arXiv:2602.14600v1 [math.RA] 16 Feb 2026

非单位元均为来自 $\sqrt{\Delta}(R)$ 中某个元素的单位倍数的环

OMID HASANZADEH、AHMAD MOUSSAVI 和 PETER DANCHEV

Abstract. 本文介绍并研究一类称为$U\sqrt{\Delta}$-*rings*的新型环。若环 R 中的每个非单位元都能写成一个单位与来自 $\sqrt{\Delta}(R)$ 的元素的乘积，则称该环为 $U\sqrt{\Delta}$；其中，$\sqrt{\Delta}(R)$由满足某个幂属于特殊子环 $\Delta(R)$的元素组成。我们建立了这类环的一些基本性质，并具体证明它们同时是不可分解的和 Dedekind-有限的。我们还证明，多项式环 $R[x]$ 和 Laurent 多项式环 $R[x,x^{-1}]$ 绝不会是 $U\sqrt{\Delta}$-环，而幂级数环 $R[[x]]$则从 R继承这一性质。同样，对于左（右）阿廷环，成为 $U\sqrt{\Delta}$-环与成为 UN-环这两个条件等价；此外，对于大小为 $n \geq 1$ 、定义在 R上的全矩阵环 $M_n(R)$，这两个条件也都得以保持。另对于交换环 R，$M_n(R)$恰为 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 是局部环。此外，我们刻画了群环 RG 成为 $U\sqrt{\Delta}$-环的条件，并证明对于局部可解群 G，这当且仅当 R 是 $U\sqrt{\Delta}$-环，且 G是某个素数 $p \in J(R)$ 阶的局部有限 p-群时成立。

1. Introduction and Motivations

在本文中，假定所有环都是结合的且具有单位元。在 [4], 中，Cˇalugˇareanu 与 Lam 引入了精细环的概念。一个环称为 精细的，如果每个非零元都可以写成一个单位与一个幂零元之和。这一概念给出了单环的一个新的、名副其实的类，它严格包含所有单阿廷环所构成的类（即除环上的全矩阵环）。精细环及其若干相关推广已被许多作者深入研究；例如，参见 [3, 5, 16, 24]。与此平行，在 [2], 中，Cˇalugˇareanu 引入了 UN-环 的概念，即每个非单位元都是一个单位与一个幂零元之积的环。这类环也已被若干作者研究；例如，参见 [20, 23]。

此外，V´amos 在 [19] 中引入了所谓的 *2*-良环，其定义为每个元素都可以表示为两个单位元之和的环。在 [2], 中证明了，具有 2-good 单位元的 UN-环实际上是,

Date：2026年2月17日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 16N20，16S34，16S50，16U99。*Key words and phrases.* 单位；雅各布森根；2-good 环；$U\sqrt{\Delta}$-环；UN-环；矩阵环；群环。

2-良环。此外，文中还提出了一个问题：找出环的一个真子类 $\mathcal{C}$，使得

$$\{UN\text{-rings with a 2-good identity}\} \subset \mathcal{C} \subset \{\text{2-good rings}\}.$$

在 [23, 例 1], 中，Zhou 证明，若环 R 具有 2-good 单位元，且 $R/J(R)$ 是一个 UN-环，则 $R \in \mathcal{C}$，其中 $J(R)$ 表示环 R 的所有极大左理想之交，即其雅各布森根 R。

在此背景下，Saini 和 Udar 进一步在 [18]中引入并研究了一类新的环，它是 UN-环的一种共同推广，称为$U\sqrt{J}$-环。若环 R中的每个非单位元都可以表示为一个单位与来自 $\sqrt{J(R)}$ 的元素的乘积，则称该环为 $U\sqrt{J}$。

根据 Wang 和 Chen [21], ，这个根可以表示为

$$\sqrt{J(R)} = \{\, a \in R \mid a^n \in J(R) \text{ for some } n \geq 1 \,\}.$$

他们证明， $U\sqrt{J}$-环这一类严格介于具有 2-good 单位元的 UN-环与 2-良环之间，并对 C˘alug˘areanu 在 [2] 中提出的问题作出了肯定回答，正如上文所述。

此外，对于由环 R 的所有单位组成的单位群 $U(R)$，本研究目前关注的是子环

$$\begin{aligned} J(R) \subseteq \Delta(R) &= \{x \in R \mid x + u \in U(R) \ \forall\, u \in U(R)\} \\ &= \{x \in R \mid 1 - xu \in U(R) \ \forall\, u \in U(R)\} \\ &= \{x \in R \mid 1 - ux \in U(R) \ \forall\, u \in U(R)\}, \end{aligned}$$

该子环最早由 Lam [13, Exercise 4.24], 注意到，随后 Leroy 和 Matczuk [14] 对其进行了深入研究。他们的结果，尤其是 [14,Theorems3 和 6], ，表明 $\Delta(R)$ 是在所有单位（或拟可逆元）的乘法作用下保持不变的最大 Jacobson 根子环。此外， $\Delta(R) = J(T)$，其中 T表示由 R 的单位生成的子环；而条件 $\Delta(R) = J(R)$ 成立当且仅当 $\Delta(R)$ 是 R 的一个理想。

现在，仿照 [10]， R 称为 UQ-环，如果 R 的每个非单位元都可以写成一个单位与一个拟正则元的乘积，其中元素 $a \in R$ 称为拟正则，条件是 $a+1$ 为单位。

在本研究中，我们如下引入 $U\sqrt{\Delta}$-环：它是 $U\sqrt{J}$ 和 UN-环的一种在逻辑上并非平凡的推广。这类环 R 中的每个非单位元都可表示为 R 中的一个单位与 $\sqrt{\Delta(R)}$ 中的一个元素的乘积，其中

$$\sqrt{\Delta(R)} := \{x \in R \mid x^n \in J(R) \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}.$$

因此，在上述几类环之间，我们有以下包含关系：

$$\{UN\text{-rings}\} \subsetneqq \{U\sqrt{J}\text{-rings}\} \subseteq \{U\sqrt{\Delta}\text{-rings}\} \subsetneqq \{UQ\text{-rings}\}.$$

在第 2 节中，我们首先定义集合 $\sqrt{\Delta(R)}$ 的基本性质，并利用这些性质构造 $U\sqrt{\Delta}$-环的非平凡例子。值得注意的是，我们证明了每个 $U\sqrt{\Delta}$-环同时也是不可分解的 Dedekind-有限环（见命题 2.7）。我们还说明，对于任意环 R，多项式环 $R[x]$ 和 Laurent多项式环 $R[x, x^{-1}]$ 都不是 $U\sqrt{\Delta}$-环，而幂级数环 $R[[x]]$ 是 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 其本身是 $U\sqrt{\Delta}$-环（见例 2.17、命题 2.18 和推论 2.19）。

在第3节中，对于左（分别地，右）阿廷环 R，我们证明 R 是$U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R是 UN-环，当且仅当 $M_n(R)$是 UN-环，当且仅当 $M_n(R)$是 $U\sqrt{\Delta}$-环（见定理3.3）。对于交换的原环 R，我们证明 $M_n(R)$是$U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 是局部环（见推论3.2）。

在第4节中，我们给出群环 RG 成为 $U\sqrt{\Delta}$-环的充要条件。具体而言，我们证明，对于环 R 和局部可解群 G，群环 RG 是 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当R是 $U\sqrt{\Delta}$-环，并且 G是某个素数 p-群的局部有限 $p \in J(R)$（见定理4.3和推论4.4）。

为使论述完整并方便读者，我们回顾一些下文将频繁使用的基本记号：对于任意环 R， R的幂零元集合、 R的幂等元集合以及 R 的中心分别记作 Nil(R)、Id(R) 和$C(R)$。以变量 x为变量、系数取自 R 的多项式环和形式幂级数环分别记作 $R[x]$ 和 $R[[x]]$。回顾一下，若环 R 满足 Nil(R) $=$ L(R)，则称其为弱2-素环，其中后一个符号表示 R的 Levitzki根。例如，每个交换环或每个约化环都是弱2-素环。

我们还用 $M_n(R)$ 表示 R 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的环。

2. Examples and Basic Properties

设 R 是一个环。令

$$\sqrt{\Delta(R)} := \{x \in R \mid x^n \in \Delta(R) \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}.$$

现在，定义

$$U\sqrt{\Delta(R)} := \{x \in R \mid x = ab \text{ for some } a \in U(R) \text{ and } b \in \sqrt{\Delta(R)}\}.$$

我们从下文将广泛使用的以下技术性结果开始研究。

引理 2.1. 对于每个环 R，我们都有：
(1) 若 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$ 且 $b \in U(R)$，其中 $ab = ba$，则 $ab \in \sqrt{\Delta(R)}$。
(2) 若 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$，则 $1 - a \in U(R)$。*(3)* 若 $a \in \sqrt{\Delta(R)} \cap C(R)$，则 $a \in \Delta(R)$。

(4) 对每个理想 $I \subseteq J(R)$，都有 $\sqrt{\Delta(R/I)} = \sqrt{\Delta(R)/I}$。*(5)* 若 $R = \prod_{i=1}^{k} R_i$，则 $\sqrt{\Delta(R)} = \prod_{i=1}^{k} \sqrt{\Delta(R_i)}$。*(6)* $\sqrt{\Delta(R)}\Delta(R) \subseteq \Delta(R)$。*(7)* $\sqrt{\Delta(R)} + \Delta(R) \subseteq \sqrt{\Delta(R)}$。*(8)* 若 $a \in U(\sqrt{\Delta(R)}) \cap C(R)$，则 $1 - a \in U(R)$。*(9)* 若 $a \in U(\sqrt{\Delta(R)})$，则对每个 $u, v \in U(R)$，$uav \in U\sqrt{\Delta(R)}$。*(10)* 若 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$，则对每个 $u \in U(R)$，$u^{-1}au \in \sqrt{\Delta(R)}$。*(11)* 若 $ac \in \sqrt{\Delta(R)}$，其中 $c \in C(R) \cap U(R)$，则 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$。

证明。(1) 假设 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$ 且 $b \in U(R)$，其中 $ab = ba$。因此，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a^n \in \Delta(R)$，于是 $(ab)^n = a^n b^n \in \Delta(R)$ 根据 [14,引理 1(2)]，，由此 $ab \in \sqrt{\Delta(R)}$。

(2) 假设 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$。因此，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a^n \in \Delta(R)$。所以，

$$(1-a)(1+a+\cdots+a^{n-1}) = 1 - a^n \in U(R),$$

并且因此 $1 - a \in U(R)$。

(3) 假设 $a \in \sqrt{\Delta(R)} \cap C(R)$。那么，对于每个 $r \in U(R)$，由 (1) 可得 $ar \in \sqrt{\Delta(R)}$。所以，根据 (2)，$1 - ar \in U(R)$，从而$a \in \Delta(R)$。

(4) 由 $\Delta(R/I) = \Delta(R)/I$ 可轻易得到此结论（参见 [14, 命题 6(3)]）。

(5) 既然 $\Delta(R) = \prod_{i=1}^{k} \Delta(R_i)$（例如参见 [14, 引理 1(5)]），证明便显而易见。

(6) 设 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$ 且 $b \in \Delta(R)$。由第 (2) 部分可得 $1 - a \in U(R)$。由于 $\Delta(R)$在可逆元乘法下封闭，因此得到$b - ab = (1 - a)b \in \Delta(R)$。此外，由于 $\Delta(R)$ 对加法封闭，我们得出 $ab \in \Delta(R)$。

(7) 取 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$ 和 $b \in \Delta(R)$。于是存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $a^k \in \Delta(R)$。根据第 (6) 部分以及 $\Delta(R)$对加法封闭这一事实，我们推得

$$(a+b)^k = a^k + \sum_{\text{finite}} (\text{products of } k \text{ factors } a \text{ and } b) \in \Delta(R) + \Delta(R) \subseteq \Delta(R).$$

(8) 设 $a = uq$，其中 $u \in U(R)$ 且 $q \in \sqrt{\Delta(R)}$。注意

$$qu = u^{-1}uqu = u^{-1}au = a = uq.$$

现在，由 (1) 可知 $a \in \sqrt{\Delta(R)}$ 成立，因此根据 (2)，$1 - a \in U(R)$。

(9) 假设 $a = xy$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-分解，即 $x \in U(R)$ 且 $y \in \sqrt{\Delta(R)}$。那么可写为 $uav = (uxv)(v^{-1}yv)$，这也是一个 $U\sqrt{\Delta}$-分解。

(10) 这显然成立，因为 $\Delta(R)$在乘以单位后保持不变（见 [14,引理 1(2)]）。

(11) 假设 $ac \in \sqrt{\Delta(R)}$，则存在某个 $n \in \mathbb{N}$使得 $(ac)^n \in \Delta(R)$。由于 $c \in C(R)$，我们得到 $(ac)^n = a^n c^n \in \Delta(R)$。由 [14,引理 1(2)], 可知，最后一点意味着 $a^n \in \Delta(R)$。因此， $a \in \sqrt{\Delta(R)}$。 □

现在出现了两类评注。

注记 2.2. 对于每个环 R，以下四点均成立: (1) 众所周知， $\Delta(R) \subseteq \sqrt{\Delta(R)}$ 且 $\mathrm{Nil}(R) \subseteq \sqrt{\Delta(R)}$；然而，反向蕴含一般并不成立。为验证这一点，令 $S := M_2(\mathbb{F}_2)$， $K = \mathbb{F}_2[[x]]$，且 $L = S \times K$。考虑元素 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in S.$ ，则可验证 $A^2 = 0 \in \Delta(S)$，由此得到 $A \in \sqrt{\Delta(S)}$，而 $A \notin \Delta(S)$。此外，$x \in J(K) \subseteq \sqrt{\Delta(K)}$，但 $x \notin \mathrm{Nil}(K)$。现在，令$a := (A, x) \in L$。利用引理2.1(5)，可得 $a \in \sqrt{\Delta(L)}$；然而，$a \notin J(L)$ 且 $a \notin \mathrm{Nil}(L)$。

(2) $\sqrt{\Delta(R)} \cap \mathrm{Id}(R) = \{0\}$。事实上，若 $e \in \sqrt{\Delta(R)} \cap \mathrm{Id}(R)$，则引理 2.1(2) 保证 $1 - e \in \mathrm{Id}(R) \cap U(R)$，因此 $e = 0$。

(3) R 是局部环，当且仅当 $R = U(R) \cup \sqrt{\Delta(R)}$。事实上，若 R 是局部的，则可见

$$R = U(R) \cup J(R) \subseteq U(R) \cup \sqrt{\Delta(R)} \subseteq R,$$

因此 $R = U(R) \cup \sqrt{\Delta(R)}$。

反过来，假设 $R = U(R) \cup \sqrt{\Delta(R)}$ 且 $a \notin U(R)$。那么， $a \in \sqrt{\Delta(R)}$，于是引理 2.1(2) 可得 $1 - a \in U(R)$，因此R 是一个局部环。

(4) $\sqrt{\Delta(R)} \cap U(R) = \emptyset$。事实上，若 $u \in \sqrt{\Delta(R)} \cap U(R)$，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $u^n \in \Delta(R)$，从而 $0 = 1 - u^{-n}u^n \in U(R)$，这显然是矛盾。

注记 2.3. 众所周知，$\sqrt{J(R)} \subseteq \sqrt{\Delta(R)}$；然而，其逆蕴含一般并不成立。为验证这一点，借助手头的 [13, 例 4.24]，我们取 A 为任意不是 J-半单的交换整环（即 $J(A)$非零）。现在考虑 $R := A[t]$。容易看出 $J(R) =$幂零$(R) =(0)$，从而 $\sqrt{J(R)} =(0)$。但是 $\Delta(R)$非零，因此 $\sqrt{\Delta(R)}$非零，正如所料，这就给出了我们的断言。

现在我们通过证明下述结论继续推进。

命题 2.4. 设 $a, b \in R$。若 $1 - ab \in \sqrt{\Delta(R)}$，则 $1 - ba \in \sqrt{\Delta(R)}$成立，当且仅当 $a \in U(R)$。

证明。 设 $a \in U(R)$。因此，由引理 2.1(10)可得

$$1 - ba = a^{-1}(1 - ab)a \in \sqrt{\Delta(R)}.$$

反之，由于 $1 - ab$， $1 - ba \in \sqrt{\Delta(R)}$，我们可得 ab， $ba \in U(R)$，因此 $a \in U(R)$。 □

对于环 R，通常称 $\mathrm{Id}(R)$（分别地，$U(R)$ 和 $\sqrt{\Delta(R)}$）是平凡的，当且仅当 $\mathrm{Id}(R) = \{0,1\}$（分别地，$U(R) = \{1\}$ 和 $\sqrt{\Delta(R)} = \{0\}$）。

现在我们来证明以下主要结果。

定理 2.5. 设 R 是一个环，使得 $R = U(R) \cup \sqrt{\Delta(R)} \cup \mathrm{Id}(R)$。那么，以下陈述恰有一个成立：

(1) R 是局部环；*(2)* R 是布尔环；*(3)* R 是一个非交换环，且 $\mathrm{char}(R) = 2$。

证明。根据 $\sqrt{\Delta(R)}$ 的性质，我们将论证分为两种主要情形。

情形 1: 假设 $\sqrt{\Delta(R)} = \{0\}$。那么，我们有 $R = U(R) \cup Id(R$。根据 [7, 定理 2.4], 这迫使以下两者之一成立：R 是一个除环，因此是局部环；或者 R 是布尔环。

情形 2： 现在假设 $\sqrt{\Delta(R)} \neq \{0\}$。令 $d \in \sqrt{\Delta(R)} \setminus \{0\}$，并定义 $u := 1 + d$。由于 $d \neq 0$，我们得到 $u \in U(R) \setminus \{1\}$，这意味着单位群非平凡。

子情形 2.1： 若 $\mathrm{Id}(R) = \{0,1\}$，那么我们观察到 $R = U(R) \cup \sqrt{\Delta(R)}$，这保证了 R 根据备注2.2(3) 是局部的。

子情形 2.2： 假设三个子集 $U(R)$、$\sqrt{\Delta(R)}$ 和 $\mathrm{Id}(R)$ 均非平凡。令 $e \in \mathrm{Id}(R) \setminus \{0,1\}$，并再次记 $u = 1 + d \in U(R) \setminus \{1\}$。现在我们证明 $2 \notin U(R)$。

反设 $2 \in U(R)$。考虑元素 $2e$。若$2e \in \mathrm{Id}(R)$，则 $(2e)^2 = 2e$保证 $e = 0$，这与e的选取矛盾。因此，$2e$必属于 $\sqrt{\Delta(R)}$。然而，由引理 2.1(11)可得$e \in \sqrt{\Delta(R)}$，这与 $e \in \mathrm{Id}(R$矛盾。因此，$2 \notin U(R$，如所述。

因此，2 必属于 $\mathrm{Id}(R)$ 或 $\sqrt{\Delta(R)}$。若 $2^2 = 2$，则 $2 = 0$，即 $\mathrm{char}(R) = 2$。或者，若 $2 \in \sqrt{\Delta(R)}$，则 $3 = 1 + 2 \in U(R)$。

现在考察元素 $3e$。显然，由于 $e \neq 1$，$3e \notin U(R)$。若 $3e \in \sqrt{\Delta(R)}$，则引理 2.1(11)再次保证 $e = 0$，矛盾。因此，$3e \in \mathrm{Id}(R)$，并且由于 $(3e)^2 = 3e$，可得 $6e = 0$，从而得到 $2e = 0$。利用 $1 - e$ 进行类似计算可得 $2(1 - e) = 0$，于是 $2 = 0$，且再次有 $\mathrm{char}(R) = 2$。

为结束论证，我们证明 R 不是阿贝尔的。反设它是阿贝尔的，则有 $ue = eu$。然而，$ue \notin U(R)$ 且$ue \notin \sqrt{\Delta(R)}$。因此，$ue \in \mathrm{Id}(R)$ 意味着 $(ue)^2 = ue$，即 $ue = e$，同理 $u(1 - e) = 1 - e$，从而得到

$$u = ue + u(1 - e) = e + (1 - e) = 1,$$

并与 $u \neq 1$ 矛盾，正如所要求的。因此，R 是一个特征为 $= 2$ 的非交换环，证毕。□

接下来的结论相当基础，但值得一提，因为它们对我们后续的讨论很有用。

例 2.6. (1) $\sqrt{\Delta}(R)$ 中的每个元素都是 $U\sqrt{\Delta}$-元素。

(2) Nil(R) 中的每个元素都是 $U\sqrt{\Delta}$-元素。(3) 若 R是一个 UU-环，即 $U(R) = 1 + \text{Nil}(R)$，则 R是 $U\sqrt{\Delta}$当且仅当 R 是 UN。(4) 每个简单阿廷环都是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

下述陈述表明，每个 $U\sqrt{\Delta}$-环既是不可分解的，也是 Dedekind-有限的。

命题 2.7. 设 R 是一个$U\sqrt{\Delta}$-环。则，

(1) R 没有非平凡的中心幂等元。特别地， R 是一个不可分解环。

(2) R 是 *Dedekind*-有限的。

证明。 (1) 假设 $e \in \text{Id}(R) \cap C(R)$。利用引理 2.1(8)，我们得到 $1 - e \in \text{Id}(R) \cap U(R)$，因此 $e = 0$，即为所需。

(2) 反设 R 不是 Dedekind-有限环。于是，存在元素 a、$b \in R \setminus U(R)$，使得 $ab = 1$但 $ba \neq 1$。假设 $a = vp$与 $b = uq$ 分别是 a 与 b的两个 $U\sqrt{\Delta}$-分解。设 $n \in \mathbb{N}$ 是使得 $q^n \in \Delta(R)$ 成立的最小正整数。于是，由关系 $U(R)\Delta(R) \subseteq \Delta(R)$，并借助引理 2.1(6)，我们得到

$$q^{n-1} = abq^{n-1} = vpuq^n \in \Delta(R),$$

这与 $n \in \mathbb{N}$ 的极小性矛盾，即为所求。 □

接下来给出一些有用的技术性结论。

引理 2.8. 设 R 是一个环， I 是 R 的一个理想。若 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，则 R/I 也是一个$U\sqrt{\Delta}$-环。反之，若 $I \subseteq J(R)$且 R/I 是一个$U\sqrt{\Delta}$-环，则 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

证明. 假设 $\bar{a} = a + I \in U(R/I)$。于是， $a \notin U(R)$。因此，存在$u \in U(R)$和 $q \in \sqrt{\Delta}(R)$，使得 $a = uq$。显然， $\bar{u} \in U(R/I)$，并由引理 2.1(4)，可知 $\bar{q} \in \sqrt{\Delta}(R/I)$ 且 $\bar{a} = \bar{u}\bar{q}$。因此，R/I 也是一个$U\sqrt{\Delta}$-环。

反之，设 $I \subseteq J(R)$， R/I是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，且 $\bar{a} \notin U(R)$。于是，$\bar{a} \notin U(R/I)$，因此存在 $\bar{q} \in \sqrt{\Delta}(R/I)$ 和 $\bar{u} \in U(R/I)$，使得$\bar{a} = \bar{u}\bar{q}$。所以， $a - uq \in I \subseteq J(R)$，从而存在某个 $j \in J(R)$，满足 $a = uq + j = u(q + u^{-1}j)$。显然， $u \in U(R)$，由引理2.1(4)可得 $q \in \sqrt{\Delta}(R)$。现在可以应用引理2.1(7)，写成 $q + u^{-1}j \in \sqrt{\Delta}(R)$，因此 $a \in U\sqrt{\Delta}(R)$，证毕。□

命题2.9。 设 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。那么， $C(R)$ 是一个局部环。特别地，若 R 是交换的，则 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 是局部环。

证明。 假设 $a \in C(R)$，且 $a \notin U(C(R))$。因此， a 是 R中的非单位元素，故 $a \in C(R) \cap U\sqrt{\Delta}(R$。根据引理2.1(8)，我们写作

$$1 - a \in U(R) \cap C(R) \subseteq U(C(R)).$$

因此， $C(R)$ 是一个局部环，正如所述。 □

以下是一些更具体的例子，用以说明上述结论：

例 2.10. $\mathbb{Z}_n$ 是一个$U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 n 是某个素数的幂。

例 2.11. 设 $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$。尽管 $\mathbb{Z}_4$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，但环 R本身不是 $U\sqrt{\Delta}$。事实上，经过简单的技术性检验可知，非单位元(2,3)不能表示为一个单位与来自 $\sqrt{\Delta}(R)$的元素的乘积。

注 2.12. (1) 一般而言，三角矩阵环不是 $U\sqrt{\Delta}$-环；事实上，例如，粗略检查后可明显看出 $T_2(\mathbb{Z}_2)$不满足这一性质。

(2) 一个 $U\sqrt{\Delta}$-环的子环未必保留相同的性质。例如， $M_2(\mathbb{Z}_2)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环（结合下文的推论3.2），而它的子环 $T_2(\mathbb{Z}_2)$ 显然不是。

设 R 是一个环， M 是 R上的一个双模。 R与 M 的平凡扩张定义为

$$T(R, M) = \{(r, m) : r \in R \text{ and } m \in M\},$$

加法按分量定义，乘法定义为

$$(r, m)(s, n) = (rs, rn + ms).$$

注意，平凡扩张 $T(R, M)$必然同构于形式 T矩阵环R的子环

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R \text{ and } m \in M \right\}$$

此外， $T(R, R) \cong R[x]/(x^2)$。同样，我们注意到平凡扩张 $T(R, M)$的单位集合为

$$U(T(R, M)) = T(U(R), M).$$

此外，参照 [11], ，我们可以写成

$$\Delta(T(R, M)) = T(\Delta(R), M).$$

现在我们可以证明如下结论。

命题 2.13。设 R 是一个环，M 是 R上的一个双模。那么，以下各项成立：

(1) 平凡扩张 $T(R,M)$ 是 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

(2) 对于 $n \geq 2$，商环 $R[x;\alpha]/(x^n)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

(3) 对于 $n \geq 2$，商环 $R[[x;\alpha]]/(x^n)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

证明。(1) 令 $A := T(R,M)$，并考虑 $I := T(0,M)$。不难看出，存在 $I \subseteq J(A)$ 使得 $A/I \cong R$。因此，该结论直接由命题 2.8得出。

(2) 令 $A := R[x;\alpha]/(x^n)$。考虑理想 $I := (x)/(x^n)$ of A，我们验证 $I \subseteq J(A)$ 满足 $A/I \cong R$。因此，该结论立即由命题 2.8得出。

(3) 已知同构

$$R[x;\alpha]/(x^n) \cong R[[x;\alpha]]/(x^n)$$

成立，该结论立即由第 (2) 点得出。 □

由此立即得到：

推论 2.14. 设 R 是一个环。则以下条件等价：
(1) R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。*(2)* 对于 $n \geq 2$，环 $R[x]/(x^n)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$- 环。*(3)* 对于 $n \geq 2$，环 $R[[x]]/(x^n)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

设 R 是一个环，且 M 是 R 上的双模。令

$$DT(R,M) := \{(a,m,b,n) | a,b \in R, m,n \in M\}$$

加法按分量定义，乘法定义为

$(a_1, m_1, b_1, n_1)(a_2, m_2, b_2, n_2) = (a_1a_2, a_1m_2+m_1a_2, a_1b_2+b_1a_2, a_1n_2+m_1b_2+b_1m_2+n_1a_2)$，
由此可见，$DT(R, M)$ 是一个环，它与 $T(T(R, M) T(R, M))$ 同构。

此外，我们有

$$DT(R,M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m & b & n \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & a & m \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a,b \in R, m,n \in M \right\}.$$

现在我们建立如下环同构：映射

$$R[x,y]/(x^2,y^2) \to DT(R,R)$$

定义为

$$a + bx + cy + dxy \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

容易验证，它是一个环同构。

以下是两个直接推论。

推论 2.15. 设 R 是一个环， M 是 R上的双模。那么，以下断言等价:

(1) R 是一个$U\overline{\sqrt{}}\Delta$-环。*(2)* $DT(R, M)$是一个 $U\sqrt{}\Delta$-环。*(3)* $\overline{DT(R, R)}$是一个 $U\sqrt{}\Delta$-环。*(4)* $R\overline{[x, y]}/\underline{(x^2, y^2)}$是一个 $U\sqrt{}\Delta$-环。

假设

$$L_n(R) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{T}_n(R) \mid \mid a_1, \ldots, a_n \in R \right\}$$

and

$$S_n(R) := \{(a_{ij}) \in \mathrm{T}_n(R) \mid a_{11} = \cdots = a_{nn}\},$$

不难验证，由下式定义的映射 φ: $S_n(R) \to T(S_{n-1}(R)\ L_{n-1}(R))$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{11} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{11} \end{pmatrix},$$

说明

$$S_n(R) \cong T(S_{n-1}(R), L_{n-1}(R)).$$

这一同构是研究环 $S_n(R)$ 的关键工具，因为通过考察平凡扩张并对 n 运用归纳法，我们可以将结果大幅推广到 $S_n(R)$。

推论 2.16。 </style}对于 ,(R) 是一个 $U\sqrt{}\Delta$-环，$\overline{\text{当且仅当}}$ R 是一个$U\sqrt{}\Delta$-环。

现在我们继续研究一些多项式环扩张的相关结果。

例 2.17. 对于任意环 R，Laurent多项式环 $\underline{R[x, x^{-1}]}$和多项式环 $R[x]$ 都不是 $U\sqrt{}\Delta$-环。

证明。 反设 $R[x]$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。由于 $x \notin U(\overline{R}[x])$ 是中心元，引理 2.1(8) 使我们可以写成 $1-x \in U(R[x]$，矛盾。

现在，反过来假设 $R[x,x^{-1}]$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。由于$1+x+\overline{x^2} \notin U($ $R[x,x^{-1}])$且它是一个中心元，因此可写为

$$-x(1+x) = 1-(1+x+x^2) \in U(R[x,x^{-1}]),$$

从而得到 $1+x \in U(R[x,x^{-1}])$，这显然矛盾。

□

现在我们可以证明下面这个略显出人意料的等价命题。

命题 2.18. 环 $R[[x;\ \alpha]]$ 是 $U\sqrt{\Delta}$，当且仅当 R也是如此。

证明. 令 $I:=R[[x;\ \alpha]]x$，我们看到 I是 $R[[x;\ \alpha]]$的一个理想。注意到等式 $J(R[[x;\ \alpha]]) = J(R)+I$成立，因此必有 $I \subseteq J(R[[x;\ \alpha]])$。又由于 $R[[x;\ \alpha]]/I \cong R$成立，应用引理 2.8 即可得出所述结论。□

下面是一个直接推论。

推论 2.19. 环 $R[[x]]$ 是 $U\sqrt{\Delta}$ 当且仅当 R也是如此。

现在，根据上面的例子，多项式环 $R[x]$ 不是一个$U\sqrt{\Delta}$-环。然而，一个自然的问题随之而来：*()* 中元素的显式形式是什么？下一个结果针对一类更一般的环，即斜多项式环 $R[x;\alpha]$，回答了这一问题。

设 R 是一个环， α 是 R的一个端同态。回想一下，如果对所有 a, $b \in R$，都有 $ab=0$ 当且仅当 $a\alpha(b)=0$，则称 R 是 α-相容的。

命题 2.20. 设 R 是一个 α-相容环。那么， R 是弱2-素环，当且仅当

$$U\sqrt{\Delta}(R[x;\alpha]) = U\sqrt{\Delta}(R) + \mathrm{L}(R)[x;\alpha]x.$$

证明。 首先，假设

$$U\sqrt{\Delta}(R[x;\alpha]) = U\sqrt{\Delta}(R) + \mathrm{L}(R)[x;\alpha]x$$

成立。如果 $a^n=0$，那么 [8, 引理 2。1] 允许写成 $a\alpha(a)\cdots\alpha^{n-1}(a)$ =0，这表明 $(ax)^n=0$。因此，

$ax \in$幂零$(R[x;\ \alpha]) \subseteq \sqrt{\Delta(R[x;\ \alpha])} \subseteq U\sqrt{\Delta}(R[x;\ \alpha]) = U\sqrt{\Delta}(R) + \mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]$,

因此 $a \in \mathrm{L}(R)$，从而得到 $\mathrm{Nil}(R) = \mathrm{L}(R)$，如所要求。

反过来，现在假设 R 是一个弱 2-素环，并证明三个主张。

主张（1）： $\Delta(R[x;\alpha]) = \Delta(R) + \mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$。

写出 $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \Delta(R[x;\ \alpha])$。那么，对于 $u \in U(R)$，有 $1-uf \in U($ $R[x;\ \alpha])$，因此 [8, 推论 2.14] 可保证 $a_0 \in \Delta(R)$，并且对每个$1 \le i \le n$， $a_i \in$ $\mathrm{Nil}(R) = \mathrm{L}(R)$。因此， $\Delta(R[x;\ \alpha]) \subseteq \Delta(R) + \mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$。

反过来，设 $f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\Delta(R)+\mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$ 且 $U=\sum_{i=0}^{n}u_ix^i\in U(R[x;\ \alpha])$。利用 [8, 推论 2.14]，$u_0\in U(R)$，并且对每个 $1\le i\le n$，$u_i\in\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{L}(R)$。由于 $\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{L}(R)$ 是一个理想，很容易证明 $1-uf\in U(R)+\mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$。因此，应用 [8, 推论 2.14]可得 $1-uf\in U(R[x;\ \alpha])$，这意味着 $f\in\Delta(R[x;\ \alpha])$。

Claim (2): $\sqrt{\Delta(R[x;\alpha])}=\sqrt{\Delta(R)}+\mathrm{L}(R)[x;\alpha]x.$

设 $f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\sqrt{\Delta(R[x;\alpha])}$。那么，存在 $m\in\mathbb{N}$，使得$f^m\in\Delta(R[x;\ \alpha])$。根据主张（1），我们有 $a_0\in\sqrt{\Delta(R)}$，并且

$$a_n\alpha^n(a_n)\cdots\alpha^{n(m-1)}(a_n)\in\mathrm{L}(R)=\mathrm{Nil}(R),$$

因此，考虑到 [8, 引理 2.1]，$a_n\in\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{L}(R)$。

现在，我们证明若 $n\ge 2$，则 $a_{n-1}\in\mathrm{L}(R)$。为此，令$f:=g-a_nx^n$。那么，$f^m=g^m+q$，其中 $q\in R[x;\ \alpha]$。注意，q 的系数可以写成 a_i 和 $\alpha^k(a_j)$ 中单项式之和，其中 $a_i,a_j\in\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$, $k\ge 0$是一个正整数，且每个单项式都包含 a_n。由于 $a_n\in\mathrm{Nil}(R)$，且 $\mathrm{Nil}(R)$ 是一个理想，我们得出 $q\in\mathrm{Nil}(R)[x;\ \alpha]x$。此外，根据主张（1），$\mathrm{Nil}(R)[x;\ \alpha]x\subseteq\Delta(R[x;\ \alpha])$。因此，$g^m\in\Delta(R[x;\alpha])$。再次利用主张（1），我们发现

$$a_{n-1}\alpha^{n-1}(a_{n-1})\cdots\alpha^{(n-1)(m-1)}(a_{n-1})\in\mathrm{L}(R)=\mathrm{Nil}(R),$$

因此，应用 [8, 引理 2.1] 可得 $a_{n-1}\in\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{L}(R)$。继续这一过程，我们可以证明，对于每个 $1\le i\le n$，$a_i\in\mathrm{L}(R)$。

反过来，设 $f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\sqrt{\Delta(R)}+\mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$。那么，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $a_0^m\in\Delta(R)$。简单计算可得 $f^m\in\Delta(R[x;\ \alpha])$。

Claim (3): $U\sqrt{\Delta}(R[x;\alpha])=\sqrt{\Delta}(R)+\mathrm{L}(R)[x;\alpha]x.$

记 $f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in U\sqrt{\Delta}(R[x;\ \alpha])$。那么，存在 $u=\sum_{i=0}^{n}u_ix^i\in U(R[x;\ \alpha])$ 和 $q=\sum_{i=0}^{n}q_ix^i\in\sqrt{\Delta(R[x;\ \alpha])}$，使得 $f=uq$。考虑到 [8, 推论 2.14], ，可推知 $u_0\in U(R)$，并且对于每个$1\le i\le n$，$u_i\in\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{L}(R)$。此外，根据断言（2），$q_0\in\sqrt{\Delta(R)}$，并且对于每个 $1\le i\le n$，$q_i\in\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{L}(R)$。直接计算可得 $f\in\sqrt{\Delta(R)}+\mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$。

反之，设 $f\in\sqrt{\Delta(R)}+\mathrm{L}(R)[x;\ \alpha]x$。那么，存在 $u\in U(R)$、$q\in\sqrt{\Delta(R)}$，并且对每个 $1\le i\le n$，都有 $l_i\in\mathrm{L}(R)$，使得 $f=uq+\sum_{i=1}^{n}l_ix^i$。提出 u 并利用断言（2），我们得到

$$f=u(q+u^{-1}l_1x+\cdots u^{-1}l_nx^n)\in U\sqrt{\Delta}(R[x;\alpha]),$$

如所要求的，从而得到所声称的等式。 □

现在我们开始关注下一系列技术性预备知识。在此之前，我们称这样的环 R 为唯一 $U\sqrt{\Delta}$：其中每个非单位元都能唯一地写成 R 中的一个单位与 $\sqrt{\Delta}(R)$中的一个元素的乘积；而那些每个非单位元都写成.....的环

R 中的一个单位与 $\sqrt{\Delta}(R)$中的一个元素的可交换乘积，则称为强 $U\sqrt{\Delta}$。由此，我们得以证明以下充要条件成立。

引理 2.21. 设 R 为一个环。则，

(1) R 是唯一 $U\sqrt{\Delta}$，当且仅当 R 是除环。*(2)* R 是强 $U\sqrt{\Delta}$，当且仅当 R 是局部的。

证明。 (1) 假设 $d \in \sqrt{\Delta}(R)$。则我们可以写成

$$d = 1 \cdot d = (1-d)(1-d)^{-1}d.$$

由于 d 与$(1-d)^{-1}$ 彼此可交换，引理 2.1(1)适用，从而得到$(1-d)^{-1}d \in \sqrt{\Delta}(R)$，从而

$$1 = 1 - d \Rightarrow d = 0.$$

因此， $\sqrt{\Delta}(R) = 0$，从而 R 是除环。反之相当显然，故我们略去细节。

(2) 假设 R是强 $U\sqrt{\Delta}$。设 $x \notin U(R)$。则 $x = ud = du$对某个 $u \in U(R)$ 与 $d \in \sqrt{\Delta}(R)$ 成立。利用引理 2.1(1)，我们得到$x \in \sqrt{\Delta}(R)$，从而 R 是局部的，根据注记 2.2(3)。

反之，假设 R 是局部的。于是，再次根据注记2.2(3)，所有非单位元都在 $\sqrt{\Delta}(R)$ 中。令 $d \in \sqrt{\Delta}(R)$，则 $d = 1 \cdot d$ 是一个强$U\sqrt{\Delta}$分解。最后， R是强 $U\sqrt{\Delta}$，如所断言。 □

下述性质也值得记录。

命题 2.22. 任意 $U\sqrt{\Delta}$-环 R 是左右对称的。

证明。 设 $r \in R$是一个$U\sqrt{\Delta}$-元。则存在 $u \in U(R)$ 与$d \in \sqrt{\Delta}(R)$，使得 $r = ud$。于是我们有 $r = (udu^{-1})u$，其中 $udu^{-1} \in \sqrt{\Delta}(R)$，由引理 2.1(10)，且 $u \in U(R)$。 □

若满足 $U(R) \cap S = U(S)$，我们就称环 R 的子环 S 有理闭。

命题 2.23。 设 $S \subseteq R$ 是 R 的有理闭子环。那么，$\sqrt{\Delta}(R) \cap S \subseteq \sqrt{\Delta}(S)$。

证明。 设 $r \in \sqrt{\Delta}(R) \cap S$。因此，存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $r^n \in \Delta(R) \cap S$。此外，对于每个 $u \in U(R)$，我们有 $1 + r^n u \in U(R)$。因此，对于每个 $v \in U(S)$，可得

$$1 + r^n v \in U(R) \cap S = U(S).$$

因此， $r^n \in \Delta(S)$，从而 $r \in \sqrt{\Delta}(S)$，如前所述。 □

引理 2.24. 设 R是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。那么 $C(R)$ 也是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

证明. 取 $x \in C(R)$，并假设 $x \notin U(C(R))$，这相当于 $x \notin U(R)$。由于 R是一个$U\sqrt{\Delta}$环，我们可以写成 $x = ud$，其中某些 $u \in U(R)$ 和$d \in \sqrt{\Delta}(R)$。

Now,

$$d = u^{-1}x = xu^{-1} \Rightarrow x = du = ud.$$

应用引理 2.1(1)，我们得到 $x = ud \in \sqrt{\Delta}(R)$。但是，命题 2.23 告诉我们 $C(R) \cap \sqrt{\Delta}(R) \subseteq \sqrt{\Delta}(C(R))$，从而迫使 $x \in \sqrt{\Delta}(C(R))$。因此，$x \notin U(C(R)) \Rightarrow x \in \sqrt{\Delta}(C(R))$，而注记 2.2(3) 表明 $C(R)$ 是一个局部环，因此是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，正如所述。□

引理 2.25. 设 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$环，并设 $n \in \mathbb{Z}$。那么，要么 $n \cdot 1 \in U(R)$，要么 $n \cdot 1 \in \Delta(R)$。

证明。假设 $n \notin U(R)$，存在 $u \in U(R)$ 和 $d \in \sqrt{\Delta}(R)$，使得 $n = ud = du$。由引理 2.1(1)，我们得出 $n \in \sqrt{\Delta}(R)$。因此，引理 2.1(3) 告诉我们 $n \in \Delta(R)$。□

现在我们来看以下三个有趣的断言。

命题 2.26。设 R是一个环。若 $R/J(R)$是 UN，则 R是$U\sqrt{\Delta}$。

证明。对任意 $a \in R$，考虑 $\bar{a} := a + J(R) \in R/J(R) = R$。假设 $\bar{a}$ 是 R中的一个非单位元，那么我们可以写成 $\bar{a} = \bar{u}\bar{q}$，其中 $\bar{u} \in U(R)$且$\bar{q} \in Nil(\bar{R})$。因此，$a = uq + j$对某个 $j \in J(R)$成立。于是，$a = u(q + u^{-1}j)$，其中$u \in U(R)$且 $q \in \mathrm{Nil}(R)$。注意

$$q + u^{-1}j \in Nil(R) + J(R) \subseteq \sqrt{\Delta(R)}.$$

这表明 $q + u^{-1}j \in \sqrt{\Delta}(R)$。因此，$a$ 具有以下形式：$u \cdot d$，其中某个$u \in U(R)$和 $d \in \sqrt{\Delta}(R)$，即，a是 $U\sqrt{\Delta}$。因此，R是一个 $U\sqrt{\Delta}$环，结论如上。□

命题 2.27. 设 R 是一个仅含平凡幂等元的强 π-正则环。那么，R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$ 环。

证明。假设 R 是强 π-正则的。根据 [1, 命题 2.6]，R 是强 clean 的。现在，由于 R 是强 clean 的，且仅有平凡幂等元（即 0 和 1），可立即推出 R 是一个局部环。但由于每个局部环都是$U\sqrt{\Delta}$，结论成立。□

命题 2.28. 如果 R 是一个具有 *2-good* 单位元的$U\sqrt{\Delta}$-环，那么 R 是一个 *2-good* 环。

证明。设 $a \in R$ 是一个非单位元。那么，我们可以写成 $a = ud$，其中 $u \in U(R)$ 且 $d \in \sqrt{\Delta}(R)$。因此，

$$a = u(1 + d) - u = uv - u,$$

其中 $v := 1 + d \in U(R)$。根据假设，我们有 $1 = u + v$。因此，

$$u = u \cdot 1 = u^2 + uv,$$

其中 $u^2, uv \in U(R)$。因此，R是一个 2-good 环，证毕。□

结合 [18, 例 3.6]和命题2.28，我们得到以下著名环类之间的严格包含关系：

$$\begin{aligned}\{UN\text{-rings with 2-good identity}\} &\subsetneqq \{U\sqrt{J}\text{-rings with 2-good identity}\}\\ &\subseteq \{U\sqrt{\Delta}\text{-rings with 2-good identity}\}\\ &\subsetneqq \{\text{2-good rings}\}.\end{aligned}$$

3. Matrix Rings over $U\sqrt{\Delta}$ and UN-rings

在本节中，我们寻求矩阵环成为 $U\sqrt{\Delta}$-环的一些判据。

命题3.1。 如果 $M_n（R）$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，那么 $C（R）$ 是一个局部环。

证明。 由于 $M_n（R）$是一个 $\overline{U}\sqrt{\Delta}$-环，命题 2.9 指出，中心$C（M_n（R）$）是局部的。但众所周知， $C（M_n（R）$）$\cong C（R）$。因此，$C（R）$是一个局部环。□

作为一个有价值的推论，我们得到：

推论3.2. 设 R 是交换环。那么， $M_n(R)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 $\overline{R}$ 是局部环。

一般而言，对于单侧阿廷环，我们可以给出如下判据。

定理3.3. 设 R 是左（分别地，右）阿廷环，且 n 是一个自然数。那么， R是一个 $U\sqrt{\Delta}$- 环，当且仅当 R 是一个 UN- 环；当且仅当 $M_n(R)$是一个 UN- 环；当且仅当 $M_n(R)$是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

证明。 如果 R 是左阿廷的，那么众所周知， $J(R)$ 是幂零的，因此也是幂零的。我们证明，对于所有左阿廷环而言， UN-环和 $U\sqrt{\Delta}$-环是等价的概念。首先，显然每个 UN-环都是 $U\sqrt{\Delta}$-环。

现在，为了证明逆命题，假设 R 是一个$U\sqrt{\Delta}$-环。由于 R 是左阿廷的，我们知道

$$R/J(R) \cong \prod_{i=1}^{k} M_{m_i}(D_i),$$

其中 $k \in \mathbb{N}$ ，且每个 D_i 都是除环。因此，

$$M_n(R)/J(M_n(R)) \cong M_n(R/J(R)) \cong \prod_{i=1}^{k} M_{nm_i}(D_i).$$

然而，另一方面，由命题 2.7 和引理 2.8 可得 $R/J(R) \cong M_m(D)$，其中 $m \in \mathbb{N}$ 和 D 是一个除环。由于根据 [20, 命题 0(a)] 可知， $M_m(D)$是一个 UN-环，且$J(R)$是幂零的，因此 R必定是一个 UN-环。此外，众所周知， R 是左阿廷的当且仅当 $M_n(R)$是左阿廷的，因此只需

证明 R 是一个 UN-环当且仅当 $M_n(R)$是一个 UN-环。为此， R是一个 UN-环当且仅当 $R/J(R)$是一个 UN-环；根据命题 2.7，这当且仅当$k=1$；这又当且仅当 $M_n(R)/J(M_n(R))$是一个 UN-环；这又当且仅当 $M_n(R)$是一个 UN-环，因为正如所料， $J(M_n(R))$是幂零的。□

给定环 R 以及 R 的中心元 s，四元组 $\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ 在按分量相加、并按下述方式定义乘法时成为一个环

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+sx_1y_2 & a_1x_2+x_1b_2 \\ y_1a_2+b_1y_2 & sy_1x_2+b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

此后将该环记为 $K_s(R)$。

现在我们准备证明下述结论。

命题 3.4。设 R 是一个交换环，且 $s\in J(R)$。若 $K_s(R)$ 是一个$U\sqrt{\Delta}$-环，则 R 也是一个$U\sqrt{\Delta}$-环。

证明。选取 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in K_s(R)$ 为某个 $a\in R$ 的非单位元。由于 $K_s(R)$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，我们可以写成

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in U(K_s(R))$ 且 $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\sqrt{\Delta(K_s(R))}$。但 [15, 引理 4.1] 表明 $u\in U(R)$。此外，由于对于某个 $n\in\mathbb{N}$，有 $\begin{pmatrix} d^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\Delta(K_s(R))$，因此再次由 [15, 引理 4.1] 可知 $d^n\in\Delta(R)$。因此，$d\in\sqrt{\Delta(R)}$，从而得到 $a=ud$，满足 $u\in U(R)$ 且 $d\in\sqrt{\Delta(R)}$。于是， R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，正如所言。□

4. Group Rings over $U\sqrt{\Delta}$-rings

设 G 是任意一个群， R 是任意一个环。照例， RG 表示 G在 R 上的群环。众所周知，同态 $\varepsilon: RG\to R$，由 $\varepsilon\left(\sum_{g\in G}a_gg\right)=\sum_{g\in G}a_g$ 定义，称为 RG 的增广映射，其核记作 $\varepsilon(RG)$，称为 RG的增广理想。

在 [9], UN-群环的刻画用了三页篇幅。下文将给出UN-群环更简单、更简洁的分类。随后，我们将采用相同的方法刻画$U\sqrt{\Delta}$-群环。

由此，我们得到第一个主要结果如下。

定理 4.1. 设 F 是一个域， G 是一个群。那么，以下两个陈述等价：

(1) 群环 FG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。*(2)* 群环 FG 是局部的。

证明。(2) $\Longrightarrow$ (1) 这一蕴含是显然的。

(1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $\alpha \in FG$ 是一个非单位元。由于 FG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，存在 $u \in U(FG)$ 和 $z \in \sqrt{\Delta}(FG)$，使得 $\alpha = uz$。现在，对等式两边应用增广映射 ε，得到

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(uz) = \varepsilon(u)\varepsilon(z).$$

由于 F 是一个域，必有 $\varepsilon(z) = 0$。因此， $\varepsilon(\alpha) = 0$，进而保证 $\alpha \in \varepsilon(FG)$。所以，每个非单位元都属于理想 $\varepsilon(FG)$，从而非单位元的集合构成一个理想。这就证明了 FG 是局部的，证毕。□

引理 4.2. 包含关系 $\varepsilon(\Delta(RG)) \subseteq \Delta(R)$ 总是成立。

证明。设 $d \in \Delta(RG)$ 和 $u \in U(R)$。由于 $\varepsilon(u) = u$ 且 $\varepsilon(U(RG)) \subseteq U(R)$，因此可直接得到

$$1 - u\varepsilon(d) = \varepsilon(1 - ud) \in \varepsilon(U(RG)) \subseteq U(R),$$

如所需。 □

我们的第二个主要结果如下。

定理 4.3. 设 R 是一个环，且 G 是一个非平凡群。

(2) 若 RG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，则 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，且 G 是一个 p-群，其中 $p \in J$为素数(R)。

(2) 若 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，且 G 是一个局部有限的 p-群，其中 $p \in J$为素数(R)，则 RG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

证明。(1) 由于 $\varepsilon(\Delta(RG)) \subseteq \Delta(R)$，因此 $\varepsilon(\sqrt{\Delta(RG)}) \subseteq \sqrt{\Delta}(R)$。接下来，我们打算证明 $\varepsilon(RG) \subseteq J(RG)$。为此，假设$\alpha \in \varepsilon(RG) \setminus J(RG)$。那么，存在一个元素 $\beta \in RG$，使得$1 - \alpha\beta$不属于 $U(RG)$。但是，由于 RG 是一个$U\sqrt{\Delta}$- 环，存在 $u \in U(RG)$ 和 $j \in \sqrt{\Delta}(RG)$，使得 $1 - \alpha\beta = uj$。由于 $\varepsilon(RG)$ 是一个理想，我们可知 $1 = \varepsilon(u)\varepsilon(j)$，从而保证

$$\varepsilon(u)^{-1} = \varepsilon(j) \in U(R) \cap \sqrt{\Delta(R)},$$

矛盾。因此， $\varepsilon(RG) \subseteq J(RG)$，正如预期所要证明的。现在，参照 [6, 命题 15(i)]， G 是一个 p-群，其中素数为 $p \in J(R)$。此外，由于 $RG/\varepsilon(RG) \cong R$，命题 2.8 保证 R 是一个 $U\sqrt{\Delta}$- 环。

(2) 查阅 [22, 引理 2] 可得 $\varepsilon(RG) \subseteq J(RG)$。但是，由于 $RG/\varepsilon(RG) \cong R$，根据命题 2.8 可知 RG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$- 环。 □

众所周知，每个挠局部可解群都是局部有限的（例如，参见 [17, 定理 5.4。11]）。因此，以下断言是定理 4.3 的直接推论。

推论 4.4。设 R 为一个环，G 为一个局部可解群。那么，当且仅当 R 为一个 $U\sqrt{\Delta}$-环且 G 为一个局部有限 p-群（$p \in \overline{J}$ 为素数）时，RG 才是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

设 F 为一个域，G 为一个局部可解群。上述结果可用于推出：FG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$- 环，当且仅当 FG 是一个 UN- 环；这又当且仅当 F 具有正特征 p 且 G 是一个局部有限 p-群。更具体地说，我们建立如下结果。

推论 4.5。设 F 为一个不可数域，G 为一个群。那么，当且仅当 FG 为一个 UN-环时，FG 才是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。在此情形下，F 具有正特征 p，且 G 是一个局部有限 p-群。

证明。假设 FG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。要证明 FG 是一个 UN-环，只需证明 $J(FG)$ 是幂零的。设 $x \in J(FG)$，并令 H 为 G 中由 x 的支撑生成的子群。由于 H 是可数的，FH 是一个可数生成的 F-代数。应用 [12, 推论 4.21]，可知 $J(FH)$ 是幂零的。现在，由于 $x \in J(FG) \cap FH \subseteq J(FH)$，可得 x 是幂零的，证毕。□

本文最后以如下结果收尾。

命题 4.6。设 R 是一个阿廷环。那么，RG 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环，当且仅当 $(R/J(R))G$ 是一个 $U\sqrt{\Delta}$-环。

证明。由于 R 是一个阿廷环，我们可以利用 [6, 命题 3] 推出 $J(R)G \subseteq J(RG)$。另一方面，我们知道同构关系 $(R/J(R))G \cong RG/J(R)G$ 总是成立。因此，正如预期的那样，由引理2.8即可立即得到结论。□

致谢。本研究由伊朗国家科学基金会（伊朗国家科学基金会）通过项目编号 40402401 资助。

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

Declarations

作者在撰写和准备本手稿时声明不存在任何利益冲突。

References

[1] W.D. Burgess 和 P. Menal，关于强 π-正则环及到其中的同态， *Commun. Algebra* **16**(8) (1988), 1701–1725. [2] G. C̆aluğareanu，UN-环， *J. Algebra Appl.* **15**(9) (2016), 文章 1650182. [3] G. C̆aluğareanu，关于单位精细环， *Mediterr. J. Math.* **18**(3) (2021), 文章 115. [4] G. C̆aluğareanu 和 T.Y. Lam，精细环：一类新的单环，

J. Algebra ( ) ( ), 文章 .

Appl. **14** 9 2015 1650173

[5] G. C̆aluğareanu 和 Y. Zhou，具有精细幂等元的环， *J. Algebra Appl.* **21**(1) (2022), 文章 2250013. [6] I.G. Connell，关于群环， *Can. Math. J.* **15** (1963), 650–685. [7] W. Chen，关于洁净环和洁净元， *Southeast Asian Bull. Math.* **32** (2008), 855–861.[8] W. Chen，关于斜多项式环中元素的常数乘积，

Bull. Iran. Math. Soc. **41** 2 2015 453 462

( ) ( ), – . [9] K. Jangra 和 D. Udar，UN-环与群环， *Bull. Korean Math. Soc.* **60**(1) (2023), 83–91. [10] K. Jangra 和 D. Udar，关于 UQ-环， *J. Algebra Appl.* **22**(8) (2023), 文章 2350175. [11] F. Karabacak, M.T. Kosan, T. Quynh 和 D. Tai，UJ-环的推广，

J. ( ). [12] T.Y. Lam， *A First Course in Noncommutative Ring Theory*，第 2 版。数学研究生教材，第 131 卷（Springer-Verlag，柏林，2001）。[13] T.Y. Lam， *Exercises in Classical Ring Theory*，Springer-Verlag，纽约（2003），第二版。[14] A. Leroy 和 J. Matczuk，关于雅各布森根环的注记，

Contemp. Math. ( ), – . [15] A. Moussavi, P. Danchev, A. Javan 和 O. Hasanzadeh，关于强 Δ-洁净环，

727 2019 269 276

Asian-European J. Math. **19**(2026). [16] P.P. Nielsen 和 Y. Zhou，极大精细环，

Linear Algebra Appl. **680** (2024), 45–64.[17] D.J.S. Robinson， *A Course in the Theory of Groups*，第 2 版，Springer-Verlag，1996。[18] S. Saini 和 D. Udar，$U\sqrt{J}$-环， *J. Algebra Appl.* **24** (2025). [19] P. Vámos，2-良环， *Quart. J. Math.* **56**(3) (2005), 417–430. [20] P. Vámos，关于非 *J. Algebra* 单位元是幂零元的单位倍数的环，( ), 文章 . [21] Z. Wang 和 J. Chen，结合环和 Banach 代数中的伪 Drazin逆， *Linear Algebra Appl.* **437**(6) (2012), 1332–1345. [22] Y. Zhou， *On clean group rings*，《环论进展》，数学前沿，Birkhauser，Verlag Basel/Switzerland，2010，第 335–345 页。[23] Y. Zhou，关于 UN-环的注记， *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* **64**(1) (2021), 97–100.[24] Y. Zhou，广义精细环， *J. Algebra Appl.* **21**(3) (2022), 文章 2250060。

Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, 14115-111 Tehran Jalal AleAhmad Nasr, Iran

Email address: o.hasanzade@modares.ac.ir; hasanzadeomiid@gmail.com

Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, 14115-111 Tehran Jalal AleAhmad Nasr, Iran

Email address: moussavi.a@modares.ac.ir; moussavi.a@gmail.com

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia, Bulgaria

Email address: danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com