arXiv:2602.14566v1 [cs.CE] 16 Feb 2026

体域中嵌入的曲基尔霍夫梁与基尔霍夫–洛夫壳的同步分析

Jonas Neumeyer、Michael Wolfgang Kaiser、Thomas-Peter Fries

2026年2月17日

结构分析研究所格拉茨工业大学
Lessingstr. 25/II, 8010 格拉茨，奥地利
w
w
w.
ifb.tugraz.atjonas.neumeyer@tugraz.at

摘要

一组曲梁和壳由某个体域上的标量函数的水平集在几何上定义。每种结构的力学模型均基于基尔霍夫–洛夫理论，即考虑无剪切变形的小位移。针对各个几何形状建立的模型被扩展为体模型，从而同时对所有水平集上的整组梁/壳进行建模。本文重点研究此类模型的数值分析。本文提出一种混合杂交、高阶精度的体迹有限元法，使得能够使用定义在体域维度上的标准 C^0-连续拉格朗日单元。也就是说，基尔霍夫–洛夫理论下基于位移的公式所要求的高阶连续性要求得以成功缓解。多项数值测试验证了所提出方法的准确性和高阶收敛性，也可作为未来研究的基准测试案例。

关键词：基尔霍夫梁、基尔霍夫–洛夫壳、切向微分演算、体迹有限元法、混合杂交公式、高阶收敛

目录

1 引言 **3**

2 预备知识与几何定义 5

2.1 水平集与体域.6 2.2 几何量与微分算子.7 2.3 积分定理.8

3 力学 抗剪刚性梁与壳的代数模型 1 **0**

3.1 控制方程.10 3.2 边界条件.12

4 抗剪刚性梁与壳的体迹有限元法 **14**

4.1 混合连续函数空间.15 4.2 混合杂交离散函数空间.16 4.3 基尔霍夫梁的弱形式.19 4.4 基尔霍夫–洛夫壳的弱形式.20 4.5 静力凝聚.20

5 数值结果 21

5.1 $\mathbb{R}^2$ 中的弧形梁族.23 5.2 更一般体域上的圆形梁族 $\mathbb{R}^2$ . . . . . 25 5.3 $\mathbb{R}^3$ 中的简支壳族.28 5.4 曲面上的固支穹顶族 $\mathbb{R}^3$ .29

6 结论与展望 **31**

参考文献 **32**

1 引言

结构力学中的模型可根据维数进行分类。从三维连续体出发，几何假设通常能够降低所得模型的维数。也就是说，当一个维度远大于另外两个维度时，通常可以建立一维力学模型，例如受拉杆和梁的模型。当厚度远小于另外两个维度时，则可得到二维板壳模型。对于曲面结构，也可以进行此类降维，例如曲梁 [28, 30, 34] 和壳[2, 3, 10, 60], ；这类结构嵌入在更高维空间中。从几何角度看，曲梁可理想化为其中心线，而壳则可理想化为其中面。利用这类结构的细长性，降阶模型还能以低得多的计算成本，捕捉主要的应力和应变量。

曲线结构力学建模的一个关键方面，是将其几何形状定义为流形，并引入先进的（曲面）微分算子。对于通过参数化显式定义的显式 几何形状，或通过水平集函数隐式 描述的几何形状，均可采用这种方法。切向微分演算（TDC） [16, 19], 是一种合适且通用的方法，它是微分几何的一种现代诠释，适用于显式和隐式几何描述。此外，基于 TDC 的公式无需使用（局部）曲线坐标，所有量均相对于曲线结构所嵌入的全局笛卡尔坐标系表示。

对于分析，基于有限元法（FEM）的一种直接方法是通过曲面网格离散某种显式几何形状。这种方法通常称为曲面有限元法，并已基于 TDC 应用于膜 [26, 29],曲梁 [30, 34], 和壳 [43, 44, 45, 54, 55]。另一方面，隐式定义的曲线结构通常采用虚拟域方法进行处理，例如切割有限元法或迹有限元法；这类方法使用的背景网格既不与流形对齐，也不与其边界对齐。该流形通常由水平集函数的零等值线或零等值面定义。这种方法的应用实例包括输运问题 [7, 8, 47, 48, 46], 膜 [9, 26], 和壳 [27, 56]。

将隐式方法扩展到单个水平集之外，即可同时分析定义在体域上的多条曲线或多个曲面。在这种情况下，体域

采用有限元进行显式离散。体单元与体域边界相吻合，但通常不与水平集对齐。这种方法后来被称为体迹有限元法 [23], ，最早应用于输运问题[6, 18, 17, 19]。近期的研究将该方法扩展到了流体动力学 [37] 和结构力学，涵盖绳索、膜 [23], 、剪切柔性曲梁[36]以及壳 [35]。然而，由于剪切刚性结构的控制方程具有更严格的连续性要求，体迹有限元法框架尚未用于此类结构；这正是本文的主要研究内容。

考虑横向剪切变形与否，是弯曲薄结构的主要区别所在。忽略横向剪切变形会得到剪切刚性模型，例如基尔霍夫梁和基尔霍夫–洛夫壳 [39, 40]。相反，考虑横向剪切变形则会得到剪切柔性模型，即曲线 Timoshenko–Ehrenfest 梁[58] 和 Reissner–Mindlin 壳 [53, 41]。剪切刚性模型 适用于剪切变形可忽略的薄梁和薄壳。其控制方程通常由一个向量值四阶偏微分方程（PDE）组成，其中仅以中心线或中面的位移作为主要未知量；参见[20, 30, 34, 38, 54]。相比之下，剪切柔性模型 适用于薄壳至中等厚度的壳。其控制方程通常由两个向量值二阶偏微分方程组成，以位移和转动为未知量；参见 [20, 30, 55]。

从数值角度来看，尽管剪切柔性模型需要更多的自由度（DOFs），但其二阶偏微分方程允许使用标准的 C^0连续拉格朗日单元进行直接的有限元离散。相比之下，剪切刚性模型在基于位移的公式中通常至少需要 C^1连续的形函数，这是由于其强形式中包含四阶导数，从而无法使用标准拉格朗日单元。该挑战可以通过混合或混合杂交公式加以克服。此类方法已广泛应用于 Kirchhoff–Love 板 [1, 4, 5, 13, 32, 51] ，并且最近已扩展至 Kirchhoff–Love 壳 [43, 44, 45, 52]。在该方法中，引入力矩张量作为额外的主要未知量，并建立第二个控制方程，从而导致更多的自由度。这将连续性要求降低至 C^0 连续，使拉格朗日单元得以使用。为减少自由度，需要进行杂交化和静力凝聚：引入拉格朗日乘子，以在单元界面上弱地施加沿切向的力矩连续性条件，随后逐单元消去力矩张量场。

本工作的目标是为一族几何推导力学模型

线性基尔霍夫梁和 Kirchhoff–Love 壳分别位于二维和三维体域中。随后，我们以体迹有限元法的形式推导一种合适的数值方法。主要贡献总结如下：

- 我们提出了第一种能够在体迹有限元法框架内同时求解一族连续隐含的基尔霍夫梁或Kirchhoff–Love 壳的方法。与剪切柔性结构相比，这些剪切刚性列式所需的自由度更少，从而降低总体计算成本。

- 连续性要求方面的困难通过采用混合杂交方法得以解决，并将 [43] 的方法推广到本文的同时分析中。所得框架使得能够在体网格中使用标准的 C^0连续拉格朗日单元。

- 本文给出了多种数值测试算例，其解光滑并实现了高阶收敛率，因而也可作为验证与未来研究的基准测试。

本文结构如下。第2节讨论有关几何描述与曲面微分算子的预备知识。第3节简要总结基尔霍夫梁与基尔霍夫–洛夫壳的力学模型，并由此得到模型的混合强形式。第4节在体迹有限元法框架下推导两种模型的混合杂交弱形式。第5节给出展示高阶收敛的数值结果。最后，第6节以若干结论性评述以及对未来研究的展望结束全文。

2 预备知识与几何定义

出发点是对体域上的曲梁和壳族进行几何定义，随后将在力学建模中对其进行联合分析。这些几何定义基于体域上标量函数的水平集，并遵循水平集方法 [50, 49, 57]。文中分别描述了嵌入二维空间（$d = 2$）的曲梁和嵌入三维空间（$d = 3$）的壳。

2.1 水平集与体域

设有一个 d 维体域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，以及一个水平集函数 $\phi(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$，其中 ϕ 在体域内的最小值和最大值分别为 $\phi^{\min} = \inf \phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\phi^{\max} = \sup \phi(\boldsymbol{x})$，见图 1(a) 和 1(d)。$\phi$ 的水平集，即等值线和等值面，是体现梁和壳几何形状的曲流形，分别定义为

$$\Gamma^c = \left\{ \boldsymbol{x} \in \Omega : \phi(\boldsymbol{x}) = c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{with} \quad \phi^{\min} < c < \phi^{\max}. \tag{2.1}$$

本文关注余维一的结构，即 $(d-1)$ 维流形。单个流形 $\partial\Gamma^c$ 的边界，是 Γ^c 与体域边界 $\partial\Omega$ 的交点或曲线。这种情况如图 1(b) 和图 1(e) 所示。

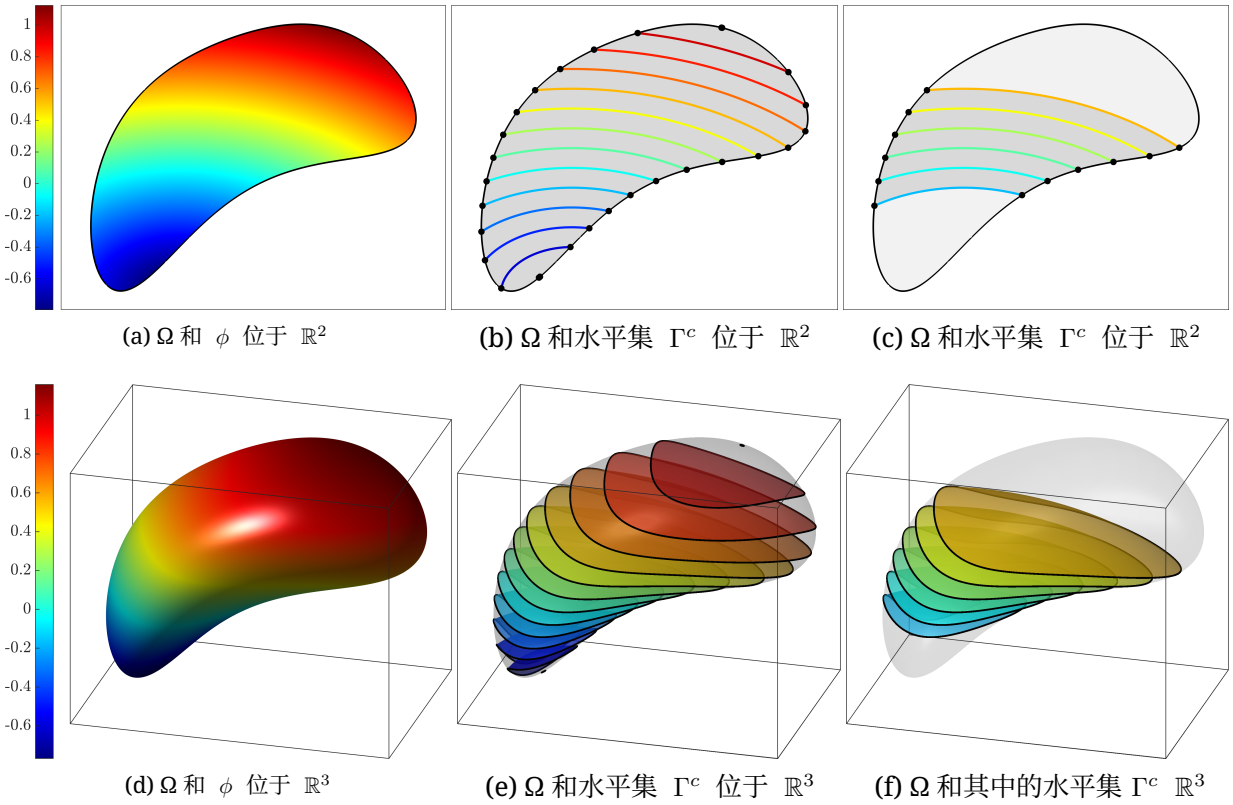
在 d维体域 Ω 中，流形在局部可能退化为单点，即 $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi^{\min}$ 且 $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi^{\max}$。因此，水平集上的力学边值问题在这些位置可能适定性不佳，导致体域上的同时求解结果出现局部陡峭梯度，进而使数值结果的收敛率低于最优，如 [23] 中所示。为避免此类影响，可以在定义 Ω 时考虑水平集函数，例如，根据预先指定的水平集值对某个超集 $\Omega^{\sup} \subset \mathbb{R}^d$ 加以限制，

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} \in \Omega^{\sup} : \phi^{\min} \leq \phi(\boldsymbol{x}) \leq \phi^{\max} \right\}, \tag{2.2}$$

如图 1(c) 和 1(f) 所示。在这种情况下，$\partial\Omega$ 由超集$\partial\Omega^{\sup} \subset \mathbb{R}^d$ 的边界定义为

$$\partial\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^{\sup} : \phi^{\min} \leq \phi(\boldsymbol{x}) \leq \phi^{\max} \right\}. \tag{2.3}$$

还需注意，水平集函数与体域的某些组合可能导致无效情况，这通常可追溯至快速的拓扑变化。关于这一主题的详细讨论见 [18, 23]。下文仅考虑ϕ 与 Ω 的有效组合，以确保水平集区间内的几何保持光滑且不发生拓扑变化。



(a) Ω 和 ϕ 位于 $\mathbb{R}^2$ (b) Ω 和水平集 Γ^c 位于 $\mathbb{R}^2$ (c) Ω 和水平集 Γ^c 位于 $\mathbb{R}^2$

(d) Ω 和 ϕ 位于 $\mathbb{R}^3$ (e) Ω 和水平集 Γ^c 位于 $\mathbb{R}^3$ (f) Ω 和其中的水平集 Γ^c $\mathbb{R}^3$

图 1： 对于任意体域 Ω 和水平集函数 $\phi(\boldsymbol{x})$，(a) 和 (d) 显示了水平集函数 $\phi(\boldsymbol{x})$，(b) 和 (e) 显示了 Ω 中选取的若干水平集 Γ^c 。将体域限制在指定的水平集区间内时，参见式 (2.2)，(c) 和 (f) 给出了相应示例，其中包括选取的水平集 Γ^c。

2.2 几何量与微分算子

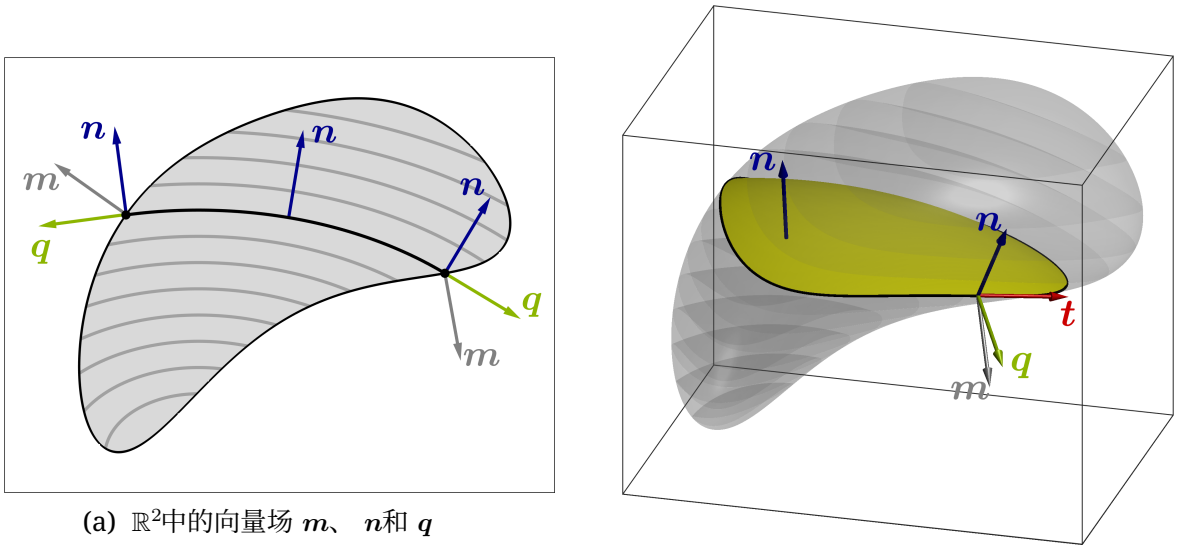
为了定义流形上边值问题的控制方程，需要若干几何量（例如法向量场和切向量场）以及曲面微分算子（例如相对于水平集的梯度和散度）。已有多篇文献对此进行讨论，更多详情见 [16, 19, 31, 23, 35] 。为简洁起见，我们在表 1 中总结了这些术语。由于几何由水平集隐式定义，因此参数化和曲线坐标并不适用，故需要采用 TDC 对其进行无坐标描述。

	$\mathbb{R}^2$中的曲梁	$\mathbb{R}^3$中的壳
单位法向量 在 $\partial\Omega$上相对于 体域 （图 2）	$\boldsymbol{m}$ （来自边界 体网格中单元的结果）	
单位法向量 Ω 中相对于水平集 （图 2）	$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}^\star}{\|\boldsymbol{n}^\star\|} \quad \boldsymbol{n}^\star = \nabla\phi$	
单位切向量 在 $\partial\Omega$ 上（图 2）	-	$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t}^\star}{\|\boldsymbol{t}^\star\|},\ \boldsymbol{t}^\star = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$
单位余法向量 在 $\partial\Omega$ 上的向量 (图 2)	$\boldsymbol{q} = \begin{cases} [-n_y, n_x]^{\mathrm{T}} \text{ 如果} \\ \qquad n_x m_y \geq n_y m_x \\ [n_y, -n_x]^{\mathrm{T}} \quad n_x m_y < n_y m_x \text{ 如果} \end{cases}$	$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$
投影算子场	$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$	
曲面梯度 一个标量函数	$\nabla_\Gamma f = \mathbf{P} \cdot \nabla f$	
方向曲面梯度 向量函数的	$\nabla_\Gamma^{\mathrm{dir}} \boldsymbol{v} = \nabla \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{P}$	
协变曲面梯度 向量函数的	$\nabla_\Gamma^{\mathrm{cov}} \boldsymbol{v} = \mathbf{P} \cdot \nabla_\Gamma^{\mathrm{dir}} \boldsymbol{v} = \mathbf{P} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{P}$	
曲面散度 向量函数的	散度$_\Gamma \boldsymbol{v}$ = 迹($\nabla_\Gamma^{\mathrm{dir}} \boldsymbol{v}$) =迹($\nabla_\Gamma^{\mathrm{cov}} \boldsymbol{v}$)	
曲面散度 张量函数的	散度$_\Gamma \mathbf{T}$ = $\begin{bmatrix} \Gamma[T_{11}, T_{12}] \\ \text{散度}_\Gamma[T_{21}, T_{22}] \end{bmatrix}$散度	散度$_\Gamma \mathbf{T}$ = $\begin{bmatrix} \text{散度}_\Gamma[T_{11}, T_{12}, T_{13}] \\ \text{散度}_\Gamma[T_{21}, T_{22}, T_{23}] \\ \text{散度}_\Gamma[T_{31}, T_{32}, T_{33}] \end{bmatrix}$
魏因加滕映射	$\mathbf{H} = \nabla_\Gamma^{\mathrm{dir}} \boldsymbol{n} = \nabla_\Gamma^{\mathrm{cov}} \boldsymbol{n}$	
平均曲率	$\varkappa$ =tr(**H**)	

表 1：隐式定义梁和壳的几何量与曲面微分算子。

2.3 积分定理

积分定理是推导（力学）边值问题弱形式的重要组成部分，也是任何有限元过程所必需的；该过程从基于经典偏微分方程的强形式出发。在体迹有限元法中，所需的积分定理由体域上的<style id='1'>余面积公式</style>和适用于<style id='3'>各个</style>流形的经典积分定理共同构成，



(a) $\mathbb{R}^2$中的向量场 $\boldsymbol{m}$、 $\boldsymbol{n}$和 $\boldsymbol{q}$

(b) $\mathbb{R}^3$中的向量场 $\boldsymbol{m}$、 $\boldsymbol{n}$、 $\boldsymbol{q}$和 $\boldsymbol{t}$

图 2： 选定流形 Γ^c 及其边界 $\partial\Gamma^c$上的向量场。相对于 $\partial\Omega$ 的法向量 $\boldsymbol{m}$以灰色显示，相对于 Γ^c 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 以蓝色显示，余法向量 $\boldsymbol{q}$ 以绿色显示，切向量 $\boldsymbol{t}$ 以红色显示。

。首先，必须将一族流形上的表达式从对每个 Γ^c or $\partial\Gamma^c$ 及区间 $[\phi^{\min}, \phi^{\max}]$ 的二重积分转换为对 Ω 或 $\partial\Omega$ 的单重积分。此操作可使用余面积公式 [21, 42, 14, 18, 19, 23, 35], 来完成，其定义如下：

$$\int_{\phi^{\min}}^{\phi^{\max}} \int_{\Gamma^c} f \,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega} f \,\|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Omega, \tag{2.4}$$

$$\int_{\phi^{\min}}^{\phi^{\max}} \int_{\partial\Gamma^c} g\,\boldsymbol{q} \,\mathrm{d}\partial\Gamma \,\mathrm{d}c = \int_{\partial\Omega} g\,\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}) \,\|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Omega. \tag{2.5}$$

其次，将余面积公式与针对单个流形的 [15,22, 54], 积分定理相结合，得到适用于体域上所有水平集的散度定理，如 [6, 23, 35]所示。因此，对于体域 Ω 中的一组流形 Γ^c，考虑标量函数 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ 和向量函数 $\boldsymbol{v}:\Omega \to \mathbb{R}^d$，其积分定理为

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f \,\mathrm{div}_{\Gamma}\boldsymbol{v} \,\|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Omega = &-\int_{\Omega} \nabla_{\Gamma} f\cdot\boldsymbol{v} \,\|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \varkappa\, f\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) \,\|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} f\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}) \,\|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.6}$$

参照式 (2.6)，对于某个向量函数 $\boldsymbol{v}$ 和张量函数$\mathbf{T}:\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$，其积分定理为

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{div}_\Gamma\mathbf{T}\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \nabla_\Gamma^{\mathrm{dir}}\boldsymbol{v}:\mathbf{T}\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \varkappa\,\boldsymbol{v}\cdot\big(\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{n}\big)\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega \\ + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\cdot\big(\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{q}\big)\,\big(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}\big)\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.7}$$

请注意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b}$表示两个向量的内积，而$\mathbf{A}:\mathbf{B}=\operatorname{tr}\big(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\big)$表示两个张量的弗罗贝尼乌斯内积。

3 抗剪刚性梁和壳的力学模型

接下来介绍曲梁基尔霍夫梁和基尔霍夫-洛夫壳的力学模型。两种模型均忽略剪切变形。这里考虑小变形，即几何线性情形。遵循我们先前的工作 [54, 34]，控制方程采用坐标无关的形式给出；在该工作中，我们推导了曲梁和壳的基于位移的公式。众所周知，由此得到的边值问题在强形式中涉及四阶导数，在弱形式中涉及二阶导数，因此，数值分析需要使用 C^1-连续形函数。等几何分析自然具备这类形函数，而经典有限元法则不然；经典有限元法依赖 C^0-连续形函数，例如拉格朗日单元所提供的形函数。为使经典有限元框架仍可用于分析，我们在 [43], 中针对单个壳提出了一种混合杂交方法，其中不仅位移向量 $\boldsymbol{u}$，力矩张量$\mathbf{m}_\Gamma$ 也作为主要未知量。通过在单元层级静力凝聚附加自由度，最终以位移和切向转动作为未知量。下文将概述这一模型，并将其调整为所提出的情形，即在体域内的所有水平集上同时求解梁和壳。

3.1 控制方程

强形式的场方程根据运动学、构成关系和平衡推导而得。对于纯基于位移的方法，剪切刚性梁或壳的强形式会产生一个包含四阶导数的单一场方程，如

见 [34, 54]。然而，含有两个未知场 $\boldsymbol{u}$ 和 $\mathbf{m}_\Gamma$的混合强形式由两个场方程给出，

$$-\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\mathbf{m}_\Gamma)+\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{div}_\Gamma\big(\mathbf{P}\cdot\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{m}_\Gamma\big)+\mathbf{H}\cdot\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{m}_\Gamma+\mathrm{div}_\Gamma\big(\mathbf{H}\cdot\mathbf{m}_\Gamma\big)+\mathrm{div}_\Gamma\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma(\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{f}. \tag{3.2}$$

需要注意的是这两个方程仅包含二阶导数 .

	$\mathbb{R}^2$中的基尔霍夫梁	$\mathbb{R}^3$中的Kirchhoff–Love 壳
线性应变张量	$\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma=\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Memb}}+\zeta\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}$	
膜应变张量	$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Memb}}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\left[\nabla_\Gamma^{\mathrm{cov}}\boldsymbol{u}+(\nabla_\Gamma^{\mathrm{cov}}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\right]$	
弯曲应变张量	$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\boldsymbol{u})=-\sum_{i=1}^{d}\nabla_\Gamma^{\mathrm{cov}}(\nabla_\Gamma u_i)\,n_i$	
有效法向力张量	$\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Memb}})=E\,A\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Memb}}$	$\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Memb}})=t\mathbf{C}_\Gamma:\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Memb}}$ $=t\left[2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Memb}}+\lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Memb}})\,\mathbf{P}\right]$
力矩张量	$\mathbf{m}_\Gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}})=E\,I\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}$	$\mathbf{米}_\Gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}})=\frac{t^3}{12}\mathbf{C}_\Gamma:\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}$ $=\frac{t^3}{12}\left[2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}+\lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}})\,\mathbf{P}\right]$
物理法向力张量	$\mathbf{n}_\Gamma^{\mathrm{real}}=\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma+\mathbf{H}\cdot\mathbf{m}_\Gamma$	
逆材料law	$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Bend}}(\mathbf{米}_\Gamma)=\frac{1}{E\,I}\,\mathbf{m}_\Gamma$	$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Bend}}(\mathbf{m}_\Gamma)=\frac{12}{t^3}\mathbf{C}_\Gamma^{-1}:\mathbf{m}_\Gamma$ $=\frac{12}{E\,t^3}\left[(1+\nu)\,\mathbf{米}_\Gamma-\nu\,\mathbf{转}(\mathbf{米}_\Gamma)\,\mathbf{P}\right]$

Tab。2：基尔霍夫梁和 Kirchhoff–Love 壳的力学量。

为简洁起见，所有相关力学量均汇总于表 2 中。运动学由线性应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma$ 定义，该张量取决于 $\boldsymbol{u}$，可分别分解为膜部分和弯曲部分，即 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Memb}}$ 以及 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\,\mathrm{Bend}}$。这三个张量均为对称张量，并且存在于梁或壳的切空间中。

本构关系 建立了应变与应力之间的联系。这里，有效法向力张量 $\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma$ 和力矩张量 $\mathbf{m}_\Gamma$ 分别取决于 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Memb}}$和$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}$。相关材料参数包括杨氏模量 E、泊松比 ν以及拉梅常数 $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$ 和 $\lambda=\frac{E\cdot\nu}{1-\nu^2}$。横截面的几何量包括面积 A、截面惯性矩 I和厚度 t。 $\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma$ 不应 —— ——

与物理法向力张量 $\mathbf{n}_\Gamma^{\text{real}}$混淆。三个张量均为面内张量，但通常只有 $\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma$ 和$\mathbf{m}_\Gamma$ 是对称的。

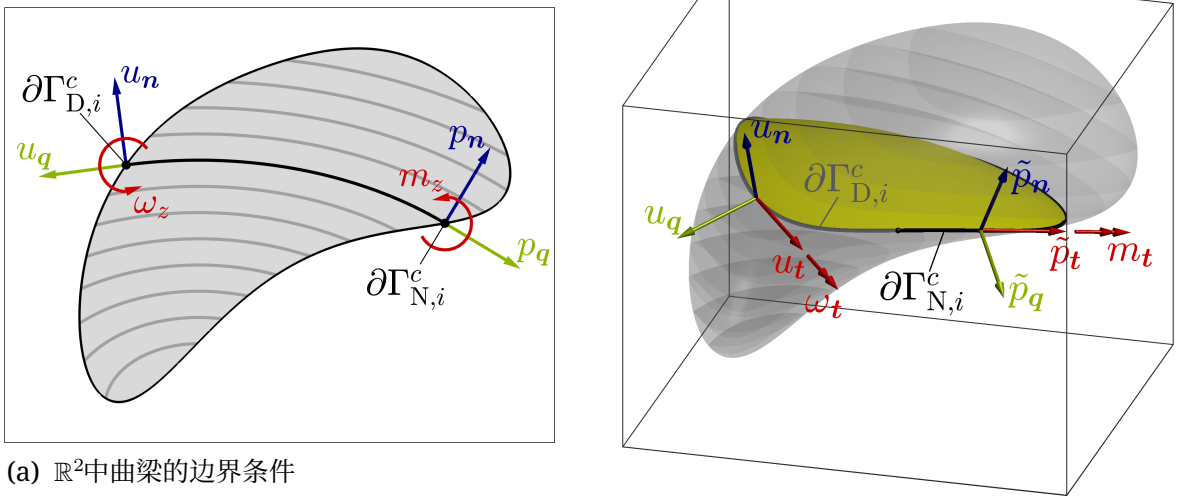
对弯曲部分的材料定律求逆，可得到取决于 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\text{Bend}}$ $\mathbf{m}_\Gamma$ 的定义。将这一关系与运动学中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\text{Bend}}$ 的定义相结合，可依据 Hellinger–Reissner 原理得到第一个方程（3.1）。第二个方程（3.2）表示力平衡，其中 $\boldsymbol{f}$ 为体载荷向量。

3.2 边界条件

边界条件是边值问题的重要组成部分，在剪切刚性结构的情况下需要特别注意。对于位移场，单个壳或梁的边界 $\partial\Gamma^c$ 存在两个互不重叠的部分，即 $\partial\Gamma^c_{\text{D},i} \cup \partial\Gamma^c_{\text{N},i} = \partial\Gamma^c$ 和 $\partial\Gamma^c_{\text{D},i} \cap \partial\Gamma^c_{\text{N},i} = \emptyset$。这些场分别为平移位移 $\boldsymbol{u}$，以及在壳的情况下绕切向方向的旋转 $\omega_{\boldsymbol{t}}$。对于处于 $\mathbb{R}^2$ 中的梁，转动场为绕（虚拟） z 轴的旋转 ω_z，该轴垂直于所考虑的实际二维空间所在平面。这些场的边界要么是狄利克雷边界 $\partial\Gamma^c_{\text{D},\boldsymbol{u}}$ 和 $\partial\Gamma^c_{\text{D},\omega}$，要么是相应的诺伊曼边界$\partial\Gamma^c_{\text{N},\boldsymbol{u}}$ 和 $\partial\Gamma^c_{\text{N},\omega_0}$。相应的边界条件及其基本组成部分汇总于表 3 中，对应的可视化结果见图 3。

对于梁，转动边界条件，也就是给定转角或弯矩，需要特别处理。从用户的角度来看，我们希望在全局坐标系中给定转角和弯矩（绕着指向二维平面外的 z 方向），但这些量的组合是基于 $\boldsymbol{n}$、 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的局部三元组。在梁的情形下， $\boldsymbol{t}$ 不是切向量，而更像是一个第二法向量，它垂直于 $\boldsymbol{n}$ 和 Ω 所在的二维平面，因此，根据所评估的边界 $\boldsymbol{t}$，它可以是 $\boldsymbol{t} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{t} = [0, 0, -1]^{\mathrm{T}}$，如图 4 所示。随后，可以通过乘以 t_z（ $\boldsymbol{t}$ 的第三个分量）来实现全局量与局部量之间的变换。

对于基尔霍夫–洛夫壳，无法直接规定绕余法向方向 $\omega_{\boldsymbol{q}}$ 旋转的边界条件，因为给定 $\boldsymbol{u}$后，该旋转已由其确定。绕余法向方向也不存在共轭边界力矩 $m_{\boldsymbol{q}}$，因此无法通过相应的诺伊曼边界条件直接规定。在基尔霍夫–洛夫板和壳中，这一问题通过将 $m_{\boldsymbol{q}}$ 与边界力 $\boldsymbol{p}$ 联系起来加以处理，



(a) $\mathbb{R}^2$中曲梁的边界条件

(b) $\mathbb{R}^3$中壳的边界条件

图 3： 选定边界 $\partial\Gamma^c$上的边界量。梁的位移和力分量分别表示为 (a) $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{q}$，壳的位移和力分量则表示为 (b) $\boldsymbol{n}$、 $\boldsymbol{q}$和 $\boldsymbol{t}$ 。梁的转动和弯矩绕 z轴作用，壳的转动和弯矩则绕 $\boldsymbol{t}$ 作用。这里区分狄利克雷边界 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{D}、i}$ 和诺伊曼边界 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{N}、i}$。

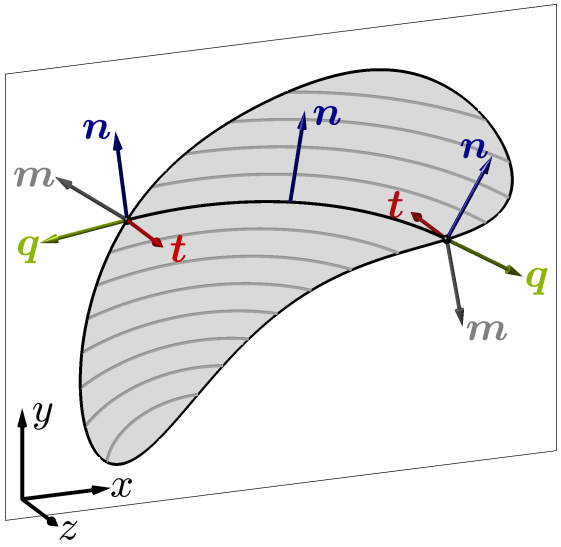


图4： 图2(a)中二维平面的三维示意图。可以看出，在所示的两个边界 $\partial\Gamma^c$上， $\boldsymbol{t}$均与 z轴对齐，在左边界沿 z正方向，在右边界沿 z负方向。

从而得到有效边界力 $\tilde{\boldsymbol{p}}$。基尔霍夫角力的影响并未

	基尔霍夫梁位于 $\mathbb{R}^2$	Kirchhoff–Love 壳位于 $\mathbb{R}^3$
狄利克雷边界条件	$\boldsymbol{u} = \hat{}\boldsymbol{u}$ 在 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{D}\,\boldsymbol{u}}$ $\omega_z = \hat{\omega}_z$ 位于 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{D},\omega}$ 上	$\boldsymbol{u} = \hat{}\boldsymbol{u}$ 在 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{D}\,\boldsymbol{u}}$ $\omega_{\boldsymbol{t}} = \hat{}\omega_{\boldsymbol{t}}$ 位于 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{D},\omega}$ 上
诺伊曼边界条件	$\boldsymbol{p} = \hat{}\boldsymbol{p}$ 位于 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{N},\,\boldsymbol{u}}$ 上 $m_z = \hat{m}_z$ 位于 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{N},\omega}$ 上	$\tilde{\boldsymbol{p}} = \hat{}\tilde{\boldsymbol{p}}$ 上 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{N},\,\boldsymbol{u}}$ $m_{\boldsymbol{t}} = \hat{}m_{\boldsymbol{t}}$ 在 $\partial\Gamma^c_{\mathrm{N},\omega}$
绕 $\boldsymbol{t}$ 旋转	$\omega_{\boldsymbol{t}} = -\left[(\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n}\right] \cdot \boldsymbol{q}$	
绕 $\boldsymbol{q}$ 旋转	-	$\omega_{\boldsymbol{q}} = -\left[(\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n}\right] \cdot \boldsymbol{t}$
绕 z 轴旋转	$\omega_z = \omega_{\boldsymbol{t}}\, t_z$	-
$\boldsymbol{n}$中的边界力	$p_{\boldsymbol{n}} = \left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{div}_\Gamma \mathbf{m}_\Gamma\right) \cdot \boldsymbol{q}$	
$\boldsymbol{q}$中的边界力	$p_{\boldsymbol{q}} = \left(\mathbf{n}^{\mathrm{real}}_\Gamma \cdot \boldsymbol{q}\right) \cdot \boldsymbol{q}$	
$\boldsymbol{t}$中的边界力	-	$p_{\boldsymbol{t}} = \left(\mathbf{n}^{\mathrm{real}}_\Gamma \cdot \boldsymbol{q}\right) \cdot \boldsymbol{t}$
剩余约束力	$\boldsymbol{p} = p_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n} + p_{\boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} = p_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n} + p_{\boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{q} + p_{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{n}$中的有效约束力	-	$\tilde{p}_{\boldsymbol{n}} = p_{\boldsymbol{n}} + \nabla_\Gamma m_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{q}$中的有效约束力	-	$\tilde{p}_{\boldsymbol{q}} = p_{\boldsymbol{q}} + \left(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{t}\right) \cdot \boldsymbol{q}\, m_{\boldsymbol{q}}$
$\boldsymbol{t}$中的有效约束力	-	$\tilde{p}_{\boldsymbol{t}} = p_{\boldsymbol{t}} + \left(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{t}\right) \cdot \boldsymbol{t}\, m_{\boldsymbol{q}}$
剩余有效约束力	-	$\tilde{\boldsymbol{p}} = \tilde{p}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n} + \tilde{p}_{\boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{q} + \tilde{p}_{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{t}$
绕 $\boldsymbol{t}$ 的弯矩	$m_{\boldsymbol{t}} = \left(\mathbf{米}_\Gamma \cdot \boldsymbol{q}\right) \cdot \boldsymbol{q}$	
绕 $\boldsymbol{q}$ 的弯矩	-	$m_{\boldsymbol{q}} = \left(\mathbf{m}_\Gamma \cdot \boldsymbol{q}\right) \cdot \boldsymbol{t}$
绕 z 轴的弯矩	$m_z = m_{\boldsymbol{t}}\, t_z$	-

表 3：基尔霍夫梁和 Kirchhoff–Love 壳的所有相关边界条件及相关量。带帽符号 $\hat{}\bullet$ 表示边界上的规定量。

本文稍后将仅关注具有光滑边界（即没有角点）的壳，因此此处不再进一步讨论。有关此主题的更多信息，请参见 [2, 43] 。

4 抗剪刚性梁和壳的体迹有限元法

在第 3 节中，单根基尔霍夫梁和基尔霍夫–洛夫壳的强形式力学模型采用混合公式表示，见公式 (3.1) 和 (3.2)。方程的弯曲相关部分基于 Hellinger–Reissner 原理建立，因此，除

位移向量 $\boldsymbol{u}$ 外，力矩张量 m也作为主要未知量。接下来，将控制方程转换为弱形式，并将其扩展为适用于由水平集隐式定义在某个体域内的所有梁/壳。然后，概述基于体迹有限元法的数值分析。

4.1 混合连续函数空间

位移 $\boldsymbol{u}$ 和力矩张量$\mathbf{m}_\Gamma$ 的合适试探函数空间和检验函数空间定义如下

$$\mathcal{S}_{\mathbf{m}_\Gamma} = \mathcal{V}_{\mathbf{m}_\Gamma} = \left\{ \mathbf{V} \in \mathcal{H}(\mathrm{div}, \Omega) : \mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \right\}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}} = \left\{ \boldsymbol{v} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^d : \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{u}} \ \text{ on } \ \partial\Omega_{\mathrm{D},\boldsymbol{u}} \right\}, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{V}_{\boldsymbol{u}} = \left\{ \boldsymbol{v} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^d : \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \ \text{ on } \ \partial\Omega_{\mathrm{D},\boldsymbol{u}} \right\}, \tag{4.3}$$

其中，$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{v \in \mathcal{L}^2(\Omega) : \nabla_\Gamma v \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d\}$ 是Sobolev空间，而 $\mathcal{H}(\mathrm{div},\Omega) = \{\mathbf{V} \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d\times d} : \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{V} \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d\}$，其中 $\mathcal{L}^2$ 为Lebesgue空间。此外，边界条件

$$m_{\boldsymbol{t}} = \hat{m}_{\boldsymbol{t}} \ \text{ on } \ \partial\Gamma^c_{\mathrm{N},\omega}. \tag{4.4}$$

通过拉格朗日乘子施加，该乘子在力学上可解释为旋转 $\omega_{\boldsymbol{t}}$。对于Kirchhoff梁，采用关系$\hat{}\omega_{\boldsymbol{t}} = \hat{}\omega_z\, t_z$ 和$\hat{}m_{\boldsymbol{t}} = \hat{}m_z\, t_z$。这种方法尤其方便，因为后续对该公式进行杂交化时，无论如何都会引入拉格朗日乘子 $\omega_{\boldsymbol{t}}$。相应的函数空间定义如下

$$\mathcal{S}_{\omega_{\boldsymbol{t}}} = \left\{ v \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega) : v = \hat{\omega}_{\boldsymbol{t}} \ \text{ on } \ \partial\Omega_{\mathrm{D},\omega} \right\}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{V}_{\omega_{\boldsymbol{t}}} = \left\{ v \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega) : v = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega_{\mathrm{D},\omega} \right\}. \tag{4.6}$$

为了得到基尔霍夫梁或基尔霍夫–洛夫壳的连续弱形式，我们将式 (3.1)、(3.2) 和 (4.4) 中的强形式方程分别乘以相应的试验函数，并在区间$[\phi^{\min}, \phi^{\max}]$内对水平集 Γ^c 积分。利用余面积公式，即式 (2.4)，将该二重积分转换为体域 Ω 上的积分。最后，应用式 (2.6) 和 (2.7) 的积分定理。于是，任务是求$\mathbf{m}_\Gamma \in \mathcal{S}_{\mathbf{m}_\Gamma}$、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$和 $\omega_{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{S}_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$，使得该弱

形式对所有 $(\mathbf{V}_{\mathbf{m}_\Gamma}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}, v_{\omega_{\boldsymbol{t}}}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{m}_\Gamma} \times \mathcal{V}_{\boldsymbol{u}} \times \mathcal{V}_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$ 成立。为简洁起见，我们将在下文写出离散化之后的弱形式。

4.2 混合杂交离散函数空间

第 4.1 节所述混合公式的优点在于，数值分析中可以采用 C^0-连续形函数，也就是说，经典有限元软件可以直接使用。然而，与分析中要求采用 C^1-连续形函数的纯基于位移的公式相比，混合公式会使有限元分析中的自由度显著增加。为了缓解这一问题，在离散化之后，按照 [1, 4,11, 12, 33]对公式进行杂交化 。也就是说，力矩张量场在单元界面之间的连续性被打破，随后通过单元边界上的拉格朗日乘子 $\omega_{\boldsymbol{t}}$ 对其进行弱施加。在此背景下， $\omega_{\boldsymbol{t}}$ 也可称为杂交变量，它不仅应用于诺伊曼边界 $\partial\Omega_{\mathrm{N},\ \omega}$，也应用于所有单元之间的边界。

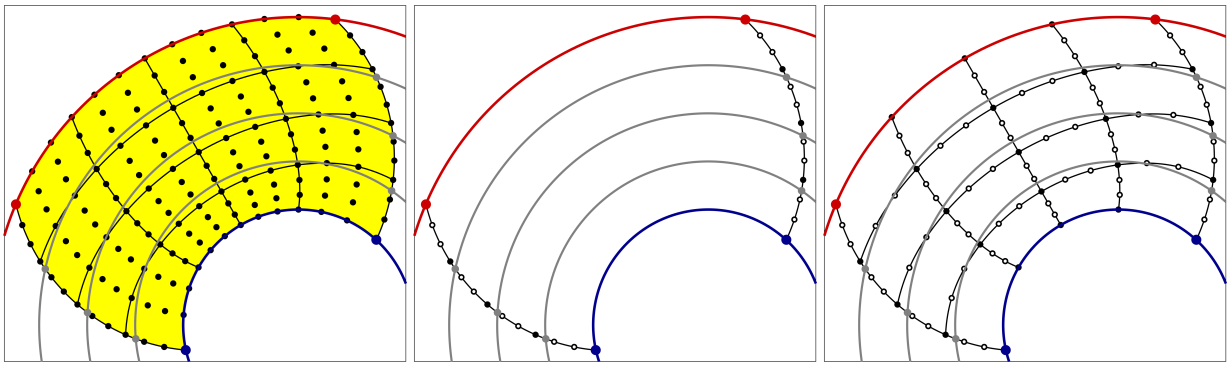
接下来，引入不同的网格，它们决定了分析所用的形函数。设体域 Ω^h 及其边界 $\partial\Omega^h$存在协调离散。对于 $\mathbb{R}^2$ 中的梁，Ω^h 由二维三角形或四边形拉格朗日单元组成，其边界 $\partial\Omega^h$ 由弯曲的一维拉格朗日（线）单元组成。对于$\mathbb{R}^3$中的壳，Ω^h 由三维四面体或六面体拉格朗日单元构成，边界 $\partial\Omega^h$ 则由（弯曲的）二维三角形或四边形拉格朗日单元离散化。Ω^h 在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中的示意图见图 5(a) 和 5(d)， $\partial\Omega^h$ 的示意图见图 5(b) 和 5(e)。

对于仅存在于单元界面上的杂交变量 $\omega_{\boldsymbol{t}}$，还需要对所有单元的界面集合 Ψ^h 进行离散化。随后，将式 (4.4) 改写为

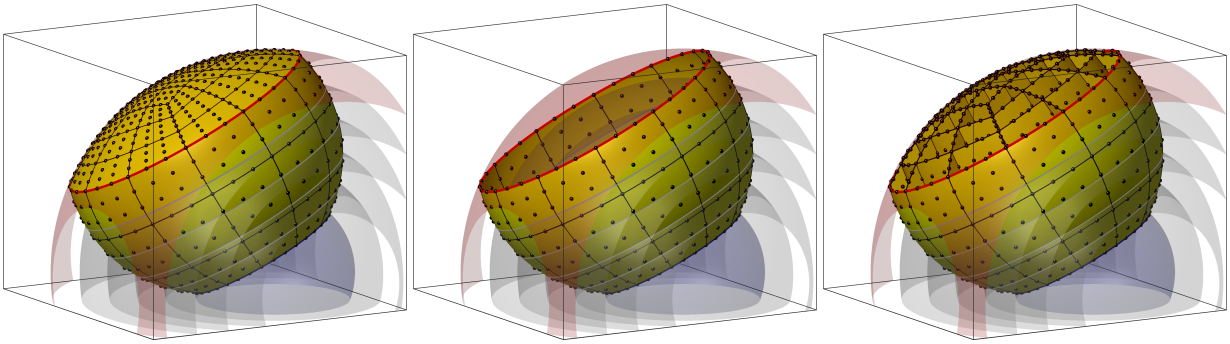
$$m_{\boldsymbol{t}} = \hat{m}_{\boldsymbol{t}} \ \text{on} \ \Psi^h, \tag{4.7}$$

由于现在该条件适用于 Ψ^h ，而不仅仅适用于诺伊曼边界 $\partial\Omega_{\mathrm{N},\ \omega}$。对于 $\mathbb{R}^2$ 中的基尔霍夫梁， Ψ^h 由边组成；对于 $\mathbb{R}^3$ 中的基尔霍夫–洛夫壳， $\mathbb{R}^3$ 由 Ω^h 中单元的面组成，分别如图 5(c) 和 5(f) 所示。与 $\partial\Omega^h$ 类似， Ψ^h 不包含所考虑水平集区间从 $\phi^{\min}$ 到 $\phi^{\max}$ 的端点。

将边界项扩展到单元界面，意味着向量场 $\boldsymbol{q}$、 $\boldsymbol{t}$，



(a) ^{h} 中的离散域 Ω $\mathbb{R}^2$ (b) ∂中的离散边界 Ω^h $\mathbb{R}^2$ (c) Ψ^h 中的单元界面 $\mathbb{R}^2$



(d) 离散 d 域 Ω^h 中的 $\mathbb{R}^3$ (e) 离散边界 $\partial\Omega^h$ 中的 $\mathbb{R}^3$ (f) 单元界面 Ψ^h 中的 $\mathbb{R}^3$

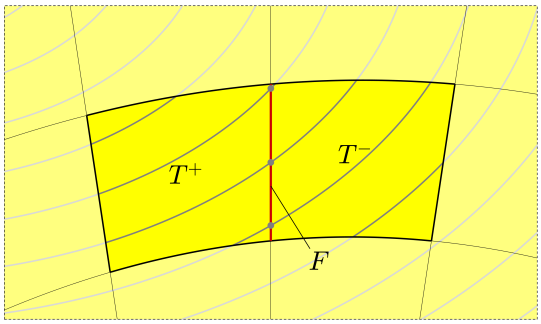
图 5： 对于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$中的某个体域 Ω，(a) 和 (d) 展示了由三次单元离散得到的网格 Ω^h 示例，(b) 和 (e) 展示了离散边界 $\partial\Omega^h$，(c) 和 (f) 展示了界面网格 Ψ^h。水平集 $\phi^{\min}$ 的下限以蓝色表示，上限以红色表示，且这些限值之间选取的部分水平集 ϕ 以灰色表示。

以及 $\boldsymbol{m}$ 也必须在该处进行求值，即在 Ψ^h 上。请注意，如图6所示，这些向量在两个相邻单元之间的方向相反。可以使用跳跃算子来处理这种方向变化，

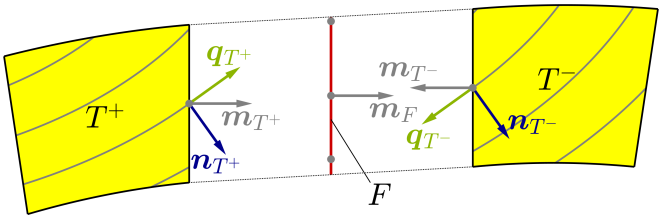
$$[\![f]\!] = \begin{cases} f|_{T^+} - f|_{T^-} & \text{on } \Psi^h \setminus \partial\Omega^h, \\ f|_T & \text{on } \Psi^h \cap \partial\Omega^h, \end{cases} \tag{4.8}$$

在弱形式中， T^+和 T^-为两个相邻单元。

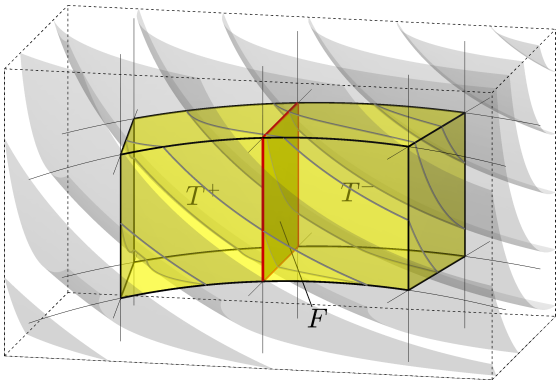
对于有限元空间，采用具有插值形函数的经典拉格朗日单元。网格中的节点坐标标记为 $\boldsymbol{x}_i$with $i = 1$, ..., n, 其中 n是由 p 阶单元构成的某个网格中的节点总数。相应的节点基函数 $N_i^p(\boldsymbol{x})$，同样具有某一阶数 p，随后将用作检验函数和



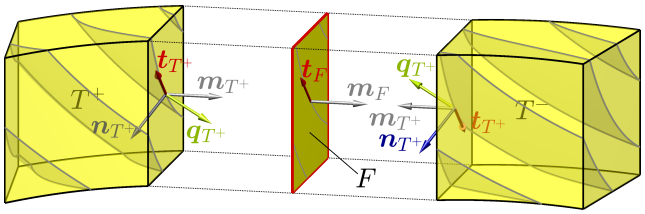
(a) $\mathbb{R}^2$中的一般情况



(b) $\mathbb{R}^2$中向量的定向



(c) $\mathbb{R}^3$中的一般情况



(d) $\mathbb{R}^3$中向量的定向

图6： 相邻单元 T^+ 和 T^- 以及位于其间的边或面单元 F。一些选定的水平集以灰色标出。

试函数；这些函数通过通常的等参映射，将一维、二维或三维参考单元分别直接映射到网格中实际的物理单元上，从而得到。请注意，为方便起见，各个力学场（例如，对于 $\boldsymbol{u}$，$\mathbf{m}_\Gamma$, $\omega_{\boldsymbol{t}}$ 等）采用相同阶次的 插值，尽管这并非严格必要，也可以为各场分别选择不同的阶数。随后可将相应场的有限元空间定义为

$$\mathcal{Q}^h_{\Omega,\mathbf{m}_\Gamma} := \left\{ v^h \in C^{-1}(\Omega^h) : v^h = \textstyle\sum_{i=1}^{n_{\mathbf{m}_\Gamma}} N_i^p(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{v}_i \text{ with } \hat{v}_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega^h), \tag{4.9}$$

$$\mathcal{Q}^h_{\Omega,\boldsymbol{u}} := \left\{ v^h \in C^{0}(\Omega^h) : v^h = \textstyle\sum_{i=1}^{n_{\boldsymbol{u}}} N_i^p(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{v}_i \text{ with } \hat{v}_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{H}^1(\Omega^h), \tag{4.10}$$

$$\mathcal{Q}^h_{\Psi,\omega_{\boldsymbol{t}}} := \left\{ v^h \in C^{-1}(\Psi^h) : v^h = \textstyle\sum_{i=1}^{n_{\omega_{\boldsymbol{t}}}} N_i^p(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{v}_i \text{ with } \hat{v}_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{L}^2(\Psi^h). \tag{4.11}$$

请注意，尽管所涉及的形函数对应于同一个 p 阶网格，但索引 $n_{\mathbf{m}_\Gamma}$、$n_{\boldsymbol{u}}$、$n_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$ 表明它们用于不同的上下文。也就是说，

集合 $\mathcal{Q}^h_{\Omega,\ \mathbf{m}_\Gamma}$ 是一个不连续的单元局部函数空间，$\mathcal{Q}^h_{\Omega,\ \boldsymbol{u}}$ 是 Ω^h 上的一个（通常的） C^0-连续函数空间，而 $\mathcal{Q}^h_{\Psi,\ \omega_{\boldsymbol{t}}}$ 是不连续的，仅定义在单元边界 Ψ^h 上。根据公式 (4.9)–(4.11)，离散检验函数空间和试函数空间现定义如下：

$$\mathcal{S}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} = \mathcal{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} = \left\{ \mathbf{V}^h \in \left[\mathcal{Q}^h_{\Omega,\mathbf{m}_\Gamma}\right]^{3\times 3} : \mathbf{V}^h = {\mathbf{V}^h}^{\mathrm{T}} \right\}, \tag{4.12}$$

$$\mathcal{S}^h_{\boldsymbol{u}} = \left\{ \boldsymbol{v}^h \in \left[\mathcal{Q}^h_{\Omega,\boldsymbol{u}}\right]^3 : \boldsymbol{v}^h = \hat{\boldsymbol{u}} \text{ on } \partial\Omega^h_{\mathrm{D},\boldsymbol{u}} \right\}, \tag{4.13}$$

$$\mathcal{V}^h_{\boldsymbol{u}} = \left\{ \boldsymbol{v}^h \in \left[\mathcal{Q}^h_{\Omega,\boldsymbol{u}}\right]^3 : \boldsymbol{v}^h = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega^h_{\mathrm{D},\boldsymbol{u}} \right\}, \tag{4.14}$$

$$\mathcal{S}^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}} = \left\{ v^h \in \mathcal{Q}^h_{\Psi,\omega_{\boldsymbol{t}}} : v^h = \hat{\omega}_{\boldsymbol{t}} \text{ on } \partial\Omega^h_{\mathrm{D},\omega} \right\}, \tag{4.15}$$

$$\mathcal{V}^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}} = \left\{ v^h \in \mathcal{Q}^h_{\Psi,\omega_{\boldsymbol{t}}} : v^h = 0 \text{ on } \partial\Omega^h_{\mathrm{D},\omega} \right\}. \tag{4.16}$$

4.3 基尔霍夫梁的弱形式

根据式 (4.12)-(4.16) 中的函数空间，基尔霍夫梁 的杂交离散变分问题定义如下：给定输入数据 $\phi \in \mathbb{R}$, $E, I, A \in \mathbb{R}^+$, $\boldsymbol{f}^h \in \mathbb{R}^2$ in Ω^h, $\hat{}\boldsymbol{p}^h \in \mathbb{R}^2$ on $\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\boldsymbol{u}}$, and $\hat{}m^h_z \in \mathbb{R}$ on $\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\boldsymbol{u}}$, 求$\mathbf{m}^h_\Gamma \in \mathcal{S}^h_{\mathbf{m}_\Gamma}$, $\boldsymbol{u}^h \in \mathcal{S}^h_{\boldsymbol{u}}$和 $\omega^h_{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{S}^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$，使得对于所有试验函数 $(\mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma}, \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}}, v^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}) \in \mathcal{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} \times \mathcal{V}^h_{\boldsymbol{u}} \times \mathcal{V}^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$，均有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^h} \mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} : \left(-\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\mathbf{m}^h_\Gamma) + \mathbf{H}\cdot\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{u}^h \right) \|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \sum_{T\in\Omega^h} \int_T \mathrm{div}_\Gamma\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma}\cdot\mathbf{P}\right)\cdot\left[(\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{u}^h)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{n}\right]\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Psi^h} [\![m_{\boldsymbol{t}}(\mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma})]\!]\, \omega^h_{\boldsymbol{t}} \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}\right)\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Psi = 0,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^h} \left[\left(\mathbf{H}\cdot\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}}\right) : \mathbf{m}^h_\Gamma + \nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}} : \tilde{\mathbf{n}}_\Gamma(\boldsymbol{u}^h) \right] \|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \sum_{T\in\Omega^h} \int_T (\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{m}^h_\Gamma \|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega \\
&\quad = \int_{\Omega^h} \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{f}^h \|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\boldsymbol{u}}} \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}^h \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}\right)\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\partial\Omega,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\int_{\Psi^h} v^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}} [\![m_{\boldsymbol{t}}(\mathbf{m}^h_\Gamma)]\!] \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}\right)\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Psi = \int_{\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\omega}} v^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}\, \hat{m}^h_z\, t_z \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{m}\right)\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\partial\Omega. \tag{4.19}$$

为简洁起见，几何量（如 $\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}^h$ ）和微分算子（如 $\nabla_\Gamma \to \nabla^h_\Gamma$）的上标 h 未予标注，尽管它们也经过了离散化，即基于

网格。

4.4 基尔霍夫–洛夫壳的弱形式

基尔霍夫–洛夫壳的杂交离散变分问题定义如下：给定输入数据 $\phi \in \mathbb{R}$, $E, t \in \mathbb{R}^+$, $\nu \in [0, 0.5)$, $\boldsymbol{f}^h \in \mathbb{R}^3$ in Ω^h, $\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}^h \in \mathbb{R}^3$ on $\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\boldsymbol{u}}$, 以及 $\hat{m}^h_{\boldsymbol{t}} \in \mathbb{R}$ on $\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\boldsymbol{u}}$, 求 $\mathbf{m}^h_\Gamma \in \mathcal{S}^h_{\mathbf{m}_\Gamma}$, $\boldsymbol{u}^h \in \mathcal{S}^h_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\omega^h_{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{S}^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$，使得对于所有试验函数 $(\mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma}, \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}}, v^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}) \in \mathcal{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} \times \mathcal{V}^h_{\boldsymbol{u}} \times \mathcal{V}^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}}$, 均有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^h} \mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} : \big(- \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\mathbf{m}^h_\Gamma) + \mathbf{H} \cdot \nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{u}^h \big) \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \sum_{T \in \Omega^h} \int_T \mathrm{div}_\Gamma \big(\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma} \cdot \mathbf{P} \big) \cdot \big[(\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{u}^h)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n} \big] \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Psi^h} \big(m_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma}) \, \omega_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u}^h) + [\![m_{\boldsymbol{t}}(\mathbf{V}^h_{\mathbf{m}_\Gamma})]\!] \, \omega^h_{\boldsymbol{t}} \big) \, \big(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{m} \big) \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Psi = 0,
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^h} \big[\big(\mathbf{H} \cdot \nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}} \big) : \mathbf{m}^h_\Gamma + \nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}} : \tilde{\mathbf{n}}_\Gamma(\boldsymbol{u}^h) \big] \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Omega \\
&\qquad + \sum_{T \in \Omega^h} \int_T (\nabla^{\mathrm{dir}}_\Gamma \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{m}^h_\Gamma \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Omega \\
&\qquad + \int_{\Psi^h} \omega_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}}) \, m_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{m}^h_\Gamma) \, \big(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{m} \big) \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Psi \\
&\qquad = \int_{\Omega^h} \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f}^h \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\boldsymbol{u}}} \boldsymbol{v}^h_{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}^h \, \big(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{m} \big) \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$
\int_{\Psi^h} v^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}} \cdot [\![m_{\boldsymbol{t}}(\mathbf{m}^h_\Gamma)]\!] \, \big(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{m} \big) \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\Psi = \int_{\partial\Omega^h_{\mathrm{N},\omega}} v^h_{\omega_{\boldsymbol{t}}} \, \hat{m}^h_{\boldsymbol{t}} \, \big(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{m} \big) \, \|\nabla\phi\| \, \mathrm{d}\partial\Omega. \tag{4.22}
$$

关于单个基尔霍夫–洛夫壳的混合杂交弱形式的详细推导，参见 [43]。此处，通过在所考虑的水平集区间上积分，得到嵌入体域中的整族壳的结果；为此采用了式（2.4）和（2.5）中的余面积公式。

4.5 静力凝聚

式（4.17）–（4.19）和式（4.20）–（4.22）导出一个包含大量自由度的线性方程组。为减少自由度并提高该方法的计算性能，采用逐单元静力凝聚。

me法。给定局部刚度矩阵$\mathbf{K}^{\mathrm{el}}$和局部右端项 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}$ [1]

$$\mathbf{K}^{\mathrm{el}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{mm}} & \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{m}\boldsymbol{u}} & \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{m}\omega} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{u}\mathbf{m}} & \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\omega\mathbf{m}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^{\mathrm{el}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{el}}_{\omega} \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

现在，力矩张量场已完全局部化，可通过舒尔补进行静力凝聚，从而在局部将其消去，例如参见 [1, 11, 4],

$$\tilde{\mathbf{K}}^{\mathrm{el}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{u}\mathbf{m}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\omega\mathbf{m}} \end{bmatrix} \cdot {\mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{mm}}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{m}\boldsymbol{u}} & \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{m}\omega} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{el}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{el}}_{\omega} \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

$\tilde{\mathbf{K}}^{\mathrm{el}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{el}}$ 分别是局部刚度矩阵和右端项凝聚后的形式。将 $\tilde{\mathbf{K}}^{\mathrm{el}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{el}}$ 中的元素组装到全局凝聚刚度$\tilde{}$ $\tilde{}$矩阵 $\mathbf{K}$ 和右端项 $\boldsymbol{b}$ 中，可得到一个线性方程组

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{\omega_t} \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{b}}, \tag{4.25}$$

此时，仅剩位移向量的待求节点分量（$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的梁，$\underline{\ } \ \boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^{\mathrm{T}}$ 表示 $\mathbb{R}^3$中的壳）以及拉格朗日乘子（$\boldsymbol{\omega_t}$）作为主要未知量。凝聚后的刚度矩阵不仅规模更小，而且是正定的，因此有利于高效求解。对于 $\mathbb{R}^2$中的基尔霍夫梁，我们可以在 $\partial\Omega^h_{\mathrm{D},\omega}$ 上用 $\omega_z\, t_z$ 替换 ω_t ，以全局方式规定边界转角。

可以在后处理步骤中逐个单元恢复力矩张量的节点分量（$\boldsymbol{m}_\Gamma = [\boldsymbol{m}_{\Gamma,11}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,22}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,12}]^{\mathrm{T}}$ 对于 $\mathbb{R}^2$，以及对于 $\underline{\underline{\boldsymbol{m}_\Gamma}} = [\boldsymbol{m}_{\Gamma,11}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,22}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,33}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,12}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,13}, \boldsymbol{m}_{\Gamma,23}]^{\mathrm{T}}$ $\mathbb{R}^3$)），如下所示

$$\underline{\underline{\boldsymbol{m}^{\mathrm{el}}_\Gamma}} = -{\mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{mm}}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{m}\boldsymbol{u}} & \mathbf{K}^{\mathrm{el}}_{\mathbf{m}\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{el}} \\ \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{el}}_{\boldsymbol{t}} \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

5 数值结果

本节展示了多种测试算例，用于对体域上的一族基尔霍夫梁和 Kirchhoff–Love 壳进行同步分析。为了验证所提出方法的高阶

收敛性，将评估不同的误差度量，例如 $\mathcal{L}^2$-误差、残差误差和储能误差。

对于 $\mathcal{L}^2$-误差，必须已知某个测试算例的解析解。在这种情况下，可以计算体域中某个量 f 的相对 $\mathcal{L}^2$-误差:

$$\varepsilon^2_{\mathcal{L}^2,\mathrm{rel}}(f) = \frac{\int_{\Omega^h}(f^{\mathrm{ex}} - f^h)^2 \,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega^h}(f^{\mathrm{ex}})^2 \,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega}, \tag{5.1}$$

其中，上标“ex”和“h”分别表示解析解和数值解。

如果没有解析解，则可以考虑其他误差度量。在高阶有限元分析中，残差误差是一种合适的方法。这里，将主变量 $\mathbf{m}^h_\Gamma$ 和 $\boldsymbol{u}^h$ 的近似解代入强形式，见式 (3.1) 和 (3.2)，并计算残差。对所有单元 T 进行积分，得到两个残差误差

$$\begin{aligned} \varepsilon^2_{\mathrm{res},1} &= \sum_{T\in\Omega^h}\int_T \mathfrak{r}_1(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h) : \mathfrak{r}_1(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h)\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega, \\ \text{with}\quad \mathfrak{r}_1(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h) &= -\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\mathbf{m}^h_\Gamma) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\boldsymbol{u}^h), \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2_{\mathrm{res},2} &= \sum_{T\in\Omega^h}\int_T \mathfrak{r}_2(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h)\cdot\mathfrak{r}_2(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h)\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega, \\ \text{其中 } \mathfrak{r}_2(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h) &= \mathrm{div}_\Gamma\mathbf{n}^{\mathrm{real}}_\Gamma(\mathbf{m}^h_\Gamma,\boldsymbol{u}^h) + \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{div}_\Gamma\big(\mathbf{P}\cdot\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{m}^h_\Gamma\big) + \mathbf{H}\cdot\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{m}^h_\Gamma + \boldsymbol{f}^h. \end{aligned} \tag{5.3}$$

对于 $\boldsymbol{f}^h \neq 0$ 的情况，将公式 (5.3) 中的第二个残差误差除以 $\sum_{T\in\Omega^h}\int_T \boldsymbol{f}^h{}^2\,\|\nabla\phi\|\,\mathrm{d}\Omega$，即可计算误差的相对形式。通常，对于两个残差误差，均可预期其收敛率为 $\mathcal{O}(p-1)$，因为需要用到主未知量的二阶导数。

储能误差定义为

$$\varepsilon_{\mathfrak{e}} = \frac{|\mathfrak{e}_{\mathrm{ref}} - \mathfrak{e}^h|}{\mathfrak{e}_{\mathrm{ref}}}, \tag{5.4}$$

其中，$\mathfrak{e}_{\mathrm{ref}}$ 是对所有流形上的储存弹性能进行积分得到的参考解

在体域中，而 $\mathfrak{e}^h$ 是近似能量，其计算方式为

$$\mathfrak{e}^h = \mathfrak{e}(\mathbf{m}_\Gamma^h, \boldsymbol{u}^h) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma^h} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Memb}}(\boldsymbol{u}^h) : \tilde{\mathbf{n}}_\Gamma(\boldsymbol{u}^h) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma,\mathrm{Bend}}(\mathbf{m}_\Gamma^h) : \mathbf{m}_\Gamma^h\right) \|\nabla\phi\| \,\mathrm{d}\Gamma. \tag{5.5}$$

当无法获得精确能量时，参考能量 $\mathfrak{e}_{\mathrm{ref}}$ 也可以通过过度计算来确定，即采用极精细的离散化和高阶单元。在精确计算式 (5.5) 的积分时，此能量误差度量的预期收敛率为 $\mathcal{O}(2\,p)$ [59]。然而请注意，在等参有限元法中，这可能会受到数值积分误差的干扰；对于一般被积函数，据报道，奇数单元阶数时的收敛率为$\mathcal{O}(p+1)$，偶数单元阶数时为 $\mathcal{O}(p+2)$。因此，根据数值积分误差的影响，文献中会得到 $\mathcal{O}(2\,p)$和 $\mathcal{O}(p+1$ 或 2)的收敛率，参见例如 [37, 43, 26, 23]。使用储存能量作为误差度量的优点在于， $\mathfrak{e}^h$ 对于给定的测试算例和网格而言，是一个具有代表性的全局标量值；它通过一阶导数获得，而一阶导数在任何有限元法代码中都可以使用。提出新的基准测试案例时，例如本文所做的那样，很容易给出参考能量 $\mathfrak{e}_{\mathrm{ref}}$ ，随后即可将其用于验证。

5.1 $\mathbb{R}^2$中的弧形梁族

基于 [34, 43], 中的单弧测试算例，第一个测试算例将这一几何形状扩展为体域中的弧族。各根梁的几何形状由水平集函数描述

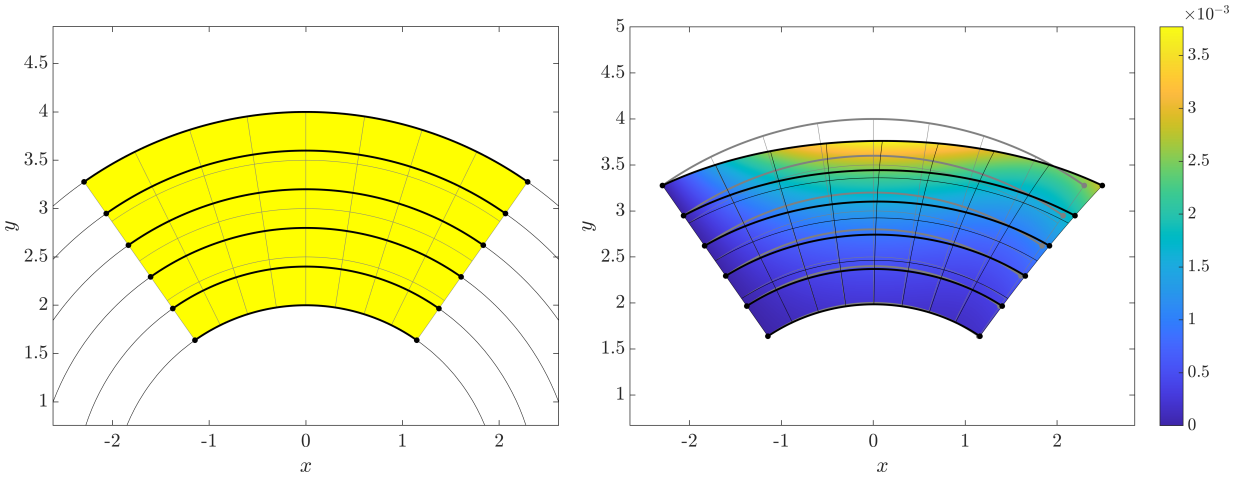
$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5.6}$$

该函数表示圆的隐式定义。水平集函数 $\psi(\boldsymbol{x}) = \arctan(\frac{y}{x})$描述圆扇形，其体域的几何形状可表示为

$$\Omega = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{\pi-\theta}{2} \le \psi(\boldsymbol{x}) \le \tfrac{\pi+\theta}{2},\, 2 < \phi(\boldsymbol{x}) < 4\right\}, \tag{5.7}$$

其中， $\theta = \frac{7}{18}\pi$ 为圆心角。离散体域 Ω^h 的几何形状和水平集函数 ϕ 如图7(a)所示。

输入参数定义为载荷向量 $\boldsymbol{f} = [0, -10]^{\mathrm{T}}$、杨氏模量$E = 2.1\cdot 10^8$、横截面积 $A = b\,h$，以及横截面的截面惯性矩 $I = \frac{b\,h^3}{12}$，其中 $b = 1$ 和 $h = 0.1$。左边界（$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{\pi+\theta}{2}$）为简支，而在右边界（$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{\pi-\theta}{2}$）处，仅限制竖向位移，即 $u \neq 0$,



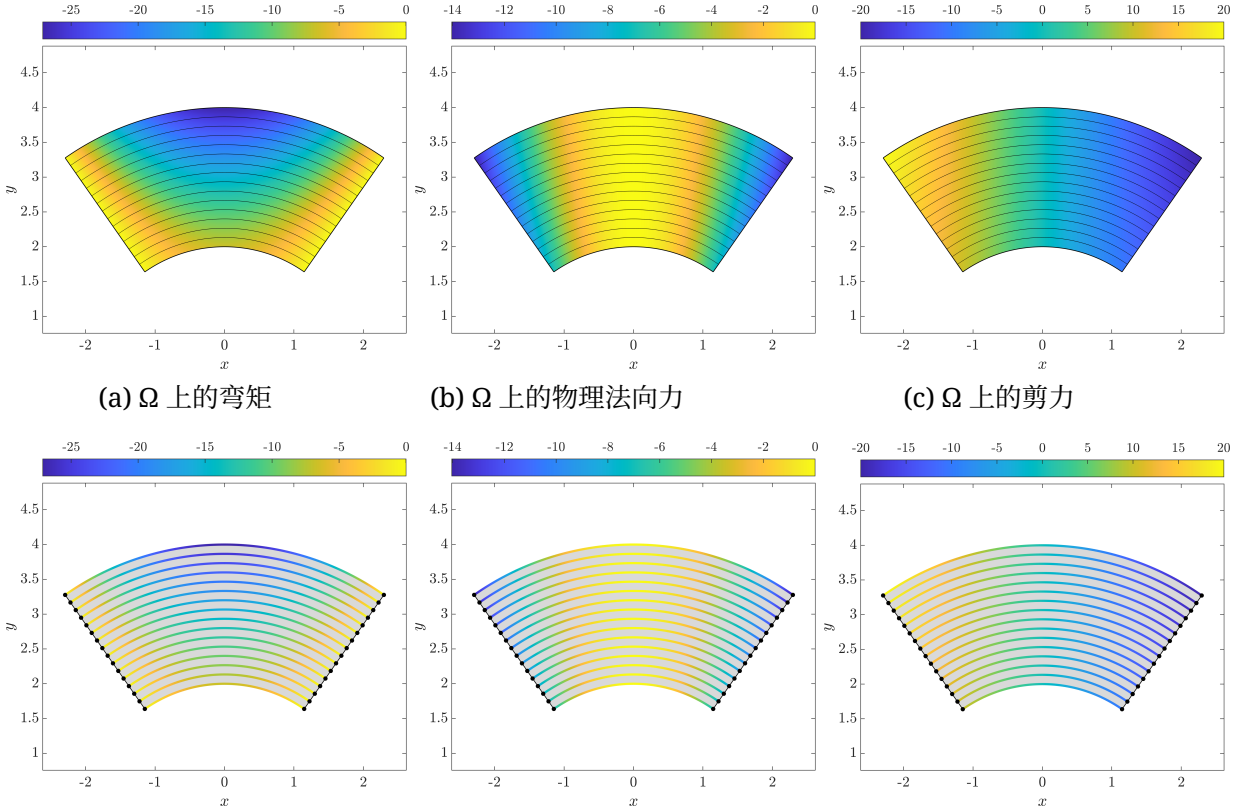
(a) 几何形状 (b) 位移

图7： $\mathbb{R}^2$中弧形梁族的设置：(a) 离散体域 Ω^h 的几何形状及一些选定的梁 Γ^c。(b) 缩放后的变形构形，体域上以伪彩色图显示位移的欧几里得范数 $\|\boldsymbol{u}\|$ 。灰色网格线和水平集表示未变形构形。

$v = \hat{v} = 0$。

单个弧形梁的解析解可见于 [43]。其中不仅给出了位移各分量的解，也给出了应力合力的解，即弯矩、（物理）法向力和剪力。随后可将该解析解与弯矩张量和法向力张量唯一非零的主分量进行比较，即 $m_\Gamma^{(1)}$ 和 $n_\Gamma^{\mathrm{real}(1)}$ 。剪力可计算为 $q = [-n_y, n_x]^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{P} \cdot$ 散度$_\Gamma \mathbf{m}_\Gamma)$。位移解见图7(b)，应力合力见图8。

基于解析解，我们对式（5.1）中定义的相对 $\mathcal{L}^2$-误差进行了收敛性研究，结果如图 9(a)–9(d) 所示。对主未知量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\mathbf{m}_\Gamma$ 的收敛性研究表明，其收敛率至少达到 $\mathcal{O}(p+1)$，且在某些阶数下出现了超收敛，如图 9(a) 和 9(b) 所示。对于导出量，即 $\mathbf{n}_\Gamma^{\mathrm{real}}$和 q，获得了预期的 $\mathcal{O}(p)$ 收敛；参见图 9(c) 和 9(d)。剪力 q的误差也呈现出超收敛现象。图 9(e) 展示了式（5.4）中储能误差的收敛性研究。这里观察到的收敛率为 $\mathcal{O}(2\,p)$。该误差的参考能量通过 $\mathfrak{e}_{\mathrm{ref}} = 3.49511413801986 \cdot 10^{-2}$进行解析计算。



(a) Ω 上的弯矩 (b) Ω 上的物理法向力 (c) Ω 上的剪力

(d) Γ^c 上的弯矩 (e) Γ^c 上的物理法向力 (f) Γ^c上的剪力

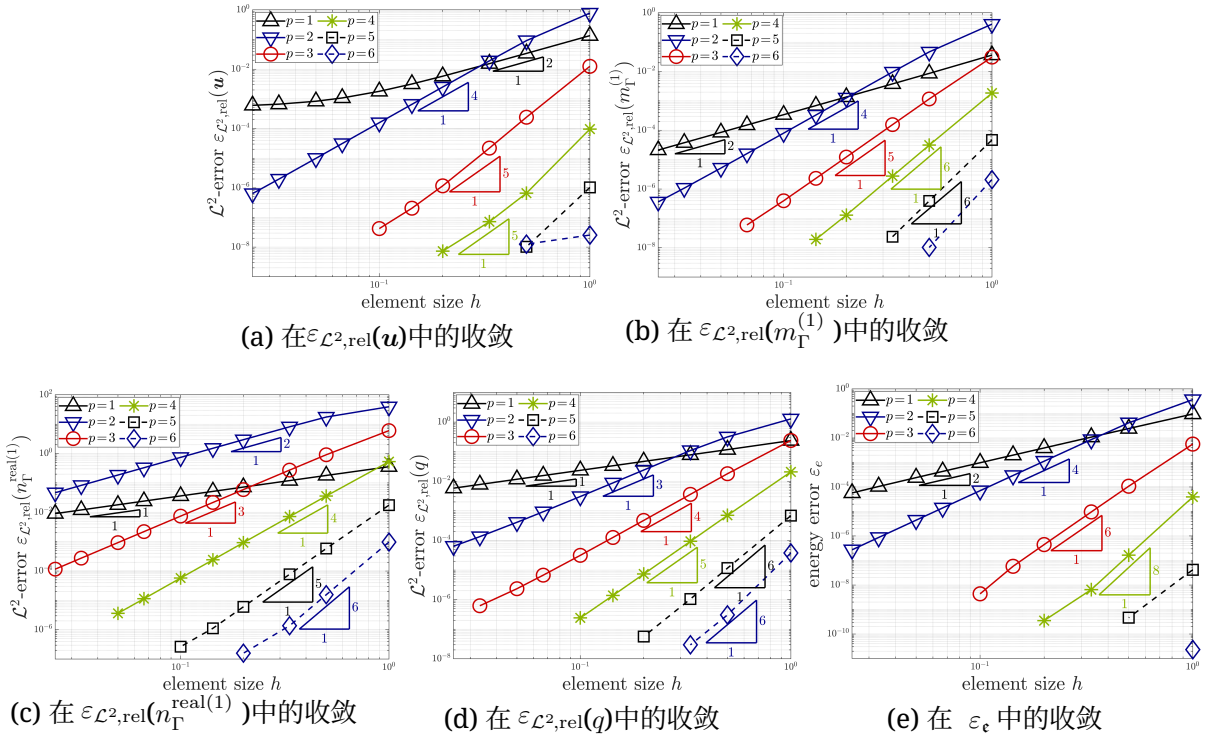
图8： $\mathbb{R}^2$ 上 Ω 和 Γ^c中弧形梁族的不同应力合力图。(a) 和 (d) 显示力矩张量 $m_\Gamma^{(1)}$ 的唯一非零主分量，(b) 和 (e) 显示物理法向力张量 $n_\Gamma^{\mathrm{real}(1)}$ 的唯一非零主分量，(c) 和 (f) 显示剪力 q。

5.2 $\mathbb{R}^2$中更一般体域上的圆形梁族

几何设置沿用自 [36]，其中研究了用于 Timoshenko-Ehrenfest 梁的体迹有限元法。这里同样考虑了一族圆形梁，但其所处的体域更为一般且不对称，见图 10(a)。梁的几何形状由水平集函数定义

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{(x + x_c)^2 + (y + y_c)^2} - r_c, \tag{5.8}$$

这意味着使用 $r_c = 0.3$ 时，圆的圆心位于$-x_c = -r_c\sin(\frac{11}{9}\pi)$ 和$-y_c = r_c\cos(\frac{11}{9}\pi)$。借助



(a) 在$\varepsilon_{\mathcal{L}^2,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u})$中的收敛 (b) 在 $\varepsilon_{\mathcal{L}^2,\mathrm{rel}}(m_\Gamma^{(1)})$中的收敛

(c) 在 $\varepsilon_{\mathcal{L}^2,\mathrm{rel}}(n_\Gamma^{\mathrm{real}(1)})$中的收敛 (d) 在 $\varepsilon_{\mathcal{L}^2,\mathrm{rel}}(q)$中的收敛 (e) 在 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ 中的收敛

图 9： $\mathbb{R}^2$中弧形梁族的收敛性研究。(a) 位移 $\boldsymbol{u}$、(b) 力矩张量 $m_\Gamma^{(1)}$ 唯一非零主分量、(c) 物理法向力张量 $n_\Gamma^{\mathrm{real}(1)}$ 唯一非零主分量、(d) 剪力 q 以及 (e) 相对储存能误差 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ 的$\mathcal{L}^2$-误差收敛率。

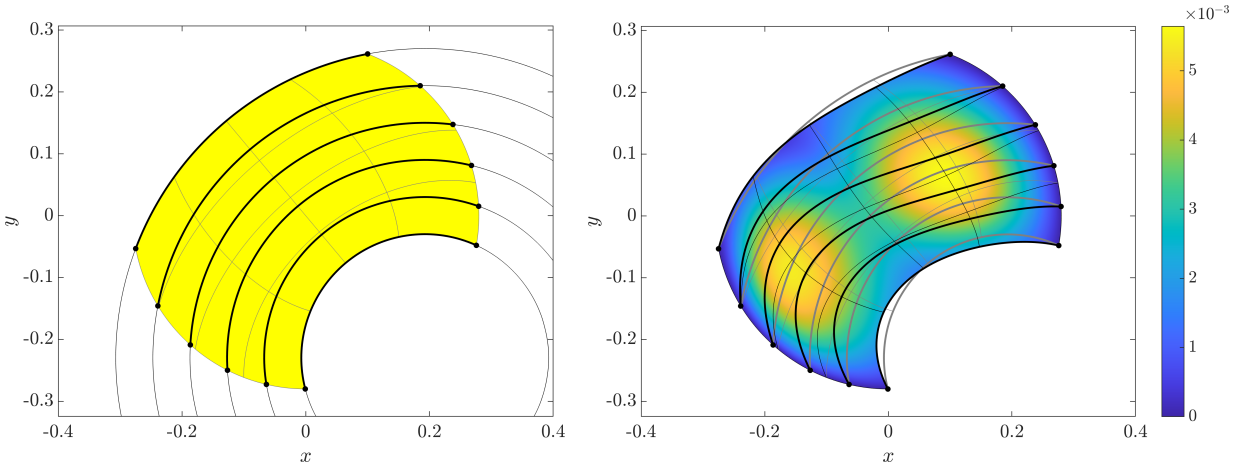
水平集 函数 $\psi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 体域的几何形状定义为 a s

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \psi(\boldsymbol{x}) \leq 0.28,\ -0.1 < \phi(\boldsymbol{x}) < 0.2 \right\}. \tag{5.9}$$

几何情况如图 10(a) 所示。

测试算例的输入参数如下：载荷向量 $\boldsymbol{f} = [0, -100]^{\mathrm{T}}$、杨氏模量 $E = 2.1 \cdot 10^8$、面积 $A = b\,h$ 和截面惯性矩 $I = \frac{b\,h^3}{12}$，其中 $b = 0.01$ 和 $h = 0.02$。整个边界 $\partial\Omega$ 上的边界条件为简支。位移解如图 10(b) 所示。

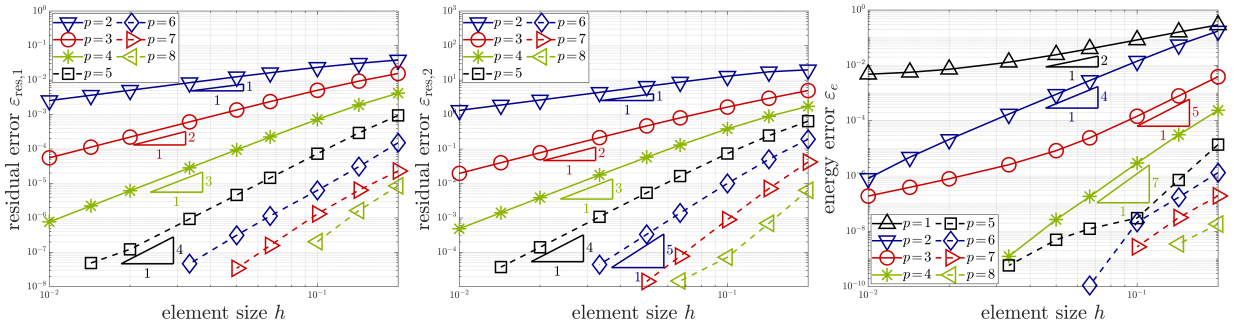
由于无法获得解析解，我们旨在利用式 (5.2)-(5.4) 中的残差误差和储能误差来确认高阶收敛率。对于图 11(a) 和图 11(b) 所示残差误差的收敛分析，可以观察到 $\mathcal{O}(p-1)$ 的最优收敛率。高阶曲线略呈次优，表明



(a) 几何形状　(b) 位移

图 10： 一般体域 $\mathbb{R}^2$ 中圆形梁族的设置：(a) 离散体域 Ω^h 的几何形状及若干选定的梁 Γ^c。(b) 缩放后的变形构形，体域上的位移 $\|\boldsymbol{u}\|$ 欧几里得范数以伪彩色图显示。灰色网格线和水平集表示未变形构型。

预渐近区。对于图 11(c) 所示的储存能误差分析，使用了参考能量 $\mathfrak{e}_{\text{ref}} = 1.36582967 \cdot 10^{-2}$ 。尽管在该误差度量中同样确认了高阶精度，但并未达到 $\mathcal{O}(2\,p)$ 的最优率。例如，对于阶次 $p = 1$ 和 $p = 3$ 观察到一些次优行为，其中曲线在更细的网格上趋于平缓。



（a）在 ε_{res} 中的收敛，1　（b）在 ε_{res} 中的收敛，2　(c) $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$中的收敛

图 11： $\mathbb{R}^2$中更一般体域上圆形梁族的收敛性研究。(a) 绝对残差误差$\varepsilon_{\text{res},1}$、(b) 相对残差误差$\varepsilon_{\text{res},2}$以及 (c) 相对储存能误差 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$的收敛率。

5.3 $\mathbb{R}^3$中的简支壳族

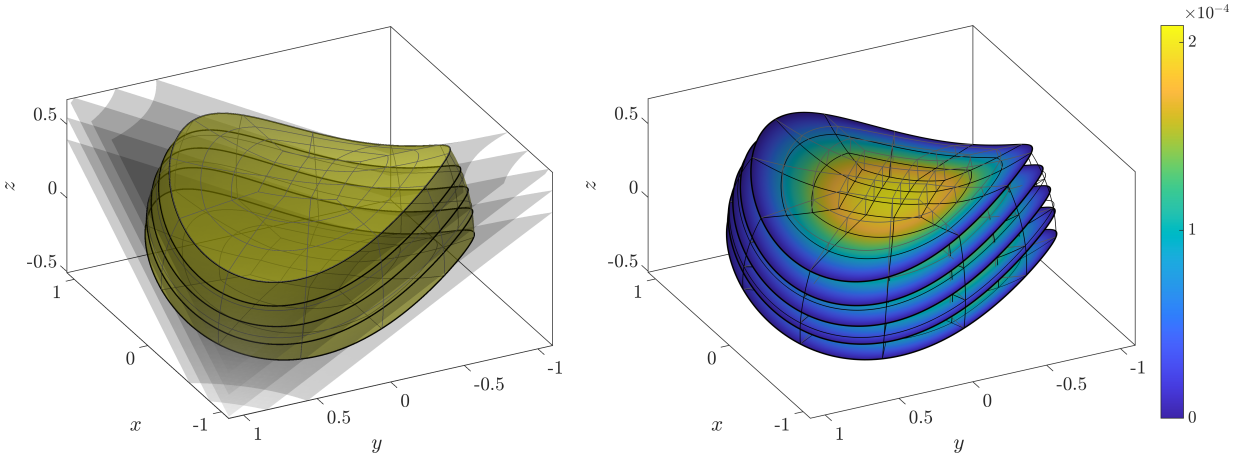
简支壳族遵循 [35]中一个测试算例的轮廓。尽管该测试算例最初是为 Reissner–Mindlin 壳的体迹有限元法设计的，但其结果与 Kirchhoff–Love 壳的结果具有良好的可比性，因为剪切变形对总体结果的贡献很小。这些壳的几何形状由水平集函数描述：

$$\phi(\boldsymbol{x}) = z - 2\,\sin(\tfrac{1}{4}\,x\,y). \tag{5.10}$$

体域为

$$\Omega = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \psi(\boldsymbol{x}) \leq 1,\ -0.2 < \phi(\boldsymbol{x}) < 0.4\big\}, \tag{5.11}$$

其中，$\psi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 是一个表示球面的水平集函数。在图 12(a)中，展示了离散体域的几何形状和一些水平集。



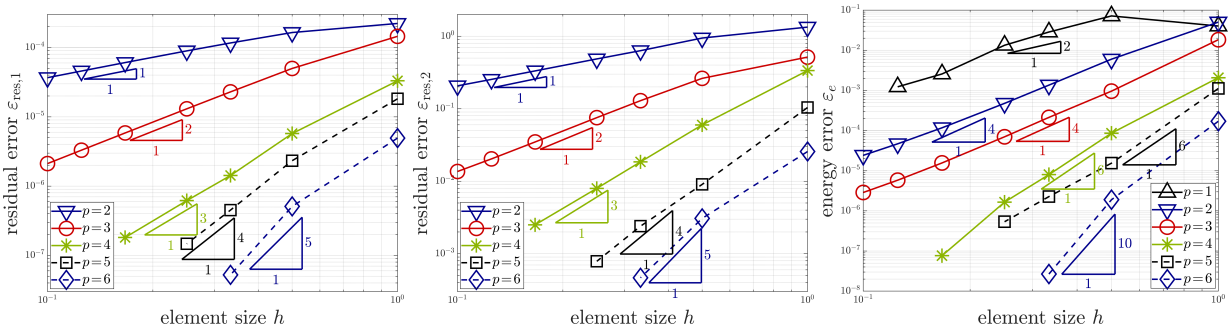
(a) 几何形状　　(b) 位移

图 12： $\mathbb{R}^3$ 中简支壳族的设置：(a) 离散体域 Ω^h 的几何形状及部分选定壳体 Γ^c。(b) 放大后的变形构形，其中部分选定壳体上的位移 $\|\boldsymbol{u}\|$ 欧几里得范数以等值线图形式显示。灰色网格线表示未变形构形。

关于测试算例参数，载荷向量设为 $\boldsymbol{f} = [0, 0, -100]^{\mathrm{T}}$，杨氏模量为 $E = 2.1 \cdot 10^7$，泊松比为 $\nu = 0.3$，壳的厚度为 $t = 0.1$。整个边界 $\partial\Omega$ 为简支边界。根据这些输入参数，位移解如图 12(b) 所示。

在图 13(a) 和 13(b) 所示的残差误差中，达到了 $\mathcal{O}(p-1)$ 的最优收敛

。由于在体迹有限元法中计算壳的计算量更大——现在需要在三维网格上进行计算——因此我们将结果限制在最高 6 阶单元，并减少所考虑的单元总数，以区别于前面的梁研究。因此，收敛图中可以看到明显的预渐近区；不过，曲线逐渐趋近最优渐近范围的趋势仍清晰可见。图 13(c) 展示了这一现象，其中分析了储能误差的收敛情况。这里观察到，奇数 p 的收敛率为 $\mathcal{O}(p+1)$，偶数 p 的收敛率为 $\mathcal{O}(p+2)$。这一现象在 [26, 23] 中也曾发现，并可追溯至一般被积函数情况下等参 p-FEM 的数值积分误差。参考能量的取值为 $\mathfrak{e}_{\text{ref}} = 9.894785 \cdot 10^{-3}$，这与参考能量为 $\mathfrak{e}_{\text{ref}} = 9.917787434703 \cdot 10^{-3}$ 的 [35] 相符。数值之间的微小偏差可由剪切贡献解释：Reissner–Mindlin 壳理论考虑了剪切贡献，而本文所研究的基尔霍夫–洛夫壳则忽略了这一贡献。



(a) ε_{res}中的收敛1 (b) ε_{res}中的收敛2 (c) 在 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$中的收敛

图 13： $\mathbb{R}^3$中简支壳族的收敛性研究。(a) 绝对残差误差 $\varepsilon_{\text{res},1}$、(b) 相对残差误差$\varepsilon_{\text{res},2}$以及 (c) 相对储存能误差 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$的收敛率。

5.4 $\mathbb{R}^3$中曲面上的固支穹顶族

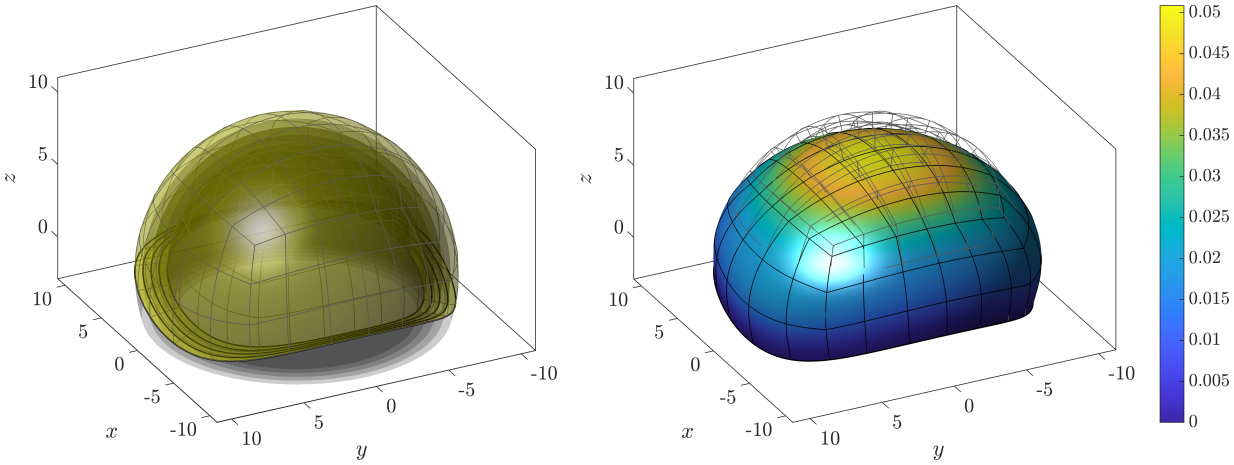
改编自 [35], 最后一个测试算例表示一族球形穹顶，由水平集函数描述

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{5.12}$$

这些穹顶位于由 $\psi(\boldsymbol{x}) = z - \sin(\frac{x}{3}) - \cos(\frac{y}{6}) + 1$定义的曲面上。我们将体域定义为

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \psi(\boldsymbol{x}) \leq 0,\, 8 < \phi(\boldsymbol{x}) < 10 \right\}. \tag{5.13}$$

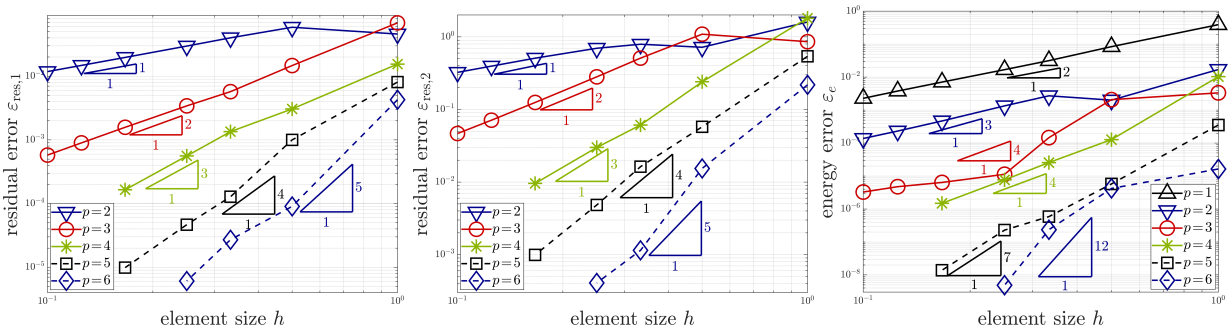
图14(a)给出体域的几何形状和等值集，图14(b)给出位移结果。载荷向量定义为 $\boldsymbol{f} = [0, 0, -10]^{\mathrm{T}}$，杨氏模量定义为 $E = 3.0 \cdot 10^4$，泊松比定义为 $\nu = 0.3$，壳的厚度定义为 $t = 1.1$。边界完全固支。



(a) 几何形状　　(b) 位移

图14： $\mathbb{R}^3$中曲面上固支穹顶族的设置：(a) 离散体域Ω^h 的几何形状以及若干选定壳体 Γ^c。(b) 缩放后的变形构形，其中位移的欧几里得范数 $\|\boldsymbol{u}\|$ 以等值线图形式显示在若干选定壳体上。灰色网格线表示未变形构型。

图15展示了残差误差和储能误差的收敛率。残差误差的收敛率达到预期值，证实了这些误差度量具有最优结果。储能误差也以更高阶但次优的速率收敛，其曲线的规律性略逊于其他误差度量。



(a) 在 ε_{res} 中的收敛，1　(b) 在 ε_{res} 中的收敛，2　(c) 在 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ 中的收敛

图15： 曲面上固支穹顶族在 $\mathbb{R}^3$ 中的收敛性研究。(a) 绝对残差误差 $\varepsilon_{\text{res},\,1}$、(b) 相对残差误差 $\varepsilon_{\text{res},\,2}$以及 (c) 相对储存能误差 $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ 的收敛率。

6 结论与展望

本文针对二维或三维体域上所有水平集上的几何线性基尔霍夫梁和基尔霍夫–洛夫壳的同时分析，提出了一种力学模型及相应的数值方法。该模型采用无坐标表述，使流形能够隐式定义，并允许通过全局笛卡尔坐标系表述控制方程。

采用有限元法进行数值分析时，体域由高阶网格离散。该网格与体域边界相吻合，因此也与结构边界相吻合。然而，在体域内部，网格通常不会与由水平集描述的结构几何形状相吻合。由此得到的体迹有限元法将先前的工作（见 [22, 35, 36, 37], ）扩展至剪切刚性结构。该方法的一个潜在应用领域是优化任务，例如确定结构的最优形状，从而加快设计流程。另一种应用场景是对增强材料进行建模，尤其是将梁以物理且连续的方式嵌入单个壳中。

基尔霍夫–洛夫理论面临的一项核心挑战是剪切刚性结构的数值特性，其基于位移的公式在强形式中涉及四阶导数，因此在基于有限元的分析中需要具有 C^1 连续性的形函数。为克服这一局限，我们采用混合杂交公式，将此前针对单个壳的工作 [43]加以扩展。本文将力矩张量引入为额外的主要未知量，

从而将连续性要求降低至 C^0 ，并因此能够使用标准拉格朗日单元；然而，这会显著增加自由度的数量。因此，我们采用杂交格式，在单元界面处打破力矩张量场的单元间连续性，并通过拉格朗日乘子对其进行弱施加。这使得力矩张量分量可以逐单元静力凝聚，从而大幅减少自由度，降低计算量。

若干数值测试算例证实了所提出方法的准确性及其高阶收敛特性。这些算例涵盖了 $\mathbb{R}^2$ 中的梁和 $\mathbb{R}^3$中的壳的一般几何构形。这些测试算例产生了光滑解，因此可在观测到的误差范数中实现高阶收敛，例如 $\mathcal{L}^2$-误差、残差误差和储能误差。梁算例达到了最优收敛率。尽管壳算例中的高阶单元表现出前渐近效应，但残差误差的整体收敛与理论预期一致，并验证了相关实现。壳的储能误差也呈现高阶收敛，但有时收敛率略低于最优。

总而言之，本文成功提出了一种方法，用于对体域上的一系列抗剪刚性梁和壳进行统一建模与分析，进一步确立了体迹有限元法在结构力学中的应用。未来研究可着重将动力效应纳入模型，类似于 [24] 中对绳索和膜的处理。更偏重应用的研究方向还可通过将梁和壳嵌入块体材料，开发新的各向异性材料模型，遵循 [23, 25]中对嵌入式绳索和膜的处理方式。

参考文献

[1] Arnold, D.N.; Brezzi, F.: 混合与非协调有限元方法：实现、后处理与误差估计。*ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*，**19**，7–32，1985。

[2] Başar, Y.; Krätzig, W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*。Vieweg+Teubner 出版社，不伦瑞克，1985。

[3] Bischoff, M.; Ramm, E.; Irslinger, J.：薄壁结构的模型与有限元。载于计算力学百科全书。（Stein, E.; Borst, R.; Hughes, T.J.; Hughes, T.J.，编），约翰·威立父子出版公司，奇切斯特，第2版，2017。[4] Boffi, D.; Brezzi, F.; Fortin, M.：混合有限元方法及其应用，第44卷，施普林格计算数学丛书。施普林格，柏林，2013。[5] Brezzi, F.：关于拉格朗日乘子所产生的鞍点问题的存在性、唯一性及逼近。*RAIRO* 数值分析，**8**，129–151，1974。[6] Burger, M.：隐式曲面上椭圆型偏微分方程的有限元逼近。计算机视觉科学，**12**，87–100，2009。[7] Burman, E.; Hansbo, P.; Larson, M.G.：用于曲面上偏微分方程的稳定化切割有限元方法：拉普拉斯-贝尔特拉米算子。计算方法与应用力学工程，**285**，188–207，2015。[8] Burman, E.; Hansbo, P.; Larson, M.G.; Massing, A.：任意余维数嵌入流形上偏微分方程的切割有限元方法。*ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*，**52**，2247–2282，2018。[9] Cenanovic, M.; Hansbo, P.; Larson, M.G.：线性膜的切割有限元建模。计算方法与应用力学工程，**310**，98–111，2016。[10] Chapelle, D.; Bathe, K.J.：壳结构有限元分析的基本考量。《计算结构》，**66**，19–36，1998。[11] Cockburn, B.; Gopalakrishnan, J.：二阶椭圆问题杂交混合方法的特征刻画。*SIAM* 数值分析杂志，**42**，283–301，2004。[12] Cockburn, B.; Gopalakrishnan, J.; Lazarov, R.：二阶椭圆问题中间断伽辽金、混合及连续伽辽金方法的统一杂交化。*SIAM* 数值分析杂志，**47**，1319–1365，2009。[13] Comodi, M.I.：Hellan-Herrmann-Johnson 方法：一些新的误差估计与后处理。*Math. Comput.*，**52**，17–29，1989。[14] Delfour, M.C.; Zolésio, J.P.：薄壳的边界微分方程。*J.Differ. Equ.*，**119**，426–449，1995。

[15]Delfour, M.C.; Zolésio, J.P.: 动力薄壳/浅壳的切向微分方程。微分方程杂志，**128**，125–167，1996。[16] Delfour, M.C.; Zolésio, J.P.: 形状与几何：度量、分析、微分学与优化。设计与控制进展。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，第2版，2011。[17] Dziuk, G.; Elliott, C.M.: 演化隐式曲面上的输运与扩散的欧拉方法。计算机视觉科学，**13**，17–28，2008。[18] Dziuk, G.; Elliott, C.M.: 隐式曲面上抛物型偏微分方程的欧拉有限元法。界面与自由边界，**10**，119–138，2008。[19] Dziuk, G.; Elliott, C.M.: 曲面偏微分方程的有限元方法。数值学报，**22**，289–396，2013。[20] Echter, R.; Oesterle, B.; Bischoff, M.: 等几何壳有限元的层次族。计算方法与应用力学工程，**254**，170–180，2013。[21] Federer, H.: 几何测度论。施普林格，纽约，1969。[22] Fries, T.P.: 流形上不可压缩Navier-Stokes流动的高阶曲面有限元。国际数值方法与流体杂志，**88**，55–78，2018。[23] Fries, T.P.; Kaiser, M.W.: 在体域内所有水平集上同时求解结构膜。计算方法与应用力学工程，**415**，116223，2023。[24] Fries, T.P.; Kaiser, M.W.: 所有等值集上结构绳索与膜的同步动力分析。第九届欧洲应用科学与工程计算方法大会论文集（*ECCOMAS 2024*），葡萄牙里斯本，2024。[25] Fries, T.P.; Neumeyer, J.; Kaiser, M.W.: 通过水平集嵌入子结构的新概念。第*16*届世界计算力学大会论文集（*WCCM 2024*），加拿大温哥华，2024。[26] Fries, T.P.; Schöllhammer, D.: 膜与绳索的统一有限应变理论。计算方法与应用力学工程，**365**，113031，2020。

[27] Gfrerer, M.H.: 用于隐式定义曲面上线性薄壳分析的 C^1-连续迹有限单元法。计算力学，**67**，679–697，2021。[28] Gimena, L.; Gimena, F.N.; Gonzaga, P.: 以全局坐标定义的曲梁单元结构分析。工程结构，**30**，3355–3364，2008。[29] Hansbo, P.; Larson, M.G.: 使用切向微分演算对线性膜壳问题进行有限元建模。计算方法与应用力学工程，**270**，1–14，2014。[30] Hansbo, P.; Larson, M.G.; Larsson, K.: 全局坐标下曲梁的变分形式。计算力学，**53**，611–623，2014。[31] Jankuhn, T.; Olshanskii, M.A.; Reusken, A.: 嵌入曲面上的不可压缩流体问题：建模与变分形式。界面与自由边界，**20**，353–377，2018。[32] Johnson, C.: 关于板弯曲问题混合有限元方法的收敛性。数值数学，**21**，43–62，1973。[33] Kabaria, H.; Lew, A.J.; Cockburn, B.: 非线性弹性的可混合间断Galerkin形式。计算方法与应用力学工程，**283**，303–329，2015。[34] Kaiser, M.W.; Fries, T.P.: 使用切向微分演算和拉格朗日乘子表述的曲线线性基尔霍夫梁。应用数学与力学会议论文集，**22**，e202200042，2023。[35] Kaiser, M.W.; Fries, T.P.: 三维体域中连续嵌入的Reissner-Mindlin壳的同步分析。国际数值方法与工程杂志，**125**，e7495，2024。[36] Kaiser, M.W.; Fries, T.P.: 二维体域中隐式定义曲线线性铁木辛柯梁的同步求解。应用数学与力学会议论文集，**24**，e202400019，2024。[37] Kaiser, M.W.; Fries, T.P.: 多个曲面上不可压缩Navier-Stokes流动的同步求解。应用力学档案，**95**，2025。

[38] Kiendl, J.; Bletzinger, K.U.; Linhard, J.; Wüchner, R.: 基于 Kirchhoff-Love 单元的等几何壳分析。计算方法与应用力学工程，**198**，3902–3914，2009。[39] Kirchhoff, G.：关于弹性薄板的平衡与运动。《纯粹与应用数学杂志》，**40**，51–88，1850。[40] Love, A.E.H.：XVI. 薄弹性壳的小幅自由振动与变形。《皇家学会哲学汇刊 *A* 辑》，**179**，491–546，1888。[41]Mindlin, R.D.：转动惯量和剪切对各向同性弹性板弯曲运动的影响。《美国机械工程师学会应用力学杂志》，**18**，31–38，1951。[42] Morgan, F.：几何测度论：初学者指南。学术出版社，圣迭戈，1988。[43] Neumeyer, J.; Kaiser, M.W.; Fries, T.P.：用于 Kirchhoff–Love 壳的高阶混合杂交有限元。国际数值方法与工程杂志，**126**，e70175，2025。[44] Neunteufel, M.; Schöberl, J.：用于非线性壳的 Hellan–Herrmann–Johnson 方法。《计算结构》，**225**，106109，2019。[45] Neunteufel, M.; Schöberl, J.：用于线性和非线性壳的 Hellan–Herrmann–Johnson 方法与 TDNNS 方法。《计算结构》，**305**，107543，2024。[46] Olshanskii, M.A.; Reusken, A.：曲面上偏微分方程的迹有限元方法。载于几何非拟合有限元方法及其应用。（Bordas, S.P.A.; Burman, E.; Larson, M.G.; Olshanskii, M.A.; Olshanskii, M.A., 编），第121卷，计算科学与工程讲义，施普林格·自然，查姆，211–258，2017。[47] Olshanskii, M.A.; Reusken, A.; Grande, J.：曲面上椭圆方程的一种有限元方法。*SIAM* 数值分析杂志，**47**，3339–3358，2009。[48] Olshanskii, M.A.; Reusken, A.; Xu, X.：曲面上对流扩散方程的一种稳定化有限元方法。《工业与应用数学研究所数值分析杂志》，**34**，732–758，2014。[49] Osher, S.; Fedkiw, R.P.：水平集方法：综述及近期的一些成果。《计算物理学杂志》，**169**，463–502，2001。

[50] Osher, S.; Fedkiw, R.P.：水平集方法与动态隐式曲面。施普林格，柏林，2003。[51] Rafetseder, K.; Zulehner, W.：Kirchhoff板弯曲问题的一种分解结果及一种新的离散化方法。*SIAM* 数值分析杂志，**56**，1961–1986，2018。[52] Rafetseder, K.; Zulehner, W.：一种新的 Kirchhoff–Love 壳混合方法。计算方法与应用力学工程，**346**，440–455，2019。[53] Reissner, E.：横向剪切变形对弹性板弯曲的影响。《美国机械工程师学会应用力学杂志》，**12**，A69–A77，1945。[54] Schöllhammer, D.; Fries, T.P.：基于切向微分演算的 Kirchhoff-Love 壳理论。计算力学，**64**，113–131，2019。[55] Schöllhammer, D.; Fries, T.P.：基于切向微分演算的 Reissner-Mindlin壳理论。计算方法与应用力学工程，**352**，172–188，2019。[56] Schöllhammer, D.; Fries, T.P.：一种用于壳的高阶迹有限元方法。国际数值方法与工程杂志，**122**，1217–1238，2021。[57] Sethian, J.A.：水平集方法与快速推进法。剑桥大学出版社，剑桥，第2版，1999。[58] Timoshenko, S.P.：LXVI. 关于棱柱杆横向振动微分方程的剪切修正。伦敦、爱丁堡、都柏林《哲学杂志与科学杂志》，**41**，744–746，1921。[59] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z.：有限元法：基础与基本原理。Butterworth-Heinemann，牛津，第7版，2013。[60] Zingoni, A.：土木与机械工程中的壳结构。ICE出版社，伦敦，第2版，2017。