arXiv:2602.14532v1 [math.PR] 16 Feb 2026

圈积的 Jucys–Murphy 元及其在动态随机多重图中的应用 *†

Akihito HORA ‡

2026年2月17日

摘要

有限群 T 与对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的广群积 $\mathfrak{S}_n(T) = T^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ 的不可约表示等价类由 $\mathbb{Y}_n(T)$ 参数化，其中 $|T|$ 元组杨图的总大小为 n。我们给出了一个公式，将这些杨图的 Kerov 转移测度与 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的 Jucys–Murphy 元联系起来。对于对称群，这个公式由 Biane 提出。借助该公式，我们可以通过对 Jucys–Murphy 元进行组合分析，研究多重图形状的渐近性质。另一方面，我们在 $\mathbb{Y}_n(T)$ 上引入了一个马尔可夫链，规范地反映了花环积群塔的分支规则。将离散时间替换为计数过程后，我们从该链得到一个定义在 $\mathbb{Y}_n(T)$ 上的连续时间随机过程。我们的研究旨在通过恰当的时空缩放极限，确定每个宏观时刻多重图的确定性极限形状，并描述刻画该形状的相关量的演化。特别地，在初始系综满足近似分解性质并具有额外的暂停时间分布性质这一假设下，我们利用自由概率工具，推导出阿贝尔 T 情形下的动态集中极限形状。

1 引言

对称群的 Jucys–Murphy 元（简称*JM 元素*） $\mathfrak{S}_n$

$$J_1 := 0, \qquad J_k := (1\ k) + (2\ k) + \cdots + (k-1\ k) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \quad (2 \leqq k \leqq n) \tag{1.1}$$

出现在与对称群表示相关的各种情境中，包括基础教材。Biane 的一系列开创性著作揭示了 JM 元素在对称群的渐近表示论与自由概率论之间的相互作用中发挥着重要作用（[1], [2], [3], [4]）。关于极限

*本研究得到日本学术振兴会科研费（项目编号 JP22K03346）的资助

†关键词：Jucys–Murphy 元、广群积、分支规则、随机多重图形、动力学极限形状、自由累积量、近似分解性质。

‡北海道大学理学院数学系，日本札幌 060-0810；hora@math.sci.hokudai.ac.jp

杨图（简称图形）的形状，Biane 公式将 JM 元素与 Kerov 转移测度联系起来，这一公式至关重要。下面简要回顾该公式。本文所用的图形记号见表1。

图形集合	$\mathbb{Y}$
大小为 n 的图形集合	$\mathbb{Y}_n$
图形 ν 的大小（权重）	$\lvert\nu\rvert$
图形 ν 的部分（行）数	$l(\nu)$
图形 ν 中长度为 j 的部分数	$m_j(\nu)$
添加或移除杨图中的一个方格	$\nu \nearrow \mu$ 或 $\mu \searrow \nu$

表1：杨图的符号约定。例如 $(1^1 2^2 3^1) \in \mathbb{Y}_8 \nearrow (1^1 2^1 3^2) \in \mathbb{Y}_9$

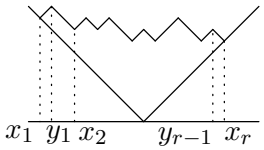

图1：矩形杨图的坐标

图形 λ 在 xy 平面中表示，如图1所示。其轮廓对应于图像 $y = \lambda(x)$，其中谷点 x_i 和峰点 y_i 的坐标属于 $\mathbb{Z}$，并满足

$$x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{r-1} < x_r, \qquad \sum_i x_i = \sum_i y_i. \tag{1.2}$$

于是我们有

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda(x) - |x|)dx = 2|\lambda|.$$

不论是否为整数，我们考虑一个具有满足 (1.2) 的谷点和峰点的矩形图。更一般地，

$$\mathscr{D} = \Big\{\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\Big|\, |\omega(x) - \omega(y)| \leqq |x - y|, \int_{-\infty}^{-1} (1 + \omega'(x))\frac{dx}{|x|} < \infty,\ \int_{1}^{\infty} (1 - \omega'(x))\frac{dx}{x} < \infty\Big\}$$

称为连续图。将一个概率测度赋予 $\mathbb{R}$，记作 $\mathfrak{m}_\omega$，称为 ω ([20]) 的 Kerov 转移测度。如果 λ 是满足 (1.2) 的矩形图，那么 $\mathfrak{m}_\lambda$ 是一个支撑于 $\{x_1, \cdots, x_r\}$ 的原子概率测度，并由以下条件刻画：

$$\frac{(z - y_1)\cdots(z - y_{r-1})}{(z - x_1)\cdots(z - x_r)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathfrak{m}_\lambda(\{x_i\})}{z - x_i}.$$

此外，若 $\lambda \in \mathbb{Y}$，则通过使用方格的内容 c，$\operatorname{supp}\mathfrak{m}_\lambda = \{c(\mu \setminus \lambda) \mid \lambda \nearrow \mu\}$。若存在，概率测度 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathbb{R}$上的 k 阶矩记为 $M_k(\mathfrak{m})$。若矩问题是确定的，则矩序列 $\{M_k(\mathfrak{m}_\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 确定 $\omega \in \mathscr{D}$。

令 χ^λ 表示与 $\lambda \in \mathbb{Y}_n$对应的 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征标。其在 $x \in \mathfrak{S}_n$ 处的取值记为 $\chi^\lambda(x)$，或当 x 属于 $\mathfrak{S}_n$ 的共轭类 C 时记为 χ^λ_C。对于与 $\sigma \in \mathbb{Y}_n$ 对应的共轭类 C_σ，我们简记为 χ^λ_σ。自然地，χ^λ 线性扩张到 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ 上。定义限制映射 $\mathrm{E}: \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$，如下:

$$\mathrm{E}[x] := \begin{cases} x, & x \in \mathfrak{S}_n \\ 0, & x \in \mathfrak{S}_{n+1} \setminus \mathfrak{S}_n \end{cases} \tag{1.3}$$

具有线性扩张。Biane 公式取如下形式（见 [4], [9], [11]）

$$\frac{\chi^\lambda(\mathrm{E}[J_{n+1}^{\,k}])}{\dim \lambda} = M_k(\mathfrak{m}_\lambda) \quad \Big(= \sum_{\mu:\lambda\nearrow\mu} c(\mu\setminus\lambda)^k \mathfrak{m}_\lambda(\{c(\mu\setminus\lambda)\})\Big), \qquad \lambda \in \mathbb{Y}_n,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

JM 元素和 Biane 公式也出现在与自由概率相关的 [22] 中。JM 元素存在自旋版本（[21]）。在 [15], 中，我们给出了 (1.4) 的自旋版本，并将其应用于对称群的自旋极限形状问题。

自然会考虑从对称群到广群积的推广

$$\mathfrak{S}_n(T) = T \wr \mathfrak{S}_n = T^n \rtimes \mathfrak{S}_n$$

其中 T 是一个有限群。T 的共轭类集合记为 $[T]$。$\mathfrak{S}_n(T)$ 的一个元素可分解为 $\mathfrak{S}_n$ 的不相交循环之积，例如 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$，并带有由它们支撑的 T 的元素，例如 $(t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_p})$。若循环长度一致且乘积 $t_{i_p}\cdots t_{i_1}$ 属于 T 的同一共轭类，则这些循环在 $\mathfrak{S}_n(T)$ 中共轭。这意味着共轭类 $[\mathfrak{S}_n(T)]$ 由

$$\mathbb{Y}_n([T]) := \big\{\rho = (\rho_\theta)_{\theta\in[T]} \,\big|\, \rho_\theta \in \mathbb{Y},\ \sum_{\theta\in[T]} |\rho_\theta| = n\big\}.$$

如果 g 属于由 $\rho \in \mathbb{Y}_n([T])$标记的共轭类 C_ρ，那么 ρ 称为 g的（共轭）类型。另一方面，我们看到，不可约表示 $\mathfrak{S}_n(T)\widehat{}$ 的等价类由

$$\mathbb{Y}_n(\widehat{T}) := \big\{\lambda = (\lambda^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T}} \,\big|\, \lambda^\zeta \in \mathbb{Y},\ \sum_{\zeta\in\widehat{T}} |\lambda^\zeta| = n\big\}$$

通过从其子群诱导而构造的方式来参数化。

与（1.1）类似，广群积的 JM 元定义为两个 2-循环共轭类示性函数之差。然而，$\mathfrak{S}_n(T)$ 有 $|[T]|$ 个 2-循环共轭类。在渐近表示论的所谓对偶方法中，我们常通过固定共轭类的类型、令群的大小无限增长，来讨论某些量的行为。因此，考虑包含映射 $\iota_{n,k}\colon \mathbb{Y}_k([T]) \longrightarrow \mathbb{Y}_n([T])$（其中 k、$n \in \mathbb{N}$、$k < n$）很方便，其中

$$\iota_{n,k}\rho = (\tilde\rho_\theta)_{\theta\in[T]} \in \mathbb{Y}_n([T]), \qquad \tilde\rho_\theta := \begin{cases} \rho_{\{e_T\}} \sqcup (1^{n-k}), & \theta = \{e_T\} \\ \rho_\theta, & \theta \neq \{e_T\} \end{cases}$$

对于 $\rho=(\rho_\theta)_{\theta\in[T]}\in\mathbb{Y}_k([T])$。令 $(2)_\theta$ 表示 $\mathbb{Y}_2([T])$ 中这样一个元素：其 θ 项为循环 (2)，其余项均为 $\varnothing$。$\mathfrak{S}_n(T)$ 中类型为 $\iota_{n,\,2}(2)_\theta\in\mathbb{Y}_n([T])$ 的共轭类，即 $(\theta,2)$-循环的集合，为

$$C_{\iota_{n,2}(2)_\theta}=\{(y^{-1},(i))(xy,(j))(i\ j)\,|\,1\leqq i<j\leqq n,\ y\in T,\ x\in C_\theta\}.$$

这里，C_θ 是由 θ 标记的 T 的共轭类，而 $(y^{-1},(i))$ 表示 T^n 中第 i 个分量为 y^{-1}、其余分量为 e_T 的元素。令 A_C 表示群 [1] 的共轭类 C 的指示元：$A_C:=\sum_{g\in C}g$。对于 $\theta\in[T]$ 和 $n\in\mathbb{N}$，我们将广群积 $\mathfrak{S}_{n+1}(T)$ 的 JM 元 J^θ_{n+1} 定义为 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}([T])]$ 中 $\mathfrak{S}_{n+1}(T)$ 的 $(\theta,2)$- 循环与 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的 $(\theta,2)$- 循环之差：

$$J^\theta_{n+1}:=A_{\iota_{n+1,2}(2)_\theta}-A_{\iota_{n,2}(2)_\theta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in C_\theta}\sum_{y\in T}(y^{-1},(i))(xy,(n+1))(i\ n+1).\tag{1.5}$$

当 $\theta=\{e_T\}$ 时，$J^{\{e_T\}}_{n+1}$ 简记为 J_{n+1}。显然，

$$J^\theta_{n+1}=J_{n+1}(A_\theta,(n+1))=(A_\theta,(n+1))J_{n+1}$$

其中 $A_\theta:=A_{C_\theta}=\sum_{x\in C_\theta}x$，因此 $(A_\theta,(n+1))=\sum_{x\in C_\theta}(x,(n+1))$。

以下结果是本文的定理之一，它将 Biane 公式 (1.4) 推广到广群积。通过 $T^n\cong T^n\times\{e_T\}\subset T^{n+1}$ 给出的嵌入 $\mathfrak{S}_n(T)\subset\mathfrak{S}_{n+1}(T)$，限制映射 $\mathrm{E}:\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}(T)]\longrightarrow\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n(T)]$ 的定义与 (1.3) 类似。与 $\lambda\in\mathbb{Y}_n(T)$ 对应的 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的不可约特征标记为 χ^λ。T 的特征标表记为 $(\chi^\zeta_\theta)_{\zeta,\ \theta}$。

定理 1.1 对于 $\lambda=(\lambda^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T}}\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})$ 和 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$M_k(\mathfrak{m}_{\lambda^\zeta})=\frac{(\dim\zeta)^{k-1}}{|T|^k}\sum_{\theta\in[T]}\frac{\chi^\lambda(\mathrm{E}[J^k_{n+1}(A_\theta,(n+1))])}{\dim\lambda}\overline{\chi^\zeta_\theta},\qquad{}_{\zeta\in\widehat{T},}\tag{1.6}$$

或等价地（通过求逆）

$$\frac{\chi^\lambda(\mathrm{E}[J^k_{n+1}(A_\theta,(n+1))])}{\dim\lambda}=|T|^{k-1}|C_\theta|\sum_{\zeta\in\widehat{T}}\frac{M_k(\mathfrak{m}_{\lambda^\zeta})\chi^\zeta_\theta}{(\dim\zeta)^{k-1}},\qquad\theta\in[T].\tag{1.7}$$

定理 1.1 的证明在 §2 中给出。在 $T=\mathbb{Z}_2$ 的情形下，与 (1.7) 对应的公式已在 [10] 中报告。

我们关注 (1.6) 和 (1.7) 中 $\mathrm{E}[J^k_{n+1}(A_\theta,(n+1))]$ 的渐近估计，尤其是通过组合方法得到的估计。注意到 $\mathrm{E}[J^k_{n+1}(A_\theta,(n+1))]$ 属于 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n(T)]$ 的中心，且可表示为共轭类示性函数的线性组合，因此我们希望求出当 $n\to\infty$时其系数的渐近行为。我们在表 2 中汇总了一些（非标准）符号约定。

[1]本文通篇使用的符号约定。

$\overline{\mathbb{Y}}:=\{\sigma\in\mathbb{Y}\,\vert\, m_1(\sigma)=0\}$, $\overline{\mathbb{Y}}_k:=\{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}\,\vert\,\vert\sigma\vert=k\}$, $\sigma^\times\in\mathbb{Y}$：去掉 $\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}$ 的第一列，即 $m_j(\sigma)=m_{j-1}(\sigma^\times)$（对于 $j\geqq 2$），$\mathrm{NC}(k)$：$\{1,2,\dots,k\}$的非交叉划分集合，$\mathrm{NC}(\sigma):=\{\pi\in\mathrm{NC}(k)\,\vert\,$ π的块类型为 $\sigma\}$ $(\sigma\in\mathbb{Y}_k)$，多项系数：$\binom{m}{n^\alpha\ ()_{\alpha\in A}}:=$ $\frac{m!}{\prod_{\alpha\in A}n^\alpha!}$其中 $\sum_{\alpha\in A}n^\alpha=m$ $(\vert A\vert<\infty)$

表 2：一些记号

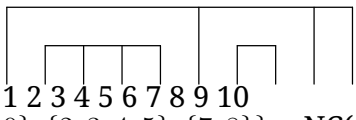

图2：$\pi=\{\{1,6,9,10\},\{2,3,4,5\},\{7,8\}\}\in\mathrm{NC}((2^1 4^2))\subset\mathrm{NC}(10)$

定理1.2 令 T为阿贝尔群 [2]。设 $T^\circ:=T\setminus\{e_T\}$。对于 $y\in T$和 $k\in\mathbb{N}$，有

$$\mathrm{E}[J^k_{n+1}(y,(n+1))]=\sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}\Big\{\sum_{(n_1^x,n_2^x,\dots)_{x\in T^\circ}:(\star)_y}|\mathrm{NC}(\sigma)|n^{k-l(\sigma)}\big(1+O(n^{-1})\big)|T|^{k-l(\sigma)}$$
$$\cdot\binom{m_1(\sigma^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}}\binom{m_2(\sigma^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}}\cdots\frac{A_{\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}}{|C_{\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}|}+\sum_{g\in N_\sigma}g\Big\}$$
$$(n\to\infty).\qquad(1.8)$$

这里 $(\star)_y$，$_{x\in T^\circ}$的取值范围由 [3]给出，其中 $(n_1^x,\ n_2^x,\ \text{.....})$

$$n_i^x\in\{0,1,\dots,m_i(\sigma^\times)\},\ \sum_{x\in T^\circ}n_i^x\leqq m_i(\sigma^\times)\ (i=1,2,\dots),\quad and\quad\prod_{x\in T^\circ}x^{n_1^x+n_2^x+\cdots}=y.\qquad(1.9)$$

此外，设

$$n_i^{e_T}:=m_i(\sigma^\times)-\sum_{x\in T^\circ}n_i^x.\qquad(1.10)$$

额外项 N_σ 由 $\mathfrak{S}_n(T)$ 中的某些元素组成，这些元素的类型具有 $\sigma^\times$，或者可能缺少一些由非平凡循环构成的 1 方格行，并且满足

$$|N_\sigma|=O(n^{k-l(\sigma)-1})\qquad(n\to\infty).\qquad(1.11)$$

由于 $m_i(\sigma^\times)=0$，因此当 i 足够大时，$n_i^x=0$ 成立，故 (1.8) 中求和的范围 (1.9) 是有限的，且不依赖于 n。定理1.2的证明见第3节。对称群情形下的等式 (1.8) 已在 [11, 定理 1]中证明。

至此，我们利用了广群积的 JM 元素的一些性质。在本文的另一部分，我们将其应用于随机动态极限形状问题，该问题涉及多个

[2]我们尚未成功地为非阿贝尔 T 得出后续定理。[3]n_i^x表示 $\sigma^\times$ 中长度为 i 且标记为 x 的行数。未标记为任何 $x\in T^\circ$ 的行均视为标记为 e_T。

杨图。本文讨论的模型与 [16] 中所表述的 $\mathfrak{S}_n(T)$ 上的连续时间随机
$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$游走相同。下面简要回顾该模型。给定 $\lambda \in \mathbb{Y}_n(T)$ 及其在 $\mathfrak{S}_n(T)$ 上的相应不可约表示 π^λ，考虑其限制与诱导的不可约分解：

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}(T)}^{\mathfrak{S}_n(T)} \circ \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}(T)}^{\mathfrak{S}_n(T)} \pi^\lambda \cong \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Y}_{n-1}(\widehat{T}):\nu \nearrow \lambda} \ \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T}):\nu \nearrow \mu} [\dim \zeta_{\nu\lambda} \dim \zeta_{\nu\mu}] \pi^\mu. \tag{1.12}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$这里采用符号约定 $\nu \nearrow \lambda$ 表示 $\nu \in \mathbb{Y}_{n-1}(T)$ 和 $\lambda \in \mathbb{Y}_n(T)$，意指在 ν 的某个位置添加一个方格，得到 λ；其中 $\zeta_{\nu\lambda}$ 表示添加方格的位置，因此作为图形有 $\nu^{\zeta_{\nu\lambda}} \nearrow \lambda^{\zeta_{\nu\lambda}}$ （见表1）。对 (1.12) 两边取维数，并除以 $n|T| \dim \lambda$，得到一个随机矩阵

$$P = P^{(n)} = (P_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T})}, \qquad P_{\lambda\mu} = \sum_{\nu \in \mathbb{Y}_{n-1}(\widehat{T}):\, \nu \nearrow \lambda, \nu \nearrow \mu} \dim \zeta_{\nu\lambda} \dim \zeta_{\nu\mu} \frac{\dim \mu}{n|T| \dim \lambda}. \tag{1.13}$$

由转移矩阵 (1.13) 定义的马尔可夫链 $(Z_k^{(n)})_{k \in \{0,1,2,\dots\}}$，称为 Res-Ind$\widehat{\ }$ 链，在 $\mathbb{Y}_n(T)$ 上关于 Plancherel测度对称

$$M_{\mathrm{Pl}}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!|T|^n}, \qquad \lambda \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T}).$$

通过引入暂停（或保持）时间，将 $(Z_k^{(n)})_k$ 转化为连续时间过程 $(X_s^{(n)})_{s \geqq 0}$。设独立同分布的暂停时间服从 $(0, \infty)$ 上的分布 ψ。由此得到计数过程 $(N_s)_{s \geqq 0}$，其中 $N_0 \equiv 0$ 几乎必然成立。然后，$(X_s^{(n)})_{s \geqq 0}$ 定义为

$$X_s^{(n)} := Z_{N_s}^{(n)}, \qquad s \geq 0. \tag{1.14}$$

在 [16], 考察这一过程的适当时空缩放极限时，我们推导出了多重图平均极限形状的时间演化。本文利用更精细的估计，得到了多重图集中极限形状（按大数定律的意义）的时间演化，即定理 1.3，不过我们将讨论范围限制在阿贝尔T的情形。

为获得集中的性质，近似分解性质这一概念很有用。Biane 在 [3] 针对对称群引入了这一概念，它与概率测度的遍历性密切相关。我们来快速回顾一下它在圈积背景下的含义。 $\mathbb{C}$值的归一化正定中心函数
$\widehat{\ }$ f $\mathfrak{S}_n$ T M 在 ( )
$\widehat{\ }$上的集合，与 $\mathbb{Y}_n(T)$ 上的概率测度集合，通过傅里叶变换存在仿射双射对应关系

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T})} M(\lambda) \frac{\chi^\lambda(g)}{\dim \lambda}, \qquad g \in \mathfrak{S}_n(T). \tag{1.15}$$

这一仿射双射被提升为 $\mathfrak{S}_\infty(T)$上取值于 $\mathbb{C}$的归一化正定中心函数，即 T 被无限对称所作的无限缠绕积

群，与 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的分支图的路径空间上的中心概率测度之间的那个对应，其中(1.15)给出了到 $\mathfrak{S}_n(T)$上的限制与 $\mathbb{Y}_n(T)$上的边缘$\widehat{\ }$分布之间的关系。关于这一对应在调和分析中所起的若干作用，参见 [18] 和 [17] 。特别地，两侧极端点集合之间存在对应。回想，对于 $g=(x_1,\cdots,x_n)\tau\in\mathfrak{S}_n(T)$ ($x_j\in T$, $\tau\in\mathfrak{S}_n$)，supp g由那些使得 $\tau(j)\neq j$或 $x_j\neq e_T$ 的 j组成。它自然地延拓到$g\in\mathfrak{S}_\infty(T)$。 $\mathfrak{S}_\infty(T)$上的这种函数 f是极端的，当且仅当它可因子分解：

$$f(gh)=f(g)f(h),\qquad \text{if}\quad g,h\in\mathfrak{S}_\infty(T)\ \text{ and }\ \operatorname{supp}g\cap\operatorname{supp}h=\varnothing$$

（见 [6]）。对于概率测度，“极端”通常称为“遍历的”。遍历性是一种典型的结构，它会使概率测度出现集中现象，例如大数定律。根据具体情形，遍历性的概念可以通过各种方式弱化。就相应的函数 f 而言，这意味着放宽可因子化性，使得 $f|_{\mathfrak{S}_n}$ 以某种顺序近似分解为 $n\to\infty$。令 type(g) $\in\mathbb{Y}([T])$ 表示 $g\in\mathfrak{S}_\infty(T)$ 的循环类型，其中我们设

$$\mathbb{Y}([T])=\bigsqcup_{k=0}^{\infty}\{\rho\in\mathbb{Y}_k([T])\,|\,m_1(\rho_{\{e_T\}})=0\}.\tag{1.16}$$

根据定义，取 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $g\in\mathfrak{S}_k(T)$，并取 $\mathfrak{S}_k(T)$（$\rho\in\mathbb{Y}_k([T])$）中包含 g 的共轭类 C_ρ ，我们得到 type(g)，其方法是从 ρ 的 $\{e_T\}$ 项中删除所有长度为 1 的行。特别地，type(e) $=(\varnothing,\cdots,\varnothing)$。$\rho=(\rho_\theta)^{\theta\in[T]}$ 的（总）大小和长度记为

$$|\rho|:=\sum_{\theta\in[T]}|\rho_\theta|,\qquad l(\rho):=\sum_{\theta\in[T]}l(\rho_\theta).$$

定义 设 $\{f_{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$是一个 $\mathbb{C}$ 值归一化正定中心函数序列，其中每个函数都定义在 $\mathfrak{S}_n(T)$ 上。设 $M^{(n)}$是 $\mathbb{Y}_n(\widehat{T})$ 上与 $f_{(n)}$通过 (1.15) 关联的概率测度。 $\{f_{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$或 $\{M^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$的近似分解性质 （简称 AFP）由以下条件定义：若对 $g,h\in\mathfrak{S}_\infty(T)$，supp $g\cap$supp $h=\varnothing$，

$$f^{(n)}(gh)=f^{(n)}(g)f^{(n)}(h)+o\big(n^{-\frac{1}{2}(|\operatorname{type}(g)|-l(\operatorname{type}(g))+|\operatorname{type}(h)|-l(\operatorname{type}(h)))}\big)\ (n\to\infty)\tag{1.17}$$

则该条件成立。这里， $f^{(n)}(gh)-f^{(n)}(g)f^{(n)}(h)$仅取决于 g 和 h 的类型（而非 g和 h本身）。□

上述 AFP 定义或许是最弱的版本。参见 [24] ，了解 AFP 在广群积中的中心极限定理方面的应用。

若 g、h分别是 k、l-循环，则 (1.17) 中的 o项为 $o(n^{-\frac{1}{2}(k-1+l-1)})$。在下文的 (1.19) 条件下， $f_{(n)}(g)$ 和 $f_{(n)}(h)$ 的阶分别为 $n^{-\frac{k-1}{2}}$ 和 $n^{-\frac{l-1}{2}}$。因此，(1.17) 表示一种误差项更小的因式分解。

我们来考虑 (1.14) 中过程 $(X_s^{(n)})_{s\geqq 0}$ 的时空缩放极限。为了得到图形的极限形状，我们在空间方向上取 $1/\sqrt{n}$ ： 对于图1中的 $y=\nu(x)$,

$$\nu^{\sqrt{n}}(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}\,\nu(\sqrt{n}x), \qquad \nu \in \mathbb{Y}_n. \tag{1.18}$$

在时间方向上，我们将 $\sqrt{n}$ 平方，即进行扩散缩放 [4]:

$$s = tn \qquad \text{for} \quad t \geqq 0,$$

其中， s 和 t 分别解释为微观时间和宏观时间。因此，设 $M_{tn}^{(n)}$ 为 $\mathbb{Y}_n$ $(\widehat{T})$ 上 $X_{tn}^{(n)}$ 的分布， $f^{(n)}{}_{tn}$为由式（1.15）与 $M^{(n)}{}_{tn}$相关的函数。我们证明，在满足关于 $M_0^{(n)}$ 或 $f^{(n)}{}_0$的初始条件及暂停时间分布的假设下，本模型中的集中现象随时间的演化。

定理 1.3 设 T 为阿贝尔 [5]。作为初始条件，假设 $\{f_0^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的（x， k）-循环值及增长阶收敛:

$$\textit{there exists} \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{k-1}{2}} f_0^{(n)}(\iota_{n,k}(k)_x) =: \gamma_{k+1}^x, \qquad x\in T,\ k\in\mathbb{N}, \tag{1.19}$$

$$\sup_{k\geqq 2} \frac{|\gamma_k^x|^{1/k}}{k} < \infty, \qquad x\in T, \tag{1.20}$$

以及 *AFP* (1.17)。对于暂停时间分布 ψ，假设 ψ 的均值为 m ，且其特征函数 φ 满足:

$$\textit{there exists} \quad a>0, \qquad \int_{\{|\xi|\geq a\}} \Big|\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\Big| d\xi < \infty. \tag{1.21}$$

那么，对于任意 $t\geqq 0$，当 $n\to\infty$ 时， $M_{tn}^{(n)}$ 满足集中（大数定律），也就是说，存在 $\omega(t) = (\omega(t)^{\zeta})_{\zeta\in\widehat{T}}$，使得 $\omega(t)^{\zeta}\in\mathscr{D}$ 对任意 $\epsilon>0$ 均满足:

$$\lim_{n\to\infty} M_{tn}^{(n)}\Big(\Big\{\lambda=(\lambda^{\zeta})_{\zeta\in\widehat{T}}\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})\,\Big|\,\max_{\zeta\in\widehat{T}}\|(\lambda^{\zeta})^{\sqrt{n}}-\omega(t)^{\zeta}\|_{\sup}>\epsilon\Big\}\Big)=0. \tag{1.22}$$

极限形状 $\omega(t)$ 可用转移测度 $\mathfrak{m}_{\omega(t)^{\zeta}}$,$\zeta\in T$ 的自由累积量来描述，如下:

$$R_1(\mathfrak{m}_{\omega(0)^{\zeta}})=0, \qquad R_{k+1}(\mathfrak{m}_{\omega(0)^{\zeta}}) = \frac{1}{|T|}\sum_{x\in T}\gamma_{k+1}^x\overline{\zeta(x)} \qquad (k\in\mathbb{N}); \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{m}_{\omega(t)^{\zeta}})&=0, \qquad R_2(\mathfrak{m}_{\omega(t)^{\zeta}}) = \frac{1-e^{-\frac{t}{m}}}{|T|}+e^{-\frac{t}{m}}R_2(\mathfrak{m}_{\omega(0)^{\zeta}}),\\ &\qquad R_{k+1}(\mathfrak{m}_{\omega(t)^{\zeta}}) = e^{-\frac{kt}{m}}R_{k+1}(\mathfrak{m}_{\omega(0)^{\zeta}}) \qquad (k\geqq 2). \end{aligned} \tag{1.24}$$

	参考文献 [16]	本文
极限形状	平均的	集中的
广群积的有限群	一般	主要是，阿贝尔
暂停时间分布	类指数，稳定	类指数
JM 元	未使用	used
AFP	未使用	used

表3：两篇相关论文之间的差异

定理 1.3 的证明见第4节。

注 (1) 若考虑 $\mathfrak{S}_n$ 的归一化不可约特征标 $\chi^{(n)}$，则（1.19）中的缩放似乎是自然的。在对（1.18）进行缩放后存在极限的情形下，已知 $n^{\downarrow k}\chi^{(n)}$（$k$-循环）的大小与 Kerov 转移测度的第（$k+1$）阶累积量或矩相当，因此其阶为 $n^{\frac{k+1}{2}}$。这与（1.19）一致。

（2）任意时刻 t 每个项的相对大小与转移测度的方差（第二自由累积量）有关，具体为

$$R_2(\mathfrak{m}_{\omega(t)^\zeta}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{M_{tn}^{(n)}}\Big[\frac{|\lambda^\zeta|}{n}\Big], \qquad t \geqq 0.$$

（3）自由累积量的关系式（1.24）可以改写为

$$\mathfrak{m}_{\omega(t)^\zeta} = (\mathfrak{m}_{\omega(0)^\zeta})_{e^{-t/m}} \boxplus \mathfrak{c}_{1-e^{-t/m}}$$

其中，$\mathfrak{c}$ 是均值为0、方差为 $1/|T|$的半圆分布，$\boxplus$ 表示自由加法卷积，而下标$(\,)_c$ 表示由秩为 c的投影所作的自由压缩。关于自由概率中的概念，我们参阅 [25] 与 [23] 。

（4）在 [16], 中，我们还考虑了暂停时间服从（重尾）稳定分布情形下的平均极限形状，并导出了不同于(1.24)的极限形状动力学行为（[16, 命题4.4]）。然而，正如我们在 [14, 定理1.5],中所证明的，若暂停时间服从稳定分布，则在任何时空重标度下，初始AFP在正的宏观时间上本质上都不会传播。因此，该模型并不落入诸如定理 1.3的集中极限形状框架。尽管 [16] 是本文的姊妹论文，我们仍在表3中列出了二者的若干差异。□

后续各节将用于证明定理 1.1、定理 1.2 和定理 1.3。

2 定理 1.1 的证明

我们分三步证明定理 1.1。

[4]此处其他缩放无关紧要。参见定理 1.3 后的注释（4）。[5] $x \in T$ 和 $\zeta \in \widehat{T}$ 的配对记作 $\zeta(x)$。

步骤*1*。一般而言，设 G 为一个有限群， H 为其子群，$\mathrm{E}: G \longrightarrow H$ 为如式 (1.3) 所示的限制映射。对于 $\alpha \in \widehat{H}$ 和 $b \in \mathbb{C}[G]$，我们从群代数的结构可知

$$\mathrm{tr}\pi^{\alpha}(\mathrm{E}b) = \frac{1}{[G:H]\dim\alpha}\sum_{\beta\in\widehat{G}}\dim\beta\,\mathrm{tr}\pi^{\beta}(be^{\alpha}) \tag{2.1}$$

其中， π^{α} [分别是 H [和 G]的不可约表示， e^{α} 是 $\mathbb{C}[H]$中的极小中心投影，而 tr 表示迹（未归一化，参见 [9, 2.2], [19, 引理 9.24]）。我们将 (2.1) 应用于 $G = \mathfrak{S}_{n+1}(T)$、$H = \mathfrak{S}_n(T)$、 $\alpha = \lambda = (\lambda^{\zeta})_{\zeta\in\widehat{T}} \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T})$，以及 $b = J_{n+1}^{k}(A_{\theta}, (n+1)) = J_{n+1}^{k-1}J_{n+1}^{\theta}$。

步骤 *2*。对于 V^{μ} 与 $(\mu\mathfrak{S}_{\zeta\in\widehat{T}}(T)$ 的相应的不可约表示。 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的作用分解为 V^{μ} 如下

$$V^{\mu} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T}):\,\lambda\nearrow\mu} (W^{\lambda})^{\oplus\dim\zeta_{\lambda\mu}}, \qquad W^{\lambda} \cong_{\mathfrak{S}_n(T)} V^{\lambda}. \tag{2.2}$$

注意， $\pi^{\mu}(J_{n+1}^{\theta})$ 在 W^{λ} 上的作用为标量，因为根据 (1.5)， J_{n+1}^{θ} 与 $\mathfrak{S}_n(T)$ 对易。这里我们通过不可约特征标求出该标量值。注意， $\pi^{\mu}(A_{\iota_{n+1},\,2(2)_{\theta}})$ [分别地，$\pi^{\lambda}(A_{\iota_n,\,2(2)_{\theta}})$] 在 (2.2) 的 V^{μ} （因此也在 W^{λ}） [上，分别地，在 W^{λ}] 上，作用为标量

$$\frac{\chi^{\mu}_{\iota_{n+1,2(2)_{\theta}}}}{\dim\mu}|C_{\iota_{n+1,2(2)_{\theta}}}| \qquad \Big[\text{resp.}\quad \frac{\chi^{\lambda}_{\iota_{n,2(2)_{\theta}}}}{\dim\lambda}|C_{\iota_{n,2(2)_{\theta}}}|\Big].$$

广群积的特征公式特别给出

$$\frac{\chi^{\lambda}_{\iota_{n,k}(k)_{\theta}}}{\dim\lambda} = \frac{1}{n^{\downarrow k}}\sum_{\zeta\in\widehat{T}}\frac{\chi^{\zeta}_{\theta}}{(\dim\zeta)^{k}}\Sigma_k(\lambda^{\zeta})$$

（参见 [16, (2.4)]），其中

$$\Sigma_k(\lambda^{\zeta}) := |\lambda^{\zeta}|^{\downarrow k}\frac{\chi^{\lambda^{\zeta}}_{(k,1^{|\lambda^{\zeta}|-k})}}{\dim\lambda^{\zeta}}$$

这是一个常用的符号约定。Frobenius公式告诉我们

$$\Sigma_2(\nu) = \sum_{i=1}^{d}\big(b_i(b_i+1) - a_i(a_i+1)\big), \qquad \nu\in\mathbb{Y} \tag{2.3}$$

其中 $b_i := \nu_i - i$ 和 $a_i := \nu'_i - i$ 是 ν 的 Frobenius坐标（d： 对角方格的数量， ν'： ν 的转置）。此外，

$$|C_{\iota_{n,2(2)_{\theta}}}| = \frac{n(n-1)}{2}|T||C_{\theta}|$$

成立。将这些结果合并，可得对于 $\lambda \nearrow \mu$

$$\frac{\chi^{\mu}_{\iota_{n+1,2(2)_\theta}}}{\dim \mu}|C_{\iota_{n+1,2(2)_\theta}}| - \frac{\chi^{\lambda}_{\iota_{n,2(2)_\theta}}}{\dim \lambda}|C_{\iota_{n,2(2)_\theta}}| = \frac{|T||C_\theta|}{2}\frac{\chi_\theta^{\zeta_{\lambda\mu}}}{(\dim \zeta_{\lambda\mu})^2}\big(\Sigma_2(\mu^{\zeta_{\lambda\mu}}) - \Sigma_2(\lambda^{\zeta_{\lambda\mu}})\big)$$
$$= \frac{|T||C_\theta|\chi_\theta^{\zeta_{\lambda\mu}}}{(\dim \zeta_{\lambda\mu})^2}\, c(\mu^{\zeta_{\lambda\mu}} \setminus \lambda^{\zeta_{\lambda\mu}}) \tag{2.4}$$

其中 $c(\square)$ 表示方格 $\square$ 的内容。(2.4) 中的第二个等式由以下事实推出：若 $\nu, \tilde{\nu} \in \mathbb{Y}$ 满足 $\nu \nearrow \tilde{\nu}$，则由 (2.3) 可得

$$\Sigma_2(\tilde{\nu}) - \Sigma_2(\nu) = 2c(\tilde{\nu} \setminus \nu).$$

步骤*3*。由于我们证明了 $\pi^\mu(J_{n+1}^\theta)$ 作用于 W^λ 时，其作用结果为 (2.4) 给出的标量，因此 $\pi^\mu(J_{n+1}^{k-1}J_{n+1}^\theta)$ 的作用结果也为

$$|T|^k|C_\theta|\frac{\chi_\theta^{\zeta_{\lambda\mu}}}{(\dim \zeta_{\lambda\mu})^{k+1}}\, c(\mu^{\zeta_{\lambda\mu}} \setminus \lambda^{\zeta_{\lambda\mu}})^k. \tag{2.5}$$

回到步骤1。现在由 (2.1) 可得

$$\mathrm{tr}\pi^\lambda\big(\mathrm{E}\big[J_{n+1}^k(A_\theta,(n+1))\big]\big) = \frac{1}{(n+1)|T|}\sum_{\mu\in\mathbb{Y}_{n+1}(\widehat{T})}\frac{\dim\mu}{\dim\lambda}\,\mathrm{tr}\pi^\mu\big(J_{n+1}^k(A_\theta,(n+1))\big)\pi^\mu(e^\lambda). \tag{2.6}$$

由于 $\pi^\mu(e^\lambda)$ 是到 λ-同型分量 $(W^\lambda)^{\oplus \text{维数}^{\zeta_{\lambda\mu}}}$ 上的投影，由 (2.5) 和 (2.6) 可得

$$\frac{\chi^\lambda\big(\mathrm{E}\big[J_{n+1}^k(A_\theta,(n+1))\big]\big)}{\dim\lambda} = \frac{|T|^k|C_\theta|}{(n+1)|T|}\sum_{\zeta\in\widehat{T}}\sum_{\mu^\zeta:\,\lambda^\zeta\nearrow\mu^\zeta}\frac{\dim\mu}{\dim\lambda}\frac{\chi_\theta^\zeta}{(\dim\zeta)^k}\,c(\mu^\zeta\setminus\lambda^\zeta)^k. \tag{2.7}$$

将维数公式应用于 (2.7)，继续可得

$$(2.7) = \sum_{\zeta\in\widehat{T}}\frac{|T|^{k-1}|C_\theta|}{(\dim\zeta)^{k-1}}\chi_\theta^\zeta\sum_{\mu^\zeta:\,\lambda^\zeta\nearrow\mu^\zeta}\frac{\dim\mu^\zeta}{(|\lambda^\zeta|+1)\dim\lambda^\zeta}c(\mu^\zeta\setminus\lambda^\zeta)^k = \sum_{\zeta\in\widehat{T}}\frac{|T|^{k-1}|C_\theta|}{(\dim\zeta)^{k-1}}\chi_\theta^\zeta M_k(\mathfrak{m}_{\lambda^\zeta}).$$

由此我们证明了 (1.7)。注意到 $(\chi_\theta^\zeta\sqrt{|C_\theta|/|T|})_{\zeta,\theta}$ 是一个酉矩阵，可知 (1.7) 等价于 (1.6)。定理 1.1 的证明至此完成。

3 定理1.2的证明

在本节中， T 被假设为一个有限阿贝尔群。

3.1 预备论证

在（1.8）中，我们分离出额外项，并将其形式识别为所需形式。回顾 g

$$J_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in T} (x^{-1}, (i))(x, (*))(i\ *), \qquad * := n+1,$$

对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $y \in T$，我们有

$$J_{n+1}^{k}(y, (*)) = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} \sum_{x_1, \cdots, x_k \in T} (y, (*))(x_k^{-1}, (i_k))(x_k, (*))(i_k\ *) \cdots (x_1^{-1}, (i_1))(x_1, (*))(i_1\ *)$$

$$= \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} \sum_{x_1, \cdots, x_k \in T} \underbrace{(y, (*))(x_k^{-1}, (i_k))(x_k, (*))(i_k\ *) \cdots (x_1^{-1}, (i_1))(x_1, (*))(i_1\ *)(i_1\ *) \cdots (i_k\ *)}_{(\star) \in T^{n+1}}$$

$$\underbrace{(i_k\ *) \cdots (i_1\ *)}_{(\star\star) \in \mathfrak{S}_{n+1}}. \tag{3.1}$$

由 E 映射： $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}(T)] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n(T)]$, ，当且仅当 $(\star) \in T^n$ 和 $(\star\star) \in \mathfrak{S}_n$ 成立时，(3.1) 中的每一项才会保留下来。我们知道，在 [11] 中，当存在 i_1、 $\cdots$、 i_k 使得 $(\star\star) \in \mathfrak{S}_n$ 成立时。

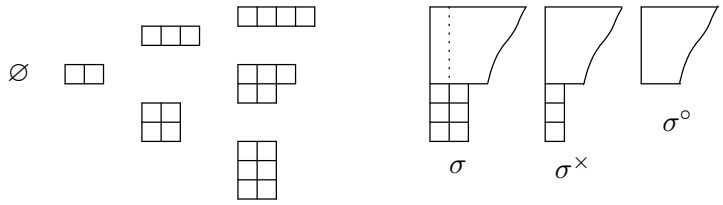

图3：左：杨图 $\overline{\mathbb{Y}}$ 的分层；右：对于 σ的运算 (3.3)

让我们回顾一下 [11] 中使用的杨图上的某个随机游走。我们根据 $|\tau| - l(\tau)$ 的取值对 $\overline{\mathbb{Y}} = \{\tau \in \mathbb{Y} \,|\, m_1(\tau) = 0\}$ 进行分层（图3，左）。取 n 足够大，考虑形成 $(\star\star)$ 的转移

$$e \to (i_1\ *) \to (i_2\ *)(i_1\ *) \to \cdots \to (i_k\ *) \cdots (i_1\ *), \quad i_1, i_2, \cdots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{3.2}$$

(3.2) 中循环类型的转移是在图3中的 $\overline{\mathbb{Y}}$ 上进行的游走，其中每一步都在相邻层之间向上或向下移动。我们通过（图3，右）为$\sigma = (2^{m_2(\sigma)} \cdots j^{m_j(\sigma)} \cdots) \in \overline{\mathbb{Y}}$定义 $\sigma^{\times} \in \mathbb{Y}$ 和 $\sigma^{\circ} \in \overline{\mathbb{Y}}$

$$\sigma^{\times} := (1^{m_2(\sigma)} \cdots j^{m_{j+1}(\sigma)} \cdots), \quad \sigma^{\circ} := (2^{m_3(\sigma)} \cdots j^{m_{j+1}(\sigma)} \cdots). \tag{3.3}$$

对于给定的 $\rho \in \overline{\mathbb{Y}}$, [11, 引理 1] 告诉我们

$$\exists i_1, \cdots, i_k \in \{1, \ldots, n\} \text{ such that } (i_k\ *) \cdots (i_1\ *) \in \mathfrak{S}_n \text{ has type } \rho$$
$$\iff \exists \sigma \in \overline{\mathbb{Y}}_k \text{ 使得 } \rho = \sigma^{\circ}. \tag{3.4}$$

在将 (3.2) 中的游走投影到其类型后，增加一个层的步（即在图3左图中向右移动一层）称为上步，而减少一个层的步（即向左移动一层）称为下步。给定 $\sigma^\circ \in \overline{\mathbb{Y}}$，令从 $\varnothing$ 到 σ° 的 k 步游走在 $\overline{\mathbb{Y}}$ 上有 u 个上步和 d 个下步。由于 $u+d=k$ 和 $u-k=|\sigma^\circ|-l$（σ°）成立，我们有

$$d=\frac{k-(|\sigma^\circ|-l(\sigma^\circ))}{2}=l(\sigma),\qquad u=k-l(\sigma). \tag{3.5}$$

如果从左侧乘以（$i_j\ *$）导致下步，则 i_j与 i_1、$\cdots$或i_{j-1}中的一个重合。另一方面，如果这是上步，则有两种可能。如果 i_j 不与 i_1、$\cdots$或i_{j-1}中的任何一个重合，我们称该步为严格上步。如果 i_j与i_1、$\cdots$或i_{j-1}中的一个重合，我们称该步为半上步。当我们按照 n的幂次统计游走数量时，严格上步的阶为 n ，而半上步的阶为1。因此，在统计（3.2）中到达（3.4）里的类型 σ° 的游走时，为了得到 n 中的正确最高阶项，其中的阶由（3.5）给出，为 $n^u=n^{k-l(\sigma)}$，我们只需考虑严格上步。

（3.2）中与仅包含下步和严格上步、且终点类型为 σ° 的游走相对应的序列 i_1、$\cdots$、i_k，由 l个（σ）配对 $\{i_p,i_q\}$ 以及根据（3.5）的其余互不相同的单点组成。由于终点属于 $\mathfrak{S}_n$，（i_1、$\cdots$、i_k）产生了 $\{1,\ldots,k\}$ 的一个非交叉分拆，其中 l个（σ）配对的指标 $p<q$构成其各块的端点。例如，令 $k=10$ 以及 $i_5=i_2$、$i_8=i_7$、$i_{10}=i_1$ 与其余互不相同的i_j'一起，我们便得到图2中的NC(10)的一个元素。10步转移如下进行:

$$\begin{aligned}
&e\to(i_1\ *)\to(i_1\ i_2\ *)\to(i_1\ i_2\ i_3\ *)\to(i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ *)\to(i_2\ i_3\ i_4)(i_1\ *)\\
&\quad\to(i_2\ i_3\ i_4)(i_1\ i_6\ *)\to(i_2\ i_3\ i_4)(i_1\ i_6\ i_7\ *)\to(i_2\ i_3\ i_4)(i_7)(i_1\ i_6\ *)\\
&\quad\to(i_2\ i_3\ i_4)(i_7)(i_1\ i_6\ i_9\ *)\to(i_2\ i_3\ i_4)(i_7)(i_1\ i_6\ i_9),
\end{aligned}$$

其中终点类型为 $\sigma^\circ=(3^2)$，并带有 $\sigma=(2^1 4^2)$、$\sigma^\times=(1^1 3^2)$。

将 E 应用于 (3.1)，我们提取出保留项。凭借上述论证，对每个 $\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k$，我们可以将它们分为仅含严格上步的项和至少含一个半上步的项。后者的阶严格低于前者，因而属于 $O(n^{k-l(\sigma)-1})$。回顾 (3.1) 中的元素 $(\star)$。若一个保留项被投影到 $\mathfrak{S}_n$ 的某个元素，则它具有类型σ° 。然而，由于它携带来自 E[$(\star)$], 的 T 的元素，$\sigma^\times$ 的某些单格行可能在 $\mathfrak{S}_n(T)$ 中充当支撑。这正是我们在定理1.2的陈述中对 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的一个元素使用类型 $\sigma^\times$ （或去掉某些单格行）的原因。利用 (1.11) 中的 N_σ，我们由此得到如下表达式:

$$\mathrm{E}[J_{n+1}^{\,k}(y,(*))]=\sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}\Big\{\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\ \text{forming NC}(\sigma)}\ \sum_{x_1,\cdots,x_k\in T}\mathrm{E}[(\star)]h_{(i_1,\cdots,i_k)}+\sum_{g\in N_\sigma}g\Big\} \tag{3.6}$$

其中，$h_{(i_1,\cdots,i_k)}$ 是由（3.2）[6]确定的 $\mathfrak{S}_n$ 元素，作为其终点。

[6] $h_{(i_1,\cdots,i_k)}$的类型是（$\sigma^\circ,1^{n-|\sigma^\circ|}$）$=$（$\sigma^\times,1^{n-|\sigma^\times|}$）。将其视为后者时，$\sigma^\times$由重数自由的 i_1、$\cdots$、i_k这些$k-l$（σ）字母填充。

3.2 定理1.2证明的主要项计算

现在来计算（3.6）的主项。固定 $y \in T$、 $\sigma \in \overline{\mathbb{Y}}_k$，以及一个字母序列（每个字母取自 $\{1,\dots,n\}$）$(i_1,\cdots,i_k)$，它产生NC（σ）中的一个元素；并令 x_1、 $\cdots$、 $x_k \in T$。我们需要计算以下对象的E-像

$$(y,(*))(x_k^{-1},(i_k))(x_k,(*))(i_k\ *)\cdots(x_1^{-1},(i_1))(x_1,(*))(i_1\ *). \tag{3.7}$$

(3.7) 的 E-像的 $\mathfrak{S}_n$ 部分已知为 (3.6)，但尚不清楚 T^n 部分 E[$(\star)$] 是否会保留下来。在计算 E[(3.7)]，时，一个基本部分由单块的情形给出：

$$p<q,\quad i_q=i_p,\quad \text{and}\quad i_p,\cdots,i_{q-1}\text{ are distinct.} \tag{3.8}$$

由于在 (3.8) 下 $(i_q\ *)\cdots(i_p\ *)\ =(i_p\ \cdots\ i_{q-1})$ 成立，经过初等计算可得

$$\begin{aligned}&(x_q^{-1},(i_q))(x_q,(*))(i_q\ *)\cdots(x_p^{-1},(i_p))(x_p,(*))(i_p\ *)\\ =&(x_qx_p^{-1},(*))(x_q^{-1}x_{q-1},(i_p))\underbrace{(x_{p+1}^{-1}x_p,(i_{p+1}))\cdots(x_{q-1}^{-1}x_{q-2},(i_{q-1}))}_{(\#)}(i_p\ \cdots\ i_{q-1}).\end{aligned} \tag{3.9}$$

在 (3.9) 的 (#) 部分中，显然 (i_j) 如何承载 T 的一个元素；对于 $(x_q^{-1}x_{q-1},(i_p))$ 也同样如此，因为 $i_q=i_p$ 成立：

$$\begin{array}{cccccccc}(i_p) & (i_{p+1}) & \cdots & (i_r) & (i_{r+1}) & \cdots & (i_{q-1}) & (i_q=i_p)\\ x_p^{-1} & x_{p+1}^{-1} & \cdots & x_r^{-1} & x_{r+1}^{-1} & \cdots & x_{q-1}^{-1} & x_q^{-1}\\ x_p & x_{p+1} & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_{q-1} & x_q\end{array}\qquad (*)$$

$$\begin{array}{cccccccc}(i_{p+1}) & \cdots & (i_r) & (i_{r+1}) & \cdots & (i_{q-1}) & (i_p) & \\ x_{p+1}^{-1}x_p & \cdots & x_r^{-1}x_{r-1} & x_{r+1}^{-1}x_r & \cdots & x_{q-1}^{-1}x_{q-2} & x_q^{-1}x_{q-1} & x_qx_p^{-1}\end{array}\quad (*). \tag{3.10}$$

$\Longrightarrow$

因子 $(x_qx_p^{-1},(*))$ 被送去进行另一项计算，以处理覆盖 (3.8) 的情形。我们根据深度对非交叉分拆的块进行分层。

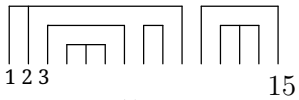

图 4：NC(15) 中一个具有第一层 $\{4,5,6\}$、第二层 $\{3,7\}$, $\{8,9\}$,$\{12,13,14\}$、第三层 $\{1,2,10\}$, $\{11,15\}$ 的元素

首先，我们像处理式 (3.8) 一样，对第一层中的块计算式 (3.9)。因此，我们得到

$$(x_q^{-1}x_{q-1},(i_p))(x_{p+1}^{-1}x_p,(i_{p+1}))\cdots(x_{q-1}^{-1}x_{q-2},(i_{q-1}))(i_p\ \cdots\ i_{q-1})\in\mathfrak{S}_n(T), \tag{3.11}$$

它会一直保留到最后，不受后续计算的影响。若考察 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的一个共轭类，我们可以取

$$x_q^{-1}x_{q-1}x_{p+1}^{-1}x_p\cdots x_{q-1}^{-1}x_{q-2}=x_q^{-1}x_p \tag{3.12}$$

作为 T 中由 (3.11) 中的循环 $(i_p \ \cdots \ i_{q-1})$ 承载的一个元素。处理完第一层中的块后，在 $\mathfrak{S}_n(T)$ 中会得到一些如 (3.11) 所示的完整循环，以及由 $(*)$ 承载的元素，例如 $(x_q x_p^{-1}, (*))$。我们只需记住 (3.11) 中一个循环所承载的 T 元素对应的 (3.12) 的乘积，因为我们想确定 $\mathfrak{S}_n(T)$ 中的一个元素属于哪个共轭类。因此，对第一层中的块 $(i_p \ i_{p+1} \ \cdots \ i_{q-1} \ i_q = i_p)$、$(i_r \ i_{r+1} \ \cdots \ i_{s-1} \ i_s = i_r)$、$\cdots$ 完成计算后，还剩下完整循环

$$\{(x_q^{-1}x_p, (i_p))(i_p \ \cdots \ i_{q-1}) \,|\, [p,q] \text{ is a block in the first stratum}\} \tag{3.13}$$

以及被送往下一阶段的元素

$$\{(x_q x_p^{-1}, (*)) \,|\, [p,q] \text{ is a block in the first stratum}\}. \tag{3.14}$$

(3.14)中的元素要么被留到第二层的外部块，要么在第一层为最外层时进入最终阶段。

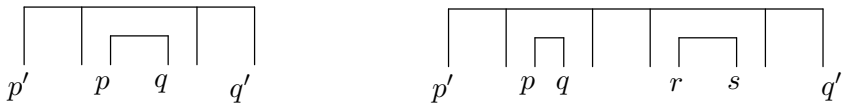

图5：内部块

其次，我们处理第二层中的块。若这样的块没有内部块，则按与第一层相同的方式处理。若 $[p', q']$ 包含一个内部块$[p,q]$ （见图5左侧），则由(3.10)可见，我们得到一个完整的循环

$$(x_q x_p^{-1} x_{q'}^{-1} x_{p'}, (i_{p'}))(i_{p'} \ \cdots i_{p-1} \ i_{q+1} \ \cdots \ i_{q'-1}) \tag{3.15}$$

（在类似于(3.12)的乘积下），并留下$(x_{q'}x_{p'}^{-1}$,$(*))$。我们注意到，(3.15)中从内部块送出的 $x_q x_p^{-1}$是$x_q^{-1}x_p$的逆元素，而$x_q^{-1}x_p$是在(3.13)中得出的。若 $[p', q']$ 包含两个内部块 $[p,q]$ 和 $[r,s]$ （见图5右侧），我们得到一个完整的循环

$$(x_q x_p^{-1} x_s x_r^{-1} x_{q'}^{-1} x_{p'}, (i_{p'}))(i_{p'} \ \cdots \ i_{p-1} \ i_{q+1} \ \cdots \ i_{r-1} \ i_{s+1} \ \cdots \ i_{q'-1}) \tag{3.16}$$

以及左边的（$x_{q'}x_{p'}^{-1}$，（$*$））。在（3.16）中，同样地，由内部块传来的 $x_q x_p^{-1} x_s x_r^{-1}$ 是在处理第一层时得到的 $x_q^{-1}x_p$ 和 $x_s^{-1}x_r$ 乘积的逆元，如（3.13）所示。一般而言，作为由一个完成的循环承载的 T 元素，我们得到由 $[p', q']$ 所持有的内部块 $[p,q]$ 上的 $x_q x_p^{-1}$ 的乘积，它们是

在处理第一层时得到的 T 元素的逆元, (3.17)

乘以 $x_{q'}^{-1}x_{p'}$。此外，还剩下 $(x_{q'}x_{p'}^{-1}, (*))$，它要么被送到第三层，要么在第二层是最外层时被处理。对于第二层中的其他块 $[r', s']$, $\cdots$，也可采用类似的论证。

我们对最外层中的块 $[t,u]$, $[v,w]$, $\cdots$ 的处理到此结束。然后，由 $(*)$ 携带，剩下

$$(yx_ux_t^{-1}x_wx_v^{-1}\cdots,(*)) \tag{3.18}$$

左侧。经 E 映射后，(3.18) 成立当且仅当

$$x_ux_t^{-1}x_wx_v^{-1}\cdots=y^{-1}. \tag{3.19}$$

考虑到在处理每一层时，T 中的元素满足 (3.17) 的逆关系，我们看到 (3.19) 成立当且仅当

$$(\text{product of the elements of } T \text{ carried by cycles in (3.7) of type } \sigma^{\times})=y. \tag{3.20}$$

令 x_1、$\cdots$、x_k 遍历 (3.7) 中的 T^k，并固定 $(i_1,\cdots,i_k)$。出现在 (3.20) 约束左侧的 x_j 的指标，与由 $(i_1,\cdots,i_k)$ 产生的非交叉分拆各块的端点相一致。其他 $k-2l(\sigma)$ x_j 则任意取值。令 X_j、Y_k 等表示 T 中可表示为 $x_qx_p^{-1}(p<q)$ 的那些元素。利用适当的有限指标集 J、K、$\cdots$，在完成对所有层的处理后，我们得到以下由类型为 $\sigma^{\times}$ 的循环承载的 T 元素：

$$\begin{array}{lll}
\text{1st stratum} & \{X_j^{-1}\}_{j\in J}, & \\
\text{2nd stratum} & \{Y_k^{-1}\prod_{j\in J_k}X_j\}_{k\in K}, & J=\bigsqcup_k J_k,\\
\text{3rd stratum} & \{Z_l^{-1}\prod_{k\in K_l}Y_k\}_{l\in L}, & K=\bigsqcup_l K_l,\\
\quad\vdots & & \\
\text{final stratum} & \{V_n^{-1}\prod_{m\in M_n}U_m\}_{n\in N}, & M=\bigsqcup_n M_n
\end{array} \tag{3.21}$$

（其中某些 J_k、K_l、$\cdots$ 可能为空），连同 $\big(y\prod_{n\in N}V_n$、$(*)\big)$。这里，所有成员

$$\{X_j\},\ \{Y_k\},\ \{Z_l\},\ \cdots,\ \{U_m\},\ \{V_n\} \tag{3.22}$$

都具有诸如 $x_qx_p^{-1}(p<q)$ 的形式，其中 p、q 各不相同。若将 x_j 自然地视为取值于 T 的独立同分布均匀随机变量，则 (3.22) 中的变量也如此。(3.22) 中随机变量的数量与块的数量一致，即 $l(\sigma)$。由此可见，(3.21) 中的随机变量在 T 上也独立同分布且均匀。

为了确定 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的一个共轭类，我们在 $\sigma^{\times}$ 的每一行 $l(\sigma)$ 上放置一个 T 元素。由于各行均可区分，因此共有 $|T|^{l(\sigma)}$ 种配置。根据上一段的论证，所有配置出现的概率测度都相同。在 $x_1,\cdots,x_k\in T$, $2l(\sigma)$ 中，与各块末端对应的元素以 $|T|^{2l(\sigma)}$ 种方式排列。因此，它们均匀地落入每一种配置。此外，

$|T|^{k-2l(\sigma)}$ 个不对应块末端的元素可以任意排列。因此，分配给一种配置的元素数为

$$|T|^{k-2l(\sigma)}\,|T|^{2l(\sigma)}/|T|^{l(\sigma)} = |T|^{k-l(\sigma)}. \tag{3.23}$$

在这些构型中，当且仅当 T 在 $\sigma^{\times}$ 的各行上的元素之积与 (3.20) 中的 y 相同，映射经 E 后才会有一个构型保留下来。

现在，我们将这些构型按所属共轭类进行分类。对于 $x \in T$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们注意到，(x,k)-循环的置换会带来重数。对于行长 i，从承载 $x \in T^{\circ}$ ($:= T \setminus \{e_T\}$) 的 $m_i(\sigma^{\times})$ 行中选取 n_i^x 行。回顾 (1.10)：

$$n_i^{e_T} := m_i(\sigma^{\times}) - \sum_{x\in T^{\circ}} n_i^x \qquad \text{so that} \qquad \sum_{x\in T} n_i^x = m_i(\sigma^{\times}).$$

属于同一共轭类 $C_{\iota_{n,|\sigma^{\times}|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}$的构型数表示为

$$\binom{m_1(\sigma^{\times})}{(n_1^x)_{x\in T}}\binom{m_2(\sigma^{\times})}{(n_2^x)_{x\in T}}\cdots\binom{m_i(\sigma^{\times})}{(n_i^x)_{x\in T}}\cdots \tag{3.24}$$

利用多项系数。由 (3.23) 和 (3.24)，归入共轭类 $C_{\iota_{n,|\sigma^{\times}|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}$的 x_1、$\cdots$、$x_k \in T$的数量为

$$|T|^{k-l(\sigma)}\prod_{i\geqq 1}\binom{m_i(\sigma^{\times})}{(n_i^x)_{x\in T}}. \tag{3.25}$$

作为共轭类指示函数的系数，我们得到（3.25）中的数量除以该共轭类的基数。

取一个属于 σ 的 NC(σ) 元素，其中 $\sigma \in \overline{\mathbb{Y}}_k$，并考虑所有能生成它的 $(i_1,\cdots,i_k)$'s。若只考虑对应于游走的情形，即上步仅允许严格上升步，则这样的 $(i_1,\cdots,i_k)$'s 共有 $n^{k-l(\sigma)}(1+O(1/n))$ 种。因此，乘以 |NC(σ)| 后，就得到了 $\sigma \in \overline{\mathbb{Y}}_k$ 对应的 (1.8) 中的各项。定理1.2的证明至此完成。

4 定理 1.3 的证明

我们先给出一条注。令 $(k)_\theta$ 表示 (θ,k)-cycles ($\theta \in [T]$, $k \in \mathbb{N}$) 的类型：

$$\big((k)_\theta\big)_{\theta'} = \begin{cases}(k), & \theta' = \theta\\ \varnothing, & \theta' \neq \theta,\end{cases} \qquad (k)_\theta \in \mathbb{Y}_k([T]).$$

如果 $\{f^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 AFP (1.17)，并且

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{k-1}{2}} f^{(n)}\big(\iota_{n,k}(k)_\theta\big), \qquad k \in \mathbb{N}$$

存在，那么对于任意 $\rho \in \mathbb{Y}([T])$，我们有

$$f^{(n)}(\iota_{n,|\rho|}\rho) = O\big(n^{-\frac{|\rho|-l(\rho)}{2}}\big) \quad (n \to \infty) \tag{4.1}$$

通过归纳论证 [7]。尽管 (4.1) 对一般的 T 成立，但在本节下文中，我们假设 T 是阿贝尔的。

4.1 重标度转移测度的矩的平均值的收敛

在本小节中，我们计算

$$\lim_{n\to\infty} n^{-k/2} \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})} M_{tn}^{(n)}(\lambda) M_k(\mathfrak{m}_{\lambda\zeta}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{M_{tn}^{(n)}}\big[M_k(\mathfrak{m}_{(\lambda\zeta)\sqrt{n}})\big]$$

并刻画多重图的平均极限形状 。

4.1.1 $t = 0$ （初始系综）

令 $f_0^{(n)}$ 作用于 (1.8)，并在乘以 $n^{-k/2}$后对 $n \to \infty$ 取极限。利用 (4.1)，并注意到 $n_i^{e_T}$(1.10) 的定义，我们得到

$$f_0^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}\big) = \Big(\prod_{x\in T} f_0^{(n)}(\iota_{n,1}(1)_x)^{n_1^x}\Big)\Big(\prod_{x\in T} f_0^{(n)}(\iota_{n,2}(2)_x)^{n_2^x}\Big)\cdots + o\big(n^{-\frac{|\sigma^\times|-l(\sigma^\times)}{2}}\big) \qquad (n\to\infty). \tag{4.2}$$

这里有

$$\frac{|\sigma^\times| - l(\sigma^\times)}{2} = \frac{|\sigma| - 2l(\sigma)}{2} = \frac{k}{2} - l(\sigma),$$
$$\text{hence} \qquad n^{-\frac{k}{2}} n^{k-l(\sigma)} o\big(n^{-\frac{|\sigma^\times|-l(\sigma^\times)}{2}}\big) = o(1) \quad (n\to\infty). \tag{4.3}$$

结合 (4.2)、(4.3) 和 (1.19)，可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{k}{2}} n^{k-l(\sigma)} f_0^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}\big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{x\in T}\Big(n^{\frac{1-1}{2}} f_0^{(n)}(\iota_{n,1}(1)_x)\Big)^{n_1^x} \prod_{x\in T}\Big(n^{\frac{2-1}{2}} f_0^{(n)}(\iota_{n,2}(2)_x)\Big)^{n_2^x} \prod_{x\in T}\Big(n^{\frac{3-1}{2}} f_0^{(n)}(\iota_{n,3}(3)_x)\Big)^{n_3^x}\cdots\\
&= \prod_{x\in T}\big((\gamma_2^x)^{n_1^x}(\gamma_3^x)^{n_2^x}(\gamma_4^x)^{n_3^x}\cdots\big).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

那么，由 (1.8) 可得 $y \in T$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{k}{2}} f_0^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^k(y,(n+1))]\big)\\
&= \sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k} \sum_{(n_1^x,n_2^x,\cdots)_{x\in T^\circ}:\,(\star)_y} |\mathrm{NC}(\sigma)||T|^{k-l(\sigma)} \binom{m_1(\sigma^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}} \binom{m_2(\sigma^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}} \cdots \prod_{x\in T}\big((\gamma_2^x)^{n_1^x}(\gamma_3^x)^{n_2^x}\cdots\big).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

[7] [15, 引理 3.1] 中也有相同的论证。

回顾 (1.6)：

$$M_k(\mathfrak{m}_{\lambda^\zeta}) = \frac{1}{|T|^k}\sum_{y\in T}\frac{\chi^\lambda(\mathrm{E}[J_{n+1}^k(y,(n+1))])}{\dim\lambda}\,\overline{\zeta(y)}, \qquad \zeta\in\widehat{T}. \tag{4.6}$$

由 (4.5) 和 (4.6) 得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{k}{2}}\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})} M_0^{(n)}(\lambda)M_k(\mathfrak{m}_{\lambda^\zeta}) = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{k}{2}}\frac{1}{|T|^k}\sum_{y\in T} f_0^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^k(y,(n+1))]\big)\overline{\zeta(y)}\\
&= \sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}\frac{|\mathrm{NC}(\sigma)|}{|T|^{l(\sigma)}}\sum_{y\in T}\sum_{(n_1^x,n_2^x,\cdots)_{x\in T^\circ}:\,(\star)_y}\binom{m_1(\sigma^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}}\binom{m_2(\sigma^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}}\cdots\\
&\qquad\qquad \prod_{x\in T}\big((\gamma_2^x)^{n_1^x}(\gamma_3^x)^{n_2^x}\cdots\big)\prod_{x\in T}\overline{\zeta(x)}^{n_1^x+n_2^x+\cdots}\\
&= \sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}\frac{|\mathrm{NC}(\sigma)|}{|T|^{l(\sigma)}}\sum_{(n_1^x,n_2^x,\cdots)_{x\in T}:\,\sum_{x\in T}n_1^x=m_1(\sigma^\times),\,\sum_{x\in T}n_2^x=m_2(\sigma^\times),\cdots}\\
&\qquad\qquad \binom{m_1(\sigma^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}}\prod_{x\in T}(\gamma_2^x\overline{\zeta(x)})^{n_1^x}\binom{m_2(\sigma^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}}\prod_{x\in T}(\gamma_3^x\overline{\zeta(x)})^{n_2^x}\cdots\\
&= \sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}|\mathrm{NC}(\sigma)|\Big(\frac{1}{|T|}\sum_{x\in T}\gamma_2^x\overline{\zeta(x)}\Big)^{m_2(\sigma)}\Big(\frac{1}{|T|}\sum_{x\in T}\gamma_3^x\overline{\zeta(x)}\Big)^{m_3(\sigma)}\cdots.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

对于任意 $\zeta\in T$，(4.7) 的最左侧

$$M_{0,k}^\zeta := \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{M_0^{(n)}}\big[M_k(\mathfrak{m}_{(\lambda^\zeta)\sqrt{n}})\big], \qquad k\in\mathbb{N}$$

给出了矩序列 $\{M_{0,k}^\zeta\}_{k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots}$，因为它是概率测度的矩的凸组合的极限（也就是说，它满足汉克尔矩阵非负的条件）。因此，存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 $\mathfrak{m}(0)^\zeta$，使得

$$M_k(\mathfrak{m}(0)^\zeta) = M_{0,k}^\zeta, \qquad k\in\{0,1,2,\dots\}. \tag{4.8}$$

由于 (1.20) 和 (4.7) 意味着 (4.8) 中的 $(M_{0\ ,\ k}^\zeta)$ 满足 Carleman 条件，$\mathfrak{m}(0)^\zeta$ 可唯一确定。此外，(4.7) 表明 $\mathfrak{m}(0)^\zeta$ 的自由累积量为

$$R_1(\mathfrak{m}(0)^\zeta) = 0, \qquad R_k(\mathfrak{m}(0)^\zeta) = \frac{1}{|T|}\sum_{x\in T}\gamma_k^x\overline{\zeta(x)} \quad (k\geqq 2).$$

注意，由于 $f_{(n)0}(\iota_{n,k}(k)_{x^{-1}}) = f_{(n)0}(\iota_{n,k}(k)_x)$ 成立，故 $\sum_{x\in T}\gamma_k^x\overline{\zeta(x)}$ 为实数。设 $\omega(0)^\zeta\in\mathscr{D}$ 为 $\mathfrak{m}(0)^\zeta$ 的马尔可夫变换。至此我们证明了以下结论。

命题 4.1 在定理 *1.3* 的初始条件(1.19)–(1.20) 下，存在唯一的 $\omega(0)=(\omega(0)^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T}}$，$\omega(0)^\zeta\in\mathscr{D}$，使得

$$M_k(\mathfrak{m}_{\omega(0)^\zeta})=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{M_0^{(n)}}\big[M_k(\mathfrak{m}_{(\lambda^\zeta)\sqrt{n}})\big],\qquad k\in\mathbb{N},\ \zeta\in\widehat{T}$$

成立，并且自由累积量 $R_k(\mathfrak{m}_{\omega(0)^\zeta})$ 由 (1.23) 给出。

注 命题 4.1 使我们能够说，我们已经捕获了初始平均极限形状 $\omega(0)$。

4.1.2 $t\geqq 0$ （任意宏观时间）

我们证明，对于 $\{f_{tn}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$，以下结论成立:

- AFP (1.17)
- (x,k)-循环的极限存在性，类似于（1.19）和（1.20）。

接下来将进行与 $t=0$ 情形类似的计算。

由 Res-Ind 链生成的随机过程 $(X_s^{(n)})_{s\geqq 0}$（见 (1.14)）的性质已在我们先前的工作中陈述。回顾随机矩阵 $P^{(n)}$（见 (1.13)）和暂停时间分布 ψ。以下命题 4.2、4.3 和 4.4 对一般的（非阿贝尔）T均成立。

命题 4.2 对于 λ，$\mu\in\mathbb{Y}_n(T)$，有

$$\mathbb{P}(X_s^{(n)}=\mu\,|\,X_0^{(n)}=\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}(P^{(n)j})_{\lambda\mu}\int_{[0,s]}\psi\big((s-u,\infty)\big)\psi^{*j}(du),$$

$$\textit{therefore}\quad M_s^{(n)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}(M_0^{(n)}P^{(n)j})_{\lambda}\int_{[0,s]}\psi\big((s-u,\infty)\big)\psi^{*j}(du).\tag{4.9}$$

参见 [16, (1.6)] 和 [14, (1.6)]。

命题 4.3 $P^{(n)}$ 的特征向量由 $\mathfrak{S}_n(T)$ 的不可约特征标给出:

$$P^{(n)}\Big(\frac{\chi^\lambda_{\iota_{n,k}\rho}}{\dim\lambda}\Big)_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})}=\Big(1-\frac{k-m_1(\rho_{\{e_T\}})}{n}\Big)\Big(\frac{\chi^\lambda_{\iota_{n,k}\rho}}{\dim\lambda}\Big)_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})},\qquad \rho\in\mathbb{Y}_k([T]).\tag{4.10}$$

参见 [16, (2.7)], [12, (3.3)] 和 [13, (5.13)]。

对于满足 $m_1(\rho_{\{e_T\}})=0$ 的 $\rho\in\mathbb{Y}_k([T])$，由 (4.9) 和 (4.10) 可得

$$\begin{aligned}f_s^{(n)}(\iota_{n,k}\rho)&=\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})}M_s^{(n)}(\lambda)\frac{\chi^\lambda_{\iota_{n,k}\rho}}{\dim\lambda}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int_{[0,s]}\psi\big((s-u,\infty)\big)\psi^{*j}(du)\Big)M_0^{(n)}P^{(n)j}\Big(\frac{\chi^\lambda_{\iota_{n,k}\rho}}{\dim\lambda}\Big)_\lambda\\&=a(k,n,s)f_0^{(n)}(\iota_{n,k}\rho)\end{aligned}$$

其中我们令

$$a(k,n,s)=\sum_{j=0}^{\infty}\big(1-\frac{k}{n}\big)^j\int_{[0,s]}\psi\big((s-u,\infty)\big)\psi^{*j}(du).$$

因此，对于任意 $t\geqq 0$ 和 $k\in\mathbb{N}$

$$f_{tn}^{(n)}(\iota_{n,k}\rho)=a(k,n,tn)f_0^{(n)}(\iota_{n,k}\rho),\qquad \rho\in\mathbb{Y}_k([T]):\ m_1(\rho_{\{e_T\}})=0. \tag{4.11}$$

在假设 (1.21) 下，

$$\lim_{n\to\infty}a(k,n,tn)=e^{-kt/m},\qquad t\geqq 0,\ k\in\mathbb{N} \tag{4.12}$$

成立。参见 [16, 命题 3.2 (1)] 和 [14, 命题 2.1]。

命题4.4 序列 $\{f_{tn}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 *AFP*。

证明 设 $g,h\in\mathfrak{S}_\infty(T)$ 满足 $\mathrm{supp}\ g\cap\mathrm{supp}\ h=\varnothing$，并令 $\mathrm{type}(g)=\rho$、$\mathrm{type}(h)=\sigma$。于是，$\mathrm{type}(gh)=\rho\sqcup\sigma$。由 (4.11) 以及 $\{f_0^{(n)}\}$ 的 AFP，得到

$$\begin{aligned}&f_{tn}^{(n)}(\iota_{n,|\rho|+|\sigma|}(\rho\sqcup\sigma))-f_{tn}^{(n)}(\iota_{n,|\rho|}\rho)f_{tn}^{(n)}(\iota_{n,|\sigma|}\sigma)\\&=\{a(|\rho|+|\sigma|,n,tn)-a(|\rho|,n,tn)a(|\sigma|,n,tn)\}f_0^{(n)}(\iota_{n,|\rho|}\rho)f_0^{(n)}(\iota_{n,|\sigma|}\sigma)\\&\quad+a(|\rho|+|\sigma|,n,tn)o\big(n^{-\frac{1}{2}(|\rho|-l(\rho)+|\sigma|-l(\sigma))}\big)\qquad(n\to\infty),\end{aligned}$$

根据 (4.12) 和 (4.1)，这等于 $o\big(n^{-\frac{1}{2}(|\rho|-l(\rho)+|\sigma|-l(\sigma))}\big)$。 ■

对于 (x,k)-循环处的值，由 (4.11)、(4.12) 和 (1.19) 可得

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{k-1}{2}}f_{tn}^{(n)}(\iota_{n,k}(k)_x)=e^{-kt/m}\gamma_{k+1}^x \tag{4.13}$$

对于 $x\in T^\circ$, $k\in\mathbb{N}$ 或 $x=e_T$, $k\geqq 2$。若 $x=e_T$ 且 $k=1$，则 (4.13) 的左侧等于 $f_{tn}^{(n)}(e)=1=\gamma_2^{e_T}$。根据 (1.20)，我们有

$$\sup_{k\geqq 2}\frac{1}{k}\,|e^{-kt/m}\gamma_{k+1}^x|^{1/k}<\infty. \tag{4.14}$$

我们回顾 4.1.1 中的计算，同时根据 (4.13) 将 γ_{k+1}^x 替换为 $e^{-kt/m}\gamma_{k+1}^x$，但仍保留 $\gamma_2^{e_T}$、$x=e_T$ 和 $k=1$。(4.4) 中的表达式因此修改为

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{k}{2}}n^{k-l(\sigma)}f_{tn}^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}\big)\\&\qquad=\prod_{x\in T^\circ}(e^{-\frac{t}{m}}\gamma_2^x)^{n_1^x}\prod_{x\in T}(e^{-\frac{2t}{m}}\gamma_3^x)^{n_2^x}(e^{-\frac{3t}{m}}\gamma_4^x)^{n_3^x}\cdots.\end{aligned}$$

于是 (4.5) 和 (4.7) 变为

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{k}{2}} f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\big)\\
&=\sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}\ \sum_{(n_1^x,n_2^x,\cdots)_{x\in T^\circ}:(\star)_y} |\mathrm{NC}(\sigma)|\,|T|^{k-l(\sigma)}\binom{m_1(\sigma^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}}\binom{m_2(\sigma^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}}\cdots\\
&\qquad\qquad \prod_{x\in T^\circ}(e^{-\frac{t}{m}}\gamma_2^x)^{n_1^x}\prod_{x\in T}(e^{-\frac{2t}{m}}\gamma_3^x)^{n_2^x}(e^{-\frac{3t}{m}}\gamma_4^x)^{n_3^x}\cdots
\end{aligned}\tag{4.15}$$

and

$$\begin{aligned}
M_{t,k}^{\zeta} &= \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{k}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n(\widehat{T})} M_{tn}^{(n)}(\lambda) M_k(\mathfrak{m}_{\lambda^\zeta})\\
&= \sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}\frac{|\mathrm{NC}(\sigma)|}{|T|^{l(\sigma)}}\sum_{(n_1^x,n_2^x,\cdots)_{x\in T}:\sum_{x\in T}n_1^x=m_1(\sigma^\times),\sum_{x\in T}n_2^x=m_2(\sigma^\times),\cdots}\\
&\qquad\qquad \binom{m_1(\sigma^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}}\prod_{x\in T^\circ}(e^{-\frac{t}{m}}\gamma_2^x\overline{\zeta(x)})^{n_1^x}\binom{m_2(\sigma^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}}\prod_{x\in T}(e^{-\frac{2t}{m}}\gamma_3^x\overline{\zeta(x)})^{n_2^x}\cdots\\
&= \sum_{\sigma\in\overline{\mathbb{Y}}_k}|\mathrm{NC}(\sigma)|\Big(\frac{1}{|T|}\big(1+\sum_{x\in T^\circ}e^{-\frac{t}{m}}\gamma_2^x\overline{\zeta(x)}\big)\Big)^{m_2(\sigma)}\Big(\frac{1}{|T|}\sum_{x\in T}e^{-\frac{2t}{m}}\gamma_3^x\overline{\zeta(x)}\Big)^{m_3(\sigma)}\cdots
\end{aligned}\tag{4.16}$$

分别成立。由于 (4.14) 蕴含 $(M_t^{\zeta},\ k)_k$ 满足 Carleman 条件，因而矩问题是确定的，概率测度 $\mathfrak{m}(t)^\zeta$ 在 $\mathbb{R}$ 上类似于 4.1.1 中的情形唯一确定。其自由累积量可由 (4.16) 得出：

$R_1(\mathfrak{m}(t)^\zeta)=0$,

$$\begin{aligned}
R_2(\mathfrak{m}(t)^\zeta) &= \frac{1}{|T|}\big(1+\sum_{x\in T^\circ}e^{-\frac{t}{m}}\gamma_2^x\overline{\zeta(x)}\big)=\frac{1-e^{-\frac{t}{m}}}{|T|}+\frac{e^{-\frac{t}{m}}}{|T|}\sum_{x\in T}\gamma_2^x\overline{\zeta(x)},\\
R_k(\mathfrak{m}(t)^\zeta) &= \frac{e^{-\frac{(k-1)t}{m}}}{|T|}\sum_{x\in T}\gamma_k^x\overline{\zeta(x)}\qquad (k\geqq 3).
\end{aligned}$$

$\omega(t)^\zeta$ 是 $\mathfrak{m}(t)^\zeta$的马尔可夫变换。

命题 4.5 在定理 *1.3* 的假设下，对于任意 $t\geqq 0$，存在唯一的极限形状 $\omega(t)=(\omega(t)^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T}}$, $\omega(t)^\zeta\in\mathscr{D}$，并且在平均意义下满足

$$M_k(\mathfrak{m}_{\omega(t)^\zeta})=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{M_{tn}^{(n)}}\big[M_k(\mathfrak{m}_{(\lambda^\zeta)^{\sqrt{n}}})\big],\qquad k\in\mathbb{N},\ \zeta\in\widehat{T}.\tag{4.17}$$

自由累积量 $R_k(\mathfrak{m}_{\omega(t)^\zeta})$ 由 (1.24) 给出。

4.2 L^2-重标度转移测度矩的收敛

我们证明命题 4.5 中的收敛是相对于 L^2 而言的，由此得到定理 1.3 中的弱大数定律。

4.2.1 Jucys–Murphy 元的矩的方差

我们估计 JM 元素相对于 $\{f^{(n)}\}$ 的矩的（协）方差:

$$f^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))]\big) \\ - f^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\big)f^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))]\big).$$

对于 ρ、$\sigma\in\mathbb{Y}([T])$（见 (1.16)）以及 $r\in\{0,1,\dots,|\rho|\wedge|\sigma|\}$，令

$$S_{\rho,\sigma}^{(n)}(r)=\big\{(g,h)\in C_{\iota_{n,|\rho|}\rho}\times C_{\iota_{n,|\sigma|}\sigma}\,\big|\,|\operatorname{supp}g\cap\operatorname{supp}h|=r\big\}.$$

显然有

$$|S_{\rho,\sigma}^{(n)}(r)|=O(n^{|\rho|+|\sigma|-r})\quad(n\to\infty). \tag{4.18}$$

引理 4.6 若 $(g,h)\in S_{\rho\,\sigma,}^{(n)}(r)$ 对于 $r\geqq 1$，则有

$$|\mathrm{type}(gh)|-l(\mathrm{type}(gh))\geqq|\rho|-l(\rho)+|\sigma|-l(\sigma)-2r+2. \tag{4.19}$$

证明 对于 $g=dw$、$h=d'w'\in\mathfrak{S}_n(T)$（$d$、$d'\in T^n$；$w$、$w'\in\mathfrak{S}_n$），$T^n$-部分 $dwd'w^{-1}$ ofgh 不会影响 |类型( )| − l（类型( )）。因此，(4.19) 可由 $\mathfrak{S}_n$ 的情形推出，该情形已在 [9, 引理 3.5] [8] 中证明。■

引理 4.7 若 $\{f^{(n)}\}$ 满足 (4.1)，则有

$$f^{(n)}\Big(\frac{A_{\iota_{n,|\rho|}\rho}}{|C_{\iota_{n,|\rho|}\rho}|}\frac{A_{\iota_{n,|\sigma|}\sigma}}{|C_{\iota_{n,|\sigma|}\sigma}|}\Big)-f^{(n)}\big(\iota_{n,|\rho|+|\sigma|}(\rho\sqcup\sigma)\big)=O\big(n^{-\frac{1}{2}(|\rho|-l(\rho)+|\sigma|-l(\sigma))-1}\big) \tag{4.20}$$

当 $n\to\infty$ 为 ρ，$\sigma\in\mathbb{Y}([T])$ 时。

证明 根据

$$C_{\iota_{n,|\rho|}\rho}\times C_{\iota_{n,|\sigma|}\sigma}=\bigsqcup_{r=0}^{|\rho|\wedge|\sigma|}S_{\rho,\sigma}^{(n)}(r),\qquad A_{\iota_{n,|\rho|}\rho}A_{\iota_{n,|\sigma|}\sigma}=\sum_{r=0}^{|\rho|\wedge|\sigma|}\sum_{(g,h)\in S_{\rho,\sigma}^{(n)}(r)}gh,$$

以及 (4.1)、(4.19)，我们有

$$f^{(n)}\big(A_{\iota_{n,|\rho|}\rho}A_{\iota_{n,|\sigma|}\sigma}\big)=\sum_{S_{\rho,\sigma}^{(n)}(0)}f^{(n)}(gh)+\sum_{r=1}^{|\rho|\wedge|\sigma|}\sum_{S_{\rho,\sigma}^{(n)}(r)}f^{(n)}(gh)$$

$$=|S_{\rho,\sigma}^{(n)}(0)|f^{(n)}\big(\iota_{n,|\rho|+|\sigma|}(\rho\sqcup\sigma)\big)+\sum_{r=1}^{|\rho|\wedge|\sigma|}\sum_{S_{\rho,\sigma}^{(n)}(r)}O\big(n^{-\frac{1}{2}(|\rho|-l(\rho)+|\sigma|-l(\sigma)-2r+2)}\big). \tag{4.21}$$

由 (4.18)，(4.21) 得出 (4.20)。 ■

[8] 在 [9]中，l 表示长度函数 | | − l( )。

现在我们证明，对于任意 $t \geqq 0$、 $k \in \mathbb{N}$ 和 y、$z \in T$

$$f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))]\big) - f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\big)\, f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))]\big) = o(n^{k}) \qquad (n\to\infty). \tag{4.22}$$

由于由 AFP（命题4.4）和 (4.13) 可得 (4.1) 成立，因此应用引理 4.7。定理 1.2 给出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))] \\
&= \sum_{\sigma,\tau\in\overline{\mathbb{Y}}_k} \sum_{\substack{(m_1^x,m_2^x,\cdots)_{x\in T^\circ}:(\star)_y \\ (n_1^x,n_2^x,\cdots)_{x\in T^\circ}:(\star)_z}} |\mathrm{NC}(\sigma)||\mathrm{NC}(\tau)| n^{2k-l(\sigma)-l(\tau)}\big(1+O(\frac{1}{n})\big)|T|^{2k-l(\sigma)-l(\tau)} \\
&\quad \binom{m_1(\sigma^\times)}{(m_1^x)_{x\in T}}\binom{m_2(\sigma^\times)}{(m_2^x)_{x\in T}}\cdots\binom{n_1(\tau^\times)}{(n_1^x)_{x\in T}}\binom{n_2(\tau^\times)}{(n_2^x)_{x\in T}}\cdots \\
&\quad \frac{A_{\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{m_1^x}2^{m_2^x}\cdots))_{x\in T}}}{|C_{\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{m_1^x}2^{m_2^x}\cdots))_{x\in T}}|}\frac{A_{\iota_{n,|\tau^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}}{|C_{\iota_{n,|\tau^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}|} \qquad + \ <\text{remainder terms}>
\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $m_1^{e_T} = m_1(\sigma^\times) - \sum_{x\in T^\circ} m_1^x$, $n_1^{e_T} = m_1(\tau^\times) - \sum_{x\in T^\circ} n_1^x$。在 (4.23) 中，我们有

$$f_{tn}^{(n)}(<\text{remainder terms}>) = O(n^{k-1}) \quad (n\to\infty). \tag{4.24}$$

事实上，由 (4.1) 和 (1.11) 可得

$$\sum_{g\in N_\sigma} f_{tn}^{(n)}(g) = O\big(n^{-\frac{|\sigma^\times|-l(\sigma^\times)}{2}}\big)O(n^{k-l(\sigma)-1}) = O(n^{\frac{k}{2}-1}),$$

$$n^{k-l(\sigma)} f_{tn}^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{m_1^x}2^{m_2^x}\cdots))_{x\in T}\big) = n^{k-l(\sigma)}O\big(n^{-\frac{|\sigma^\times|-l(\sigma^\times)}{2}}\big) = O(n^{\frac{k}{2}}),$$

这意味着 (4.24)。注意到

$$-\frac{1}{2}(|\sigma^\times| - l(\sigma^\times) + |\tau^\times| - l(\tau^\times)) - 1 = -k + l(\sigma) + l(\tau) - 1,$$

由引理 4.7 可得

$$\begin{aligned}
&f_{tn}^{(n)}\Big(\frac{A_{\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{m_1^x}2^{m_2^x}\cdots))_{x\in T}}}{|C_{\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{m_1^x}2^{m_2^x}\cdots))_{x\in T}}|}\frac{A_{\iota_{n,|\tau^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}}{|C_{\iota_{n,|\tau^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}}|}\Big) \\
&\qquad = f_{tn}^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|+|\tau^\times|}((1^{m_1^x+n_1^x}2^{m_2^x+n_2^x}\cdots))_{x\in T}\big) + O(n^{-k+l(\sigma)+l(\tau)-1}).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

此外，AFP 得出

$$\begin{aligned}
&f_{tn}^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|+|\tau^\times|}((1^{m_1^x+n_1^x}2^{m_2^x+n_2^x}\cdots))_{x\in T}\big) \\
&\quad = f_{tn}^{(n)}\big(\iota_{n,|\sigma^\times|}((1^{m_1^x}2^{m_2^x}\cdots))_{x\in T}\big)\, f_{tn}^{(n)}\big(\iota_{n,|\tau^\times|}((1^{n_1^x}2^{n_2^x}\cdots))_{x\in T}\big) + o(n^{-k+l(\sigma)+l(\tau)}).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

结合 (4.25)、(4.26)、(4.24) 和 (4.23)，我们得到

$$f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))]\big) \\ = f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]\big)\, f_{tn}^{(n)}\big(\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))]\big) + o(n^{k}) + O(n^{k-1}).$$

这就完成了 (4.22) 的证明。

4.2.2 定理 1.3 证明的最后一步

我们证明，对于任意 $\zeta \in \widehat{T}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，L^2-收敛于 $M_k(\mathfrak{m}_{(\lambda\zeta)\sqrt{n}})$。为了说明 (4.15) 的收敛性属于 L^2，令 $C_k^y(t)$ 表示 (4.15) 的右端。于是，由 (4.22) 得

$$\lim_{n\to\infty} f_{tn}^{(n)}\big((n^{-\frac{k}{2}}\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))] - C_k^y(t))(n^{-\frac{k}{2}}\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(z,(n+1))] - C_k^z(t))\big) = 0. \tag{4.27}$$

(4.16) 的右端等于

$$\frac{1}{|T|^k}\sum_{y\in T} C_k^y(t)\overline{\zeta(y)} =: K_k^{\zeta}(t).$$

由于归一化不可约特征标在中心上具有乘法性，我们得到

$$\mathbb{E}_{M_{tn}^{(n)}}\big[(n^{-\frac{k}{2}}M_k(\mathfrak{m}_{\lambda\zeta}) - K_k^{\zeta}(t))^2\big] = f_{tn}^{(n)}\Big(\big\{\sum_{y\in T}(n^{-\frac{k}{2}}\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))] - C_k^y(t))\overline{\zeta(y)}\big\}^2\Big). \tag{4.28}$$

利用 $\mathcal{A}$-代数 $*$上的迹态 ϕ 的不等式：

$$\phi\Big(\big(\sum_i a_i\big)^2\Big) \leqq \Big(\sum_i \phi(a_i^* a_i)^{\frac{1}{2}}\Big)^2, \qquad a_i \in \mathcal{A}$$

and

$$\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))]^* = \mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y^{-1},(n+1))], \qquad \overline{C_k^y(t)} = C_k^{y^{-1}}(t),$$

我们将（4.28）继续写为

$$\leqq \Big\{\sum_{y\in T} f_{tn}^{(n)}\big((n^{-\frac{k}{2}}\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y^{-1},(n+1))] - C_k^{y^{-1}}(t))(n^{-\frac{k}{2}}\mathrm{E}[J_{n+1}^{k}(y,(n+1))] - C_k^y(t))\big)^{\frac{1}{2}}\Big\}^2,$$

根据（4.27），当 $n\to\infty$ 时其趋于 0。因此，我们得到了 L^2-收敛

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{M_{tn}^{(n)}}\big[\big(M_k(\mathfrak{m}_{(\lambda\zeta)\sqrt{n}}) - M_k(\mathfrak{m}_{\omega(t)\zeta})\big)^2\big] = 0 \tag{4.29}$$

其中，$\omega(t)^{\zeta}$ 就是（4.17）中的那个。为了从（4.29）推出（1.22），我们考察 $\mathscr{D}$（连续图）的拓扑。带有弱收敛拓扑的 $\mathbb{R}$ 上的概率测度集合 $\mathscr{P}$ 与带有一致拓扑的 $\mathscr{D}$ 同胚。令

$$\mathscr{P}_0 = \{\mathfrak{m}\in\mathscr{P} \mid \mathfrak{m} \text{ 具有所有矩，且其矩问题是确定的}\}.$$

设 $\mathscr{D}_0$ ($\subset \mathscr{D}$) 为 $\mathscr{P}_0$ 的像。我们为 $\mathscr{D}_0$ 赋予矩拓扑，这是一种可度量化的拓扑，由可数族半距离定义

$$|M_k(\mathfrak{m}_{\varphi_1}) - M_k(\mathfrak{m}_{\varphi_2})|, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}_0.$$

矩拓扑强于（或等于） $\mathscr{D}_0$上的一致拓扑。参见[13, 命题3.4] 。即，对于 $\varphi \in \mathscr{D}_0$，我们有 $\forall \varepsilon > 0$、 $\exists \delta > 0$、k_1、$\cdots$、$k_p \in \mathbb{N}$，使得 $\forall \phi \in \mathscr{D}_0$,

$$\max_{i\in\{1,\dots,p\}} |M_{k_i}(\mathfrak{m}_\phi) - M_{k_i}(\mathfrak{m}_\varphi)| \leqq \delta \implies \|\phi - \varphi\|_{\sup} \leqq \varepsilon.$$

特别地，取$\phi = \nu^{\sqrt{n}}$、 $\nu \in \mathbb{Y} \subset \mathscr{D}_0$，我们有

$$\big\{\nu \in \mathbb{Y} \,\big|\, \|\nu^{\sqrt{n}} - \varphi\|_{\sup} > \varepsilon\big\} \subset \big\{\nu \in \mathbb{Y} \,\big|\, \max_{i\in\{1,\dots,p\}} |M_{k_i}(\mathfrak{m}_{\nu^{\sqrt{n}}}) - M_{k_i}(\mathfrak{m}_\varphi)| > \delta\big\}. \quad (4.30)$$

设 φ 为(4.29)中的 $\omega(t)^\zeta$ 。则(4.30)给出

$$\begin{aligned}\big\{\lambda = (\lambda^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T}} \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T}) \,\big|\, &\max_{\zeta\in\widehat{T}} \|(\lambda^\zeta)^{\sqrt{n}} - \omega(t)^\zeta\|_{\sup} > \varepsilon\big\} \\ &\subset \bigcup_{\zeta\in\widehat{T}} \bigcup_{i=1}^{p} \big\{\lambda \in \mathbb{Y}_n(\widehat{T}) \,\big|\, |M_{k_i}(\mathfrak{m}_{(\lambda^\zeta)^{\sqrt{n}}}) - M_{k_i}(\mathfrak{m}_{\omega(t)^\zeta})| > \delta\big\}. \quad (4.31)\end{aligned}$$

在(4.31)处取 $M_{tn}^{(n)}$ 值并利用(4.29)，我们得到(1.22)。

4.3 典型例子

正如在AFP的定义之前所述，AFP的一个极端情形由 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的特征标 f （即一个极端归一化正定中心函数）通过 $f_{(n)} = f|_{\mathfrak{S}_n(T)}$产生。有限 T情形下 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的特征已在 [5]和[6] 中分类，而对一般紧 T，我们参阅 [7] 和 [8] 。由于杨图的极限形状最初是就Plancherel测度加以考虑的，而该测度对应于 $f = \delta_e$，因此讨论来自 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的特征的系综是自然的。 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的特征集合由Thoma单纯形的一个扩张来参数化：

$$\begin{aligned}\Delta = \Big\{(\alpha,\beta,c) = \big((\alpha_i^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T},i\in\mathbb{N}}, (\beta_i^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T},i\in\mathbb{N}}, (c^\zeta)_{\zeta\in\widehat{T}}\big) \,\Big|\, \\ \alpha_1^\zeta \geqq \alpha_2^\zeta \geqq \cdots \geqq 0,\ \beta_1^\zeta \geqq \beta_2^\zeta \geqq \cdots \geqq 0,\ c^\zeta \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^\zeta + \beta_i^\zeta) \leqq c^\zeta,\ \sum_{\zeta\in\widehat{T}} c^\zeta = 1\Big\}.\end{aligned}$$

与 δ_e 相对应的参数为

$$\alpha_i^\zeta = \beta_i^\zeta = 0, \qquad c^\zeta = (\dim\zeta)^2/|T|.$$

α 和 β 参数表示为杨图的行与列长度分别除以杨图大小所得比值的极限。由于我们构造的是极限形状得以保留的系综，因此我们需要考虑满足以下条件的参数范围

$$\alpha_i^\zeta = \alpha_i^\zeta(n) = O\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big),\ \beta_i^\zeta = \beta_i^\zeta(n) = O\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big),\ c^\zeta = c^\zeta(n) = O(1) \quad (n \to \infty)$$

并设

$$f^{(n)} = f_{\alpha(n),\beta(n),c(n)}|_{\mathfrak{S}_n(T)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

这些系综的具体计算见 [16, 第 5]节。为避免重复，此处省略细节。在 [16] 中，我们处理了一般的平均极限形状。其中部分示例也可作为本文集中极限形状的示例，包括阿贝尔 T 的情形，以及 [16, 表 1] 中将暂停时间称为“类指数”的条目。

参考文献

[1] P. Biane，半圆系统与量子随机游走的置换模型，Pacific J. Math. 171 (1995), 373–387.[2] P. Biane，对称群的表示与自由概率，Adv. Math. 138 (1998), 126–181.[3] P. Biane，对称群特征标的近似分解与集中，Internat. Math. Res. Notices (2001), 179–192.[4] P. Biane，对称群特征标与自由累积量，载于 A.M. Vershik（编）：《应用于数学物理的渐近组合》，Lect. Notes Math. Vol. 1815, pp.185–200, Springer, 2003.[5] R. Boyer，无限圈积的特征标理论，Int. J. Math. Math. Sci. 9 (2005), 1365–1379.[6] T. Hirai, E. Hirai，有限群与无限对称群的圈积的特征标，J. Math. Kyoto Univ. 45 (2005), 547–597.[7] T. Hirai, E. Hirai，紧群与无限对称群的圈积的特征标及其典范子群的特征标，J. Math. Kyoto Univ. 47 (2007), 269–320.[8] T. Hirai, E. Hirai, A. Hora，紧群与对称群的圈积 $\mathfrak{S}_n(T)$的特征标极限以及 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的特征标，I，Nagoya Math. J. 193 (2009), 1–93.[9] A. Hora，关于 Biane特征标公式及渐近表示论中集中现象的注，载于 H. Heyer 等（编）：《无限维调和分析 III》，pp. 141–159, 世界科技出版公司，2005。

[10] A. Hora，B型 Weyl 群的杨图极限形状，Oberwolfach报告 No. 15/2005 自由概率论，pp. 867–869, 2005.[11] A. Hora，Jucys-Murphy元素与修正杨图上的游走，Banach中心出版物，Vol. 73 (2006), 223–235.[12] A. Hora，通过自由概率得到随机杨图轮廓的扩散极限，京都大学数理科学研究所出版物 51 (2015), 691–708.[13] A. Hora，杨图系综的极限形状问题，Springer数学物理简明读本，vol. 17, Springer, 2016.[14] A. Hora，微观暂停时间分布对随机杨图动力学极限形状的影响，电子概率学杂志 25 (2020), article no. 70, 1–21.[15] A. Hora，对称群的杨图动力学自旋极限形状与自旋Jucys–Murphy元素，2024, arXiv: 2309.06059v2, 55pp.[16] A. Hora，随机多重杨图平均极限形状的时间演化，2025, arXiv: 2509.07393v1, 21pp.[17] A. Hora, T. Hirai，与紧群无限圈积相关的分支图上的调和函数，Kyoto J. Math. 54 (2014), no.4, 775–817.[18] A. Hora, T. Hirai, E. Hirai，紧群与对称群的圈积 $\mathfrak{S}_n(T)$的特征标极限以及 $\mathfrak{S}_\infty(T)$的特征标，II：从概率论的角度，J. Math. Soc. Japan 60 (2008), 1187–1217.[19] A. Hora, N. Obata，《量子概率与图的谱分析》，理论与数学物理，Springer, 2007.[20] S.V. Kerov，《对称群的渐近表示论及其在分析中的应用》，Transl. Math. Monographs 219, Amer. Math. Soc., 2003.[21] A. Kleshchev，《对称群的线性表示与射影表示》，剑桥大学出版社，2005.[22] H. Kvinge, A.M. Licata, S. Mitchell，Khovanov的Heisenberg范畴、自由概率中的矩与移位对称函数，代数组合学 Vol. 2 (2019), 49–74.[23] A. Nica, R. Speicher，《自由概率组合学讲义》，London Math. Soc. Lect. Notes Series, vol. 335, 剑桥大学出版社，2006.[24] P. Śniady，圈积表示的高斯涨落，Infin. Di- mens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., Vol. 9, No. 4 (2006), 529–546.[25] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, A. Nica，《自由随机变量》，CRM专著丛书，Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1992。