arXiv:2602.14521v1 [math.RA] 16 Feb 2026

单位的平方等于 1 与来自 $\sqrt{J(R)}$ 的一个元素之和的环

DINESH UDAR 和 SHIKSHA SAINI

ABSTRACT. 本文研究每个单位的平方都属于集合 $1+\sqrt{J(R)}$ 的环，并将其称为$2-\sqrt{JU}$ 环。这里，$\sqrt{J(R)}=\{x\in R:$ 对于某个$m\geq 1\}$，有 $x^m\in J(R)$。我们证明，每个 UU, UJ, $2-UU$, $2-UJ$以及 $\sqrt{JU}$环都是 $2-\sqrt{JU}$ 环。在探讨其基本性质后，我们证明，$2-\sqrt{JU}$环的角环和单位封闭子环也都是$2-\sqrt{JU}$环。对于任意 $n>1$，所有 $n\times n$ 矩阵环构成的环绝不是 $2-\sqrt{JU}$ 环。我们还重点研究了若干其他矩阵扩张和群环。

1. INTRODUCTION

我们假设 R 是一个带幺元 $1\neq 0$的结合环。我们分别用 $J(R)$、$N(R)$、 $U(R)$ 和 $C(R)$ 表示雅各布森根、幂零元、单位群和中心。

集合 $\sqrt{J(R)}$ 由 Wang 和 Chen 在 [16], 中定义，是所有满足以下条件的元素 $x\in R$ 的集合：存在某个正整数 m，使得 $x^n\in J(R)$。集合 $\sqrt{J(R)}$ 可能不是子环，并且可能包含幂零元和雅各布森根，如 [13, 例 2.1]所示。要进一步了解集合 $\sqrt{J(R)}$，可参考 [13, 12, 15] 。

UU 环（即具有幺幂单位的环）的概念由 Cˇalugˇareanu 于 [2] 提出。UU 环满足方程$U(R)=1+N(R)$。相反，Danchev 在 [5] 研究了具有雅各布森单位的环，并将其称为 JU 环。满足 $U(R)=1+J(R)$ 的环 R 称为 JU环。Kosan 等人在 [8] 将这一类环作为 UJ 环进行了研究。最近，Saini 和 Udar 在[12] 研究了一类新的环，它推广了 UU环和 JU环，并将其称为：$\sqrt{JU}$环。注意，$1+\sqrt{J(R)}\subseteq U(R)$

日期：2026年2月17日。2010 数学主题分类。16N20、16N99、16S50、16U60、16U99。关键词和短语。 $2-\sqrt{JU}$环、 $\sqrt{JU}$环、 $2-UJ$环、 $2-UU$环、雅各布森根。

始终成立。也将满足其逆命题的环称为 $\sqrt{JU}$环。

推广 UJ环后，Cui 和 Yin 引入了 $2-UJ$环。在$2-UJ$环中，对于每个单位 u， u^2都可以表示为 1 与一个元素 $j \in J(R)$之和。每个单位的平方都等于 1 与一个来自 $N(R)$的元素之和的环称为 $2-UU$环，Shebani 和 Chen 在 [14]中对其进行了研究。受上述进展的启发，我们引入$2-\sqrt{JU}$ 环，以细化其他环结构之间的关系。因此，我们旨在通过将 $2-\sqrt{JU}$ 环与其他广为人知的环类进行比较，给出其充分的性质和实例。

定义1.1. 一个环 R，若其中每个单位的平方都等于 1 与一个来自 $\sqrt{J(R)}$的元素之和，则称为 $2-\sqrt{JU}$ 环；也就是说，在 $2-\sqrt{JU}$环中，对于每个单位 u， $u^2 \in 1+\sqrt{J(R)}$。

回顾一下，半布尔环是指满足以下条件的环：对于任意元素a， R 中都有 $a = p+q$，其中 $p \in Id(R)$且 $q \in J(R)$。将上述分解中的 $j \in J(R)$替换为 $n \in N(R)$，即可得到一个幂零干净环。当 $ej = je$时，环 R 成为强幂零干净环。$2-\sqrt{JU}$ 环的例子包括 $\mathbb{F}_2$、强幂零干净环和半布尔环。

现在，我们总结本文讨论的研究结果：第2节首先介绍$2-\sqrt{JU}$ 环的基本性质。接着，我们还证明，对于 $2-\sqrt{JU}$环，其角环和单位元封闭子环总是 $2-\sqrt{JU}$ 环。我们刻画了$2-\sqrt{JU}$ 除环和局部环。在接下来的结果中，我们给出了局部 $2-\sqrt{JU}$ 环和半单$2-\sqrt{JU}$ 环的刻画。在第3节中，我们证明，任何 $n \times n$矩阵环 $M_n(R)$（其中 $n > 1$）都不可能是 $2-\sqrt{JU}$ 环。我们还考察了Morita 环境以及其他一些矩阵环 $T(R,\ M)$ $T_n(R)$。最后，我们研究了群环。

我们分别用 $M_n(R)$、 $T_n(R)$ 和 $Id(R)$ 表示所有 $n \times n$ 矩阵构成的环、所有上三角矩阵构成的环，以及 R 的幂等元集合。若要查阅其他未提及的术语，可参考 [9, 11] 。

2. Basic properties

在探讨 $2-\sqrt{JU}$ 环及其与 $2-UU$ 和 $2-UJ$ 等其他环的关系之前，我们先介绍 $\sqrt{J(R)}$ 的一些性质：

命题 2.1. 环 R中以下各项成立：

(1) [12, 命题 2.5] 对于一个$\sqrt{JU}$环 R, $2 \in J(R)$。(2) [13, 命题 (v)] 若 $x^k \in \sqrt{J(R)}$, 则 $x \in \sqrt{J(R)}$。(3) [13, 命题 (ii)] $U(R) \cap \sqrt{J(R)} = \phi$并且 $\sqrt{J(R)} \cap Id(R) = 0$。

值得注意的是, 如果 $U(R) \subseteq 1 + \sqrt{J(R)}$, 那么对每个$u \in U(R)$, $u^2 \in 1 + \sqrt{J(R)}$, 因此每个 $\sqrt{JU}$环都是$2-\sqrt{JU}$环。正如 [12], 所示, 每个 UU和 UJ环都是 $\sqrt{JU}$; 按照类似的步骤, 我们可以证明每个 $2-UU$和 $2-UJ$环都是$2-\sqrt{JU}$ 环。

$$\begin{array}{ccccc} 2-UU & & 2-JU & & \sqrt{JU} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & 2-\sqrt{JU} & & \end{array}$$

这些包含关系都是严格的, 反向结论并非总是成立。下面给出一些例子来验证这一点。

例 2.2. (1) 域 $\mathbb{F}_3$ 是一个$2-\sqrt{JU}$ 环, 但不是$\sqrt{JU}$ 环。

(2) 考虑 $R = \mathbb{F}_5 < x, y : x^2 = 0 >$, 可知 R 是一个$2-\sqrt{JU}$环, 但不是 $2-UJ$环。(3) 设 $T = \mathbb{F}_2[[x]]$, 则根据引理 2.9, T是一个 $2-\sqrt{JU}$环。若考虑元素 $1+x \in T$, 则$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 = 1+x^2$, 并且 $1+x$ 在 T中也是可逆的。由于$(1+x)^2 = 1+x^2 \notin 1+N(T)$, T不是 $2-UU$环。

命题 2.3. 对于一个 $2-\sqrt{JU}$ 环R, 同态像也是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。

证明。 在同态 ϕ下, 对于任意单位 u, $\phi(u^2) = 1+\phi(\sqrt{J(R)})$。单位以及 $\sqrt{J(R)}$ 中的元素在该同态下保持不变; 证明显然。□

命题 2.4. 对于环 R_1和 R_2, $R = R_1 \times R_2$是一个 $2-\sqrt{JU}$环, 当且仅当每个 R_1、R_2都是 $2-\sqrt{JU}$环。

证明。 证明可根据以下结果略作说明: $\sqrt{J(R_1)} \times \sqrt{J(R_2)} = \sqrt{J(R_1 \times R_2)}$, 以及 $U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2)$。□

定理 2.5. 对于理想 $I \subseteq J(R)$, R/I是一个环, 当且仅当 R是一个环。

证明。 首先, 若假设 R 是一个 $2-\sqrt{JU}$环, 令 $\bar{u}$ 在 R/I中可逆。那么 u 在 R 中可逆, 因此 $u^2 = 1+z$, 其中

$z \in \sqrt{J(R)}$。由命题 2.3]可得 $\bar{u^2} = \bar{1} + \bar{z}$ [，因此我们有， R/I 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。

接下来，若 R/I 是一个 $\overline{2-\sqrt{JU}}$ 环，令 u 为 R中的一个单位。因此，$\bar{u}$ 是 R/I中的一个可逆元。因此， $\bar{u^2} = 1 + \bar{z}$，其中 $\bar{z} \in \sqrt{J(R/I)}$。由此得到 $u^2 - (1+z) = j \in I \subseteq J(R)$。因此，我们有$u^2 = 1 + (j - z)$，其中 $j - z \in \sqrt{J(R)}$，这就证明了 R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环，证毕。□

由上述定理可得以下结论：

推论 2.6。环 R是$2-\sqrt{JU}$环，当且仅当 $R/J(R)$ 是 $2-\sqrt{JU}$环。

若 e 表示环 R中的一个非零幂等元，则 $U(eRe) = eRe \cap (1-e+U(R))$。由 [12, 命题 2.11]， $\sqrt{J(eRe)} = \sqrt{J(R)} \cap eRe = e\sqrt{J(R)}e$。有了这些结果，我们接着证明以下结论：

定理 2.7。$2-\sqrt{JU}$ 环可传递到角。

证明。我们假设 R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环，且 v 是 eRe 中的一个单位。因此，$v \in eRe \cap (1-e+U(R))$。由此可得， $v+(1-e)$ 是 R 中的一个单位，且 $(v+(1-e))^{-1} = v^{-1}+(1-e)$。因此，$(v+(1-e))^2 = v^2+(1-e)$，从而存在某个 $z \in \sqrt{J(R)}$ 满足 $v^2+(1-e) = 1+z$。于是，我们有 $v^2 - e = z \in \sqrt{J(R)}$。利用 $\sqrt{J(eRe)} = \sqrt{J(R)} \cap eRe = e\sqrt{J(R)}e$，可得 $v^2 - e \in eRe \cap \sqrt{J(R)} = \sqrt{J(eRe)}$。最后，$v^2 \in e + \sqrt{J(eRe)}$，证毕。□

回想一下，任何满足条件 $ab = 1$ 蕴含 $ba = 1$（对任意元素 a， $b \in R$）的环都称为 Dedekind 有限环。

推论 *2.8. </style}*一个$2-\sqrt{JU}$ 环 R 是 *Dedekind* 有限环。

证明. 我们首先假设存在一个 $2-\sqrt{JU}$ 环 R，其中元素p， q 满足 $pq = 1$，尽管 $qp \neq 1$。接下来，假设 $e_{ij} = p^i(1-qp)q^j$ 且 $e = e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}$。由此可知，存在一个环 R'，使得角环 eRe 等于 $M_n(R')$。根据定理 2.7，$M_n(R')$是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环，而根据推论 3.1，这是不可能的。因此， R 是 Dedekind 有限环。□

引理 2.9. 在环 R中，以下各项等价：

(1) 环 R 满足 $u^2 \in 1 + \sqrt{J(R)}$。(2)

$R[[t]]$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。

证明。首先，注意 $(t) \subseteq J(R[[t]])$ 和 $R \cong R[[t]]/(t)$。该证明可由定理 2.5 推得。□

现在，回顾一下，当环 R 满足条件 $U(S) = U(R) \cap S$ 时，它称为单位元封闭子环。

命题 2.10. 环 $2-\sqrt{JU}$ 的单位封闭子环 S R 是$2-\sqrt{JU}$。

证明。由于子环 S 是单位封闭子环，根据 [13, 引理 2.7],$\sqrt{J(R)} \cap S \subseteq \sqrt{J(S)}$。设 u是 S 中的一个单位。因此， $u \in U(R)$，并且鉴于 R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环，我们有 $u^2 \in 1+\sqrt{J(R)}$。由此可得 $u^2 \in (1+\sqrt{J(R)}) \cap S \subseteq 1+\sqrt{J(S)}$。特别地，这证明了 S 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。□

定理 2.11. 设 R 是一个除环。那么 R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环，当且仅当 $R \cong \mathbb{F}_2$ 或 $\mathbb{F}_3$。

证明。在除环中， $\sqrt{J(R)}$等于 0。若将 R 视为一个$2-\sqrt{JU}$ 环，则每个单位都是自逆的，满足 $u^2 = 1$。其余部分可由 [4, 例 2.1]推出。反向部分显然。□

若 $R/J(R)$是除环，则称环 R 为局部环。

推论 2.12。 局部环 R是 $2-\sqrt{JU}$环，当且仅当 $R/J(R) \cong \mathbb{F}_2$或 $\mathbb{F}_3$。

证明。 由推论 2.6 和定理 2.11，证明显然可得。□

回顾韦德伯恩–阿廷定理：半单环 R 同构于 $\prod_{i=1}^{k} M_{m_i}(D_i)$，其中 D_i 为适当的除环， k为唯一的正整数。

定理 2.13。 半单环 R是$2-\sqrt{JU}$环，当且仅当$\prod R_i$，其中每个 R_i 都同构于 $\mathbb{F}_2$ 或 $\mathbb{F}_3$。

证明。 根据韦德伯恩–阿廷定理，半单环 R 同构于 $\prod_{i=1}^{k} M_{m_i}(D_i)$，其中 D_i 为适当的除环， k为唯一的正整数。因此，若 R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环，根据命题 2.4，单位的平方属于集合 $1+\sqrt{J(M_{m_i}(D_i))}$。于是，根据推论 3.1，对于每个 i，我们得到 $m_i = 1$ 。因此，根据定理 2.11，每个 $M_i \cong \mathbb{F}_2$ 或 $\mathbb{F}_3$。反向显然。□

命题 2.14。 R是一个 $\sqrt{JU}$环，当且仅当 $2 \in J(R)$且 R是一个 $2-\sqrt{J\overline{U}}$ 环。

R是一个 $\sqrt{JU}$环，当且仅当 R是一个带有 $\overline{2} \in J$（R）的 $2-\sqrt{JU}$环

证明。（1）⇒（2）

证明是连贯的，因为在一个$\sqrt{JU}$ 环中$\overline{2} \in J(R)$，并且每个$\sqrt{JU}$ 环都是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。

(2)⇒(1)

在一个 $\overline{2-\sqrt{JU}}$ 环中，对于任意单位 u，都存在某个 $z \in \overline{\sqrt{J(R)}}$ 满足 $u^2 \in 1+\sqrt{J(R)}$。因此，我们有 $u^2-1 \in \sqrt{J(R)}$。鉴于 $2 \in J(R)$，$2(u-1) \in J(R)$。根据 [6, 引理2.11(1)]，，我们得到$(u^2-1)-2(u-1) \in \sqrt{J(R)}$。因此，我们得到 $u^2-2u+1=(u-1)^2 \in \sqrt{J(R)}$。由命题2.1(2)，$u-1 \in \sqrt{J(R)}$，证毕。□

引理2.15. 环 R 是 $2-\sqrt{JU}$ 环，当且仅当 $R[x]/x^pR[x]$ 是 $2-\sqrt{JU}$环，其中 p为正整数。

证明. 由 $(R[x]/x^pR[x])/(xR[x]/x^pR[x]) \cong R$，并利用定理 2.5 即得 $xR[x]/x^pR[x] \subseteq J(R)$。□

对于环 R，若 α 表示 R上的环自同态，则 $R[[x;\alpha]]$是 R上的斜形式幂级数环。这里，加法按分量进行，乘法由下式确定：

$$xr = \alpha(r)x \ \forall \ r \in R.$$

当 $\alpha = 1$时，则 $R[[x;\alpha]] = R[[x]]$。

命题2.16. 任意环 R 是 $2-\sqrt{JU}$ 环，当且仅当 $R[[x;\alpha]]$是 $2-\sqrt{JU}$ 环。

证明. 设 $(x) = R[[x:\alpha]]x$。则 $(x) \subseteq J(R[[x;\alpha]]) = J(R)+I$。由于 $R[[x;\alpha]]/(x) \cong R$，证明由定理 2.5 得出。□

注意到，利用上述命题可以再次证明引理 2.9。

命题2.17。 对于环 $2-\sqrt{JU}$ 中的单位 u 和 v R，$u^2+v \neq 1$。

证明。 如果可能，我们假设存在满足 $u^2+v=1$ 的单位 u, v。现在，由于 R 是一个环 $2-\sqrt{JU}$，我们有 $u^2 \in 1+\sqrt{J(R)}$。令 $u^2 = 1+z$，其中 $z \in \sqrt{J(R)}$。因此，$1 = u^2+v = (1+z)+v$。基于此，我们得到 $v = -z \in \sqrt{J(R)}$，这与命题2.1(3) 矛盾。□

命题 2.18. [10, 引理 5.1 (2)] 对于环 R, $\sqrt{J(R)} \cap C(R) \subseteq \overline{J(R)}$.

3. MATRIX EXTENSIONS

定理 3.1. 对于环 R，矩阵环 $M_n(R)$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$环，当且仅当 $n \geq 2$。

证明。我们首先证明，$M_2(R)$ 永远不可能是一个$2-\sqrt{JU}$ 环。考虑一个单位 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 形式 $M_2(R)$。于是

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，我们得到 A^2-I 是 $M_2(R)$ 中的一个可逆元。因此，根据 [13, 命题 2.2 (ii)]，$A \notin \sqrt{J(M_2(R))}$。这表明 $M_2(R)$ 不可能是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。由于 $n \times n$矩阵环 $M_n(R)$ 的角环与 $M_2(R)$ 同构，且 $M_2(R)$ 不可能是一个2 $\sqrt{JU}$ 环，所以对于任意正整数 n，$M_n(R)$ 都不是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。□

若 R 是一个环，则 $T(R,R,M) = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ 表示形式矩阵环。集合 $T(R,M) = \begin{pmatrix} x & n \\ 0 & x \end{pmatrix}$: $x \in R, n \in M$ 是 $T(R,R,M)$ 的一个子环。值得注意的是，$T(R,M)$ 与环 $R \propto M$ 同构，其中 $R \propto M = \{(a,b) : a \in R;\ b \in M\}$。加法按分量定义。对于任意 (x,m)、$(y,n) \in R \propto M$，乘法定义如下:

$$(x,m)(y,n) = (xy, xn+my).$$

$T(R, M)$中的单位为:

$$U(T(R,M)) = \{(u,n) : u \in U(R), n \in M\}.$$

雅各布森根表示为:

$$J(T(R,M)) = \{(j,n) : j \in J(R), n \in M\}.$$

容易观察到

$$\sqrt{J(T(R,M))} = \{(z,n) : z \in J(R), n \in M\}.$$

定理 3.2. 设 R 是一个环。则以下各项等价:

(1) R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(2) $T(R,M)$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$环。(3) $R \propto M$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。

证明。(1)⇒(2)

设 u 在 R中可逆。则存在一个 $z \in \sqrt{J(R)}$，满足 $u^2 = 1+z \in 1+\sqrt{J(R)}$。这有助于构造可逆矩阵 $U = \begin{pmatrix} u & m \\ 0 & u \end{pmatrix}$。然后

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & u \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u^2-1 & um+mu \\ 0 & u^2-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z & um+mu \\ 0 & z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 $z \in \sqrt{J(R)}$ 和 $um+mu \in M$，我们得到 $U^2 - I \in \sqrt{J(T(R,\ M))}$，如所需。

(2)⇒(1) 若假设 $T(R,\ M)$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$环，则令 $U = \begin{pmatrix} u & m \\ 0 & u \end{pmatrix}$ 为 $T(R,\ M)$ 中的一个单位，因此我们有

$$\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & u \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \sqrt{J(T(R,M))}.$$

这表明矩阵 $\begin{pmatrix} u^2-1 & um+mu \\ 0 & u^2-1 \end{pmatrix}$ 是 $\sqrt{J(T(R,\ M))}$ 中的一个元素。因此，$u^2-1 \in \sqrt{J(R)}$，如所需。□

剩余部分 (2) $\iff$ (3) 显然，因为 $T(R,\ M) \cong R \propto M$。

命题 3.3。环 R 称为 $2-\sqrt{JU}$ 环，等价于：

(1) $R \propto R$ 是 $2-\sqrt{JU}$。

(2) $T(R,\ R)$ 是 $2-\sqrt{JU}$。

(3) $R[x]/(x^2)$ 是 $2-\sqrt{JU}$。

设 X 和 Y 是环，${}_XM_Y$ 和 ${}_YN_X$ 是双模。现在回顾 Morita 环境，并描述环境乘积。它们分别是映射 $M \times N \to X$ 和 $N \times M \to Y$，定义为 $(m,\ n) \mapsto mn$ 和 $(n,\ m) \mapsto nm$。因此，根据通常的矩阵运算，Morita 环境为 $\begin{pmatrix} X & M \\ N & Y \end{pmatrix}$。如果环境乘积是平凡的，即 MN 和 NM 都为 0，那么该 Morita 环境称为平凡 Morita 环境。$\begin{pmatrix} X & M \\ N & Y \end{pmatrix}$ 同构于 $T(X \times Y,\ M \oplus N)$。形式三角矩阵和 $T_n(R)$ 是一些例子。

命题 3.4. 设 M 是环 R_1、 R_2上的双模。那么，只要 $\begin{pmatrix} R_1 & M \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ 是一个环， R_1和 R_2就是$2-\sqrt{JU}$环。

证明。该证明由定理 3.2 和命题 2.3 得出，如$\begin{pmatrix} R_1 & M \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \cong T($ $R_1 \times R_2$， $M)$。 □

命题 3.5。 在环 R 中， $n \geq 1$, $T_n(R)$ 是环，则 $2-\sqrt{JU}$ 环蕴含R 是 $2-\sqrt{JU}$ 环。

现在，我们定义 $BT(R,\ M)$。设环 R和其上的双模 M。那么， $BT(R,\ M) = \{(x,\ p,\ y,\ q) : x,\ y \in R;\ p,\ q \in M\}$。其运算定义如下，包括分量加法和乘法:

$(x_1, p_1, y_1, q_1)(x_2, p_2, y_2, q_2) = (x_1x_2, x_1p_2+p_1x_2, x_1y_2+y_1x_2, x_1q_2+p_1y_2, y_1p_2, q_1x_2)$,$BT(R, M)$ 构成一个环。此外， $BT(R, M) \cong T(T(R, M)\ T(R, M))$。我们还有:

$$BT(R,M) = \left\{ \begin{pmatrix} x & p & y & q \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & p \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y \in R; p, q \in M \right\}.$$

利用映射 $m + nx + py + qxy \to \begin{pmatrix} m & n & p & q \\ 0 & m & 0 & p \\ 0 & 0 & m & n \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ ，我们得到

$R[x,y]/(x^2, y^2) \cong BT(R, R)$】【。

定理 3.6。 设 R 是一个环， M 是 R 上的双模。那么以下各项等价:

(i) R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(ii) $R \bowtie M$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(iii) $BT(R,M)$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(iv) $BT(R,R)$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(v) $R[x,y]/(x^2, y^2)$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(vi) $R \bowtie R$ 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。

证明。 根据定理 3.2，结论显然。 □

4. GROUP RINGS

命题 4.1。 当 RG 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环时，环 R 也是如此。

证明。 我们首先假设 RG 是一个$2-\sqrt{JU}$ 环，并且 v 是R 中的可逆元。因此， v 是 RG 中的单位。由此，我们得到$v^2 \in 1+\sqrt{J(RG)}$。这可简化为 $v^2 \in (1+\sqrt{J}$ $(RG)) \cap R$。因此，

$v^2 \in 1+(\sqrt{J(RG)}\cap R) \subseteq 1+\sqrt{J(R)}$, 这证明了 R 是一个 $2-\sqrt{J}U$环，证毕。□

命题 4.2. 对于群 G 的子群 H 和环 R， RH 是环，当且仅当 RG是一个 $2-\sqrt{J}U$环。

证明。 对于群 G的子群 H ，众所周知， RH 是 RG的一个关于单位封闭的子环。因此,_根据命题 2.10，可得RH 是一个 $2-\sqrt{J}U$ 环。□

定理 4.3. 若 RG 是一个 $2-\sqrt{J}U$环，且2 属于雅各布森根，则群 G是一个2-群。

证明。 采用反证法，假设 G 不是 2-群。因此，令 $g \in G$ 满足 g 的阶不能被 2 整除。这意味着 g 的阶可表示为 $2n+1$，其中 n 是一个正整数。因此，$g^{2n+1}-1=0$. 由此得到:

$$(g-1)(1+g+g^2+\cdots+g^{2m})=0.$$

我们断言，对于任意正整数 m,

$$1+g+g^2+\cdots+g^{2m} \in U(RG).$$

我们先对 $m=1$建立该结论。也就是说，我们要证明$1+g+g^2$是 RG中的一个单位。由于， $g \in U(RG)$，且 RG是一个 $2-\sqrt{J}U$环，$g^2-1 \in \sqrt{J}(RG)$。此外，我们还可以注意到 $g^2-1 \in C(RG)$。因此，根据命题 2.18,

$$1-g^2 \in J(RG).$$

现在，由于 $2 \in J(R)$，根据 $J(R)$的定义，我们有， $2^2-1=3$是 R中的一个单位，因此， $3 \in U(RG)$。而 RG是一个 $2-\sqrt{J}U$环，$3^2-1=2^3 \in \sqrt{J(RG)}$。因此，根据命题 2.1（2）， $2 \in \sqrt{J(RG)}$也成立。于是，2 是 RG中同时也是中心元的 $\sqrt{J}(RG)$的一个元素。因此，根据命题 2.18， $2 \in J(RG)$。这就得到 $2g^2 \in J(RG)$。因此,

$$1+g^2=(1-g^2)+2g^2 \in J(RG).$$

根据上述推导， $1+g+g^2=g+(1+g^2) \in U(RG)+J(RG)$，并利用 $U(RG)+J(RG) \subseteq U(RG)$，我们得到 $1+g+g^2$是RG中的一个单位。

若 $m=2$，我们需要证明 $1+g+g^2+g^3+g^4$ 是 RG中的一个单位。由于

$$1+g+g^2+g^3+g^4=(1+g^2)(1+g)+g^4,$$

并且 $(1+g^2)(1+g) \in J(RG)$，且 g^4是一个单位，因此 $\sum_{i=0}^{i=4} g_i$是 RG中的一个单位。

以类似的方式，我们可以证明该结论对每个正整数都成立。因此，方程

$$g^{2n+1}-1=(g-1)(1+g+g+\cdots+g^{2m})=0$$

令 g 为单位元 1。因此，我们得出了矛盾，且 G 是一个 2-群。

□

当群中的每个元素都具有有限阶时，我们称该群为挠群。

定理 4.4. 对于一个 $2-\sqrt{JU}$ 群环 RG，群 G 总是一个挠群。

证明。采用反证法，假设 G 不是挠群，因此在 G 中存在一个元素 g，其阶为无限。由于$g \in RG$ 在环 RG中可逆，$2-\sqrt{JU}$ $g^2-1 \in \sqrt{J(RG)}$。因此，对某个正整数 n，$g^2-1 \in J(RG)$。此外，$g^{-}1 \in R<g>$.因此，$(g^2-1)^n \in J(RG) \cap R<g> \subseteq J(R<g>)$，由此得到$g^2-1 \in \sqrt{J(R<g>)}$。显然，$g^2-1$是 $R<g>$中的中心元。由于 $(g^2-1)^n \in J(R<g>)$，对于 $R<g>$中的任意 r，我们有 $1-r^n((g^2-1)^n) \in U(R<g>)$。注意到 $r(g^2-1) = (g^2-1)r$，因此

$$1-r^n(g^2-1)^n = (1-r(g^2-1))(1+r(g^2-1)+(r(g^2-1))^2+\cdots+(r(g^2-1))^{n-1}).$$

这给出 $1-r(g^2-1) \in U(R<g>)$，因此 $g^2-1 \in J(R<g>)$。由此，我们得到

$$(1-g^2)+(2g^2-g) \in J(R<g>)+U(R<g>)$$

因此，我们得到 $1-g+g^2$ 是一个可逆元。因此，存在非零元素 a_n 和 a_m，属于 R，其中某些正整数为 n 和 m，且$n<m$ 满足 $(1-g+g^2)(\sum_{i=1}^{m} a_i g^i) = 1$，这就产生了矛盾。因此，$G$ 是一个挠群，证毕。□

如果由有限个元素生成的任意子群本身都是有限群，则该群称为局部有限群。

定理 4.5. 在群环 RG 中，对于每个单位 u，$u^2 \in 1+\sqrt{J(R)}$ 若满足以下条件:

(1) R 是一个 $2-\sqrt{JU}$ 环。(2) $3 \in J(R)$。
(3) 群 G 是一个局部有限的 2-群。

证明。设 f 是 RG中的一个单位。存在 G的有限子群 H，使得 f 是其中的一个单位。由于 G 是一个 2-群，$H = \oplus_{i=1}^{n} C_2$，因此 $R = \oplus_{i=1}^{2n} R$，而根据命题 2.4，这是一个 $2-\sqrt{JU}$环。因此，$f^2 = 1+z$，$z \in \sqrt{J(RH)}$。于是，对于某个正整数 m，$(f^2-1)^m \in J(\overline{RH})$。接下来，根据 [3,命题 9],，由于 $J(RG) \cap RH \subseteq J(RH)$，可得 $(f^2-1)^m \in J(RH) \subseteq J(RG)$。由此得到 $f^2-1 \in \sqrt{J(RG)}$，这正是所需结论。□

References

[1] G. M. Bergman，环余积上的模，《美国数学会会刊》，第 200 卷，第 1–32 页，1974 年。[2] G. C˘alug˘areanu，UU 环。《喀尔巴阡数学杂志》31 (2015)，157–163。[3] I. G. Connell，论群环。《加拿大数学杂志》15 (1963)，650–685。[4] J. Cui，X. Yin，具有 2-UJ 性质的环，《代数通讯》48(4) (2020)，1382–1391。[5] P. V. Danchev，具有雅各布森单位的环。《富山数学杂志》38 (2016)，61–74。[6]P. Danchev，M. Doostalizadeh，M. Esfandiar 和 O. Hasan-zadeh，满足每个单位 u 均有 $J^{\#}(R)$中 $u-1$ 的环，https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.22611[7] P. V. Danchev 和 T. Y. Lam，具有幺幂单位的环，《德布勒森数学出版物》，第 88 卷，第 3–4 期，第 449–466 页，2016 年[8] M. T. Ko¸san，A. Leroy，J. Matczuk，论 UJ环。《代数通讯》46 (2018)，2297–2303。[9] T. Y. Lam，非交换环入门，施普林格，1991 年，第 131 卷。[10]Z. V. Mahmood，A. Moussavi 和 P. V. Danchev，论具有 2-UNJ性质的环，《代数及其应用杂志》，2025 年。https://doi.org/10.1142/S0219498827501246[11] C. Polcino Milies，S. K. Sehgal，群环导论，代数与应用 1。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2002 年。[12] S. Saini 和 D. Udar，$\sqrt{JU}$ 环，《捷克斯洛伐克数学杂志》，在线先行，第 1–13 页。https://doi.org/10.21136/CMJ.2025.0117-25[13] S. Saini 和 D. Udar，$U\sqrt{J}$ 环，《代数及其应用杂志》，在线预发表。https://doi.org/10.1142/S0219498826502944[14] M. Shebani，H. Chen，元素可表示为三幂等元与幂零元之和的环，《代数及其应用杂志》17，1850042 (2018)。[15]D. Udar 和 S. Saini，$\sqrt{J}$-clean 环，已投稿发表。https://arxiv.org/pdf/2510.25341[16] Z. Wang 和 J. Chen，结合环与巴拿赫代数中的伪Drazin逆，《线性代数及其应用》第 437 卷，第 6 期，第 1332–1345 页，2012 年。

Department of Applied Mathematics,
Delhi Technological Univer-sity, Delhi, India电子邮件地址: dineshudar@yahoo.com电子邮件地址: shiksha96saini@gmail.com