arXiv:2602.14610v1 [math.RA] 16 Feb 2026

弱 $\sqrt{JU}$ 环

Zari Vesali Mahmood、Ahmad Moussavi 和 Peter Danchev

Abstract. 我们引入并研究所谓的弱 $\sqrt{JU}$ 环（以下简称为 $W\sqrt{JU}$ 环）。在这类环中，每个单位都具有 $j+1$ 或 $j-1$ 的形式，其中某个 j 属于 $\sqrt{J(R)} := \{x \in R : x^n \in J(R), \text{且满足某个 } n \geq 1\}$。这类环非平凡地推广了 $\sqrt{JU}$、UU、JU、WUU 和 WJU 环。我们研究了它们的基本性质，证明它们是戴德金有限的，$M_n(R)$ 永远不是 $W\sqrt{JU}$（对 $n \geq 2$ 而言），并且当 $\mathrm{char}(R) > 0$ 时，它必等于某个 α、$\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的 $2^\alpha 3^\beta$。此外，对于群环 RG，我们证明：若 RG 是 $W\sqrt{JU}$，则 R 是 $W\sqrt{JU}$，且 G 是挠群。另外，当 R 的特征为正，且 G 是局部有限的 p-群时，我们给出如下完整刻画：RG 是 $W\sqrt{JU}$ 环，当且仅当以下条件之一成立：R 是 $\sqrt{JU}$ 环且 G 是 2-群；或者 R 是带有 $3 \in J(R)$ 的 $W\sqrt{JU}$ 环且 G 是 3-群；或者 $R \cong R_1 \times R_2$，其中 R_1 是 $\sqrt{JU}$ 环、R_2 是 $W\sqrt{JU}$ 环，且 G 是平凡群。

我们的研究成果大幅推进了 Saini 和 Udar 最近在《捷克数学杂志》（2025年）中取得的成果。

1. Introduction and Major Concepts

本文中，R 表示一个含单位元的结合环，它不一定是交换的。我们采用以下标准记号：$U(R)$表示单位群，$\mathrm{Nil}(R)$表示幂零元集合，$C(R)$表示中心，$\mathrm{Id}(R)$表示幂等元集合，$J(R)$表示雅各布森根。同样，对于任意正整数 n，以 R 为系数的 $n \times n$ 矩阵环记为$\mathbf{M}_n(R)$，而$n \times n$ 上三角矩阵环记为$\mathbf{T}_n(R)$。此外，若一个环的所有幂等元都是中心元，即 $\mathrm{Id}(R) \subseteq C(R)$，则称该环为阿贝尔环。

关于 [20]，一个环 R 若满足交换性质，则称其为 $a \in R$，存在一个幂等元 $e \in aR$ 使得 $1-e \in (1-a)R$。此外，在 [20] 中引入了干净环这一类环，其特点是每个元素都可以写成一个单位与一个幂等元之和。众所周知，每个干净环都是交换环，但

日期：2026年2月17日。2010年数学主题分类。16S34，16U60，20C07。关键词与短语。$\sqrt{J(R)}$，$\sqrt{JU}$ 环，$W\sqrt{JU}$ 环，正则环，单位正则环，矩阵环，群环。

反过来并非普遍成立；然而，对阿贝尔环而言则成立。更强的概念——强 *clean* 环如 [21]中所定义——要求单位与幂等元彼此可交换。众所周知，强 clean 环是强 π-正则环的真推广，并且在过去二十年里受到许多作者的广泛研究。

此外，Diesl [15]将（强）幂零洁净环定义为这样一类环：其中每个元素都可以表示为一个幂零元和一个幂等元之和，且二者可交换。作为一种自然推广，Danchev 和 McGovern[14]在交换情形下将弱幂零 *clean* 环定义为这样一类环：其中每个元素或者是一个幂零元与一个幂等元之和，或者是二者之差。作者给出了这类环及其群环的完整刻画。此外，Breaz 等人 [2] 将该定义推广到任意环，并为阿贝尔弱幂零 clean 环获得了一个分解定理。他们还证明，对于一个除环 D 和$n \geq 1$， $M_n(D)$ 是弱幂零 clean 环，当且仅当 $D \cong \mathbb{Z}_2$ 或 $D \cong \mathbb{Z}_3$，其中 $n = 1$。

作为对阿贝尔情形的进一步常见推广，Ko̧san 和 Zhou [17]定义了强弱幂零 *clean* 环，其中要求幂零元与幂等元可交换，并将结构理论扩展到这一更广泛的情形。然而， [10]给出了弱幂零 clean 环在一般情形下的完整描述。

下一部分将用到的一些经典概念如下：回顾一下，如果环中的每个元素都是幂等元，则称该环为布尔 环。若对每个$a \in R$，都存在 $x \in R$ （分别存在 $x \in U(R)$），使得 $axa = a$，则称该环按冯·诺依曼的意义是正则（分别为单位正则）；若对所有 $a \in R$都有 $a \in a^2R$ ，则也称其为强正则环。若 $R/J(R)$ 是正则环，且幂等元模 $J(R)$ 可提升，则称该环为半正则环。半正则环都是交换环，但反过来一般并不 成立（见[20]）。

另一方面，仿照 Ko̧san 等人 [16], ，若环中的每个元素都可以表示为一个幂等元与 $J(R)$ 中的一个元素之和，或者等价地，若 $R/J(R)$ 是布尔环且幂等元可以模 $J(R)$ 提升，则称该环为*J*-洁净环（这类环在 [22] 中也称为半布尔环）。一般来说，若 $R = J(R) \pm \mathrm{Id}(R)$，则称该环为弱半布尔环；这类环也可称为弱*J*-洁净环。任何半布尔环都是弱半布尔环，而每个弱半布尔环都是洁净环，但这两个蕴含都不可逆（见 [8]）。

另一个方向上，若环 R 满足 $U(R) = 1 + \mathrm{Nil}(R)$（参见 [13]），则称其为 *UU*-环。后来，Danchev [10] 引入了更大的一个类，称为弱 *UU*-环（简称*WUU*-环），其中 $U(R) = \mathrm{Nil}(R) \pm 1$，并证明了许多结果，包括：交换环是 WUU 环，当且

仅当它是洁净环；它是 WUU 环，当且仅当它是强弱幂零洁净环；而这又当且仅当 $J(R)$ 是幂零的，且 $R/J(R)$ 同构于布尔环 B、$\mathbb{Z}_3$ 或 $B \times \mathbb{Z}_3$。他还证明，对任意 $n \geq 2$，$\mathbf{M}_n(R)$ 永远不是 WUU 环。

由于 $\pm 1 + J(R) \subseteq U(R)$总是成立，因此考虑等式成立的环是很自然的：据此，若*JU* 环（或*UJ* 环，在 [16]中）满足 $U(R) = 1 + J(R)$（见 [7]）。此外，Danchev [9] 将这一概念作了合乎逻辑的推广，提出了弱 *JU* 环（简称*WJU* 环），并用幂等元提升及 $R/J(R)$的结构刻画了交换（分别地，洁净）WJU 环。

另一方面，集合

$$\sqrt{J(R)} = \{x \in R : x^n \in J(R) \text{ for some } n \geq 1\}$$

在 [24]中被引入；它严格包含 $J(R)$，但未必是子环。显然，$\mathbf{Nil}(R) \subseteq \sqrt{J(R)}$。

最近，Saini 和 Udar [23] 将满足 $U(R) = 1 + \sqrt{J(R)}$的环定义为 $\sqrt{JU}$ 环。这一类环严格包含 UU 环和 JU 环。他们证明，这一性质可传递到角环，并且 $M_n(R)$仅当 $n = 1$且 R本身是 $\sqrt{JU}$时才是$\sqrt{JU}$；此外，$\sqrt{JU}$ 环是戴德金有限的。

独立地，Danchev 等人 [11] 以$UJ^{\#}$环（其中 $\sqrt{J(R)} = J^{\#}(R)$）这一名称研究了同一类，并详细考察了它们的各种扩张，甚至包括群环。

在本文中，我们通过如下条件定义并探讨弱 $\sqrt{JU}$环这一类（为方便起见，下文简记为 $W\sqrt{JU}$环）

$$U(R) = \pm 1 + \sqrt{J(R)}.$$

因此，每个单位都可以写成 $j + 1$ 或 $j - 1$，对某个$j \in \sqrt{J(R)}$成立。这一概念分别绝对地推广了 $\sqrt{JU}$、UU、JU、WUU 和 WJU 环的全部概念。

我们还考虑斜多项式扩张。事实上，对于环自同态 $\alpha : R \to R$，令 $R[x; \alpha]$ 表示斜多项式环，其乘法由 $xr = \alpha(r)x$给出。当 $\alpha = \mathrm{id}_R$时，我们得到通常的多项式环 $R[x]$。类似地，$R[[x; \alpha]]$ 表示斜形式幂级数环，其中 $R[[x]] = R[[x; \mathrm{id}_R]]$ 为标准的形式幂级数环。

总结目前的工作：在第 2 节中，我们引入弱布尔$\sqrt{JU}$ 环，并确立其关键性质。我们证明了关于集合 $\sqrt{J(R)}$ 的若干基本预备结论，并考察 $W\sqrt{JU}$性质在同态、直积、角环和矩阵环下的表现，还从雅各布森根和单位群的角度刻画 $W\sqrt{JU}$环。我们还探讨了

$W\sqrt{JU}$环与其他经典环类之间的联系，例如洁净环、 π-正则环和弱布尔环。

接下来的第 3 节将专门研究群环。我们给出群环 RG 为 $W\sqrt{JU}$ 的必要条件，并由此确立 R 必须为 $W\sqrt{JU}$，而 G 必须是一个挠群。在对 R 的特征或群 G 作出一些附加假设后，我们得到了更强的结果，得出在某些情况下 G 必须是 2-群或 3-群。本节的主要结论给出了一个完整刻画：当群环 RG 的 R 具有正特征，且 G 是一个局部有限 p-群时，它是弱 $\sqrt{JU}$ 的。

2. Properties of Weakly $\sqrt{JU}$ Rings

本节旨在考察弱 $\sqrt{JU}$ 环的一般结构性质，并进一步将其应用于所述结构结果。我们还考察弱 $\sqrt{JU}$ 环与其他著名环类之间的交集，例如洁净环、 π-正则环、弱布尔环等。

我们的第一个预备性技术结果如下。

引理 2.1。 [11, 引理 2。1] 设 R 是任意一个环。那么，以下断言成立：

(1) 若 $a \in \overline{\sqrt{J(R)}}$ 且 $b \in R$ 满足 $ab = ba$，则 $ab \in \overline{\sqrt{J(R)}}$。*(2)* 对任意 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{N}$， $a^n \in \sqrt{J(R)}$ 当且仅当$a \in \overline{\sqrt{J(R)}}$。*(3)* 若 $a \in \sqrt{J(R)}$，则 $1 - a \in U(R)$。*(4)* 若 $a \in \sqrt{J(R)} \cap C(R)$，则 $a \in J(R)$。*(5)* 对任意理想 $I \subseteq J(R)$，有 $\sqrt{J(R/I)} = \sqrt{J(R)}/I$。*(6)* 若 $R = \prod R_i$，则 $\sqrt{J(R)} = \prod \sqrt{J(R_i)}$。*(7)* 若 $a, b \in R$ 且 $ab \in \sqrt{J(R)}$，则 $ba \in \sqrt{J(R)}$。*(8)* $Nil(R) + J(R) \subseteq \sqrt{J(R)}$。

显然，对于交换环 R， $\sqrt{J(R)}$ 与雅各布森根 $\overline{J(R)}$ 重合。

引理 2.2. 若 $f : R \to S$ 是一个满环同态，则$f(\sqrt{J(R)}) \subseteq \sqrt{J(S)}$。

证明。令 $t \in f(\sqrt{\overline{J(R)}})$。那么， $t = f(x)$，其中 $x \in \sqrt{J(\overline{R)}}$。因此，$x^n \in J(R)$，其中某个 n。于是，

$$t^n = (f(x))^n = f(x^n) \in f(J(R)) \subseteq J(S)$$

参见 [18, 例 4.10]。因此， $t \in \sqrt{J(S)}$，正如所要求的。 □

由此我们顺理成章地得出以下基本概念。

定义 2.3。环 R被称为弱 $\sqrt{JU}$，为便于后文使用，缩写为 $W\sqrt{JU}$，如果以下等式中至少有一个成立：

$$U(R) = \pm 1 + \sqrt{J(R)}.$$

成立。

显然，该条件等价于要求R中的每个单位都可以表示为 $j+1$ 或 $j-1$，其中 $j \in \sqrt{J(R)}$。

对所定义的环类是**新的**且非平凡的这一点，一个简单的观察如下。

例 2.4。环 $\mathbb{Z}_3$是$W\sqrt{JU}$，但不是$\sqrt{JU}$。

回顾一下，环 R 的有理闭子环是指具有性质 $U(R) \cap S = U(S)$ 的子环S。容易看出，每个含幺子环都具有这一性质。

命题 2.5. 设 S 是 R的有理闭子环。若 R 是一个$W\sqrt{JU}$环，则 S也是一个 $W\sqrt{JU}$环。

证明. 由于 $S \cap U(R) = U(S)$，我们有 $S \cap J(R) \subseteq J(S)$。此外，容易证明 $S \cap \sqrt{J(R)} \subseteq \sqrt{J(S)}$；应要求，我们将其留给有兴趣的读者直接验证。□

接下来，我们将证明一系列技术性结论，这些结论对于进一步探讨是必需的。

命题 2.6. 设 $I \subseteq J$（R）是环 R 的一个理想。那么， R 是$W\sqrt{JU}$ 当且仅当商环 R/I 也是如此。

证明。设 R是一个 $W\sqrt{JU}$环，并取 $u+I \in U(R/I)$。因此，$u \in U(R)$，从而 $u = \pm 1 + j$，其中 $j \in \sqrt{J(R)}$。因此，可写为

$$(u+I) = \pm(1+I) + (j+I),$$

其中 $j + I \in \sqrt{J(R)}/I = \sqrt{J(R/I)}$，根据引理 2.1(5)。

反过来，设 R/I是一个 $W\sqrt{JU}$环，并取 $u \in U(R)$。因此，$u + I \in U(R/I)$，于是 $(u + I) = \pm(1 + I) + (j + I)$，其中 $j + I \in \sqrt{J(R/I)} = \sqrt{J(R)}/I$。这意味着 $u + I = \pm(1 + j) + I$。所以，

$$u \pm (1 + j) \in I \subseteq J(R).$$

因此，$u = \pm 1 + j'$，其中 $j' \in \sqrt{J(R)}$，根据引理2.1(8)。最后，R是一个 $W\sqrt{JU}$环，正如预期。□

命题 2.7。设 R 是一个$W\sqrt{JU}$环，S 是一个 $\sqrt{JU}$环。那么，$R \times S$ 是一个 $W\sqrt{JU}$环。

证明。取 $(u,\ v)\ \in U(R\times S)\ =U(R)\ \times U(S)$。因此，存在 $j\in\sqrt{J(R)}$，使得 $u=1+j$ 或 $u=-1+j$。现在我们区分以下两种情况：

情形 I. 假设 $u=1+j$。那么，由于 $v\in U(S)$，存在 $j'\in\sqrt{J(S)}$ 使得 $v=1+j'$。因此，

$$(u,v)=(1,1)+(j,j'),$$

其中 $(j,j')\ \in\sqrt{J(R\times S)}$，由引理 2.1(6) 可得。

情形 II. 假设 $u=-1+j$。那么，由于 $v\in U(S)$，存在 $j'\in\sqrt{J(S)}$ 使得 $-v=1+j'$，即 $v=-1+(-j')$。因此，

$$(u,v)=-(1,1)+(j,-j'),$$

其中 $(j,-j')\ \in\sqrt{J(R\times S)}$，根据引理 2.1(6)。 □

我们将最后一个断言修正为以下更一般的表述。

命题 2.8. 设 $\{R_i\}_{i\in I}$ 是任意一族环。那么，环 R_i 的直积 $R=\prod_{i\in I}R_i$ 是 $W\sqrt{JU}$，当且仅当每个 R_i 都是 $W\sqrt{JU}$，且其中至多一个不是 $\sqrt{JU}$；也就是说，除一个外，其余都是 $\sqrt{JU}$，因为被排除的成员是 *proper* $W\sqrt{JU}$。

证明。($\Rightarrow$) 显然，每个 R_i 作为一个同态像都是 $W\sqrt{JU}$。现在假设有两个成员 R_{i_1} 和 R_{i_2}，满足 $i_1\neq i_2$，且不 $\sqrt{JU}$。那么，存在某些 $u_{i_j}\in U(R_{i_j})$，使得 $j=1,\ 2$，并且 $u_{i_1}\in U(R_{i_1})$ 和 $-u_{i_2}\in U(R_{i_2})$ 都不能 $\sqrt{JU}$分解。取 $u=(u_i)$，其中当 $i\neq i_j\ j=1,\ 2$ 时 $u_i=1$，我们推得 u 和 $-u$ 都不能表示为 1 与来自 $\sqrt{J}$的一个元素之和，从而得到矛盾。因此，除一个外，几乎所有 R_i 都是 $\sqrt{JU}$环，因为被排除的成员必须是 $W\sqrt{JU}$。

($\Leftarrow$) 假设 R_{i_0}是一个 $W\sqrt{JU}$环，而其他所有 R_i均为 $\sqrt{JU}$。因此，由于 [23, 命题 2.4], 我们可知 $\prod_{i\neq i_0}R_i$是 $\sqrt{JU}$。现在，命题 2.7 适用，由此可得 R是一个 $W\sqrt{JU}$环，结论得证。 □

由此立即得到两个推论：

推论 2.9。设 $L=\prod_{i\in I}R_i$ 是环 $R_i\cong R$和 $|I|\geq 2$的直积。那么，L 是一个 $W\sqrt{JU}$环，当且仅当 L 是一个 $\sqrt{JU}$环，当且仅当 R 是一个 $\sqrt{JU}$ 环。

推论 2.10。对于任意 $n\geq 2$，环 R^n 是 $W\sqrt{JU}$，当且仅当R^n是 $\sqrt{JU}$，当且仅当 R是 $\sqrt{JU}$。

命题 2.11. 对于任意非零环 R 和任意自然数$n\geq 2$，全矩阵环 $\mathrm{M}_n(R)$ 不是一个 $W\sqrt{JU}$环。

证明. 由于 $\mathbf{M}_2(R)$ 同构于 $\mathbf{M}_n(R$的一个角环，结合下文列出并证明的命题 2.17，只需证明 $\mathbf{M}_2(R)$不是一个 $W\sqrt{JU}$环。

为实现这一目标，考虑矩阵单位 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$。现在可以观察到

$$A+I=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

它是一个单位，因此不可能属于 $\sqrt{J(R)}$。

此外，可以看到

$$A-I=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

它也是一个单位，因此也不属于 $\sqrt{J(R)}$。

因此，可以得出结论：$\mathbf{M}_2(R)$ 不是一个 $W\sqrt{JU}$环，正如所要证明的那样。□

集合 $\{e_{ij}:\ 1\leq i,\ j\leq n\}$ 中的非零元素称为 R 的一组 n^2 矩阵单位，如果 $e_{ij}e_{st}=\delta_{js}e_{it}$，其中 $\delta_{jj}=1$，且对于$j\neq s$有 $\delta_{js}=0$。此时，$e:=\sum_{i=1}^{n}e_{ii}$ 是 R 的一个幂等元，并且 $eRe\cong\mathbf{M}_n(S)$，其中

$$S=\{r\in eRe: re_{ij}=e_{ij}r,\ \text{for all } i,j=1,2,...,n\}.$$

还记得，若一个环 R 满足：对于任意 $a,\ b\in R,\ ab=1$ 都能推出 $ba=1$，则称其为戴德金有限。换句话说，这种环中的所有单侧逆元必然都是双侧逆元。

命题2.12。 每个$W\sqrt{JU}$环都是戴德金有限的。

证明。反设 R 不是戴德金有限环，则存在元素 a、$b\in R$，使得 $ab=1$，但 $ba\neq 1$。令$e_{ij}:=a^i(1-ba)b^j$ 且 $e:=\sum_{i=1}^{n}e_{ii}$，可知存在一个非零环 S，使得 $eRe\cong M_n(S)$。然而，鉴于下文将提及的命题 2.17，eRe 是一个 $W\sqrt{JU}$ 环，因此 $\mathbf{M}_n(S)$ 也必定是一个 $W\sqrt{JU}$ 环，这与命题 2.11 相矛盾，正如预期。□

引理 2.13. 设 R是一个 $W\sqrt{JU}$环。如果 $J(R)=(0)$，且 R 的每个非零右理想都包含一个非零幂等元，那么 R 是约化的。

证明。假设矛盾 R 是非约化的情况成立。那么，存在一个非零元素 $a\in R$ 使得 $a^2=0$。由 [19, 定理 2。1] 可知，存在一个幂等元 $e\in RaR$ 使得 $eRe\cong\mathrm{M}_2(T)$ 是某个非平凡环 T。现在，命题2.17 告诉我们 eRe是一个 $W\sqrt{JU}$环，因此 $\mathbf{M}_2(T)$ 是一个 $W\sqrt{JU}$环。然而，这与命题2.11相矛盾，证毕。□

命题 2.14。 设 R 是一个 $W\sqrt{JU}$ 环。那么

(1) $3 \in U(R) \iff 2 \in J(R)$。*(2)* $2 \in U(R) \iff 3 \in J(R)$。特别地，若 $3 \in J(R)$，则 $\mathrm{Id}(R) = \{0, 1\}$。

证明。 (1) 由于 $1 + J(R) \subseteq U(R)$ 恒成立，该蕴含是直接的。

反之，假设 $3 \in U(R)$。于是，由于 R 是 $W\sqrt{JU}$，我们可以写成下列形式之一

$$3 = 1 + j \quad \text{or} \quad 3 = -1 + j$$

对某个 $j \in \sqrt{J(R)}$。在第一种情形下，$j = 2 \in \sqrt{J(R)}$，从而 $2 \in J(R)$，借助引理 2.1(4)；而在第二种情形下，$j = 4 \in \sqrt{J(R)}$，因而 $4 \in J(R)$。由此可得 $2 \in J(R)$，两种情形皆如此，正如所求。

(2) 假设 $3 \in J(R)$。由于 $1 + J(R) \subseteq U(R)$ 总是成立，因此可得 $2 = -1 + 3 \in U(R)$。

反过来，假设 $2 \in U(R)$。那么，由于 R 是 $W\sqrt{JU}$，我们可以写成以下两种情况之一

$$2 = 1 + j \quad \text{or} \quad 2 = -1 + j$$

其中某个 $j \in \sqrt{J(R)}$。第一种情况推出 $j = 1 \in \sqrt{J(R)}$，这与矛盾相矛盾。第二种情况则保证 $j = 3 \in \sqrt{J(R)}$，从而 $3 \in J(R)$，如所需。

至于第二部分，令 e 为 R 的一个幂等元。显然，$2e - 1$ 是一个单位，因此 $2e - 1 = j - 1$ 或 $2e - 1 = j + 1$。在第一种情况下，$2e = j$，于是 $e = 2^{-1}j \in \sqrt{J(R)}$，这意味着 $e = 0$，由 [23, 命题 2.1]可得。在第二种情况下，$2e = j + 2$，因此 $e = 2^{-1}j + 1 \in 1 + \sqrt{J(R)} \subseteq U(R)$，从而保证 $e = 1$，正如所需。□

命题 2.15. 环 R 是 $\sqrt{JU}$ 当且仅当 R 是 $W\sqrt{JU}$ 且 $2 \in J(R)$。

证明。 必要性直接由 [23, 命题 2.5] 得出。

至于充分性，设 $u \in R$，因此对某个 $j \in \sqrt{J(R)}$，我们必有 $u = j + 1$ 或 $u = j - 1$。于是，我们写成 $u = j - 1 = (j - 2) + 1$，其中 $j - 2 \in \sqrt{J(R)}$，即为所求。□

下一个断言至关重要。

引理 2.16. 设 R 是满足 $\mathrm{char}(R) > 0$ 的 $W\sqrt{JU}$ 环。则对某个 α、$\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，有 $\mathrm{char}(R) = 2^{\alpha}3^{\beta}$。

证明。 首先，如果 $n := \mathrm{char}(R)$ 是奇数，那么 $n - 1$ 是偶数，并且是 R 中的单位。这迫使 $2 \in U(R)$。因此，结合命题 2.14，我们有 $3 \in J(R)$，且 R 是不可分解的。现在，如果 $\mathrm{char}(R) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 且所有

$p_i \neq 3$，那么 (char(R)，3) $= 1$，从而得到 $1 \in J(R)$，这与已知条件矛盾。因此，至少有一个 p_i 必须为 3。由于 R 不可分解，利用著名的中国剩余定理，我们得到 char(R) $= 3^k$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$。

若此时 $n :=$ char(R) 为偶数，则要么 $n = 3k+1$， $n = 3k-1$要么 $n = 3k$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$ 为奇整数。首先，若 $n = 3k+1$ 或 $n = 3k-1$，由 $n1_R \in J(R)$ 可得 $3k \in U(R)$，从而 $3 \in U(R)$。因此，命题 2.14 给出 $2 \in J(R)$。现在，考虑到命题 2.15， R 必须是一个 $\sqrt{JU}$ 环。然而，若我们写作 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$，再次应用中国剩余定理可推出

$$R \cong R_1 \times \cdots \times R_m,$$

其中对所有 $1 \leq i \leq m$ 都有 $p_i^{\alpha_i} 1_{R_i} = 0$。但是，由于 R 是一个 $\sqrt{JU}$ 环，每个 R_i 也都是一个 $\sqrt{JU}$环，这表明对所有 $1 \leq i \leq m$ 都有 $2 \in J(R_i)$；因此，对每个 i 都有 $p_i = 2$。所以，在这种情况下，char(R) $= 2^\alpha$，其中某个 $\alpha \in \mathbb{N}$。

如果 $n = 3k$ 和 n 是偶数，我们可以写成 $n = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$。再次应用中国剩余定理可得

$$R \cong R_1 \times \cdots \times R_m,$$

其中 $R_1 := R/2^\alpha R$， $R_2 := R/3^\beta R$，并且 $R_i := R/p_i^{\alpha_i} R$ 对每个 $3 \leq i \leq m$。最后，命题 2.8 推出 $p_i = 2$ 对每个 $3 \leq i \leq m$都成立，正如所需。 □

命题 2.17。 对于任意 $e \in \mathrm{Id}(R)$，如果环 R 是 $W\sqrt{JU}$，那么角环 eRe 也同样是 $W\sqrt{JU}$。

证明。 令 $u \in U(eRe)$，我们有 $u + (1-e) \in U(R)$。因此，对于某个 $j \in \sqrt{J(R)}$，我们可以写成 $u + 1 - e = 1 + j$ 或 $u + 1 - e = -1 + j$。在第一种情况下，

$$j = u - e \in \sqrt{J(R)} \cap eRe = \sqrt{J(eRe)}$$

考虑到 [23, 命题 2.11], 从而 $u = e + j \in e + \sqrt{J(eRe)}$.

在其余情形中，我们将等式 $u + 1 = -1 + j$ 的两边同时从左侧和右侧乘以 e。由此自然得到 $eu = -e + ej$ 与 $ue = -e + je$。现在容易验证 $eu = ue = u$ 从而得到 $ej = je$。此外，我们有

$$je = jee = eje \in e\sqrt{J(R)}e = \sqrt{J(eRe)},$$

其中最后一个等式由 [23, 命题 2.11] 得出。因此，

$$u = -e + eje \in -e + \sqrt{J(eRe)},$$

这正是我们想要证明的。 □

命题2.18。 以下两项成立：

(1) 除环 R 是 $W\sqrt{JU}$，当且仅当要么 $R \cong \mathbb{Z}_2$，要么 $R \cong \mathbb{Z}_3$。

(2) 环 R 是局部的且 $W\sqrt{JU}$，当且仅当要么 $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$，要么 $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_3$。

证明。 (1) 由于 R 是除环，故有 $J(R) = \mathrm{Nil}(R) = (0)$，从而 $\sqrt{J(R)} = (0)$。因此，对任意非零元 $a \in R$，其中 $R \setminus \{0\} = U(R)$，我们得到 $a = \pm 1$，从而 $a^2 = 1$ 导致 $a^3 = a$。参照著名的雅各布森定理，可推出 R 必然是交换的。

现考虑多项式 $f(x) = 1 - x^2 \in R[x]$，可以看出 $f(x)$ 在乘法群 R^* 中至多有两个根，因为 R 是域。设 A 表示 f 在 R^* 中的全部根的集合。由于 R 既是域又是 $W\sqrt{JU}$ 环，故对每个非零元 $a \in R$，等式 $a^2 = 1$ 成立。因此， $R^* = A$，从而 $|R^*| = |A| \leq 2$。于是， R 同构于有限域 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_3$ 之一。逆命题显然成立。

(2) 这直接由 (1) 和命题 2.6 得出。 □

除上文给出的正则环和单位正则环的定义外，环 R 若对每个 $a \in R$，都存在某个整数 $n \geq 1$使得 $a^n \in a^n R a^n$，则称为 π-正则。正则环总是 π-正则的。若环 R 满足：对任意 $a \in R$， a 或 $-a$ 是幂等元，则称其为弱布尔环。

现在我们可以着手证明下面这个关键结果了。

定理2.19。 设 R 是一个环。那么，以下三个断言等价：

(1) R 是正则$W\sqrt{JU}$环。*(2)* R 是 π-正则约化 $W\sqrt{JU}$环。*(3)* R 是弱布尔环。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。由于 R 是正则的，因此必有 $J(R) = (0)$，且每个非零右理想都包含一个非零幂等元。因此，引理2.13说明 R 是约化的。此外，每个正则环都是 π-正则的。

(2) $\Rightarrow$ (3)。注意到约化环是阿贝尔的，因此 [1, 定理3] 使我们得出 R 是阿贝尔正则的，从而它是强正则的。因此， R 是单位正则的。同理，我们有 $\mathrm{Nil}(R) = J(R) = \sqrt{J(R)} = 0$。因此，对于任意 $u \in U(R)$，我们得到 $u = \pm 1$。但是，由于 R 是单位正则的，对于任意 $x \in R$ ，我们可以将 $x = ue$ 写成某个 $u \in U(R)$ 且$e \in \mathrm{Id}(R)$的形式。因此， $x = \pm e$。于是， R 是弱布尔的，证毕。

(3) $\Rightarrow$ (1)。容易验证 R 是正则的。取 $u \in U(R)$，我们有 $u = \pm 1$，因此 R 是一个 $W\sqrt{JU}$环，正如所述。□

推论2.20。 对于环 R，以下四个命题等价：

(1) R是正则 $W\sqrt{JU}$环。*(2)* R是强正则$W\sqrt{JU}$环。*(3)* R是单位正则 $W\sqrt{JU}$环。*(4)* R 是弱布尔环。

若环 R 满足 $R/J(R)$ 是弱布尔环，且 R 的所有幂等元都能模 $J(R)$ 提升，则称其为 半弱布尔环。类似地，若环 R 满足 $R/J(R)$ 是正则环，且 R 的所有幂等元都能模 $J(R)$ 提升，则称其为 半正则环。

现在我们着手证明以下主要结果。

定理 2.21. 设 R 是一个环。那么，以下三条等价：

(1) R 是一个半正则环。*(2)* $\overline{R}$ 是一个交换环。*(3)* R 是一个半弱布尔环。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。这很简单，因为半正则环总是交换环。

(2) $\Rightarrow$(3)。注意到 [20, 推论 2.4] 可用来推出 $R/J(R)$ 是交换的，且幂等元模 $J(R)$ 可提升。此外，由命题 2.6， $R/J(R)$ 是 $W\sqrt{JU}$。因此，不失一般性，可以假设 $J(R) = (0)$。于是，由于 R 是交换环，每个非零单侧理想都包含一个非零幂等元。利用引理2.13， R 是约化的，因而也是阿贝尔的。因此，可以推断

$$\mathrm{Nil}(R) = J(R) = \sqrt{J(R)} = (0).$$

但是，由于 R是 WUU且为交换的， [10, 推论 2.15] 告诉我们 R是强弱幂零清洁环。最后，该结论由[5,定理 3.2]得出。

(3) $\Rightarrow$ (1)。由于 $R/J(R)$ 是弱布尔的，容易看出$R/J(R)$ 同时是正则的且 $W\sqrt{JU}$。因此， $\underline{R}$ 既是半正则的又是 $W\sqrt{JU}$，这可借助命题 2.6。 □

接下来给出另外三个推论。

推论 2.22。 设 R是一个 $W\sqrt{J\overline{U}}$环。则下列命题等价：

(1) R 是半正则环。*(2)* R 是交换环。*(3)* R 是干净环。

证明。 定理 2.21 的正确性保证了 (1) $\Leftrightarrow$ (2).(3) $\Rightarrow$(2)。这是显而易见的。

(2) ⇒(3)。若 R是交换 $W\sqrt{JU}$，则 R由引理约化2.13 ，因此它是阿贝尔的。因此， R 是阿贝尔交换环，故为洁净环。□

推论 2.23. 设 R 是一个环。则以下条件等价：

(1) R是一个交换 $W\sqrt{JU}$环。*(2)* R 是一个强弱幂零干净环。

证明。(1) ⇒ (2)。证明与定理 2.21的证明相当类似，因此省略细节。

(2) ⇒(1)。若 R是强弱幂零干净的，则根据 WUU [10, 推论 2.15]，它是交换R环 $\subseteq \sqrt{J(R)}$。由于 Nil(R) $W\sqrt{JU}$为□，我们可以得出它是一个环，如所需。

推论 2.24. 设 R 是一个交换环。以下条件等价：

(1) R是一个$W\sqrt{JU}$环。

(2) R是一个 WUU环。

证明。 (2) ⇒ (1)。这显然成立，因为 Nil(R) 总是 $\subseteq \sqrt{J(R)}$。

(1) ⇒(2)。若 R是交换的且 $W\sqrt{JU}$，则 Nil(R) $= J(R) = \sqrt{J(R)} =$(0) 由定理 2.21 得出。因此， R是 WUU，如所需。□

现在，我们已经具备了证明下面这个颇为有趣的论断所需的一切工具。

定理 2.25。 设 R是一个环。那么， R是一个 $W\sqrt{JU}$环，当且仅当 $R/J(R)$是一个 WUU环。

证明。 假设 R是 $W\sqrt{JU}$，并取 $u + J(R) \in U(R/J(R))$。于是，$u \in U(R)$，因此我们写作 $u = \pm 1 + j$，其中 $j \in \sqrt{J(R)}$。因此，

$$u + J(R) = \pm(1 + J(R)) + (j + J(R)),$$

其中 $j + J(R)$ ∈Nil($R/J(R)$)；事实上，由于 $j \in \sqrt{J(R)}$，我们有 $j^n \in J(R)$，其中某个 n。

反过来，假设 $R/J(R)$ 是 WUU，并选取 $u \in U(R)$。因此， $u + J(R) \in U(R/J(R))$。于是，

$$u + J(R) = \pm(1 + J(R)) + (q + J(R)),$$

其中 $q + J(R)$ ∈Nil($R/J(R)$)，由此可得 $(q + J(R))^n = J(R)$，其中某个 n。因此， $q^n \in J(R)$，即 $q \in \sqrt{J(R)}$。另一方面， $u \pm (1 + q)$ ∈$J(R)$，故 $u = \pm 1 + q + j$，其中 $j \in J(R)$。但是，$q + j \in \sqrt{J(R)}$，由引理 2.1(8)调整可得。因此， R是 $W\sqrt{JU}$，如所需。□

下面给出两个推论：

推论 2.26. 设 R是一个满足 $J(R)=(0)$ 的环。那么， R是一个 $W\sqrt{JU}$环，$^{-}$当且仅当 R是一个 WUU环。

推论 2.27. 设 R 是一个带有 $J(R)$ 幂零元的环。那么， R 是一个 $W\sqrt{JU}$环，当且仅当 R 是一个 WUU环。

下面的构造揭示了在所研究的环类之间建立关系的困难。

例 2.28. (1) 每个 WUJ环必然是一个 $W\sqrt{JU}$环。然而，$^{-}$反向关系并非总是成立。事实上，设 R 是由 x,y 生成并满足 $x^2=0$ 的$\mathbb{F}_2$-代数。那么， R 是 $W\sqrt{JU}$，但它不是 WUJ，因为 $J(R)=(0)$。

(2) 不难看出，每个 WUU环都是一个$W\sqrt{JU}$环。然而，反向关系不一定成立。为说明这一点，考虑 $R:=\mathbb{F}_2[[x]]$。因此， R是一个 $W\sqrt{JU}$环，但不是一个 WUU环，因为 $J(R)$ 不是幂零的（参见 [10]）。

通常，令 $\mathrm{Nil}_*(R)$ 表示环 R 的素根（换言之，即下幂零根），也就是 R 的所有素理想的交。我们知道，$\mathrm{Nil}_*(R)$ 是 R 的幂零理想。众所周知，若一个环R 的下幂零根 $\mathrm{Nil}_*(R)$ 恰好由 R 的所有幂零元构成，即 $\mathrm{Nil}_*(R)=\mathrm{Nil}(R)$，则称该环为 2-本原环。例如，众所周知，约化环和交换环都是 2-本原环。对于环 R 的一个端同态 α，若对任意 $a,b\in R$， $ab=0\Longleftrightarrow a\alpha(b)=0$，则称 α 为-相容的；在这种情况下，α 显然是单射。

现在我们已经具备了证明以下令人惊讶的结论所需的一切要素。

定理 2.29. 设 R 是一个2-素环，且 α 是 R 的端同态。若 R 是 α-相容的，则以下四个命题等价：

(1) R 是一个 WUU环。*(2)* $R[x;\alpha]$ 是一个$W\sqrt{JU}$ 环。*(3)* $R[x;\alpha]$ 是一个 WJU环。*(4)* $R[x;\alpha]$ 是一个 WUU 环。

证明。 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。由 [11, 推论 3.14] 得出。

(1) $\Rightarrow$(2)。设 $f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in U(R[x;\alpha])$。由于 R是 2-准素环， [3, 推论 2.14] 可用于得到对所有 $1\le i\le n$ 成立的 $a_0\in U(R)$ 与 $a_i\in\mathrm{Nil}(R)$。然而，由于 R是一个 WUU环，我们得到 $a_0=\pm1+q$，其中 $q\in\mathrm{Nil}(R)$。于是，我们随后有

$$f=(\pm1+q)+\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\in$$

$\pm 1 + \mathbf{Nil}(R) + \mathbf{Nil}(R)[x;\ \alpha]x = \pm 1 + \mathbf{Nil}(R)[x;\ \alpha] = \pm 1 + \overline{\sqrt{J(R[x;\alpha])}}$，如所要求。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $u \in U(R)$。于是，我们可以写成

$$u \in \pm 1 + \sqrt{J(R[x;\alpha])} = \pm 1 + \mathrm{Nil}(R)[x;\alpha].$$

因此，$u \pm 1 \in \mathbf{Nil}(R)$。

(1) $\Rightarrow$ (4)。论证同 (1) $\Rightarrow$ (2)，证毕。

(4) $\Rightarrow$ (1)。由于 $R[x;\alpha]/(x) \cong R$ 且 $R[x;\alpha]/(x)$ 的所有单位均提升为 $R[x;\alpha]$ 中的单位，该蕴含成立。□

我们可由此得出的一个有价值的推论如下。

推论2.30。设 R 是一个2-本原环。那么，以下四个条件等价：

(1) R 是一个 WUU 环。*(2)*
$R[x]$ 是一个 $W\overline{\sqrt{JU}}$ 环。*(3)*
$R[x]$ 是一个 WJU 环。*(4)*
$R[x]$ 是一个 WUU 环。

现在我们来讨论以下内容。

命题2.31。环 $R[[x;\alpha]]$ 是 $W\overline{\sqrt{JU}}$，当且仅当 R 也如此。

证明。令 $I := R[[x;\alpha]]x$，然后我们验证 I 是 $R[[x;\alpha]]$ 的一个理想；还注意到 $J(R[[x;\alpha]]) = J(R)+I$，因此 $I \subseteq J(R[[x;\alpha]])$。又由于 $R[[x;\alpha]]/I \cong R$，结合命题 2.6 即可得出结论。□

现在我们来讨论三角矩阵。

命题 2.32。设 R 是一个环。那么，以下四个命题等价：

(1) R 是一个 $\overline{\sqrt{JU}}$ 环。*(2)* 对所有 $n \in \mathbb{N}$，
$\mathrm{T}_n(R)$ 都是一个 $\sqrt{\overline{JU}}$ 环。*(3)* 对某个 $n \in \mathbb{N}$，
$\mathrm{T}_n(R)$ 是一个 $\sqrt{J\overline{U}}$ 环。*(4)* 对某个 $n \geq 2$，
$\mathrm{T}_n(R)$ 是一个 $W\overline{\sqrt{JU}}$ 环。

证明。通过 [11, 命题 3.19(3)]，可知 (1)、(2) 和 (3) 等价。

(1) $\Rightarrow$ (4)。这显而易见，因此省略细节。

(4) $\Rightarrow$(1)。令 $I := \{(a_{ij}) \in \mathrm{T}_n(R) | a_{ii} = 0\}$，可得 $I \subseteq J(\mathrm{T}_n(R))$，其中 $\mathbf{T}_n(R)/I \cong R^n$。因此，结合命题 2.6 和推论 2.10 即可得到所需结论。□

设 R 是一个环，M 是 R 上的双模。R 与 M 的平凡扩张 定义为

$$\mathrm{T}(R,M) = \{(r,m) : r \in R \text{ and } m \in M\}$$

加法按分量定义，乘法由以下等式定义

$$(r,m)(s,n)=(rs,rn+ms).$$

众所周知，$\mathbf{T}(R,M)$ 同构于子环

$$\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r\in R \text{ and } m\in M\right\}$$

由所有形式的 2×2 矩阵环 $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ 组成。

我们还注意到，已知 $\mathbf{T}(R,M)$ 的单位集合恰为

$$U(\mathrm{T}(R,M))=\mathrm{T}(U(R),M).$$

我们以如下断言结束本节。

命题 2.33. 平凡扩张 $\mathrm{T}(\underline{R},M)$ 是一个 $W\sqrt{JU}$环，当且仅当 R 是$^{-}$一个 $W\sqrt{JU}$环。

证明。令 $A:=\mathrm{T}(R,\ M)$，并考虑理想 $I:=\mathrm{T}((0)\ M)\ A$。然后可以发现 $I\subseteq J(A)$ 使得 $A/I\cong R$。因此，正如预期的那样，我们的断言可由命题 2.6立即推出。□

3. Group Rings

设 R 是一个环，G 是一个群。通常，记号 RG 表示群环，它作为 R 上的模，其基由 G的元素构成。同态 $\varepsilon\colon RG\to R$，由 $\sum_{g\in G}r_g g\mapsto\sum_{g\in G}r_g$定义，通常称为 RG的增广同态 。其核 $\ker(\varepsilon)$，即 RG的增广理想 ，记为 $\Delta(RG)$，并且等于

$$\Delta(RG)=\left\{\sum_{g\in G}a_g(1-g)\colon 1\neq g\in G, a_g\in G\right\}.$$

传统上，若群 G 的任意有限子集所生成的子群本身都是有限的，则称其为局部有限。当 p 是素数时，p-群指其每个元素的阶都等于 p 的某个幂。如果一个群的所有非单位元的阶都恰好为 p，则称该群的指数为 p。记号 C_n 表示经典的循环群，它只有 n 个元素。

在陈述并证明本节的主要结果之前，我们需要建立四套技术工具。

引理 3.1. 如果 RG 是一个$W\sqrt{JU}$环，那么 R 也是一个 $W\sqrt{JU}$环。

证明。假设 $a \in R$。由于 RG 是一个 $W\sqrt{J\bar{U}}$ 环，因此存在 $j \in \sqrt{J(\bar{RG})}$，使得 $a = \pm 1 + j$，由此 $a = \pm 1 + \varepsilon(j)$。但是，引理 2.2 告诉我们 $\varepsilon(j) \in \sqrt{J(R)}$，证毕。□

值得注意的是，如上所示，R 是 RG 的满同态像，因此也可以直接得出结论。

引理 3.2. 若 RG 是一个 $W\sqrt{J\bar{U}}$ 环，则 G 是一个挠群。

证明。我们通过反证法证明这一断言。为此，假设存在一个不是有限阶的 $g \in G$。因此，根据假设，必有 $1 - g \in \sqrt{J(RG)}$ 或 $1 + g \in \sqrt{J(RG)}$。于是，由引理 2.1(1)，可知 $g(1 - g) \in \sqrt{J(RG)}$ 或 $g(1 + g) \in \sqrt{J(RG)}$。再由引理 2.1(3) 可知，$1 + g - g^2 \in U(RG)$ 或 $1 + g + g^2 \in U(RG)$。

我们只考虑 $1 + g - g^2 \in U(RG)$ 的情形。因此，存在整数 $n < m$ 和元素 a_i，满足 $a_n \neq 0 \neq a_m$，使得

$$(1 + g - g^2) \sum_{i=n}^{m} a_i g^i = 1.$$

展开求和后，显然会导致矛盾。

我们仿照 $1 + g + g^2 \in U(RG)$ 进行处理，从而得到矛盾。因此，G 的所有元素都必须是有限阶的，这意味着 G 是一个挠群，正如所述。□

引理 3.3. 设 RG 是一个满足 $2 \in J(R)$ 的 $\bar{W}\sqrt{JU}$ 环。那么，G 是一个2-群。

证明. 由于 $2 \in J(R)$，我们得到 $3 \in U(R) \subseteq U(RG)$；因此，利用命题 2.14，$2 \in J(RG)$。于是，命题 2.15 推出 RG 是一个 $\sqrt{JU}$ 环，因此 [12, 定理 4.4] 表明 G 是一个 2-群，正如所断言。□

引理 3.4. 假设 RG 是一个 $W\sqrt{JU}$ 环，满足 $\bar{3} \in J(R)$，且 G 是一个 p-群。那么 G 是一个 3-群。

证明。仿照前一个引理，可以证明 $3 \in J(RG)$。

现在我们考察以下两个基本情形：

情形 1： 如果 $p = 2$，我们首先证明，对于每个 $g \in G$，$g^2 = 1$。我们采用矛盾法进行证明。为此，令 $n > 1$ 为满足 $g^{2^n} = 1$ 的最小整数。由于 $g \in U(RG)$，我们有 $1 - g^{2^{n-1}} \in \sqrt{J(RG)}$ 或 $1 + g^{2^{n-1}} \in \sqrt{J(RG)}$。根据关系 $3 \in J(RG)$，可知 $1 + 2g^{2^{n-1}} \in \sqrt{J(RG)}$ 或 $-2g^{2^{n-1}} \in \sqrt{J(RG)}$。因此，

引理2.1（1）指以下任一项

$$1+g^{2^{n-1}}=-g^{2^{n-1}}+\sqrt{J(RG)}\in U(RG),$$

or

$$1-g^{2^{n-1}}=g^{2^{n-1}}+\sqrt{J(RG)}\in U(RG).$$

但另一方面，我们有 $(1+g^{2^{n-1}})(1-g^{2^{n-1}})=0$。然而，这表明要么 $g^{2^{n-1}}=1$，要么 $g^{2^{n-1}}=-1$。由于 n 是在满足 $g^{2^n}=1$ 的条件下选取的极小元，情形 $g^{2^{n-1}}=1$ 不可能发生。因此，若 $g^{2^{n-1}}=-1$，则我们发现

$$(1+g^{2^{n-2}})(1-g^{2^{n-2}})=1-(-1)=2\in U(RG),$$

因此 $1+g^{2^{n-2}}\in U(RG)$ 且 $1-g^{2^{n-2}}\in U(RG)$，这就得到了所需的矛盾，因为 RG 是一个 $W\sqrt{JU}$环。因此，对每个 $g\in G$，必有 $g^2=1$ 。

现在，我们设法证明这同样不可能。事实上，若 $g^2=1$，则 $e=\frac{1}{2}(1+g)$ 是 RG 中的一个幂等元。然而，命题 2.14指出 RG没有非平凡幂等元，因此 $e=0$ 或$e=1$，从而得到 $g=1$或 $g=-1$。但是，由于 $g\in G$是任意的，我们推得 $G\cong C_2$，进而 $RG\cong R\times R$。然而，这与推论 2.9 矛盾，因为 R 不是一个 $\sqrt{JU}$ 环，如$2\notin J(R)$，这证实了我们的考察。

情形 2： 若 $p\neq 2$，我们证明 $p=3$。为此，设 $g^{p^k}=1$。由于 p^k 是奇数，我们可以将其写为 $p^k=2n+1$，其中 $n\in\mathbb{N}$。因此，或者 $1+g^{2n}\in\sqrt{J(RG)}$，或者 $1-g^{2n}\in\sqrt{J(RG)}$。

首先，若 $1+g^{2n}\in\sqrt{J(RG)}$，则结合引理 2.1(1)，乘以 g 得到 $1+g\in\sqrt{J(RG)}$。此外，由于 $3\in\overline{J(RG)}$，我们推出 $1-3+g\in\sqrt{J(RG)}$，从而得到 $1-g\in\overline{-1+\sqrt{J(RG)}}\subseteq U(RG)$。又由于 $\overline{g^{p^k}}=1$，我们得出 $(1-g)(1+g+\cdots+g^{p^k-1})=0$；但因为 $1-g\in U(RG)$，我们得到 $f:=1+g+\cdots+g^{p^k-1}=0$，因此$0=\varepsilon(f)=p^k$，这意味着 $p\in J(R)$。然而，$3\in J(R)$等价于 $p=3$。

现在若有$1-g^{2n}\in\overline{\sqrt{J}(RG)}$，则根据引理 2.1(1)，两边乘以 g得到$1-g\in\sqrt{J(RG)}\cap R\langle g\rangle\subseteq\sqrt{J(R\langle g\rangle)}$。由于 $1-g\in C(R\langle g\rangle)\cap\sqrt{J(R\langle g\rangle)}$，引理 2.1(4)保证 $1-g\in J(R\langle g\rangle)$，从而 $\Delta(R\langle g\rangle)\subseteq J(R\langle g\rangle)$。因此，[6, 命题 15(i)] 告诉我们，$\langle g\rangle$ 是一个 q-群，且有 $q\in J(R)$；但是，由于 $3\in J(R)$，我们最终得到 $q=3$，正如所要证明的。□

现在我们可以证明最后一个主要结果。

定理 3.5。 设 R 是一个正特征环，且 G是一个局部有限的 p-群。那么，RG是一个 $W\sqrt{JU}$环，当且仅当满足以下条件之一：

(i) R 是一个 $\sqrt{JU}$ 环，且 G 是一个2-群。(ii) R是一个 $W\sqrt{JU}$环，且 $3 \in J(R)$，并且 G是一个3-群。(iii) $R \cong R_1 \times R_2$，其中 R_1是一个 $\sqrt{JU}$环， R_2是一个 $W\sqrt{JU}$环，且 G是平凡群。

证明。 首先假设 RG是一个 $W\sqrt{JU}$环。利用引理 2.16，我们推出 $\mathrm{Char}(R) = 2^\alpha 3^\beta$，其中 α 和 β 均为正整数。

若 $\alpha = 0$，则 $3 \in J(R)$。因此，结合引理 3.1 和 3.4， R 是一个 $W\sqrt{JU}$环，且 G是一个 3-群。

若 $\beta = 0$，则 $2 \in J(R)$。因此，结合引理 3.1 和 3.3， R 是一个$W\sqrt{JU}$环，且 G是一个 2-群。此外，命题 2.15保证 R 实际上是一个 $\sqrt{JU}$ 环。

然而，若 α、 $\beta \neq 0$均成立，则由中国剩余定理可得 $R \cong R_1 \times R_2$，其中 $2^\alpha = 0$属于 R_1且 $3^\beta = 0$属于 R_2。因此，结合推论 2.9 和命题 2.15， R_1 是一个$\sqrt{JU}$ 环，且 R_2是一个 $W\sqrt{JU}$环。

另一方面，由于 RG是一个 $W\sqrt{JU}$环，标准同构（$R_1 \times R_2$）$G \cong R_1G \times R_2G$ 表明直积 $R_1G \times R_2G$也是一个 $W\sqrt{JU}$环。因此，推论 2.9保证 R_1G和 R_2G都是 $W\sqrt{JU}$环。现在，引理 3.4和 3.3确保 G是平凡群，正如所要证明的。

反过来，假设（1）成立。由于 R是一个 $W\sqrt{JU}$环，命题 2.15 给出 $2 \in J(R)$。此外，由于 G 是一个局部有限 2-群，我们有 $\Delta(RG) \subseteq J(RG)$，根据 [25, 引理 2]。但是，由于 $R/\Delta(RG) \cong R$，命题 2.6最终证明 RG必定是一个 $W\sqrt{JU}$环。

第（2）点的证明与第（1）点的证明类似，因此省略。

最后一点（3）显而易见，因此不再处理。至此，我们的论证告一段落。□

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

Declarations

作者声明，在撰写和准备本稿件的过程中不存在任何利益冲突。

References

[1] A. Badawi，关于阿贝尔 π-正则环，《Communications in Algebra》25(4) (1997), 1009– 1021。[2] S. Breaz、P. Danchev 和 Y. Zhou，关于每个元素均可表示为一个幂零元与一个幂等元之和或之差的环，《Journal of Algebra and Its Applications》15(8) (2016)。[3] W. Chen，关于斜多项式环中元素的常值乘积，《Bulletin of the Iranian Mathematical Society》41(2) (2015), 453–462。[4] W. C hen 和 S. Cui.，关于 clean 环与 clean 元素，《Southeast Asian Bulletin of Mathematics》32 (2008), 855–861。[5] H. Chen 和 M. Sheibani，强弱幂零 clean 环，《Journal of Algebra and Its Applications》16 (2017)。[6] I. G. Connell，关于群环，《Canadian Journal of Mathematics》15 (1963), 650–685。[7] P. V. Danchev，具有 Jacobson 单位的环，《Toyama Mathematical Journal》38(1) (2016), 61–74。[8] P. V. Danchev，弱半布尔含幺环，《JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications》39 (2017), 261–276。[9] P. V. Danchev，弱 JU 环，《Missouri Journal of Mathematical Sciences》29(2) (2017), 184–196。[10] P. V. Danchev，弱 UU 环，《Tsukuba Journal of Mathematics》40(1) (2016), 101–118。[11] P. Danchev、M. Doostalizadeh、M. Esfandiar 和 O. Hasanzadeh，使得 $u-1$ 属于每个单位 u对应的 $J^{\#}(R)$ 中的环，arXiv:2510.22611。[12] P. V. Danchev、A. Javan、O. Hasanzadeh 和 A. Moussavi，关于每个单位 u的 $u-1$拟幂零元的环，《Journal of Algebra and Its Applications》24(10) (2025)。[13] P. V. Danchev 和 T. Y. Lam，具有幺幂单位的环，《Publ. Math. (Debrecen)》88(3-4) (2016), 449–466。[14] P. V. Danchev 和 W. Wm. McGovern，交换弱幂零 clean 含幺环，《Journal of Algebra》425(5) (2015), 410–422。[15] A.J. Diesl，幂零 clean 环，《Journal of Algebra》383 (2013), 197–211。[16] M. T. Kosan、A. Leroy 和 J. Matczuk，关于 UJ 环，《Communications in Algebra》46(5) (2018), 2297–2303。[17] M. T. Kosan 和 Y. Zhou，关于弱幂零 clean 环，《Frontiers of Mathematics in China》11 (4) (2016), 949–955。[18] T. Y. Lam，《非交换环初步》第二版，Springer-Verlag，纽约 (2001)。[19] J. Levitzki，关于代数代数的结构及相关环，《Transactions of the American Mathematical Society》74 (1953), 384–409。[20] W. K. Nicholson，幂等元提升与交换环，《Transactions of the American Mathematical Society》229 (1977), 269–278。[21] W. K. Nicholson，强 clean 环与 Fitting 引理，《Communications in Algebra》27(8) (1999), 3583–3592。[22] W. K. Nicholson 和 Y. Zhou，clean 广义环，《Journal of Algebra》291(1) (2005), 297–311。[23] S. Saini 和 D. Udar，$\sqrt{JU}$ 环，《Czechoslovak Mathematical Journal》75(4) (2025), 1347– 1359。[24] Z. Wang 和 J. Chen，结合环与巴拿赫代数中的伪 Drazin 逆，《Linear Algebra and its Applications》437(6) (2012), 1332–1345。[25] Y. Zhou，关于 clean 群环，《环论进展》，《数学前沿》，Birkhäuser，巴塞尔/瑞士，2010, 第 335–345 页。

Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, 14115-111 Tehran Jalal AleAhmad Nasr, Iran电子邮箱地址：v.zarivesali@modares.ac.ir

Department of Mathematics, Tarbiat Modares University, 14115-111 Tehran Jalal AleAhmad Nasr, Iran电子邮箱地址：moussavi.a@modares.ac.ir; moussavi.a@gmail.com

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 1113 Sofia, Bulgaria电子邮箱地址：danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com