm{nu}}$ 上。[4]

我们通过构造另一个 $(\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1)$-代数 $\mathsf{A}^{\mathrm{rev}}_{(2,\infty,\infty)}$ in $\text{2-Cat}^\times$ 来实现这一点，其（二维）对角反射

$$(-)^{\rho_{x_1}}:\mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^\times))\to\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^\times)) \tag{70}$$

在 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^\times)$ 中计算后，将给出所需的代数 $\mathsf{A}^{(\infty,2,\infty)}$（例 2.27）。为此，可以将幺半伪自然等价 (67) 取逆，从而得到一个伪自然等价

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m^\otimes,\chi_\beta^\otimes,\omega_\beta^\otimes)} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4} \\
\downarrow{\scriptstyle (m,\chi_\beta,\omega_\beta)} & \Downarrow\chi_\beta^{-1} & \downarrow{\scriptstyle (m,\chi_\beta,\omega_\beta)^2} \\
\mathcal{C} & \xleftarrow[(m,\chi_\beta,\omega_\beta)]{} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}
\end{array} \tag{71}$$

带有由引理 3.16 给出的幺半结构 $(\chi_\beta)_2^{-1_h}$。就自然2-胞 (69) 而言，它在求“前方”和“后方”箭头的逆时，计算出水平逆。这个同构 $\mathcal{C}^{\sigma_{(\langle 2\rangle,\langle 2\rangle)}}:=1\otimes_{\mathrm{Gr}}$

[4]只要 (1) 和 (2) 中有相匹配的等价就足够了，但我们可以给出等式。

交换 $\otimes_{\mathrm{Gr}}1\colon C^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}\to C^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}$ 是 Gray 幺半的，因此我们可以将其与 (71) 作前复合，从而得到一个伪自然等价

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m,\chi_\beta,\omega_\beta)^2} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}\\ {\scriptstyle(m,\chi_\beta,\omega_\beta)}\downarrow & \Downarrow\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}} & \downarrow{\scriptstyle(m^\otimes,\chi_\beta^\otimes,\omega_\beta^\otimes)}\\ \mathcal{C} & \xleftarrow[(m,\chi_\beta,\omega_\beta)]{} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}\end{array}\tag{72}$$

其幺半结构由 $\mathcal{C}^{\sigma_{(\langle 2\rangle,\langle 2\rangle)}}{}_*(\chi_\beta)_2^{-1_h}$ 给出。这构成 2-Cat$^\times$ 中的一个 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1$-幺半群。我们断言，它（本质上唯一地）延拓为一个 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1$-幺半群，从而成为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}$(2-Cat$^\times$) 中从 $(\mathcal{C}\ \beta)^2$ 到 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 的一个态射。若该断言成立，则在 (70) 下对此 $(\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{E}_1)$-代数作对角反射，便得到一个满足 (1) 与 (2) 的 $(\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1)$-代数，正如所需。至此证明完成。

为证明该断言，由引理 3.14，我们可以构造一个 Sylleptic Gray 幺半范畴 $(\mathcal{C}\ \beta^{\mathrm{rev}},v^{\mathrm{rev}})$。这对应于幺半 2-函子 $(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 上的一个编织 $u_{v^{\mathrm{rev}}}$，相对于 $\mathcal{C}$ 上的编织 β^{rev}。随后我们得到一个幺半伪自然等价

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m^\otimes,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}}^\otimes,\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}}^\otimes)} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}\\ {\scriptstyle(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})}\downarrow & \Uparrow(\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},(\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}})_2) & \downarrow{\scriptstyle(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})^2}\\ \mathcal{C} & \xleftarrow[(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})]{} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}.\end{array}\tag{73}$$

再次根据引理 3.16，可以将这个幺半伪自然等价取逆，随后与 Gray 幺半同构 $\mathcal{C}^{\sigma_{(\langle 2\rangle,\langle 2\rangle)}}$: $C^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}\to C^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}$ 复合，得到一个幺半伪自然等价

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})^2} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}4}\\ {\scriptstyle(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})}\downarrow & \Downarrow & \downarrow{\scriptstyle(m^\otimes,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}}^\otimes,\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}}^\otimes)}\\ \mathcal{C} & \xleftarrow[(m,\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}},\omega_{\beta^{\mathrm{rev}}})]{} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}\end{array}\tag{74}$$

其由 $(\chi_\beta,\mathcal{C}^{\sigma_{(\langle 2\rangle,\langle 2\rangle)}}*(\chi_{\beta^{\mathrm{rev}}})_2^{-1_h})$ 给出。这定义了 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}$(2-Cat$^\times$) 中的一个 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$-代数。其对角反射相应地

$$(-)^{\rho_{x_3}}=\mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}}((-)^\rho)\colon\mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1}(2\text{-}\mathrm{Cat}^\times))\to\mathrm{Alg}_{\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}}(2\text{-}\mathrm{Cat}^\times))\tag{75}$$

给出一个 $(\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{E}_1\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}})$-幺半群。根据与相应 syllepsis v 相关的、在 [DS97，第129], 页给出的 $(m,\chi_\beta,\omega_\beta)$ 上编织的公式，以及与该编织相关的、在 [DS97，第125], 页给出的幺半结构公式，可以计算出：(74) 的对角反射 (75) 的底层 $(\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}\otimes\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}})$-幺半群，恰好就是幺半伪自然等价 (72) 的底层 3-胞。因此二者共同构成从 $(\mathcal{C}\ \beta)^2$ 到 $(\mathcal{C}\ \beta)$ 的 $I^{(1)}{}_{(3,2)}$(2-Cat$^\times$) 中的一个态射。根据命题 2.32，我们得到一个到 E_2- 幺半群态射的（本质上唯一的）扩张；也就是说，我们得到 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}$(2-Cat$^\times$) 中的一个 $\mathsf{A}_2^{\mathrm{nu}}$- 幺半群。

因此，我们构造了从 h-集合 (65) 到 h-集合 (66) 的映射，反之亦然。显然可以证明复合映射 (65) $\to$ (66) $\to$ (65) 是恒等映射。反方向（本质上）是将 $\mathcal{C}$ 上给定的 E_3-幺半群结构限制为其底层的 E_2-幺半群结构 m，随后再扩张这一限制。然而，根据命题 2.33，只要此类扩张存在，它们在本质上就是唯一的。□

我们进一步证明以下相对化结果。

命题 4.19。设 $(\mathcal{C}\ \beta,v)$ 和 $(\mathcal{D}\ \beta,v)$ 为 *Sylleptic Gray* 幺半范畴，并设 $(F,u)\colon(\mathcal{C}\ \beta)\to(\mathcal{D},\ \beta)$ 是一个编织 的底层编织 *Gray* 幺半群之间的幺半 *2*-函子。那么空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(2\text{-}Cat^\times)(\mathcal{C},\mathcal{D})\times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(2\text{-}Cat^\times)(\mathcal{C},\mathcal{D})}\{(F,u)\}\tag{76}$$

是（-1）-截断的。当且仅当（F,u）是交错的时，它才非空。

证明。我们首先注意到，根据推论 2.37，该空间是（-1）-截断的。现在，令 $F=(f,\ \chi,\ \omega)$ 表示底层的幺半结构（$F,\ u$）。令 χ^{fm} 和 $\chi^{m(f,f)}$ 分别表示与复合 fm 和 $m(f,\ f)$ 上诱导的幺半结构相对应的伪自然等价。于是，自然2-胞 u 诱导出一个自然2-胞

$$\begin{array}{ccc} f(A)f(B)f(C)f(D) & \xrightarrow{\chi^{m(f,f)}_{A,B,C,D}} & f(AC)f(BD) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \chi_{A,B}\otimes\chi_{C,D}} & \overset{\Rightarrow}{\underset{\chi_2}{}} & \Big\downarrow{\scriptstyle \chi_{AC,BD}} \\ f(AB)f(CD) & \xrightarrow[\chi^{fm}_{A,B,C,D}]{} & f(ACBD) \end{array}$$

使得 u 是 F 的编织，当且仅当 $(\chi_2,\ 1)$ 是伪自然等价 χ [的幺半结构（DS97，第 125] 页）。计算可得，带编织的幺半 2-函子 $(F,\ u)$ 是交错的，当且仅当幺半伪自然等价 $(\chi,\ \chi_2,\ 1)$ 按照 DS97，定义 14] 的意义是带编织的。这又当且仅当修正 χ_2 是幺半的（DS97，第 126] 页）。

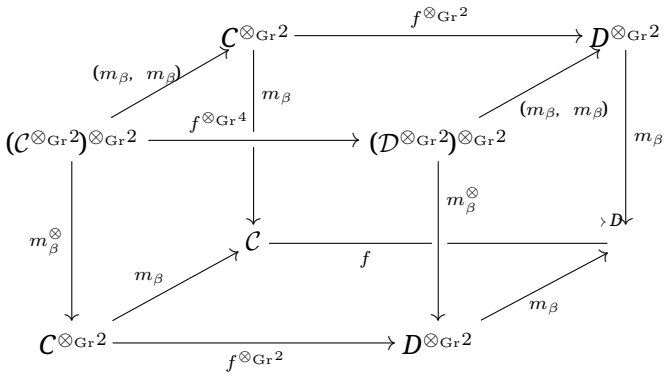
根据引理 3.31，幺半 2-函子 $F\colon \mathsf{C}\to\mathsf{D}$ 本质上唯一地扩张为 2-$\mathsf{Cat}^{\times}$ 中相应 E_1-幺半群的态射 $f\colon \mathsf{C}\to\mathsf{D}$。随后，在命题 4.3 中，我们看到，带编织的幺半 2-函子 $(F,u)\colon(\mathsf{C},\beta)\to(\mathsf{C},\beta)$ 通过相应的幺半伪自然等价 $(\chi,\chi_2,1)$，本质上唯一地扩张为 2-$\mathsf{Cat}^{\times}$ 中相应 E_2-幺半群的态射 f^u。令 $m_\beta\colon \mathsf{C}\times\mathsf{C}\to\mathsf{C}$ 和 $m_\beta\colon \mathsf{D}\times\mathsf{D}\to\mathsf{D}$ 分别表示由 C 和 D 各自的编织 β 在 $\mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_1}$(2-$\mathsf{Cat}^{\times}$) 中诱导的两个乘法。令 χ_2^v 表示由交错结构 v 诱导的自然2-胞，使得伪自然等价 $(\chi_\beta,(\chi^v)_2,1)$ 成为幺半的。于是，根据命题 2.32，将 (F,u) 扩张为 E_3-幺半群态射的空间 (76)，等价于从图表出发的态射空间

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}3} & & & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle m_\beta\otimes 1}\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes m_\beta} & & & & \\ \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m_\beta,m_\beta)} & \big(\mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}\big)^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle m_\beta} & \overset{\chi_2^v}{} & \Big\downarrow{\scriptstyle m_\beta^{\otimes}} & & \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{m_\beta} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \underset{m_\beta\otimes 1}{\overset{1\otimes m_\beta}{\leftleftarrows}} & \mathcal{C}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}3} \end{array} \tag{77}$$

到该图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}3} & & & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle m_\beta\otimes 1}\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes m_\beta} & & & & \\ \mathcal{D}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \xleftarrow{(m_\beta,m_\beta)} & \big(\mathcal{D}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2}\big)^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle m_\beta} & \overset{\chi_2^v}{} & \Big\downarrow{\scriptstyle m_\beta^{\otimes}} & & \\ \mathcal{D} & \xleftarrow{m_\beta} & \mathcal{D}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}2} & \underset{m_\beta\otimes 1}{\overset{1\otimes m_\beta}{\leftleftarrows}} & \mathcal{D}^{\otimes_{\mathrm{Gr}}3} \end{array} \tag{78}$$

在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^{\times})$ 中，其左侧行和底部列由 f^u 给出。因此，这类扩张构成的空间就是该立方体的填充子空间



(79)

在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\text{2-Cat}^{\times})$ 中，底面与背面由幺半拟自然变换 $(\chi, \chi_2, 1)$ 给出，顶面与正面由它们相应的积给出，左面与右面则分别由幺半拟自然变换 $(\chi_\beta, \chi_2^v, 1)$ 的两个相应实例给出。因此，形如 (79) 的 3-胞在引理 3.31 下恰好对应于一个证明，即其底层修改——由其底面 χ_2 给出——是幺半的。这意味着纤维 (76) 非空，当且仅当 (f, u) 是交错的。□

4.3. **对称性与E_∞-结构**。本节我们证明 Sylleptic Gray 幺半范畴上对称性的如下刻画。

定理 4.20. 设 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 为一个 *Sylleptic Gray* 幺半范畴。则空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\text{2-}Cat^{\times}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(\text{2-}Cat)^{\times}} \{(\mathcal{C}, \beta, v)\}$$

是 (-1)-截断的。它有居留当且仅当 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 是对称的。

证明. 设 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 为一个 Sylleptic Gray 幺半范畴，并设 $m\colon \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 配备其相伴的编织幺半结构 u_v [DS97，第 5] 节。不失一般性，Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 是余纤维化的。再由 [DS97，第 5]，节，$(\mathcal{C}\ \beta)$ 上的 syllepsis v 是对称的，当且仅当带编织的幺半 2-函子 (m, u_v) 是交错的。借助命题 4.19，后者成立当且仅当 h-命题

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(\text{2-Cat}^{\times})(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\text{2-Cat}^{\times})(\mathcal{C}\times\mathcal{C}, \mathcal{C})} \{(m, u_v)\} \tag{80}$$

(m, u_v) 的 E_3-幺半群延拓有居留。我们还需证明该 h-命题等价于空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_4}(\text{2-Cat}^{\times}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(\text{2-Cat})^{\times}} \{(\mathcal{C}, \beta, v)\}. \tag{81}$$

后一纤维再次由推论 2.37 知是一个 h-命题。蕴含 (80) →(81) 由如下事实给出：(80) 中的任意一点都是 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(\text{2-Cat}^{\times})$ 中 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 上的一个非幺元的 A_2-幺半群结构。借助推论 2.14，这给出 $I^{(3}{}_{(1,1,1,2)}(\text{2-Cat}^{\times})$ 的一个元素。遗忘函子

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}_{\mathsf{A}_{m+1}}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(\mathcal{C}^{\otimes})) \to I^{(3)}_{(1,1,1,m)}(\text{2-Cat}^{\times})$$

对所有 $m \geq 2$ 而言，由引理 2.35 知均为等价。因此，我们得到 (80) 中任意给定点到 (81) 的一个扩张（引理 2.21 再次处理幺性）。另一方向直接由命题 2.10 得出。最后，投影

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\text{2-Cat}^{\times}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_4}(\text{2-Cat}^{\times})$$

is 由 Baez–Dolan–Lurie 稳定化定理 [Lur17，推论 5.1.1 知是一个平凡纤维化。 7]. □

命题 4.21. 设 $(\mathcal{C}\ \beta, v)$ 与 $(\mathcal{D}\ \beta, v)$ 为对称 *Gray* 幺半群，并设 $(F, u)\colon (\mathcal{C}\ \beta, v) \to (\mathcal{D}\ \beta, v)$ 为底层 *sylleptic* 编织 *Gray* 幺半群的 *sylleptic* 幺半 *2*-函子。则空间

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_\infty}(\text{2-}Cat^{\times})(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_3}(\text{2-}Cat^{\times})(\mathcal{C}, \mathcal{D})} \{(F, u)\}.$$

是可缩的。

证明。 由推论 2.36 可立即得出。 □

总结性评论

读者或许会注意到，关于双范畴上完全代数结构与其对应的同伦结构之间等价性的证明，随着所讨论结构的复杂性增加，篇幅反而更短，复杂度也更低。这是因为在每个阶段，我们先固定低维结构，再让高维结构在其上逐纤维变化。位于固定 低维代数基底之上的这些高维结构的集合，会变得越来越截断，因此也更容易处理。这一点直接反映在以下事实上：在 2-范畴上定义 Gray 幺半结构、在 Gray 幺半结构上定义编织、在编织上定义对称编织，以及在对称编织上定义对称性，其定义会随着每一步推进而变得更短、更简单。这与 [Gur11] 和 [GO13], 采取的方法形成对比；后者基本上直接考虑双范畴 3-范畴中的 $\mathbf{E}_n$-幺半群。这种做法在每一步都会增加一个新维度，而不是去掉一个维度，因此所涉及构形空间的几何会变得更加复杂，而非更加简单。

参考文献

[BD98] J. Baez 和 J. Dolan，范畴化，Contemp. Math. 230 (1998)，1–36。[BG17] J. Bourke 和 N. Gurski，通过因子分解构造 Gray 张量积，Applied Categorical Structures (2017)。[BN96] J. Baez 和 M. Neuchl，高维代数 I：编织幺半 2-范畴，Adv. in Math. 121 (1996)，196–244。[Cra98] S. E. Crans，编织与对称编织幺半 2-范畴的广义中心，Adv. in Math. 136 (1998)，183–223。[DS97] B. Day 和 R. Street，幺半双范畴与 Hopf 代环，Advances in Mathematics 129 (1997)，99–157。[FN62] E. Fadell 和 L. Neuwirth，构形空间，Mathematica Scandinavica 10 (1962)，111–118。[Gar10] R. Garner，高阶范畴的同态，Advances in Mathematics 224 (2010)，2269–2311。[GFH24] N. Gambino、M. Fiore 和 M. Hyland，幺半双范畴、微分线性逻辑与解析函子，arXiv:2405.05774，2024。[GO13] N. Gurski 和 A. M. Osorno，无穷环空间与对称幺半双范畴的相干性，Advances in Mathematics 246 (2013)，1–32。[GPS95] R. Gordon、A. J. Power 和 R. Street，三范畴的相干性，Memoirs of the AMS 117 558，1 1995 85 ( )，第 – 期。[Gur11] N. Gurski，环空间与幺半及编织幺半双范畴的相干性，Advances in Mathematics 226 (2011)，4225–4265。[Hau23] R. Haugseng，关于 ∞ https://runegha.folk.ntnu.no/iopd. -运算子的 pdf 2023 7 2022 据称相当友好的介绍，塞维利亚系列讲座笔记（10月）。[JS93] A. Joyal 和 R. Street，编织张量范畴，Advances in Mathematics 102 (1993)，20–78。[JY21] N. Johnson 和 D. Yau，《二维范畴》，牛津大学出版社，2021。[KV94a] M. Kapranov 和 V. Voevodsky，2-Cat 与扎莫洛德奇科夫四面体，Proc. Symp. Pure Math. 56 (1994)，177–260。[KV94b] , 编织幺半 2-范畴与 Manin–Schechtman 高阶辫群，J. Pure Appl. Algebra 92 (1994)，241–267。[Lac02] S. Lack，2-范畴的 Quillen 模型结构，K-Theory 26 (2002)，第 2 期，171–205。[Lac04] , 双范畴的 Quillen 模型结构，K-Theory 33 (2004)，第 3 期，185–197。[Lac07] , Bicat 不等价于 Gray，Theory and Applications of Categories 18 (2007)，第 21 期，1–3。[Lac11] , Gray-范畴的 Quillen 模型结构，Journal of K-Theory 8 (2011)，第 2 期，183–221。[Lur09] J. Lurie，高阶拓扑斯理论，Annals of Mathematics Studies，第 170 卷，普林斯顿大学出版社，2009。[Lur 17] ——, 高阶代数， http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017，最后更新于2017年9月18日。[May72] J. P. May，迭代环空间的几何，Lecture Notes in Mathematics，第 271 卷，施普林格出版社，柏林、纽约，1972。[Rez10] C. Rezk, 拓扑斯与同伦拓扑斯（版本 ——— *0 15* https://www.researchgate.net/publication/ 。），，。 255654755_Toposes_and_homotopy_toposes_version_015 2010 [SP09] C. J. Schommer-Pries，二维扩展拓扑场论的分类，博士论文，加州大学伯克利分校，伯克利，CA 94720-3840，美国，2009。[SS00] S. Schwede 和 B. Shipley，幺半模型范畴中的代数与模，Proc. London Math. Soc. 80 (2000)，第 3 期，491–511。[Ste26] R. Stenzel，幺半双范畴的对称性转移，即将出版，2026。[SY19] T. M. Schlank 和 L. Yanovski， ∞-范畴的 Eckmann–Hilton论证，Algebraic & Geometric Topology 19 (2019)，第 6 期，3119–3170。