arXiv:2602.14619v1 [math.CV] 16 Feb 2026

多复变数中的 Borel例外值及其在差分算子平移共享值问题中的应用

Abhijit Banerjee[1], Sujoy Majumder[2] *, Jhilik Banerjee[3]

Abstract. 本文研究了多复变数中亚纯函数和整函数的平移及高阶差分算子的共享值问题。利用 $\mathbb{C}^n$中的 Nevanlinna 理论，我们在函数按重数或不计重数共享值的情形下，获得了新的唯一性定理，将若干经典的单变量结果推广到了高维。本文的一项重要贡献见于第 2 节，在该节中我们建立了多复变数中关于 Borel例外值的基本结果。这些命题为证明我们的主要定理提供了核心工具。作为应用，我们推导出了确保超越整函数满足 $\Delta_c^k \equiv df$ 的条件，并研究了某些偏微分-差分方程的亚纯解，获得了整函数解的增长估计和结构描述。据我们所知，这是首次系统研究多复变数中关于高阶差分算子的此类共享值问题。

1. 多复变数中的 Nevanlinna 理论预备知识

本节汇集了本文中将要用到的多复变数 Nevanlinna 理论的基本概念与记号。我们的论述遵循 Stoll [34],Nishino [30], 和 Hu-Li-Yang [14]提出的框架。

基本记号。 对于任意集合 S，记其 n 重笛卡尔积为 S^n 。若 S 是偏序集且 $a \le b$，我们记

$$S[a,b] = \{x \in S : a \le x \le b\}, \quad S(a,b] = \{x \in S : a < x \le b\},$$
$$S[a,b) = \{x \in S : a \le x < b\}, \quad S(a,b) = \{x \in S : a < x < b\}.$$

特别地,

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}[0,\infty), \quad \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}[0,\infty), \quad \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}(0,\infty), \quad \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}(0,\infty).$$

Hermitian 结构与微分形式。 设 W 是一个配备正定 Hermitian 型 $(\cdot \mid \cdot)$ 的 n 维 Hermitian 向量空间。其诱导范数为

$$\|z\| = \sqrt{(z \mid z)}, \quad z \in W.$$

当 $W = \mathbb{C}^n$ 时，Hermitian 内积取为

$$(a \mid b) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}, \quad a, b \in \mathbb{C}^n.$$

对于任意子集 $A \subset W$ 和 $r \ge 0$，定义如下（参见 [34, 第 6] 页）

$$A[r] = \{z \in A : \|z\| \le r\}, \quad A(r) = \{z \in A : \|z\| < r\}, \quad A\langle r\rangle = \{z \in A : \|z\| = r\}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification*: 32A20, 32A22, 32H30。*Key words and phrases*: $\mathbb{C}^n$中的亚纯函数、收敛指数、Borel例外值、级、值亏量、唯一性、差分算子。**Corresponding Author*: Sujoy Majumder。由 $\mathcal{AMS}$-LaTeX排版。

我们引入函数

$$\tau_0(z) = \|z\|, \qquad \tau_W(z) = \|z\|^2.$$

¯在 W上，外微分分解为 $d = \partial + \partial$，并且我们令

$$d^c = \frac{\iota}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial), \qquad dd^c = \frac{\iota}{2\pi}\partial\bar{\partial}.$$

W 上的标准K¨ahler形式为

$$\upsilon_W = dd^c\tau_W > 0.$$

在 $W \setminus \{0\}$上，我们进一步定义

$$\omega_W = dd^c \log \tau_W \geq 0, \qquad \sigma_W = d^c \log \tau_W \wedge \omega_W^{n-1},$$

其中 $n = \dim(W)$ （参见 [34, 第 6]页）。

射影空间。

定义 1.A. [30, 第 7] 设 $z', z'' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$。若存在 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得 z' 与 z'' 等价，则称它们等价。

$$z_j'' = cz_j', \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

$\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 中的等价类构成一个 n 维空间，称为复射影空间，记作

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}).$$

通过如下设定将紧化平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 与 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}$（$\mathbb{C}^2$）对应起来（参见 [35, 第 634-635]）

$$\mathbb{P}(z, w) = \frac{z}{w}, \quad \mathbb{P}(z, 1) = z, \quad \mathbb{P}(1, 0) = \infty$$

若 $z \in \mathbb{C}$ 且 $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$。

除子与重数。

定义 1.B. [34, 第 12] 设 W 的一个开子集为 $G \neq \varnothing$ 。设 W 上的一个全纯函数为 f 。取 $a \in G$。设 G 中包含 a 的连通分支为 G_a 。假设 $f\,|_{G_a} \not\equiv 0$。则 f 有一个局部展开

$$f(z) = \sum_{\lambda=p}^{\infty} P_\lambda(z - a),$$

其中 P_λ 是次数为 λ 的齐次 $P_p \not\equiv 0$。多项式 P_λ 仅依赖于 f 和 a。整数 $\mu_f^0(a) = p$ 称为 f 在 a处的零点重数。

定义 *1.C.* [34, 页 12] 设 f 是定义在 G上的亚纯函数，其中 $G \neq \varnothing$ 是 W的一个开子集。取 $a \in G$ 和 $c \in \mathbb{P}^1$。设 G_a 是包含 a的 G 的连通分支。若$0 \equiv f\,|_{G_a} \not\equiv c$，定义 $\mu_f^c(a) = 0$。假设 $0 \not\equiv f\,|_{G_a} \not\equiv c$。那么，在 G 中存在 a 的一个开连通邻域U，以及定义在 U 上的全纯函数 $g \not\equiv 0$ 和 $h \not\equiv 0$，使得 $h.f\,|_U = g$ 且 $\dim\, g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \leq n - 2$，其中 $n = \dim(W)$。因此， f的 c-重数在 $c \in \mathbb{C}$ 时恰为$\mu_f^c = \mu_{g-ch}^0$，在 $c = \infty$时恰为 $\mu_f^c = \mu_h^0$ 。函数 $\mu_f^c : G \to \mathbb{Z}$ 非负，称为 f 的 c- 除子。

如果在 G 的每个连通分支上， f 的除子为

$$\mu_f = \mu_f^0 - \mu_f^\infty.$$

函数 f 是全纯函数，当且仅当 $\mu_f \geq 0$。

定义 1.D. [34, 第 13] 个函数 ν： $G \to \mathbb{Z}$ 称为除子，当且仅当对于每个 $a \in G$ 关于 U 的开连通邻域 a，在 G 中存在一个亚纯函数 $f \not\equiv 0$使得 $\nu\,|_U = \mu_f$。除子 ν： $G \to \mathbb{Z}$称为非负的，当且仅当对于每个 $a \in G$关于 U 的开连通邻域 a，在 G 中存在一个全纯函数 $f \not\equiv 0$ 使得 $\nu\,|_U = \mu_f$。

我们记

$$\operatorname{supp}\nu = \overline{\{z \in G : \nu(z) \neq 0\}}.$$

定义 1.E. [34, 页 26] 设 $\nu \geq 0$ 为*Hermitian* 向量空间 W上的非负除子。定义 $A =$支集 ν。假设 $0 \notin A$。一个非负、递增的整值函数 q： $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^+$ 称为 ν 的权，当且仅当积分

$$\int_A \nu\ (r/\tau_0)^{q\circ\tau_0+1}\,\omega_W^{n-1} < \infty$$

对所有 $r > 0$收敛，其中 $n = \dim(W)$。对每一个给定的非负除子 ν，都存在 ν 的权函数（见 [32]）。

计数函数与特征函数。

定义 1.F. 取 $0 < R \leq +\infty$。设 ν为 $W(R)$ 上的除子，且 $A =$支集 ν。对$t > 0$，计数函数 n_ν 定义为

$$n_\nu(t) = t^{-2(m-1)} \int_{A[t]} \nu\ \upsilon_W^{n-1},$$

其中 $n =$维数(W)。显然

$$n_\nu(0) = \lim_{t\to 0} n_\nu(t) \in \mathbb{Z}$$

存在，其中勒隆数 $n_\nu(0)$ 是一个整数（见 [34, 定理 3。1]）。我们知道 t

$$n_\nu(t) = \int_{A(t)} \nu\ \omega_W^{n-1} + n_\nu(0).$$

若 ν 非负，则 n_ν 递增。对于 $0 < s < r < R$，我们将ν 的重数函数定义为

$$N_\nu(r) = N_\nu(r,s) = \int_s^r n_\nu(t)\frac{dt}{t}.$$

对于 $\nu = \mu_f^a$，我们记 $n(t,\ a;\ f)$ 和 $N(r,\ a;\ f)$，并对 $a = \infty$采用通常的约定。截断重数定义为 $\mu_{f,\ k}^a = \min\{\mu_f^a, k\}$。

对于 $k \in \mathbb{N}$，在 W上定义截断重数函数为 $\mu_{f,\ k}^a(z) = \min\{\mu_f^a(z)\ k\}$。我们将截断计数函数记为

$$n_\nu(t) = \begin{cases} n_k(t,a;f), & \text{if } \nu = \mu_{f,k}^a \\ \overline{n}(t,a;f), & \text{if } \nu = \mu_{f,1}^a \end{cases}$$

以及截断价函数

$$N_\nu(t) = \begin{cases} N_k(t,a;f), & \text{if } \nu = \mu_{f,k}^a \\ \overline{N}(t,a;f), & \text{if } \nu = \mu_{f,1}^a. \end{cases}$$

若 $a = \infty$，我们记 $n_k(t,a;\ f) = n_k(t,f)$ 和 $N_k(t,a;\ f) = N_k(t,f)$，依此类推 .

非负除子 ν： $W \to \mathbb{Z}_+$ 称为代数的，当且仅当 ν 是某个多项式的零点除子。因此，除子 $\nu : W \to \mathbb{Z}_+$ 是代数的，当且仅当 n_ν 有界，这意味着 $N_\nu = O(\log r)$（参见 [34, 第 19] 页）。

Nevanlinna 特征函数。

定义 1.G. [34, 第 16-17] 设 $G \neq \varnothing$ 是 W中的一个开子集。设 f 是定义在 G 上的亚纯函数， f 即 f 可以表示为两个互素全纯函数之商。我们将记作 $f=(f_0, f_1)$ 其中 $f_0 \not\equiv 0$。函数 f 的 *Nevanlinna* 特征函数的标准定义如下：

$$T_f(r,s) := \int_s^r \frac{A_f(t)}{t}\, dt,$$

其中 $0<s<r$ 和

$$A_f(t) = \frac{1}{t^{2n-2}} \int_{W(t)} f^*(\ddot{\omega}) \wedge \upsilon_W^{n-1} = \int_{W(t)} f^*(\ddot{\omega}) \wedge \omega_W^{n-1} + A_f(0),$$

其中 $n=$维数(W)。这里的拉回 $f^*(\ddot{\omega})$ 满足

$$f^*(\ddot{\omega}) = dd^c \log\left(|f_0|^2 + |f_1|^2\right)$$

对于所有 z，除不定点集 $I_f := \{z \in W : f_0(z) = f_1(z) = 0\}$ 之外，属于 f。

取 $a \in \mathbb{P}^1$ 和 $0 < R \leq +\infty$。设 $f \not\equiv 0$ 是定义在 $W(R)$上的亚纯函数。对于$0<r<R$，将 f 对 a 的补偿定义为

$$m_f^a(r) = \int\limits_{W\langle r\rangle} \log \frac{1}{||f,a||}\, \sigma_W,$$

其中， $||f,a||$ 表示从 f 到 $a \in \mathbb{P}^1$的弦距。于是，*Nevanlinna* 理论第一基本定理变为

$$T_f(r) = T_f(r,s) = N_{\mu_f^a}(r,s) + m_f^a(r) - m_f^a(s),$$

其中 $0<s<r$。

从这里继续阐述 Nevanlinna 理论的方式略有不同（见 [14, 第15]页）。取 $0<R\leq+\infty$。设 $f \not\equiv 0$ 是 W（R）上的亚纯函数。令$0<s<r<R$。现在借助正对数函数，我们将 f 的逼近函数定义为

$$m(r,f) = \int_{W\langle r\rangle} \log^+ |f|\, \sigma_W \geq 0.$$

f的特征函数定义为 T（r， f） $= m$（r， f） $+ N$（r， f）。我们知道（见 [14, 第15]页）

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \int_{W\langle s\rangle} \log|f|\, \sigma_W.$$

我们定义 m（r， a； f） $= m$（r， f），若 $a=\infty$且 m（r， a； f） $= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 若 a是有限复数。现在，若 $a \in \mathbb{C}$，则 Nevanlinna 理论第一基本定理变为 m（r， a； f） $+N$（r， a； f） $= T$（r， f） $+ O$(1)，其中 O(1)表示当 r充分大时的有界函数。

最后，比较函数 T_f(r) 和 T(r， f)，可得（参见 [14, 第19]页）

$$T_f(r) = T(r,f) + O(1).$$

增长、收敛指数与亏量。 考虑一个递增的非负函数 S： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. 定义 S 的级为（参见 [34, 第 28] 页）

$$\operatorname{Ord} S = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ S(r)}{\log r}.$$

对于 $0 < \mu \in \mathbb{R}$，我们定义

$$t_\mu(S) = \limsup_{r\to\infty} \frac{S(r)}{r^\mu} \quad \text{and} \quad J_\mu(S) = \int_1^\infty \frac{S(t)}{t^{\mu+1}}\, dt.$$

显然，如果 $0 < \mu < \operatorname{Ord} S$，那么 $t_\mu(S) = J_\mu(S) = \infty$；如果 $\mu > \operatorname{Ord} S$，那么 $t_\mu(S) < \infty$ 且$J_\mu(S) < \infty$。如果 $0 < \operatorname{Ord} S = \lambda < \infty$，则称函数 S 为

- 极大型，当且仅当 $t_\lambda(S) = +\infty$,
- 中间型，当且仅当 $0 < t_\lambda(S) < +\infty$,
- 极小型，当且仅当 $t_\lambda(S) = 0$。

函数 S 称为

- 收敛类，当且仅当 $J_\lambda(S) < +\infty$,
- 发散类，当且仅当 $J_\lambda(S) = +\infty$.

定义 1.H. [34, 第 28]设 $\nu \geq 0$ 是 W上的一个非负除子。于是， ν 的级、类和型定义为 n_ν的级、类和型。注意，对每个$s > 0$， n_ν 的级、类和型均与 $N_\nu(□, s)$的级、类和型相同。若$0 \notin$ 支集 ν，则对 $s = 0$ 也成立。

设 f 是 W中的非常值亚纯函数。若特征函数 $T(r, f)$具有相应性质，则称函数 f 具有级$\rho(f)$、极大型、平均型、极小型或收敛类。因此， f 的级和下阶分别为

$$\operatorname{Odr} f = \rho(f) := \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r} \text{ and } \mu(f) := \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

命题 1.A. [14, 命题 1.7] 设 f 和 g 是 $\mathbb{C}^n$中的非常值亚纯函数。则有

(a) $\rho(\mathcal{L}(f)) = \rho(f)$，其中 $\mathcal{L}(f)$ 是 f 的任意 *Möbius* 变换。*(b)* $\rho(f \cdot g) \leq \max\{\rho(f)\ \rho(g)\}$。*(c)* $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f)\ \rho(g)\}$。*(d)* 如果 $\rho(f) < \lambda(g)$，那么 $\rho(fg) = \rho(f+g) = \rho(g)$。*(e)* $\max\{\mu(fg)\ \mu(f+g)\} \leq \max\{\rho(f)\ \mu(g)\}$。*(f)* 如果 $\rho(f) < \mu(g)$，那么 $\max\{\mu(fg)\ \mu(f+g)\} \leq \mu(g)$。*(g)* 如果 $\rho(f) < \mu(g)$，那么 $T(r,f) = o(T(r,g))$ 作为 $r \to \infty$。

定义 1.I. [34, 第 28 页起29] 定义 $A =$ 支集 ν 和 $B = A - A(1)$。数 $\mu > 0$ 是 ν 的收敛指数，当且仅当以下积分中有一个——因而全部——收敛：

$$\int_B \nu\, \tau_0^{-\mu}\, \omega_W^{n-1} < \infty$$
$$\int_B \nu\, \tau_0^{1-m-\mu}\, v_W^{n-1} < \infty,$$
$$\int_1^\infty n_\nu(t)\, t^{-\mu-1}\, dt < \infty,$$
$$\int_1^\infty N_\nu(t,s)\, t^{-\mu-1}\, dt < \infty, \quad \text{if } s > 0.$$

否则， μ 称为 ν的发散指数。若 $\mu > \operatorname{Ord}\nu$，则 μ 是 ν的收敛指数；若 $0 < \mu < \operatorname{Ord}\nu$，则 μ 是 ν的发散指数。若 $0 < \operatorname{Ord}\nu = \mu < \infty$，则 μ 是 ν 的收敛指数，当且仅当 ν 属于收敛类。

现在我们陈述以下与有限阶典范函数有关的结果 r.

命题 1.B. [34, 定理 6。3] 设 ν 是 W 上的一个非负除子， $0 \notin \operatorname{supp}\nu$。假设 $q+1 \in \mathbb{N}$ 是 ν的收敛指数。设 h 是 ν 对应常数权 q 的典范函数， ν。取 $\theta \in \mathbb{R}$ 和 $r \in \mathbb{R}$，其中 $0 < \theta < 1$ 且 $r > 0$。则

$$\log M_h(\theta r) \le 8m\, c(q)\, (1-\theta)^{-3m}\, K_q(r; n_\nu),$$
$$\operatorname{Ord}\nu \le \operatorname{Ord} h \le \max\{q, \operatorname{Ord}\nu\} \le q+1.$$

若 $q \in \mathbb{Z}_+$ 是使得 $q+1$ 为 ν的收敛指数的最小非负整数，则

$$q \le \operatorname{Ord}\nu = \operatorname{Ord} h \le q+1,$$

$$\operatorname{type} h = \operatorname{type}\nu \quad \textit{provided } q < \operatorname{Ord} h \le q+1,$$
$$\operatorname{class} h = \operatorname{class}\nu \quad \textit{provided } q < \operatorname{Ord} h < q+1.$$

命题 1.B 已在 [32] 中证明。设 $\nu \ge 0$ 是W上的有限阶非负除子。那么，使得 $q+1$ 为 ν 的收敛指数的最小非负整数 q 称为 ν的亏格 。

常数权 q 下， W 上的非负除子 ν 的典范函数可由内在方式刻画（见命题 6.4] [34, ）。

命题 1.C. [31, 定理 3] 设 $\nu \ge 0$ 是 W 上的一个非负除子，且满足 $0 \notin$ 支集 ν。设 $q+1 \in \mathbb{N}$ 是 ν的一个收敛指数。那么存在且仅存在一个全纯函数 h： $W \to \mathbb{C}$，使得

$$h(0) = 1, \quad \mu_{\log h}(0) \ge q+1, \quad \mu_h = \nu, \quad \operatorname{Ord} h \le q+1$$

并且若 阶 $h = q+1$，则 h 为极小型。这个唯一函数就是常数权 q下 ν 的典范函数。

显然， f非常数，因此当 $r \to \infty$时， $T(r, f) \to \infty$。此外，当且仅当 $T(r, f) = O(\log r)$ 时， f为有理函数（见 [34, 第 19] 页）。另一方面，若 f是超越的，则

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = +\infty.$$

f 在值 a 处的亏量定义为 $\delta_f(a)$:

$$0 \le \delta_f(a) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, a; f)}{T(r, f)} \le 1.$$

显然，当 μ_f^a 是代数的且 f 是超越的时， $\delta_f(a) = 1$。集合 $\{a \in \mathbb{P}^1 : \delta_f(a) > 0\}$ 至多可数（见 [34, 第 20] 页）

$$\sum_{a\in\mathbb{P}^1} \delta_f(a) \le 2.$$

若 $a \in \mathbb{P}^1$ 满足 $a \notin f(W)$，则称其为 f 的皮卡（例外）值。显然，如果 a 是 f 的皮卡值，则 $\delta_f(a) = 1$。

2. 多复变数中的 Borel例外值及相关结果

本节构成了本文的数学核心，确立了关于多复变数中 Borel例外值的主要结构性结果，并以清晰、准确的命题形式加以阐述。这些命题奠定了必要的基础，并为后续各节证明的主要定理提供了依据。

定义 2.1. 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超越亚纯函数，其级为 $\rho(f) > 0$。设 $a \in \mathbb{P}^1$。若 Ord $\mu_f^a < \rho(f)$，则称 a 是 f 的 *Borel*例外值。根据定义 *1.H*，我们有

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,a;f)}{\log r} < \rho(f).$$

下面的结果称为第二主定理:

引理 2.A. [13, 引理 1.2] 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非常值亚纯函数，并设a_1， a_2，……， a_q是 $\mathbb{P}^1$中的不同点。则

$$(q-2)T(r,f) \le \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r,a_j;f) + O(\log(rT(r,f)))$$

在 $\mathbb{R}^+$ 上除一个有限测度集外处处成立。

命题 2.1. 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 上一个具有有限正级 $\rho(f)$ 的超越亚纯函数。那么 f 至多有两个 *Borel*例外值。

证明。 若不然，假设存在至少三个不同的 Borel例外值 a_1、 a_2 和 a_3。设

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,a_j;f)}{\log r} = s_j \tag{2.1}$$

且 $s =$ 至多为 $\{s_1, s_2, s_3\}$。显然 $s < \rho$（f）。现在利用引理 2.A，得到

$$T(r,f) \le \sum_{j=1}^{3} \overline{N}(r,a_j;f) + O(\log(rT(r,f))) \tag{2.2}$$

在 $\mathbb{R}^+$ 上除一个有限测度集外均成立。对两边取对数$^+$，再利用式（2.2）和（2.1），得到

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r} \le s < \rho(f),$$

这是不可能的。因此 f 至多有两个 Borel例外值。 □

注 2.1. 显然，当 $\rho(f) > 0$ 时，皮卡例外值就是 *Borel*例外值。于是1 是 $f(z) = e^{z_1+z_2+\ldots+z_n} + 1$ 的 *Borel* 例外值。

引理 2.B. [14,引理 3.59] 设 P 是定义在 $\mathbb{C}^n$上的非常值整函数。则

$$\rho(e^P) = \begin{cases} \deg(P), & \textit{if } P \textit{ is a polynomial,} \\ +\infty, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

命题 2.2. 设 f是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的非常值亚纯函数，使得 $f(0) \neq 0$、 ∞和 $\rho(f)$ 均为有限值。则

$$f = \frac{H_1}{H_2} e^{\alpha},$$

其中 H_1 和 H_2 是典范函数，且 $\mu_f^0 = \mu_{H_1}^0$， $\mu_f^\infty = \mu_{H_2}^0$，

$$\rho(H_1) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N_{\mu_f^0}(r,0)}{\log r} \le \rho(f)$$

and

$$\rho(H_2)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ N_{\mu_f^{\infty}}(r,0)}{\log r}\le\rho(f)$$

且 α 是关于 $\mathbb{C}^n$ 的多项式，满足 $\deg(\alpha)=\rho(e^{\alpha})\le\rho(f)$。

证明。我们注意到，对于 $\mathbb{C}^n$ 中的每个亚纯函数 f，都存在整函数 g 和 h，使得

$$f=\frac{g}{h}\tag{2.3}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中，且 g 和 h 在 $\mathbb{C}^n$ [12, 的每一点都互素，第186] 页。这意味着 $F=(h,g):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2$ 是 f 的约化表示。由于 $f(0)\neq 0,\infty$，我们有 $g(0)\neq 0$ 且 $h(0)\neq 0$。令 $\nu=\mu_{g^0}^0$。显然，ν 是 $\mathbb{C}^n$ 上的非负除子，且 $0\notin\operatorname{supp}\nu$。设 $q\in\mathbb{Z}_+$ 是使 $q+1$ 成为 ν 的收敛指数的最小非负整数。根据命题 1.B 和 1.C，存在唯一的全纯函数 $H_1:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$，使得 $\nu=\mu_{H_1}^0$ 且

$$\rho(H_1)=\operatorname{Ord}\nu=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ N_{\mu_{H_1}^0}(r,0)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ N_{\mu_g^0}(r,0)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ N_{\mu_f^0}(r,0)}{\log r}.$$

现在利用第一基本定理，我们推得

$$\rho(H_1)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ N_{\mu_f^0}(r,0)}{\log r}\le\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}=\rho(f).\tag{2.4}$$

注意，g 和 H_1 是 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数，且具有相同的除子 $\mu_g^0=\mu_{H_1^0}$。于是，存在 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数 α_1，使得 $g=H_1e^{\alpha_1}$。

再次令 $\nu=\mu_h^0$。显然，ν 是 $\mathbb{C}^m$ 上的一个非负除子，且满足 $0\notin\operatorname{supp}\nu$。于是，存在唯一的全纯函数 $H_2:\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$，使得$\nu=\mu_{H_2}^0$ 并且

$$\rho(H_2)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ N_{\mu_f^{\infty}}(r,0)}{\log r}\le\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}=\rho(f).\tag{2.5}$$

由于 h 和 H_2 是 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数，且具有相同的除子 $\mu_h^0=\mu_{H_2}^0$，因此存在整函数 α_2，属于 $\mathbb{C}^n$，使得 $h=H_2e^{\alpha_2}$。若取 $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$，则由（2.3）可得

$$f=\frac{H_1}{H_2}e^{\alpha},$$

其中 H_1 和 H_2 是典范函数，使得 $\mu_f^0=\mu_{H_1}^0$、$\mu_f^{\infty}=\mu_{H_2}^0$ 以及（2.4）和（2.5）成立，并且 α 是 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数，满足 $\rho(e^{\alpha})\le\rho(f)$。由于 $\rho(f)$有限，根据引理 2.B，α 必为 $\mathbb{C}^n$ 中的多项式，且$\deg(\alpha)=\rho(e^{\alpha})\le\rho(f)$。□

命题 2.3. 设 h 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个非常数多项式，且 $f=e^h$。那么 $\rho(f)=\mu(f)=\deg(h)$。

证明。注意，对于 $||z||>1$，$|h(z)|\le C||z||^{\deg(h)}$ 成立，其中 C 是一个正的常数。现在，当 r足够大时，有 $T(r,f)=m\left(r,e^h\right)=O\left(r^{\deg(h)}\right)$。因此很容易验证，$\rho(f)\le\deg(h)$ 且 $\mu(f)\le\deg(h)$。取 $\xi\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$。定义全纯映射 $j_\xi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$，使得 $j_\xi(z)=z\xi$。显然

$$f_\xi=f\circ j_\xi=e^{h\circ j_\xi}=e^{h_\xi}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

是一个全纯映射。显然 $\deg(h_\xi) = \deg(h)$。但是在 $\mathbb{C}$中，我们知道（见定理1。44 [38]） $\rho(f_\xi) = \mu(f_\xi) = \deg(h_\xi) = \deg(h)$。另一方面，我们知道（见 [14,第286]页）

$$T_{f_\xi}(r,0) \le \frac{1+\theta}{(1-\theta)^{2n-1}} T_f\left(\frac{r}{\theta},0\right), \quad \xi \in \mathbb{C}^n[0,1]\backslash\{0\} \tag{2.6}$$

其中 $0 < \theta < 1$。现在，不等式 (2.6) 意味着 $\rho(f_\xi) \le \rho(f)$ 且 $\mu(f_\xi) \le \mu(f)$。因此，我们有 $\deg(h) \le \rho(f) \le \deg(h)$ 以及 $\deg(h) \le \mu(f) \le \deg(h)$。最后，我们有 $\mu(f) = \rho(f) = \deg(h)$。□

命题 2.4。设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超越亚纯函数，且 $\rho(f) > 0$ 有限。若 f 有两个不同的 *Borel*例外值，记为 a_1 和 a_2，满足 $f(0) \ne a_1$、a_2，则 $\rho(f) = \mu(f) \in \mathbb{N}$。

证明。不妨设 $a_1 = 0$ 且 $a_2 = \infty$，否则只需研究函数 $\frac{f-a_1}{f-a_2}$。根据命题 2.2，我们有

$$f = \frac{H_1}{H_2} e^P, \tag{2.7}$$

其中 H_1 和 H_2 是典范函数，满足

$$\rho(H_1) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N_{\mu^0_{H_1}}(r,0)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N_{\mu^0_f}(r,0)}{\log r} < \rho(f), \tag{2.8}$$

$$\rho(H_2) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N_{\mu^0_{H_2}}(r,0)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N_{\mu^\infty_f}(r,0)}{\log r} < \rho(f) \tag{2.9}$$

且 P是关于 $\mathbb{C}^n$的多项式，满足 $\deg(P) = \rho(e^P) \le \rho(f)$。若取

$$H = \frac{H_1}{H_2}, \tag{2.10}$$

那么由（2.7），可得

$$e^P = \frac{f}{H}. \tag{2.11}$$

现在由命题 2.3，可得 $\mu(e^P) = \rho(e^P) = \deg(P)$。注意，由命题 1.A(a)，可得 $\rho(1/H) = \rho(H)$。再由命题 1.A(b)，由（2.8）-（2.10）可得

$$\rho(H) \le \max\{\rho(H_1), \rho(H_2)\} < \rho(f).$$

因此由（2.11），可得

$$\rho(e^P) \le \max\{\rho(H), \rho(f)\} = \rho(f).$$

再由（2.11），可得 $f = He^P$ 因此由命题 1.A(b)，可得

$$\rho(f) \le \max\{\rho(e^P), \rho(H)\} = \rho(e^P).$$

因此 $\rho(f) = \rho(e^P)$，从而 $\rho(H) < \mu(e^P)$。由于 $f = He^P$，利用命题 1.A(e)，可得 $\mu(f) \le \max\{\rho(H)\ \mu(e^P)\} = \mu(e^P)$。由于 $e^P = f.\frac{1}{H}$，利用命题 1.A(e)，我们有

$$\mu(e^P) \le \max\{\rho(H), \mu(f)\} \le \max\{\rho(H), \mu(e^P)\} = \mu(e^P),$$

即 $\max\{\rho(H)\ \mu(f)\} = \mu(e^P)$。由于 $\rho(H) < \mu(e^P)$，由此可得 $\mu(f) = \mu(e^P) = \rho(e^P) = \rho(f)$。因此 $\mu(f) = \rho(f) = \rho(e^P) = \deg(P) \in \mathbb{N}$。□

命题 2.5. 设 f 为 $\mathbb{C}^n$ 中的超越亚纯函数，且 $\rho(f) > 0$ 为有限。若 f 有两个不同的*Borel*例外值，设为 a_1 与 a_2，使得 $f(0) \neq a_1$，a_2，则

$$\delta(a_1; f) = \delta(a_2; f) = 1.$$

证明。 不失一般性，假设 $a_1 = 0$ 且 $a_2 = \infty$ 否则，只需研究函数 $\frac{f-a_1}{f-a_2}$。根据命题 2.2，有

$$f = \frac{H_1}{H_2} e^P, \tag{2.12}$$

其中 H_1 和 H_2 是满足（2.8）和（2.9）的典范函数，且 P 是关于 $\mathbb{C}^n$ 的多项式，满足 $\deg(P) = \rho(e^P) \leq \rho(f)$。现在由命题 2.4，有 $\mu(f) = \rho(f)$。若取 $H = H_1/H_2$，则利用命题 1.A(b)，由（2.8）-（2.10）可得

$$\rho(H) \leq \max\{\rho(H_1), \rho(H_2)\} < \rho(f) = \mu(f).$$

再次利用命题 1.A(g)，我们得出 $T(r, H) = o(T(r, f))$。现在根据第一基本定理，并利用（2.8）和（2.9），分别有 $N(r, 0; f) = o(T(r, f))$ 和 $N(r, \infty; f) = o(T(r, f))$。因此 $\delta(a_1; f) = \delta(a_2; f) = 1$。□

结果	所用主要工具	目的
引理 2	第二主定理	增长比较
命题2.1	引理2	至多两个例外值
命题2.2	典范表示	f的结构形式
命题 2.3	单变量约化	增长 of e^h
命题 2.4	命题 2.2，2.3	$\rho(f) = \mu(f)$
命题 2.5	命题 2.4	亏值等于一

TABLE 1. 结果、工具和目的概述

3. 与平移相关的共享值问题

本文始终在复欧几里得空间 $\mathbb{C}^n$ 中进行。对于 $i = 1$，2、.....、n，我们记

$$\partial_{z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad \partial_{z_i}^{l_i} = \frac{\partial^{l_i}}{\partial z_i^{l_i}},$$

对于多重指标 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^n$，我们定义

$$\partial^I = \frac{\partial^{|I|}}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \cdots \partial z_n^{i_n}},$$

其中 $|I| = \sum_{j=1}^n i_j$ 和 $l_i \in \mathbb{Z}^+$。对于子集 $E \subset [0, \infty)$，我们引入线性测度 e

$$m(E) := \int_E dt,$$

对数测度

$$l(E) := \int_{E \cap [1,\infty)} \frac{dt}{t},$$

以及上密度

$$\overline{\operatorname{dens}}\, E = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{E\cap[1,r]} dt.$$

由此可知，若 $l(E) < +\infty$ 或 $m(E) < +\infty$，则 E 的上密度为零。令

$$\mathcal{S}(f) = \{g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^1 \text{ meromorphic } : T(r,g) = o(T(r,f))\},$$

其中 $r \to \infty$ 在一个可能存在的有限线性测度例外集之外成立。

设 f、g和 a 是 $\mathbb{C}^n$上的亚纯函数。那么存在整函数对 (f_1, f_2)、(g_1, g_2) 和 (a_1, a_2)，且每一对在 $\mathbb{C}^n$的每一点都互素，使得

$$f = \frac{f_2}{f_1}, \qquad g = \frac{g_2}{g_1}, \qquad a = \frac{a_2}{a_1}.$$

我们称 f 与 g 计重数（*CM*）共享值 a，如果

$$\mu^0_{a_1f_2-a_2f_1} = \mu^0_{a_1g_2-a_2g_1} \quad (a \neq \infty), \text{ and } \mu^0_{f_1} = \mu^0_{g_1} \quad (a = \infty).$$

类似地，f 与 g 称为不计重数（*IM*）共享值 a，如果

$$\mu^0_{a_1f_2-a_2f_1,1} = \mu^0_{a_1g_2-a_2g_1,1} \quad (a \neq \infty), \text{ and } \mu^0_{f_1,1} = \mu^0_{g_1,1} \quad (a = \infty).$$

设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的亚纯函数。对于 $z=(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ 和 $c=(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) \in\mathbb{C}^n$，记 $z+c=(z_1+c_1, z_2+c_2, \ldots\ldots, z_n+c_n)$。$f$ 按 c 的位移定义为 $f(z+c) =f(z_1+c_1, z_2+c_2, \ldots\ldots, z_n+c_n)$，相应的差分算子定义为

$$\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z).$$

对于 $m \geq 2$，递归地定义高阶差分算子为

$$\Delta^m_c f(z) = \Delta^{m-1}_c f(z+c) - \Delta^{m-1}_c f(z) = \Delta_c \circ \Delta^{m-1}_c f(z),$$

其中 $m \in \mathbb{N}$。

随着高维复分析的发展，数学家们开始尝试将 Nevanlinna 的奠基性结果推广到多复变数函数。这一努力促成了多复变量Nevanlinna理论的兴起，该理论研究从 $\mathbb{C}^n$ 到复流形和复射影空间的全纯映射与亚纯映射的增长和值分布。近年来，多复变量Nevanlinna理论已发展成为一个充满活力且迅速发展的研究领域（参见 [1], [3]-[6], [8], [9], [17]-[19], [21]-[23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [37]）。

一个特别活跃的领域是将值分布理论应用于正规族、偏微分方程（PDE）、偏差分方程和偏微分-差分方程相关问题。

2012年，Korhonen [17] 为 $\mathbb{C}^m$ 中超阶严格小于2 3的亚纯函数建立了对数导数引理的第一个差分类比，即对数差分引理。随后，Cao和Korhonen [3] 将这一结果推广到超阶严格小于1的情形。这些奠基性结果在研究复差分方程的亚纯解，以及高维差分算子的唯一性理论中发挥着关键作用。

我们首先回顾Heittokangas等人 [10], 建立的一项基本结果，该结果揭示了小阶亚纯函数具有强烈的结构性行为。

定理3.A. [10, 定理 1] 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的非常值亚纯函数，满足 $\rho(f) < 2$，并设 c 为非零复数。若 $f(z+c)$ 与 $f(z)$ 共享 $a \in \mathbb{C}$ 且计重，则对所有 $z \in \mathbb{C}$，都有 $f(z+c) - a = d(f(z) - a)$，其中 d 为某个非零复数。

下面的例子说明，定理 3.A 的阶条件“$\rho(f) < 2$”是不可或缺的。

例 3.A. [10] 设 $f(z) = e^{z^2} + 1$，且设 c 是一个非零有限复数值。于是立即可得 $f(z+c) - 1 = (f(z) - 1)e^{2zc+c^2}$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$成立。此外，我们发现 $N(r, 1; f) = 0$，因此 1 是 f的一个 *Borel*例外值。

受 Borel例外值对有限阶整函数所起作用的启发，Huang 和 Zhang [16] 得到了以下推广结果。

定理 *3.B.* [16, 定理 *2.3*] 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中具有 *Borel*例外值 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的有限阶超越整函数，设 $c \in \mathbb{C}$，且设 $a(z)\ (\not\equiv \alpha) \in S(f)$。若 $f(z+c)$ 和 $f(z)$ 以计重方式共取 $a(z)$，则 $f(z+c) \equiv f(z)$。

同样地，Huang 和 Zhang 还建立了一个涉及高阶差分算子的相应结果。

定理 3.C. [16, 定理 2.6.] 设 f 是 $\mathbb{C}$ 中的超越整函数，满足$\rho(f) < 2$。若 $\Delta_c^k f(z)$与 $f(z)$以计重方式共享 0，其中 $k \in \mathbb{N}$ 和 $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 满足$\Delta_c^k f(z) \not\equiv 0$，则对所有 $z \in \mathbb{C}$，有 $\Delta_c^k f(z) \equiv df(z)$，其中 d 是某个非零复数。

最近，Majumder 和 Das [25] 将定理 3.A 推广到了多复变数函数。

定理 3.D. [25, 定理 1.4] 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非常值亚纯函数，满足 $\rho(f) < 2$，并设 $c \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$。若 $f(z+c)$与 $f(z)$以计重方式共享 $a \in \mathbb{C}$ 和 ∞，则对所有 $z \in \mathbb{C}^n$，有$f(z+c) - a = d(f(z) - a)$，其中 d 是某个非零复数。

下面的例子证实，在高维情形下，条件“$\rho(f) < 2$”仍然是必要的。

例 *3.1.* [25]设 $f(z) = f(z_1, z_2) = e^{z_1^2+z_2^2} + 1$且 $c = (c_1, c_2) = (1, 0)$。显然，$f(z+c)$和 $f(z)$共享值 *1*，且以计重方式共享 ∞，但 $f(z+c) - 1 = e^{2z_1+1}(f(z) - 1)$。

现在我们给出本文的第一个主要结果。

定理 3.1。设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个超越亚纯函数，满足 $\rho(f) < 2$。若$\Delta_c^k f(z)$和 $f(z)$共享0且以计重方式共享 ∞，其中 $k \in \mathbb{N}$和 $c \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$满足 $\Delta_c^k f(z) \not\equiv 0$，则对所有 $z \in \mathbb{C}^n$， $\rho(f)$和 $\Delta_c^k f(z)$等于 $\equiv df(z)$，其中 d是某个非零复数。

注 3.1 。显然，定理*3.1*将定理 *3.C* 推广到了高维情形。

下面的例子确保结论的存在性 $\Delta_c^k f(z) \equiv df(z)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}^n$定理3.1。

例 3.2. 设 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^1$ 由 $f(z) = \frac{e^{\alpha(z_1+z_2+\cdots+z_n)}}{e^{\beta(z_1+z_2+\cdots+z_n)}+1}$ 定义，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 满足 $e^{n\alpha} = 3$, $e^{n\beta} = 1$以及 $c = (1, 1, \ldots, 1)$。注意到 $\Delta_c f(z) = \frac{2e^{\alpha(z_1+z_2+\cdots+z_n)}}{e^{\beta(z_1+z_2+\cdots+z_n)}+1}$。显然 $\Delta_c f(z) = 2f(z)$，因此 $\Delta_c f$ 和 f 共享 0 并且计重。

例 3 3 f $\mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^1$ $f\ z$ = _____ $\lambda\ \mu \in \mathbb{C} \setminus$ .. $\{0\}$ $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Z}$ $c = \left(\frac{2\pi i}{\mu}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{C}^n$ $\Delta_c^k f\ z$ = $\frac{e^{2\pi i\lambda/\mu-1}{}^{k+1}\, e^{\lambda(z_1+\cdots+z_n)}}{e^{\mu(z_1+\cdots+z_n)}-1}$. 设 : 由 $()_{(e^{2\pi i\lambda/\mu}-1)}$ $e^{\lambda(z_1+\cdots+z_n)}$ 定义，其中 , , , 且 . 则 $()_{()}$这里，$\Delta_c^k f(z) \equiv d\, f(z)$其中 $d = (e^{2\pi i\lambda/\mu} - 1)^{k+1} \neq 0$。显然： $\Delta_c^k f$与 f 共享0且 ∞计重并$\rho(f) = 1 < 2$。

以下例子表明，即使 $f(z)$ 和 $\Delta_c^k f(z)$ 以非零常数 a 计重，也不一定能推出对所有 $z \in \mathbb{C}^n$， $\Delta_c^k f(z) \equiv df(z)$，其中 d 是一个非零复数。

例3.4。令 $f(z)=e^{z_1+z_2+\cdots+z_n}+e^{-(z_1+z_2+\cdots+z_n)}+2$, $c=\left(\frac{\pi i}{n},\ldots,\frac{\pi i}{n}\right)$。注意 $\Delta_c f(z)=-2(e^{z_1+z_2+\cdots+z_n}+e^{-(z_1+z_2+\cdots+z_n)})$。显然 $\Delta_c f$ 和 f 以 43 和 ∞ 计重，但$\Delta_c f\not\equiv df$。

例 3 5 $f\ z=\frac{e^{(z_1+\cdots+z_n)}}{e^{2(z_1+\cdots+z_n)}+1}+1$ $c=\left(\frac{\pi i}{n}\ \ldots\ \frac{\pi i}{n}\right)$ $\Delta_c^k f\ z=-1\ ^k2^k$..设 ()，、、。 $\frac{e^{(z_1+\cdots+z_n)}}{e^{2(z_1+\cdots+z_n)}+1}$. $\Delta_c^k f\ z$ $f\ z$ $a=\frac{1}{1+\ -1\ ^{k+1}2^{-k}}$ ∞ $\Delta_c^k f\not\equiv df$

注意到 () ()显然，()和() 共享()且计重，但。

定理 3.2。设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有限阶超越整函数，具有一个 *Borel*例外值 $\alpha\in\mathbb{C}$，满足 $f(0)\neq\alpha$，$c\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$，并且 $a(\not\equiv\alpha)$ 是满足 $a\in\mathcal{S}(f)$的整函数。若 $f(z+c)$和 $f(z)$共享 $a(z)$计重，则 $f(z+c)\equiv f(z)$。

Fol下面的例子表明，定理$a(\not\equiv\alpha)$中的条件3.2 是必要的 .

例*3.6.* 设 $f(z)=e^{z_1+z_2+z_3}(z_2+z_3+1)(z_1-z_2+1)+1$和 $c=\left(\frac{\pi\iota}{2},\frac{\pi\iota}{2},-\frac{\pi\iota}{2}\right)$。注意，$f(z+c)=\iota e^{z_1+z_2+z_3}(z_2+z_3+1)(z_1-z_2+1)+1$。显然，*1* 是 f 的 *Borel* 例外值，且 $f(0)\neq 1$。容易验证，$f(z+c)$ 和 $f(z)$ 以计重的方式共用值 *1*，但 $f(z+c)\not\equiv f(z)$。

下面的例子说明，当3.2 是一个超越亚纯函数时，定理不成立 f。

例 *3.7.* 令 $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{P}^1$ 由 $f(z)=\frac{e^{(z_1+z_2+\cdots+z_n)}-1}{e^{(z_1+z_2+\cdots+z_n)}+1}$ 定义，~~并令 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$~~ 满足 $e^{(c_1+c_2+\cdots+c_n)}=-1$。显然，*1* 是 f 的一个 *Borel* 例外值，且 $f(0)\neq 1$。容易验证，$f(z+c)$ 和 $f(z)$ 以计重方式共享 -1，但 $f(z+c)\not\equiv f(z)$。

接下来的 示例表明，定理 $\rho(f)<+\infty$中的条件“”是必要的3.2 .

例 *3.8.* 令 $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{P}^1$ 由 $f(z)=a\left(1-e^{-\sin(z_1+z_2+\cdots+z_n)}\right)$ 定义，并令 $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)=(r_1\pi,r_2\pi,\ldots,r_n\pi)$，其中 $\sum_{i=1}^n r_i$ 是一个奇正整数，a 是一个非零常数。注意，$f(z+c)=a\left(1-e^{\sin(z_1+z_2+\cdots+z_n)}\right)$。显然，$a$ 是 f的一个 *Borel*例外值，且 $f(0)\neq a$。容易验证，$f(z+c)$ 和 $f(z)$ 以计重方式共享 $2a$，但 $f(z+c)\not\equiv f(z)$。

接下来我们考虑复偏微分差分方程

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}=f(z+c),\tag{3.1}$$

其中 $k\in\mathbb{Z}[1,n]$ 且 $c\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$。方程（3.1）存在解，例如，$f$（ $e^{z_1+z_2+\ldots+z_n}$ 3 1 $z=$ $c=2k\pi\iota\ 2k\pi\iota\ \ldots\ 2k\pi\iota$ $k\in\mathbb{Z}$ $f\ z=$）是方程（。）的一个解，其中（,,,），而（）sin（$z_1+z_2+\ldots+z_n$）或 f（）$=\cos$（$z_1+z_2+\ldots+z_n$）也都是方程（3.1）的解，其中 $c\in\mathbb{C}^n$ 取适当值。显然，方程（3.1）在 $\mathbb{C}^n$ 中没有有理解。

定理 3.3. 方程（$\mathbb{C}^n$）的亚纯解的级必须满足 $\rho(f)\geq 1$.

定理 3.4. 设 f 是方程（$\mathbb{C}^n$）*3.1*）的一个整函数解，满足 $f(0)\neq 0$且 $\rho(f)$ 为有限值。如果 0 是 f的一个 *Borel*例外值，那么 $\rho(f)=1$。此外，以下情形之一成立：

(i) $f(z)=(b_1z_1+\ldots+b_nz_n+b_0)e^{a_1z_1+\ldots+a_nz_n+a_0}$，其中 $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{C}$ 满足 $(a_1,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$，$b_0\neq 0$ 且 $a_j=e^{a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n}$；*(ii)* $f(z)=g(z)e^{a_1z_1+\ldots+a_nz_n+a_0}$，其中 $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ 满足 $(a_1,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$，$a_j=e^{a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n}$ 且 $g(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超越整函数，满足 $\rho(g)<1$ 且 $\frac{\partial g}{\partial z_j}(z)=e^{a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n}(g(z+c)-g(z))$。

注记3.2. 显然，定理 *3.4* 将定理*3.5* [20] 推广到了更高维的情形。

3.1. **辅助引理**。

引理3.1. [5, 定理2.4] 设 f 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的非常值亚纯函数，并设$c \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$。若 f 是有限阶的，则

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) + m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+c)}\right) = O\left(r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\right)$$

对任意 $\varepsilon > 0$均成立。

引理 3.2。 [5, 推论 3。2] 设 A_0、……、 A_m 是 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数，使得存在一个整数 $k \in \{0, \ldots, m\}$ 满足

$$\rho(A_k) > \max\{\rho(A_j) : 0 \leq j \leq m, j \neq k\}.$$

如果 f 是线性偏差分方程的非平凡整函数解

$$A_m(z)f(z+c_m) + \ldots + A_1(z)f(z+c_1) + A_0 f(z) = 0,$$

其中 c_1、……、 c_m 是 $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 的互异值，则有 $\rho(f) \geq \rho(A_k) + 1$。

引理3.3。 [5,定理2。2] 设 f 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的非常值亚纯函数，且满足

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{r} = 0,$$

那么，对任意常数 $c \in \mathbb{C}^n$， $\| \ T(r, f(z+c)) = T(r, f) + o(T(r, f))$ 成立。

引理3.4。 [14, 定理1。26] 设 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^1$ 是非常值亚纯函数。假设 $R(z, w) = {}^{A}_{(z,w)\, B(z,w)}$。那么

$$\| \ T(r, R_f) = \max\{p, q\}T(r, f) + O\Big(\sum\nolimits_{j=0}^{p} T(r, a_j) + \sum\nolimits_{j=0}^{q} T(r, b_j)\Big),$$

其中，给定 $R_f(z) = R(z, f(z))$，以及两个互素多项式 $A(z, w)$ 和 $B(z, w)$，分别为 $A(z, w) = \sum_{j=0}^{p} a_j(z)w^j$ 和 $B(z, w) = \sum_{j=0}^{q} b_j(z)w^j$。

引理3.5。 [2, 推论4。5] 设 $a_0, a_1, \ldots, a_m (m \geq 1)$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的亚纯函数，且 $g_0, g_1, \ldots, g_m$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数，并且对 $0 \leq j < k \leq m$， $g_j - g_k$ 都不是常数。若条件

$$\sum_{j=0}^{m} a_j e^{g_j} = 0$$

并且 $\| \ T(r, a_j) = o(T(r))$、 $j = 0$、1、……、 n成立，其中 $T(r) = \max^{0\leq k<j\leq n}(T(r, e^{g_j - g_k}))$，则对所有 $j = 0$， 1、……、 n， $a_j \equiv 0$。

引理 3.6。 [28] 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超越亚纯函数，满足 $\rho(f) < 1$。设 $h > 0$。则存在一个 ε-集 E，包含于 $\mathbb{C}^n$，使得

$$\frac{\partial_{z_i}(f(z+c))}{f(z+c)} \to 0$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}[1, n]$，并且

$$\frac{f(z+c)}{f(z)} \to 1$$

如 $||z|| \to \infty$，其中 $z \in \mathbb{C}^n \backslash E$ 和 $||c|| \leq h$。此外，可以选取 E，使得当 $||z||$足够大时，其中 $z \notin E$，函数 $f(z)$ 在 $||\zeta - z|| \leq h$ 中没有零点或极点。

引理 3.7。 [28] 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有限阶超越亚纯函数 ρ。那么存在一个 ε-集 E，它位于 $\mathbb{C}^n$ 中，使得

$$\left|\frac{\partial_{z_i}(f(z))}{f(z)}\right| \leq ||z||^{\rho-1+\delta},$$

对所有充分大的 $||z||$成立，其中 $z \in \mathbb{C}^n \backslash E$ 且 $\delta > 0$ 是一个给定的常数 $t.$

引理3.8. 设 P 与 Q 是 $\mathbb{C}^n$ 中的两个多项式，使得 P 非常数。若 f 是下列方程在 $\mathbb{C}^n$ 中的有限阶解

$$f(z+c) = e^{P(z)}\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} + Q(z)f(z)\right)$$

其中 $c \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 且 $j \in \mathbb{Z}[1,n]$，则 $\rho(f) \geq \deg(P) + 1$。

证明。我们有

$$\frac{f(z+c)}{f(z)} = e^{P(z)}\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}/f(z) + Q(z)\right). \tag{3.2}$$

现在利用引理1.37 [14], ，我们有

$$m\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}/f(z)\right) = O(\log r)$$

并由引理3.1，我们得到

$$m\left(r, f(z+c)/f(z)\right) = O\left(r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\right)$$

对任意 $\varepsilon > 0$均成立。由于 $m(r, Q) = O(\log r)$，由 (3.2)，我们推得

$$m(r, e^P) = O(r^{\deg(P)}) \leq O\left(r^{\rho(f)-1+\varepsilon}\right) + O(\log r),$$

这表明 $\rho(f) \geq \deg(P) + 1$。 □

3.2. **定理 3.1 的证明**。 根据给定条件，我们有

$$\frac{\Delta_c^k f(z)}{f(z)} = e^{P(z)}, \tag{3.3}$$

其中 P 是 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数。由于 $\rho(f) < 2$，对 (3.3) 使用引理 2.B，我们推得 P 是 $\mathbb{C}^n$ 上次数至多为一的多项式。若不然，设 $\deg(P) = 1$。注意到

$$\Delta_c^k f(z) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(z+jc). \tag{3.4}$$

将 (3.4) 代入 (3.3)，得到

$$f(z+kc) + \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(z+jc) + \left[(-1)^k - e^{P(z)}\right] f(z) = 0. \tag{3.5}$$

现在利用引理 3.2和（3.5），我们推得 $\rho(f) \geq \rho(e^P) + 1 = 2$，这与 $\rho(f) < 2$ 的假设矛盾。因此 P是一个常数。若取 $d = e^P$，则由（3.3），可得

$$\Delta_c^k f(z) \equiv df(z) \tag{3.6}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}^n$。若不然，假设 $\rho(f) < 1$。现在将（3.4）代入（3.6），再利用引理 3.6，得到

$$d = \frac{\Delta_c^k f(z)}{f(z)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{f(z+jc)}{f(z)} \to \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} = (1-1)^k = 0$$

因为在 $\mathbb{C}^n$ 中可能位于某个 ε-集 E 之外，这不可能。因此 $\rho(f) \geq 1$。

3.3. **定理 3.2 的证明**。根据给定条件，我们有

$$\frac{f(z+c) - a(z)}{f(z) - a(z)} = e^{P(z)}, \tag{3.7}$$

其中 P 是 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数。将引理 3.3 和引理 3.4 用于 (3.7)，可推出 $\rho(e^P) \leq \rho(f)$。由于 $\rho(f)$ 是有限的，利用引理 2.B，可得 $\deg(P) = \rho(e^P) \leq \rho(f)$。注意，$\infty$ 是 f 的 Borel 例外值。由于 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是 f 的 Borel例外值，由命题 2.2 可得

$$f(z) = H(z)e^{Q(z)} + \alpha, \tag{3.8}$$

其中 $H(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非零整函数，且 $Q(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的多项式，使得 $\rho(H) < \rho(f) = \rho(e^Q) = \deg(Q)$。由于 f 有两个不同的 Borel例外值，由命题 2.4 可得 $\rho(f) = \mu(f)$。继而，由命题 1.A 可得 $T(r,H) = o(T(r,f))$。现在由 (3.7) 和 (3.8) 得出

$$H(z+c)e^{Q(z+c)} - H(z)e^{P(z)+Q(z)} + (a(z)-\alpha)e^{P(z)} - (a(z)-\alpha) = 0. \tag{3.9}$$

首先，我们假设 $P(z)$ 是一个非常数多项式。显然

$$1 \leq \deg(P) \leq \rho(f) = \deg(Q).$$

现在考虑以下两种情形。

情形 1. 设 $1 \leq \deg(P) < \rho(f) = \deg(Q)$。方程 (3.9) 可改写为

$$H(z+c)e^{Q(z+c)-Q(z)} - H(z)e^{P(z)} = (a(z)-\alpha)\left(1 - e^{P(z)}\right)e^{-Q(z)}. \tag{3.10}$$

根据命题 1.A，我们可知，(3.10) 左边的级小于 $\rho(f)$，而 (3.10) 右边的级等于 $\rho(f)$。这就导出了矛盾。

情形 2. 设 $1 \leq \deg(P) = \rho(f) = \deg(Q) = m$. 假设

$$P(z) = \sum_{j=0}^{m} P_j(z) \quad \text{and} \quad Q(z) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(z),$$

其中 $P_j(z)$ 和 $Q_j(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中次数为 j $(0 \leq j \leq m)$ 的齐次多项式，且 $P_m(z)$ 和 $Q_m(z)$ 均为非常数。现在考虑以下三个子情形。

子情形 2.1。令 $P_m(z) - Q_m(z) \equiv 0$。方程 (3.10) 可改写为

$$H_{11}(z)e^{-Q(z)} + H_{12}(z)e^{P(z)} + H_{13}(z)e^{Q_0(z)} = 0, \tag{3.11}$$

其中 $Q_0(z) \equiv 0$ 且

$$H_{11}(z) = \alpha - a(z),\ H_{12}(z) = -H(z),\ H_{13}(z) = H(z+c)e^{Q(z+c)-Q(z)} + (a(z)-\alpha)e^{P(z)-Q(z)}.$$

Note that

$$\deg(-Q-P) = \deg(-Q-Q_0) = \deg(P-Q_0) = m,$$

并且 $T(r,a) = o(T(r,e^Q))$。因此，对于所有 $j = 1, 2, 3$，我们有

$$T(r,H_{1j}) = o\left(T\left(r,e^{-Q-P}\right)\right),\ \ T(r,H_{1j}) = o\left(T\left(r,e^{-Q-Q_0}\right)\right)$$

并且 $T(r,\ H_{1j}) = o\left(T\left(r,\ e^{P-Q_0}\right)\right)$. 现在利用引理 3.5 至 (3.11)，我们可推得 $H_{1j} \equiv 0$对于 $j = 1,\ 2,\ 3$，这与假设矛盾。

子情形2.2. 设 $P_m(z) + Q_m(z) \equiv 0$。方程（3.10）可改写为

$$H_{21}(z)e^{Q(z+c)} + H_{22}(z)e^{P(z)} + H_{23}(z)e^{Q_0(z)} = 0,$$

其中 $Q_0 \equiv 0$ 且

$$H_{21}(z) = H(z+c),\ H_{22}(z) = a(z) - \alpha \text{ and } H_{23}(z) = -H(z)e^{Q(z)+P(z)} - (a(z) - \alpha).$$

现在按照子情形 2.1 的证明中同样的方式进行，我们推出，对于 $j = 1,\ 2,\ 3$，有 $H_{2j} \equiv 0$, 这是一个矛盾。

子情形2.3. 设 $P_m(z) \pm Q_m(z) \not\equiv 0$。方程（3.10）可改写为

$$H_{31}(z)e^{Q(z+c)} + H_{32}(z)e^{Q(z)+P(z)} + H_{33}(z)e^{P(z)} + H_{34}(z)e^{Q_0(z)} = 0,$$

其中 $Q_0 \equiv 0$ 且

$$H_{31}(z) = H(z+c),\ H_{32}(z) = -H(z),\ H_{33}(z) = a(z) - \alpha \text{ and } H_{34}(z) = \alpha - a(z).$$

现在按照子情形 2.1 证明中的相同方法进行推导，我们得到 $H_{3j} \equiv 0$对于 $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$，这与假设矛盾。

接下来，我们假设 P 是一个常数。令 $d = e^P$。如果可能，假设 $d \neq 1$。则方程（3.10）变为

$$H(z+c)e^{Q(z+c)-Q(z)} - dH(z) = (a(z) - \alpha)(1-d)e^{-Q(z)}. \tag{3.12}$$

注意到

$$\rho\Big((a(z) - \alpha)(1-d)e^{-H(z)}\Big) = m = \rho(f)$$

and

$$\rho\Big(H(z+c)e^{Q(z+c)-Q(z)} - dH(z)\Big) < m = \rho(f).$$

因此，由（3.12），我们得到矛盾。因此 $d = 1$，于是由（3.7），可化简为 $f(z+c) \equiv f(z)$。

3.4. **定理 3.3的证明**。容易验证，方程（3.1）在 $\mathbb{C}^n$中没有有理解。如果可能，假设 f 是方程（3.1）的一个超越亚纯解，且满足 $\rho(f) < 1$。那么由引理 3.6 和 3.7，分别得到

$$\frac{f(z+c)}{f(z)} \to 1 \text{ and } \left|\frac{\partial_{z_i}(f(z))}{f(z)}\right| = o(1), \tag{3.13}$$

当 $||z||$取足够大的值时，其中 $z \in \mathbb{C}^m \backslash E$ 且 $i \in \mathbb{Z}[1, m]$，其中 E 是 ε在 $\mathbb{C}^n$中的一个 $\mathbb{C}^n$-集。现在利用（3.13）至（3.1），我们立即得到矛盾。因此 $\rho(f) \geq 1$。

3.5. 定理 3.4 的证明。注意，0 和 ∞ 是 f 的 Borel例外值。由命题 2.2，得 $f(z) = g(z)e^{Q(z)}$，其中 $g(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个非零整函数，满足 $g(0) \neq 0$；而 $Q(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个多项式，满足 $\rho(g) < \rho(f) = \rho(e^Q) = \deg(Q)$。由命题 2.4，还得 $\rho(f) = \mu(f) \in \mathbb{N}$。于是由命题 1.A，得$T(r, g) = o(T(r, f))$。现在由（3.1），得

$$\left(\frac{\partial g(z)}{\partial z_j} + g(z)\frac{\partial Q(z)}{\partial z_j}\right)e^{Q(z)-Q(z+c)} = g(z+c). \tag{3.14}$$

注意到 $\deg(Q(z) - Q(z+c)) = \deg(Q(z)) - 1$。若 $Q(z) - Q(z+c)$ 非常数，则由引理 3.7 和 (3.14) 可得 $\rho(g) \geq \deg(Q(z) - Q(z+c)) + 1 = \deg(Q(z))$，这与 $\rho(g) < \deg(Q)$ 矛盾。因此，$Q(z) - Q(z+c)$ 为常数，于是

$\deg(Q) = 1$。令 $Q(z) = a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n + b$，其中 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$，且 $b \in \mathbb{C}$。显然，$Q(z + c) - Q(z) = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$ 且 $\rho(g) < 1$。现在由 (3.14) 可得

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z_j} + a_j g(z) = e^{a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n} g(z + c). \tag{3.15}$$

利用（3.13）至（3.15），我们推得 $a_j = e^{a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n}$ 因此，由（3.15），可得

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z_j} = a_j(g(z + c) - g(z)). \tag{3.16}$$

若 g 是关于 $\mathbb{C}^n$的多项式，则由（3.16）容易推得 $\deg(g) \leq 1$。令$g(z)$ $= b_1z_1 + b_2z_2 + \ldots + b_nz_n + b_0$，其中 b_0，b_1，b_2，…，$b_n \in \mathbb{C}$。由于 $g(0) \neq 0$，可得 $b_0 \neq 0$。

伦理标准合规性：

利益冲突。作者声明，就本文的发表而言，不存在利益冲突。

数据可用性声明。本文不适用数据共享，因为本研究过程中未生成或分析任何数据集。

References

[1] A. Banerjee 和 S. Majumder，多复变数中刻画亚纯函数唯一值集的解析视角，*Bull. Korean Math. Soc.*，（已接受发表）。[2] C. Berenstein、D. C. Chang 和 B. Q. Li，关于朗斯基行列式与整函数线性相关性的注记，$\mathbb{C}^n$，24 (1-2) (1994), 131-144。[3] T. B. Cao 和 R. J. Korhonen，多复变数中与超平面相交的亚纯映射的第二主定理新版本，*J. Math. Anal. Appl.*，444 (2) (2016), 1114-1132。[4] T. B. Cao 和 R. J. Korhonen，亚纯解与时滞偏微分方程的增长，*Israel J. Math.*，(2025), 1-27, DOI:10.1007/s11856-025-2756-8。[5] T. B. Cao 和 L. Xu，多复变数中的对数差分引理与偏差分方程，*Ann. Mat. Pura Appl.*，199 (2020), 767-794。[6] Q. Cheng、Y. Li 和 Z. Liu，多复变数中一阶非线性偏微分差分方程的亚纯解，*Bull. Korean Math. Soc.*，60 (2) (2023), 425-441。[7] W. Cherry 和 Z. Ye，Nevanlinna值分布理论的第二主定理及其误差项。施普林格，柏林 (2001)。[8] P. V. Dovbush，C^N中的Zalcman-Pang引理，*Complex Var. Elliptic Equ.*，66 (12) (2021), 1991-1997。[9] W. Hao 和 Q. Zhang，一类非线性偏微分方程的亚纯解，*Indian J. Pure Appl. Math.*，2025: 1-11, doi.org/10.1007/s13226-025-00779-5。[10] J. Heittokangas、R. Korhonen、I. Laine、J. Rieppo 和 J. L. Zhang，亚纯函数平移的值共享结果及周期性的充分条件，*J. Math. Anal. Appl.*，355 (1) (2009), 352-363。[11] A. Hinkkanen，Nevanlinna第二基本定理的精确形式，*Invent. Math.*，108 (1992), 549-574。[12] L. Hörmander，多复变数复分析导论，范·诺斯特兰德。普林斯顿，新泽西州，1973。[13] P. C. Hu 和 C. C. Yang，$\mathbb{C}^m$上的亚纯函数唯一性，*Complex Var. Elliptic Equ.*，30 1996 235 270 ( ), - 。[14] P. C. Hu、P. Li 和 C. C. Yang，亚纯映射的唯一性。施普林格，纽约 (2003)。[15] P. C. Hu 和 C. C. Yang *Bull. Aust. Math.*，多 *Soc.* **90** 2014 444 456 复变数中的Tumura-Clunie定理，, ( ), - 。[16] Z. B. Huang 和 R. R. Zhang，亚纯函数差分的唯一性，*Anal. Math.*，44 2018 461 473 ( ), - 。[17] R. J. Korhonen、*Comput.* 多变 *Methods Funct. Theo.* **12** 2012 1 343 361 量亚纯函数的差分Picard定理，, ( ) ( ), - 。[18] B. Q. Li 和 L. Yang，Picard型定理与某些非线性偏微分方程的整函数解，*J. Geom. Anal.*，(2025) 35:234, https://doi.org/10.1007/s12220-025-02067-4。

[19] Y. Li 和 H. Sun *J. Korean Math.*，多 *Soc.* **60** 4 2023 859 876
变量亚纯函数唯一性的注记，, ( ) ( ), - 。[20] K. Liu 和 X. Dong，与某些类型的复微分差分方程相关的一些结果，*Bull. Korean Math. Soc.*，51 (95) (2014), 1453-1467。[21] F. Lü、 *Complex Var.* 多复 *Elliptic Equ.* **58** 8 2013 1085 1092
变数亚纯函数的Picard型定理，, ( ) ( ), - 。[22] F. Lü 和 W. Bi，关于某些偏微分方程的整函数解，*J. Math. Anal. Appl.*，516 (1) (2022), 126476。[23] F. Lü，关于某些偏微分方程的亚纯解，*Canadian Math. Bull.*，2025:1- 15, doi:10.4153/S0008439525000347。[24] Z. Liu 和 Q. Zhang，多变量亚纯函数的差分唯一性定理，*Turk. J. Math.*，42 (2018), 2481-2505。[25] S. Majumder 和 P. Das，多复变数中与平移共享值的亚纯函数的周期行为，*Indian J. Pure Appl. Math.* https://doi.org/10.1007/s13226-025-00778-6。[26] S. Majumder、P. Das 和 D. Pramanik，$\mathbb{C}^m$、*J. Contemp. Math. Anal.*中的某类偏微分方程存在整函数解的充分条件，60 (5) (2025), 378-395。[27] S. Majumder 和 N. Sarkar，多复变数中与差分算子共享值的亚纯函数的周期行为，*Indian J. Pure Appl. Math.* https://doi.org/10.1007/s13226-025-00916-0。[28] S. Majumder 和 N. Sarkar *Bull. Belgian*，多 *Math. Soc.*
复变数中的Bergweiler-Langley引理，（已接受发表）。[29] S. Majumder、N. Sarkar 和 D. Pramanik，多变量复Fermat型差分方程的解，*Houston J. Math.*（已接受发表）。[30] T. Nishino，多复变数函数论，第193卷，美国数学会，2001。[31] L. I. Ronkin、 *Trans.* 多复 *Moscow Math. Soc.* **18** 1968 117 160
变数整函数规范乘积的一个类似物，, ( ), - 。[32] W. Stoll，具有给定零点的有限阶整函数，*Math. Z.*，57 (1953), 211-237。[33] W. Stoll，非负除子的正规族，*Math Z.*，84 (1964), 154-218。[34] W. Stoll，多复变数中的有限阶全纯函数，美国数学会数学科学会议委员会区域会议丛书第21卷，美国数学会，1974。[35] W. Stoll、 *Internat. J.* 多圆 *Math. & Math. Sci.* **6** 4 1983 617 669
盘上的值分布与对数导数引理，, ( ) ( ), - 。[36] W. Stoll，亚纯映射的值分布理论，*Aspects of Math.* E7 (1985), pp. 347, Vieweg- Verlag。[37] M. Wang 和 Z. Liu，多变量亚纯函数与其差分多项式共享小函数，*Hacet. J. Math. Stat.*，52 (1) (2023), 73-90。[38] C. C. Yang 和 H. X. Yi，亚纯函数唯一性理论，Kluwer学术出版社，Dordrecht/Boston/London，2003。[39] Z. Ye，关于射影空间中的Nevanlinna第二主定理，*Invent. Math.*，122 (1995), 475-507。

[1] Department of Mathematics, University of Kalyani, West Bengal 741235, India.
Email address: abanerjee kal@yahoo.co.in

[2]Department of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, West Bengal-733134, India.
Email address: sm05math@gmail.com, sjm@raiganjuniversity.ac.in

[3] Department of Mathematics, University of Kalyani, West Bengal 741235, India.
Email address: jhilikbanerjee38@gmail.com