arXiv:2602.14623v1 [math.CA] 16 Feb 2026

Kakeya 猜想与高秩格冯·诺依曼代数

MIKAEL DE LA SALLE

Abstract. 如果 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的非交换 L^p 空间对某个非平凡的 p 值具有完全有界逼近性质，那么对于所有 $d \leq \frac{n+1}{2}$，维数为 d 的情形下某种形式的 Kakeya 猜想成立。

证明依赖于我们提出并研究的欧几里得调和分析中以下问题的球面类比：对于某个 $p \neq 2$，若一个径向对称的傅里叶乘子在 L_p(实数集^d) 上有界，它是否必然具有连续符号？这个问题仍未解决，但我们证明了此类函数的原函数在齐格蒙德意义下是光滑的；给出了关于 L_p-有界性的若干必要条件，这些条件以 Besov 空间和符号的 Littlewood-Paley 分解来表述；并指出，否定的回答意味着维数为 d 的情形下某种形式的 Kakeya 猜想成立。随后我们给出这些结果的球面形式；将其与 Lafforgue的秩0约化的一项改进结合后，便可得到所述结果。

1. Introduction

若恒等算子在紧开拓扑下是有限秩映射的极限，则巴拿赫空间具有逼近性质（AP）。一个极为棘手的问题是，如何找到不具有 AP 的空间。这个问题由 Banach 提出[2], ，经 Grothendieck 宣传 [16, 15], ，最终由 Enflo 解决；他构造了首批实例 [12]。此后，人们发现了许多其他实例，但只有一个自然实例： $B(\ell_2)$，即希尔伯特空间 [30] 上所有有界线性算子构成的空间。首个不具有 AP 的自然可分空间候选是 $A = C^*_\lambda(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$。这一问题至今仍未解决，但 Vincent Lafforgue 和作者证明了 [21]，该空间不具有一种自然的算子空间变体——算子逼近性质（OAP）。对于 OAP，要求 A 上的恒等算子是有限秩映射的极限 $A \to A$，其中所用的是 $\mathcal{K} \otimes A$上的紧开拓扑； $\mathcal{K} \otimes A$ 是 A 与希尔伯特空间上紧算子构成的 C^*-代数的张量积。

更强地，只要 $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}$ [21]，冯·诺依曼代数 $\mathcal{L}\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ 的非交换 L_p 空间就不具有有界逼近性质。等价地说，在 p 取这些值时，$\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 不存在带算子系数的 L_p-傅里叶综合：无法从一般元素的傅里叶系数重构出 $L_p(\mathcal{L}\mathrm{SL}_3\mathbb{Z} \otimes B(\ell_2))$ 中的该元素，参见 [8, §2.1]。我与 Tim de Laat 将这一结果推广到了 $\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z})$，其中关于 p 的条件变为 $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2d}$[10]。此前，人们已针对 $\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{F}_p[T])$ 等非阿基米德类似物得到了类似的结论 [21]。例如，我在 [8], 中解释过，当时存在一个

Date: 2026年2月17日。

严重障碍，使得这一论证无法适用于 $\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2d}$，因此下面这个问题悬而未决。

问题 1.1。对于某些 $p \neq 2$， $\mathcal{L}\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbf{Z})$ 的非交换 L_p 空间是否具有有界逼近性质？对于所有 $\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2d}$ 呢？

这一问题的重要性在于，正面回答将意味着：只要 n 与 m 相距甚远（分别为 $|n-m| \geq 2$），冯·诺依曼代数 $\mathcal{L}\mathrm{PSL}_n\mathbf{Z}$ 和 $\mathcal{L}\mathrm{PSL}_m(\mathbf{Z})$ 就不同构，正如 Connes 著名的刚性猜想所预言的那样。

Javier Parcet 首先注意到，本问题中依赖于 p、d 的条件，与欧几里得调和分析中的 Bochner-Riesz 猜想所涉及的条件完全相同。这一数值上的巧合促使一些研究者尝试利用源自欧几里得调和分析的思想来解决问题 1.1 [25, 5, 24], ，另请参阅综述 [8, 23]。在本文中，我们更进一步，证明了围绕 Bochner-Riesz/Kakeya 猜想的一系列猜想之间的第一个严格蕴含关系。

欧几里得空间 $\mathbf{R}^d$ 的一个子集若在每个方向上都包含一条单位线段，就称为 Kakeya 集。Besicovich 证明，对于 $d \geq 2$，存在勒贝格测度为 0 的 Kakeya 集。但 Kakeya 猜想预言，从维数的意义上说，它们仍然相当大，即其维数为 d。根据维数所指的含义（上或下 Minkowski 维数、Hausdorff 维数……），有各种精确的猜想。它们都可以用 $\mathbf{R}^d$ 中管的构型，以组合方式表述。我们将采用的猜想的精确形式如下。$\mathbf{R}^d$ 中的一个 δ 管 R，是将 $[0,1] \times B_{\mathbf{R}^{d-1}}(0,\delta)$ 通过 $\mathbf{R}^d$ 的一个仿射等距变换得到的像；在这种情况下，我们将 $[2,3] \times B_{\mathbf{R}^{d-1}}(0,\delta)$ 的像记为 $\overline{R}$。定义 $f_d(\delta)$ 为满足以下条件的实数 $\varepsilon > 0$ 的下确界：存在一个有限的 δ 管族 $\{R_j\}$，使得这些 $\overline{R}_j$ 两两不相交，但

$$\frac{\left|\bigcup_j R_j\right|}{\sum_j |R_j|} \leq \varepsilon.$$

猜想 1.2. 对每个 $\varepsilon > 0$，$\sup_{\delta>0} f_d(\delta)\delta^{-\varepsilon} = \infty$。

Kakeya 猜想在维数 2 [6], 中是一个经典定理，而一个解（包括猜想 1.2）最近已在维数 3 的情形下由 Wang 和 Zahl 在一次著名的突破中给出 [33, 定理 1.12]; 在更高维数中，它仍是一个开放问题。关于这个主题有许多有趣的综述文章，例如 [?]。虽然我们没有证明正式的推论关系，但我们将猜想 1.2 视为这样一个猜想的变体：Kakeya 集的 Minkowski 上维数为 d。这等价于相同的条件，但只针对由 δ-管组成、其方向构成 $\mathbf{S}^{d-1}$ 的一个极大 δ-分离子集的族；参见 § 2.3 中的讨论。正如 Hong Wang 指出，猜想 1.2 也与管加倍猜想密切相关（[33, §1.6]）。

下一个定理是本文的主要结果。它解释了为什么问题 1.1 很难。

定理 1.3. 设 $d \geq 2$。若对于某个 $p \neq 2$， $L^p(\mathcal{L}\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbf{Z}))$ 具有算子空间逼近性质，则猜想 1.2 在维数 d 的情形成立。

更确切地说，我们证明 $\int_{\delta} \frac{f_{d(\delta)}|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|\text{对数}}{|\delta|\text{对数}}$ 在 0 处不可积，参见推论 6.6。这个定理是通过结合若干独立结果证明的，下面我们将介绍这些结果。

1.1. 秩零约化。出发点是我在 [8] 中提出的一个想法，我称之为秩零约化；它源自 Vincent Lafforgue 关于强性质 (T)[20]的工作。这一想法使我们能够通过紧子群来研究诸如 $\mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$ 这样的复杂群，或其中的算术子群。此处相关的形式在 [21] 中针对 SL_3 得到理解，随后又在 [10] 中推广至 $\mathrm{SL}_{N\geq 3}$；关于这一形式的简明阐述见 [8] （另见 [17, 9] ，其中讨论了其他秩为 ≥ 2的单李群）。它揭示了高秩格冯·诺依曼代数的结构与球面上的调和分析之间的如下联系。在 $L_2(\mathbb{S}^d)$ 上定义算子 T_δ ： $T_\delta f(x)$ 是 f 在$\{y \in \mathbb{S}^d$上的平均值，$\langle x\, y\rangle = \delta\}$。若 d, p 满足 T_δ 属于 Schatten 类 S_p （即 $\mathrm{Tr}\,|T_\delta|^p < \infty$），且映射 $\delta \in (-1, 1) \mapsto T_\delta \in S_p$ 是 H¨older 连续的，那么秩零约化使我们能够推导出关于 $\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z})$ 的冯·诺依曼代数的一种强不可逼近性：其对应的非交换 L_p 空间不具有有界逼近性质。$\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{R})$ 中的其他格，以及秩为 $\geq \max(9, 2d-1)$ 的连通单李群中的任意格，也同样如此。[21, 10]证明，只要 $p > \frac{2d}{d-1}$，映射 $\delta \mapsto T_\delta$ 就满足这一条件。此外，这一条件也是充分的（对于 $d = 2$，这一点在 [8, 第 § 2.3]，节末尾未经证明便被提出；Guillaume Dumas 则在 [11, 定理 3.14]中，对任意秩一紧型对称空间的更一般情形给出了证明）。我一直认为，这一事实表明，秩零约化对 $2 < p \leq \frac{2d}{d-1}$无能为力。

下一个结果说明我错了。它在两个方面改进了 [21, 10] 。第一项改进是一个直接但重要的观察： [21, 10] 中的论证实际上并未用到映射 $\delta \mapsto T_\delta$的连续性，而只用到了由此推出的一个结论，即某一类舒尔乘子的符号具有 H¨older 连续性。回想一下，对于测度空间（X, μ）和有界可测函数 m ： $X \times X \to \mathbb{C}$，以 m 为符号的舒尔乘子是作用在 $S_2(L_2(X, \mu))$上的算子，它将核为（$A_{x,y}$）$_{x,y\in X}$ 的算子 A 映射为核为（$m(x, y)A_{x,y}$）$_{x,y\in X}$的算子。若它可延拓（且延拓必然唯一）为 Schatten 类 S_p上的有界算子，我们用$\|m\|_{MS_p(L_2(X,\mu))}$表示其范数。第二项改进是，所需的正则性比 H¨older 连续性弱得多：例如，阶数为 $|\log\,\delta|^{-\alpha}$ 甚至（$\log\,|\log\,\delta|$）$^{-1-\alpha}$ 的连续模，只要 $\alpha > 0$，就已足够。

定理 1.4. 设 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $d \geq 2$。假设存在一个非减函数 ε : $[0, 1] \to [0, \infty)$，使得：

- 对于每个连续函数 φ : $[-1, 1] \to$ 实数集以及每个 $\delta \in [-1, 1]$,

$$|\varphi(0) - \varphi(\delta)| \leq \varepsilon(|\delta|)\|\varphi(\langle \cdot, \cdot\rangle)\|_{MS_p(L_2(\mathbb{S}^d))},$$

- $\delta \mapsto \frac{\varepsilon(\delta)\delta|}{|\delta|\text{对数}}$ 在 0 处可积。

那么，对于 $\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{R})$ 中的格 $\mathrm{SL}\ \Gamma = \mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z})$，或（如果 $d = 2$ 或 $d \geq 5$）对于秩为 $\geq 2d-1$ 的连通单李群， $L_p(\mathcal{L}\Gamma)$ 不具有算子空间逼近性质。

定理 1.4 提供了一种可能性：通过其他方法证明舒尔乘子符号的连续性，而不是考察算子 T_δ的谱分解，从而证明对于新的 p 值， $L_p(\mathcal{L}\Gamma)$ 不具有有界逼近性质。本文接下来的部分正是要这样做。

1.2. 径向舒尔乘子和傅里叶乘子符号的连续性。定理 1.4 引出了下面的问题，本文将主要致力于研究这个问题。

问题 1.5. 是否存在一个不连续函数 $m : (-1, 1) \to$ 实数集，使得符号为 $(\xi, \eta) \in \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \mapsto m(\langle \xi, \eta \rangle)$ 的舒尔乘子对某个$p \neq 2$是 S_p-有界的?

现在人们已经认识到，舒尔乘子与傅里叶乘子之间存在很强的类比，但舒尔乘子往往更难研究。一个近期的例子是 [24], ，在其中我们利用舒尔乘子将 Fefferman 球乘子定理 [13] 推广到任意李群，并根据一维动力系统刻画幂等L_p-有界傅里叶乘子，另见综述 [23]。傅里叶乘子是一种线性映射，它将实数集 $\mathbb{R}^{d\wedge}$ 上的函数 f 映射为一个“函数”，其傅里叶变换是逐点乘积 φf，其中 φ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 是称为傅里叶乘子符号的函数。如果它将 $L_p(\mathbb{R}^d)$ 映射到自身，则称其为 L_p-有界；如果 $\varphi(\xi)$ 仅取决于欧几里得范数 $|xi|$，则称其为径向的。本文始终采用以下傅里叶变换约定：$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle} dx$。

这促使我们提出下面的问题，作为问题 1.5 的一个简单情形。从非交换的视角来看，它非常自然，但似乎尚未得到广泛研究。

问题 1.6. 是否存在不连续函数 m : $(0, \infty) \to$ 实数集，使得以 $\xi \in$实数集$^d \mapsto m(|\xi|)$ 为符号的傅里叶乘子对某个$p \neq 2$在 L_p(实数集^d) 上有界?

对 L_p-有界的径向乘子的研究是一个已被大量探讨的经典课题，并且人们清楚地知道存在两个截然不同的范围:

- 当 p远离 2 时的范围（即 $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2d}$）。这一范围已得到大量研究。仍有许多问题悬而未决，但至少在猜想层面上，图景相当清晰（并且该猜想的若干重要情形已被证明 [18]）。例如，在 m 的支集是 $(0, \infty)$ 的紧子集这一简单情形中：若 $p < 2$，则以 $m(|\cdot|)$ 为符号的径向傅里叶乘子的 L_p 有界性应当等价于（表面上弱得多的条件） $m(|\cdot|)$ 是某个 L_p 函数的傅里叶变换。特别地，以$m(|\cdot|)$ 为符号的径向傅里叶乘子的 L_p-有界性迫使 m 在 0 之外具有某种 H¨尔德连续性，因而在此范围内问题 1.6 的答案是否定的。

- p接近 2 的范围（即 $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2d}$）。据我所知，这里最主要的结果是 Fefferman 著名的球乘子定理 [13]„ 该定理在我们的设定下表明，对于任意 $p \neq 2$，欧几里得球的示性函数都不是 L_p-有界的傅里叶乘子。

本文的主要结果回答了问题 1.6 和问题 1.5。虽然这些结果针对 p 和 d 的任意取值陈述，但它们主要适用于 p 接近 2 的范围。

第一个主要结果是对问题 1.6 的定性回答。回顾一下，函数 $F\colon$ 实数集 $\to\mathbb{C}$ 按照 Zygmund 意义 [34] 是光滑的，当且仅当

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{t\in\mathbf{R}}\frac{|F(t+h)+F(t-h)-2F(t)|}{h}=0.$$

定理 1.7。设 $m:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个有界可测函数。假设对于某个 $d\geq 2$ 和某个 $p\neq 2$，带有符号 $m(|\cdot|)$ 的傅里叶乘子在 $L_p(\mathbb{R}^d)$ 上有界。那么函数 $F(t)=\int_0^t m(\exp(s))ds$ 按照 Zygmund 意义是光滑函数。

一个原函数不光滑的有界可测函数的典型例子是 $(0,1)$ 的示性函数，因此这个定理推广了 Fefferman 的球乘子定理。证明是对其证明的改编。它还使用了满足该定理结论的函数的一个泛函分析刻画（命题 2.4）。值得指出的是，这个定理并未回答问题 1.6，因为存在原函数光滑但不连续的有界可测函数，参见例 2.3。这个例子表明，问题 1.6 的候选函数必须从高度振荡函数中寻找。下一个问题指出了处于当前技术边界的函数。这个问题在维数 2 中已经是开放问题。

问题 1.8. 在单位球面某个邻域内等于 $\xi\mapsto\sin(\log\log 1/|1-|\xi|^2|)$ 的函数，能否对某个 $p\neq 2$ 定义一个有界的 L_p-乘子?

第二个主要结果给出了一个定量答案，使上述结论更加精确。事实上，有界可测且具有光滑原函数的函数恰好构成 $L_\infty(\mathbb{R})\cap b^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$，参见命题 2.4。回顾一下，若 $(W_n)_{n\geq 0}$ 是一个 Littlewood-Paley 单位分解（见第 2.4 节），那么 $\mathbb{R}$ 上的非齐次 Besov 空间 $B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ 和 $b^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ 是温和分布空间

$$B^s_{p,q}(\mathbf{R})=\big\{f\mid(2^{ns}\|W_n*f\|_p)_{n\geq 0}\in\ell_q\big\},$$

and

$$b^s_{p,\infty}(\mathbf{R})=\big\{f\mid(2^{ns}\|W_n*f\|_p)_{n\geq 0}\in c_0\big\}.$$

定理 1.9. 设 $1<p<\infty$ 和 $m:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个有界可测函数，使得 T，则以 $m(|\cdot|)$ 为符号的傅里叶乘子在 $L_p(\mathbb{R}^d)$ 上有界。那么$\varphi:\ t\in\mathbb{R}\mapsto m(\exp t)$ 满足

$$\|W_n*\varphi\|_\infty\leq C_d\|T\|_{L_p\to L_p}\inf_{\delta\in(0,1)}\left(f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2^n\delta^2}\right)$$

对于所有的 $n\geq 0$。特别地，如果 $d=2$ 和 $n\geq 1$,

$$\|W_n*\varphi\|_\infty\leq C_2'\|T\|_{L_p\to L_p}n^{-\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$$

并且如果 $F(t)=\int_0^t\varphi(s)ds$ 以及 $h>0$,

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\frac{|F(t+h)+F(t-h)-2F(t)|}{h}\leq C_2'\|T\|_{L_p\to L_p}|\log h|^{-|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}.$$

因此，我们得到：如果猜想 1.2 对 ε 不成立，那么这将迫使 φ 属于某个 $\alpha = \frac{\varepsilon|p-2|}{4p+\varepsilon|p-2|} > 0$ 的$B^{\alpha}_{\infty,\,\infty}$(实数集)，或者等价地，如果 $\alpha < 1$，则 φ 是α-Hölder 连续的（见引理 5.2）。更一般地，

推论 1.10. 假设在实数集^{d} 上存在一个 L_p有界的径向乘子，其符号不连续。那么 $\int_0^1 \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta} = \infty$。

当 $\int_0^1 \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta} < \infty$ 时，我们推导出连续模的显式公式（见推论 5.9）。

最后，借鉴我们与 Parcet 和 Tablate [24]一起获得的思路以及以往的转移技术 [22, 4], ，我们可以调整证明，从而得到定理 1.9 的以下球面类比。

定理 1.11. 存在一个常数 C_d ，使得对于每个有界可测函数 $m : (-1, 1) \to \mathbb{C}$,

$$|W_n * (m \circ \cos)(\theta)| \leq C_d \|m(\langle \cdot, \cdot \rangle)\|_{MS_p(L_2(\mathbf{S}^d))} \left(\inf_{\delta > 0} f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{|\delta^2 2^n \sin\theta|^{\frac{1}{3}}} \right)$$

对所有 $n \geq 0$ 均成立。特别地，若 $d \geq 2$ 且 $n \geq 1$,

$$|W_n * (m \circ \cos)(\theta)| \leq C_2' \|m(\langle \cdot, \cdot \rangle)\|_{MS_p(L_2(\mathbf{S}^2))} \max(1, n + \log|\sin\theta|)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}.$$

与傅里叶乘子类似，该定理表明，只要 $f_d(\delta)$ 衰减得足够快，这类舒尔乘子就具有连续符号，且其模量有明确表达式。结合定理 1.4，可得定理 1.3。参见推论 6.5 和 6.6。

文章结构。引言之后的第一节介绍关于舒尔乘子、非交换 L_p 空间、Besicovich 构造、Besov 空间和单位分解的若干预备知识。本节主要是回顾已有内容，不过命题 2.4 和 2.8 或许尚未见诸文献。第三节证明定理 1.4。接下来的两节研究欧几里得空间上的径向傅里叶乘子，与算子代数和非交换分析完全无关。第四节首先证明定理 1.7。其证明类似于 Fefferman 球乘子定理的证明，并可高效地分解为若干独立步骤。第五节证明定理 1.9 及其推论。该证明运用了前文的若干结果，但所有步骤都必须同时完成。最后一节证明定理 1.11 及其推论。

致谢。感谢 Javier Parcet 和 Eduardo Tablate 与我进行了许多有益的交流，并给予我鼓励；感谢 Charles Fefferman 在我 2023—2024 年于 IAS 访问期间，就问题 1.6 与我进行了启发性的讨论；也感谢 Jean-Yves Chemin、Petru Mironescu 和 Liding Yao 通过线上或线下交流，使我对函数空间有了更深入的认识。此外，感谢 Mark Lewko 和 Hong Wang 对 Kakeya 猜想提出的有益意见。本研究最初的灵感源于我在 Severo Ochoa 实验室的 ICMAT 访问期间。本研究的部分工作也完成于作者访问 Isaac Newton 研究所期间，该访问属于 2025 年“算子、图、群”项目，并部分获得 Simons 基金会的资助。作者的研究还部分获得 ANR 项目 ANR-24-CE40-3137 的资助。

2. Preliminaries

2.1. 舒尔乘子。若 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，且 $1 \le p < \infty$，我们用 $S_p(\mathcal{H})$（或在可由上下文明确时简写为 S_p ）表示 Schatten p-类，即由有界线性算子 $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 组成的空间，其中 $\mathrm{Tr}((T^*T)^{p/2}) < \infty$。该空间关于范数 $\|T\|_p = \mathrm{Tr}((T^*T)^{p/2})^{\frac{1}{p}}$ 是一个巴拿赫空间，且 $S_2 \cap S_p$ 在 S_p 中总是稠密的。若 $p = \infty$ $S_\infty(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上配备算子范数的紧算子空间。

现在考虑特殊情形：对于测度空间 (X, μ)，$\mathcal{H} = L_2(X, \mu)$。此时，空间 $S_2(L_2(X, \mu))$ 与空间 $L_2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ 等距重合，其中我们将 $a \in L_2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ 视为由 $Af(x) = \int a(x, y) f(y) d\mu(y)$ 定义的算子 A。因此，若 $m \in L_\infty(X \times X, \mu \otimes \mu)$，则将 $A = (a(x, y))$ 映射到 $S_m(A) := (m(x, y)a(x, y))$ 的线性映射是 $S_2(L_2(X, \mu))$ 上的有界算子，称为符号为 m 的 Schur 乘子。若 S_m 将 $S_2 \cap S_p$ 映射到 $S_2 \cap S_p$，且此映射连续延拓（必然唯一）至 S_p，则称 S_m 是S_p-有界的；延拓仍记作 S_m ，其范数记作 $\|m\|_{MS_p}$。

我们将需要以下关于限制的基本而有用的事实。

引理 2.1. 设 X, Y 是局部紧空间，分别配备 σ-有限的 Radon 测度 μ, ν，且 $m\colon X \times X \to \mathbb{C}$ 以及 $f, g\colon Y \to X$ 是博雷尔可测函数。假设以下条件之一成立：(1) m, f, g 连续，且 μ 具有全支集；或 (2) ν 在 f 和 g 下的像相对于 μ 绝对连续。

$$\|m \circ (f \times g)\|_{MS_p(L_2(Y,\nu))} \le \|m\|_{MS_p(L_2(X,\mu))}.$$

证明. 在假设 (1) 下，该引理直接由 [21,定理 1.19] 得出。在假设 (2) 下，这就是 [24, 引理 2.1]。□

2.2. 非交换 L_p 空间与完全有界映射。上文回顾的 Schatten 类的定义，是冯·诺依曼代数的更一般的 L_p-空间构造的一个特例；测度空间上的经典 L_p 空间概念也是如此。这类一般的非交换 L_p 空间或它们之间的映射不会经常出现（仅见于 § 3 和引理 6.3 的证明中），因此我们仅简要回顾一些定义。这些定义针对的是具有正规半有限忠实（nsf）迹的冯·诺依曼代数，而本文中遇到的代数也仅限于此。一般性参考资料可参见例如 [28, 29]。设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个带有 nsf 迹 τ 的冯·诺依曼代数。集合 $\{x \in \mathcal{M} \mid \tau((x^*x)^p) < \infty\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的弱-* 稠密理想，而量 $\|x\|_p := \tau((x^*x)^p)^{\frac{1}{p}}$ 是其上的一个范数。其完备化是 $\mathcal{M}$ 的非交换 L_p 空间，记作 $L_p(\mathcal{M}, \tau)$，或简记为 $L_p(\tau)$。当 $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ 配备通常的迹 Tr 时，我们得到 $S_p(\mathcal{H})$。当 $\mathcal{M} = L_\infty(X, \mu)$，其中 (X, μ) 是配备迹 $\tau(f) = \int f d\mu$ 的半有限测度空间时，我们得到 $L_p(X, \mu)$。

Pisier 发现 [27] $L_p(\mathcal{M}, \tau)$具有自然的算子空间结构，因此可以讨论 $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ 与另一个算子空间之间的完全有界映射。他还证明，对于具有相同 p 的非交换 L_p 空间之间的线性映射 $u\colon L_p(\mathcal{M}, \tau_N) \to L_p(\mathcal{N}, \tau_\mathcal{N})$，其刻画要简单得多：

$$\|u\|_{cb} = \sup_n \|\mathrm{id}_{M_n} \otimes u\|_{L_p(M_n(\mathcal{M}), \mathrm{Tr} \otimes \tau_\mathcal{M}) \to L_p(M_n(\mathcal{N}), \mathrm{Tr} \otimes \tau_\mathcal{N})},$$

其中，$\mathrm{Tr} \otimes \tau_\mathcal{M}(x) = \sum_{i=1}^n \tau_\mathcal{M}(x_{i,\,i})$ 是 $M_n(\mathcal{M})$ 上的自然迹。

2.3. Besicovich 构造及与 Kakeya 猜想常见形式的比较。设 $0 < \delta < 1$。δ 型管 R 在实数集 ^{d} 中，是 $[0,1] \times B(0,\delta) = \{(x,y) \in$ 实数集 $\times$ 实数集 $^{d-1} \mid 0 \le x \le 1, |y| < \delta\}$ 在欧几里得空间实数集^{d}中经仿射等距变换所得的像，并带有一个方向，该方向由向量$\vec{u}(R)$给出，它从 (0, 0) 的像指向 (1, 0) 的像。给定一个 δ 型管 R，记

$$\overline{R} = R + 2\vec{u}(R).$$

在定义 $\overline{R} = R + 2\vec{u}(R)$ 时，精确选取 2 并不重要。本文的所有结果在将其替换为另一个数 > 1 时仍然成立；更一般地，若 $\overline{R} := \overline{R}^{[a,b]}$ 是某个 $a < b$ 的 $[a,b] \times B(0,\delta)$ 的像，结论也成立，只是常数有所不同。

对于每个 $\delta \in (0,1)$，我们在引言中将 $f_d(\delta)$ 定义为满足以下条件的实数 $\varepsilon > 0$ 的下确界：存在一个由 δ-管组成的有限族 $\{R_j\}$，使得这些$\overline{R}_j$ 两两不相交，但

$$\frac{\left|\bigcup_j R_j\right|}{\sum_j |R_j|} \le \varepsilon. \tag{2.1}$$

更一般地，如果要求这些 $\overline{R}_j^{[a,b]}$ 两两不相交，我们就写作 $f_d^{[a,b]}(\delta)$。Keich 关于 Besicovitch 集的构造 [19] 给出

$$\frac{c}{|\log\delta|} \le f_2(\delta) \le \frac{C}{|\log\delta|} \tag{2.2}$$

当 $1 < a < b \le \infty$ 时，对于 $f_d^{[a,b]}$ 也有类似结论，只是 c、C 不同。在更高维的情形下，关于上界所知甚少，除平凡的上界 $f_d \lesssim f_2$ 外。

值得指出的是，要求这些 δ 管状邻域 $\overline{R_j}$ 两两不相交，并非构造 Kakeya 集所必需的条件，但这是 Kakeya 集构造中的一个特点（至少是我所知道的那些构造）。自然的要求是，δ 管状邻域的方向构成一个极大的 δ-网，使得 $\sum_j |R_j| \simeq 1$。从本质上说，这两个条件相似：如果两个 δ 管状邻域的方向夹角为 $\ge C\delta$，且它们相交（若想使 (2.1) 足够小，那么许多不同的管状邻域对都应当如此），那么它们的平移彼此~不相交。但这两个条件并不等价，因此我们可以定义一个变体 $f_d(\delta)$：它是满足 (2.1)、且方向构成 S^{d-1} 中一个极大的 δ-分离子集的 δ 管状邻域族所对应的最小实数 $\varepsilon > 0$。于是很容易看出~，对于 f_d，猜想 1.2 等价于如下猜想：所有 Kakeya 集的上 Minkowski 维数均为 d。更一般地，所有 Kakeya 集的上（下）维数均为 $\ge d - c$，当且仅当

$$\limsup \widetilde{f}_d(\delta)\delta^{-c'} = \infty \quad (\text{respectively } \liminf \widetilde{f}_d(\delta)\delta^{-c'} = \infty)$$

对每个 $c' > c$。

作为这个问题的一名朴素观察者，我很难想象 ~that f_d 会远小于 f_d，因此我预期，当 $\delta \to 0$ 时，$f_d(\delta)$ 的渐近行为确实能够刻画所有 Kakeya 集的维数。特别是，我预期猜想 1.2 能推出所有 Kakeya 集的 Minkowski 上维数为 d；而将猜想 1.2 中的 lim sup 换成 lim inf，则能推出所有 Kakeya 集的 Minkowski 下维数为 d。

我给出一些直接的证据来支持这一观点。设 R、R' 是两个方向相隔 δ 的 δ-管，L、L' 是支撑仿射直线，$\vec{u}$、$\vec{u}' \in \mathbb{S}^{d-1}$ 是支撑方向。那么，要使它们的平移 $\overline{R}^{[a,b]}$ 和 $\overline{R'}^{[a,b]}$ 相交，需要满足两个条件：(1) L 和 L' 必须近似共面，即 $d(L, L') \leq 2\delta$；(2) 在 $L^\delta \cap (L')^\delta$ 中存在一点，其到 R 和 R' 的距离为 $\geq a-1$。当 $d(R, R') \leq C d(\vec{u}, \vec{u}')$ 且 a 足够大时，这种情况不会发生。因此，我们得到

引理 2.2. 任何形如 $\bigcup_{u\in\mathbb{S}^d} p(u) + [0,1]u$ 的 Kakeya 集，其中 $p\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ 是 Lipschitz 函数，都具有 Minkowski 上维数 $\geq d_+$ 和 Minkowski 下维数 $\geq d_-$，其中

$$d_+ = d - \inf_{a>1} \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log f_d^{[a,\infty]}(\delta)}{\log \delta},$$

$$d_- = d - \inf_{a>1} \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log f_d^{[a,\infty]}(\delta)}{\log \delta}.$$

特别地，关于 $f_d^{[a,b]}$ 以及所有 $1 < a < b$ 的猜想 1.2 蕴含每个这样的 Kakeya 集都具有 Minkowski 上维数 d。或许粘性 Kakeya 集（定义见 [32], ）也满足相同结论，甚至所有 Kakeya 集也可能如此，但我们将这个问题留给专家探讨。

2.4. Besov 空间与 Littlewood-Paley 分解。记 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 空间。

设 $w_0, w \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 是非负的 C^∞ 函数，分别具有包含于 $[-2,2]$ 和 $[\frac{1}{2},2]$ 中的紧支撑，并且若对于 $n \geq 1$，令 $w_n(x) = w(|x|/2^n)$，则有

$$\forall x \in \mathbf{R}, w_0(x) + \sum_{n\geq 1} w_n(x) = 1. \tag{2.3}$$

设 W_n 为傅里叶变换是 w_n 的 Schwartz 函数。Besov 空间$B^s_{p,\,q}(\mathbb{R})$ 定义为满足以下条件的温和分布空间：对所有 n， $W_n * f \in L_p(\mathbb{R})$，且

$$(2^{ns}\|W_n * f\|_p)_{n\geq 0} \in \ell_q.$$

当 $q = \infty$ 时，我们将 $b^s_{p,\,\infty}(\mathbb{R})$ 定义为 $B^s_{p,\,\infty}(\mathbb{R})$ 中满足以下条件的子空间：

$$(2^{ns}\|W_n * f\|_p)_{n\geq 0} \in c_0.$$

有界连续函数属于 $b^0_{\infty,\,\infty}(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$，这是显而易见的。下面的例子表明，这一包含关系是严格的。该例由 Brezis 和 Nirenberg 提出；Liding Yao 在 Mathoverflow 上友好地与我分享了这个例子。

例 2.3. $[3$,例 $4]$ 函数 $f(t) = \sin(\log|\log|t||)\varphi(t)$，其中$\varphi$ 是一个支集包含于 $(-1,1)$ 的 C^∞ 函数，且 $\varphi(0) > 0$ 为有界可测，属于$b^0_{\infty,\,\infty}(\mathbb{R})$，但不连续。

在下一个陈述中，$\sigma(L_\infty, L_1)$ 是 L_∞(实数集) 上的弱*拓扑。

命题 2.4. 设 $f \in L_\infty$(实数集)。以下条件等价：

(1) $f \in b^0_{\infty,\infty}$(实数集)，(2) 形如 $f(s_n + \frac{\cdot}{r_n})$ 的序列的所有 $\sigma(L_\infty, L_1)$-极限，

其中 $s_n, r_n \in$ 实数集且 $r_n \to \infty$ 为常数函数。

(3) 函数 $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ 在 Zygmund 意义下是光滑的:

$$\lim_{h\to 0} \sup_x \frac{|F(x+h)+F(x-h)-2F(x)|}{h} = 0. \tag{2.4}$$

证明依赖于以下引理:

引理2.5。由以下函数张成的线性空间

$$\{\frac{1}{h}(\chi_{[x,x+h]} - \chi_{[x,x-h]}) \mid x \in \mathbf{R}, h \in (0,1]\}$$

在 $L_1^0(\mathbf{R})$ 中稠密。

证明。根据 Hahn-Banach 定理，我们只需证明，满足以下条件的 $f \in L_\infty(\mathbf{R})$ 中函数（即 $L_1(\mathbf{R})$ 的对偶）

$$\int \frac{1}{h}(\chi_{[x,x+h]} - \chi_{[x-h,x]})f = 0$$

对每个 $x \in \mathbf{R}$, $h \in (0,1]$ 几乎处处为常值函数。固定$x_0 \in \mathbf{R}$，对于 $n \in \mathbf{N}$，令 $\mathcal{A}_n = \sigma([x_0 + k2^{-n}, x_0 + (k+1)2^{-n}[, k \in \mathbf{Z})$。令 f_n 为 f 关于 $\mathcal{A}_n$的条件期望，因此前述结论表明，对于每个 $n \geq 0$，都有$f_n = f_{n+1}$。由此，根据鞅收敛定理，我们得到 $f_0 = \lim_n f_n = f$ 几乎处处成立。对 $x_0 = 0$ 和$x_0 = \frac{1}{2}$应用此结论可知，这迫使 f在区间 $[k, k+1]$和$[k-1/2, k+1/2]$ 上分别为常值函数，其中 $k \in \mathbf{Z}$；这又迫使 f为常值函数。□

我们还需要以下标准事实，它本质上是 Bernstein 不等式:

引理2.6. 存在一个常数 C，使得对于任意的 $r > 0$ 以及任意函数$g \in L_1(\mathbf{R})$，若其傅里叶变换的支集包含于 $[-2r, -r/2] \cup [r/2, 2r]$,

$$\frac{r}{C}\|g\|_\infty \leq \|g'\|_\infty \leq Cr\|g\|_\infty.$$

证明. 考虑函数 $x \mapsto g(x/r)$，不妨设 $r = 1$。令$\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$，使得 $\hat{\phi}(t) = -2i\pi t$ 且 $\hat{\psi}(t) = \frac{-1}{2i\pi t}$ 在 $[-2,-1/2] \cup [1/2, 2]$ 上成立。函数 g' 和 $\phi * g$ 具有相同的傅里叶变换，因此二者相等；同理，$g = \psi * g'$也成立。因此，引理在 $C = \max(\|\psi\|_1, \|\psi\|_1)$时成立。□

命题 2.4 的证明. 令 $f \in L_\infty(\mathbf{R})$，并令 F 为 f 在 0 处取值为 0 的原函数，且 $F_n = W_n * F$。由引理2.6（取 $g = F_n$ 和 $n \geq 1$）可知，$f \in b^0_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$当且仅当 $\lim_n 2^n\|W_n * F\|_\infty = 0$，而众所周知，这等价于 (2.4)。为完整起见，我们回顾一下证明思路。例如，$\lim_n 2^n\|W_n * F\|_\infty = 0 \implies$(2.4)这一蕴含关系可由推论 2.7] 得出。反过来，写作 $F = \sum_{n\geq 0} F_n$。如引理2.6中所示，利用泰勒展开和 Bernstein 不等式，可得以下界

$$|F_n(x+h)+F_n(x-h)-2F_n(x)| \leq \min(4\|F_n\|_\infty, h^2\|F_n''\|_\infty) \leq \min(4, h^2C^2 2^{2n})\|F_n\|_\infty$$

以获得

$$\sup_x \frac{|F(x+h)+F(x-h)-2F(x)|}{h} \leq \sum_{n\geq 0} \min(\frac{4}{h}, hC^2 2^{2n})\|W_n * F\|_\infty. \tag{2.5}$$

另一方面，对于自然对偶性 $L_1(\mathbf{R})^* = L_\infty(\mathbf{R})$, $L_1^0(\mathbf{R})$是 $L_1(\mathbf{R})$中常数函数的湮灭子。结合 L_∞的单位球的弱-*紧性，这意味着 $L_\infty(\mathbf{R})$中的有界网(h_i)的所有

聚点都是常数，当且仅当对每个 $g \in L_1^0$，$\lim_i \int h_i g = 0$。我们甚至可以令 g 取自 L_1^0 中张成稠密子空间的一个子集，例如引理2.5给出的函数。在这里我们看到，(2)成立当且仅当对每个$x \in \mathbb{R}$ $h \in (0,1]$,

$$\lim_{r\to 0} \sup_y \int f(y + \frac{t}{r}) \frac{1}{h} (\chi_{[x,x+h]}(t) - \chi_{[x,x-h]}(t)) dt = 0,$$

这确实等价于 (2.4)，因为

$$\int f(y + \frac{t}{r}) \frac{1}{h} (\chi_{[x,x+h]}(t) - \chi_{[x,x-h]}(t)) dt = \frac{F(z+h') + F(z-h') - 2F(z)}{h'}$$

其中 $z = y + \frac{x}{r}$ 和 $h' = \frac{h}{r}$。 □

我们以一个稍后将用到的标准事实结束本小节，它推广了经典事实：当 $0 < \alpha < 1$ 时，$B^\alpha_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ 是 Hölder 连续函数空间。

引理 2.7. 设 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测且局部可积，并满足$\sum_n \|W_n * \varphi\|_\infty < \infty$。那么 φ 本质有界且连续，并且对几乎处处的 s, t,

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \lesssim \sum_n \min(2^n |s-t|, 1) \|W_n * \varphi\|_\infty.$$

证明. φ 可分解为 $\sum_n W_n * \varphi$，且对于 $n \geq 0$

$$\begin{aligned} |(W_n * \varphi)(s) - (W_n * \varphi)(t)| &\leq \min(2\|W_n * \varphi\|_\infty, \|(W_n * \varphi)'\|_\infty |s-t|) \\ &\leq \min(2, 2^n C|s-t|) \|W_n * \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

根据 Bernstein 不等式（如引理2.6所示）。 □

2.5. 单位分解论证。若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 是一个局部可积函数，令 Mf 表示 Hardy-Littlewood极大函数

$$Mf(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} f(x-s) ds.$$

我们将需要关于 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的简单不等式:

$$\int |g(s)| f(x+s) ds \leq \int |g'(t)| \int_{-|t|}^{|t|} f(x-s) ds dt \leq 2\|tg'\|_{L_1} Mf(x). \tag{2.6}$$

命题 2.8. 设 $(G_r)_{r>0}$ 是一族函数 $G_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$，满足以下两个条件:

- 对每个 $\lambda > 0$，存在 K_λ，使得 $G_{\lambda r} \leq K_\lambda G_r$ 对每个 $r > 0$ 均成立,
- 存在 $K > 0$，使得 $MG_r \leq KG_r$ 对每个 $r > 0$ 均成立。

那么，对于每个 $h \in C_c^\infty$（实数集）$\setminus \{0\}$，都存在一个常数 $C = C(h, K, K_\lambda)$, 使得以下结论成立：如果 F：实数集 $\to$ 实数集是一个局部可积函数，满足

$$\Big| \int F(x \pm \frac{s}{r}) \widehat{h}(s) ds \Big| \leq G_r(x)$$

对每个 $r > 0$ 和 $x \in$ 实数集。于是对每个 $n \geq 1$,

$$|W_n * F(x)| \leq C G_{2^n}(x)$$

and

$$|(W_n * F)'(x)| \leq 2^n C G_{2^n}(x).$$

我们将在两种不同的情形下应用这个命题。第一种显而易见的情形是 $G_r(x) = A + B/r$。第二种情形是

例 2.9. 对于任意 $A, B > 0$，函数 $G_r(x) = A + \frac{B}{(r|\sin x|)^{\frac{1}{3}}}$ 满足命题 2.8 的假设，其中常数 K_λ 和 K 与A, B无关。

证明. 显然，$G_{\lambda r} \leq K_\lambda G_r$ 在 $K_\lambda = \max(\lambda^{1/3}, \lambda^{-1/3})$ 时成立。要使G_r 满足带常数 K的 $MG_r \leq KG_r$，只需满足 $K \geq 1$，且对于 $f(x) = \frac{1}{|\sin x|^{\frac{1}{3}}}$，有$Mf(x) \leq Kf(x)$。为证明这一点，利用 f的对称性，我们可以假设 $x \in [0, \pi/2]$。若 $0 < t \leq x/2$，则对每个 $s \in [-t, t]$ 都有 $0 < \sin(x/2) \leq \sin(x - s)$，并且

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x-s)ds \leq f(x/2) = O(f(x)).$$

如果 $x/2 < t$，我们有 $[x - t, x + t] \subset [-3t, 3t]$ 所以

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x-s)ds \leq \frac{1}{2t}\int_{-3t}^{3t} f(s)ds = O\Big(1 + t^{-1/3}\Big) = O(f(x)). \qquad \square$$

证明将用到以下引理。

引理2.10. 设 $E \subset C_c^\infty$(实数集) 是一个非零理想（一个向量子空间，满足$fg \in E$对每个 $f \in C_c^\infty$(实数集) 和 $g \in E$均成立）。如果 E 对每个 $\lambda \in$ 实数集 $\setminus \{0\}$ 都在伸缩 $f \mapsto f(\lambda \cdot)$ 下保持不变，那么 E 包含 C_c^∞(实数集 $\setminus \{0\}$)。

证明. E包含一个非零非负函数（即对于某个非零$f \in E$，有 $|f|^2 = \overline{f} f$），因此利用伸缩和平移可知，对于每个紧子集 $K \subset$实数集 $\setminus \{0\}$，E 都包含一个在 K 上严格为正的非负函数。这意味着 E 包含所有支集包含于 K的 C^∞ 函数。□

命题 2.8 的证明。函数集合 E $h \in C_c^\infty$(R)，其中存在一个常数 C 使得

$$\Big|\int F(x \pm \frac{s}{r})\widehat{h}(s)ds\Big| \leq CG_r(x)$$

显然是一个向量空间。根据假设，它非零。由第一个假设，它在以因子 $\lambda > 0$ 伸缩下稳定；由于假设中取 $\pm s/r$，它在以因子 $\lambda < 0$ 伸缩下也稳定。我们声称，它在乘以C_c^∞(R)时也稳定：若 $h \in E$，且 $g \in C_c^\infty$(R) 任意，

$$\begin{aligned}\Big|\int F(x + \frac{s}{r})\widehat{gh}(s)ds\Big| &= \Big|\iint \widehat{g}(t)\widehat{h}(s-t)F(x + \frac{s}{r})dsdt\Big| \\ &\leq \int |\widehat{g}(t)|CG_r(x + \frac{t}{r})dt \leq C'G_r(x).\end{aligned}$$

第一个不等式由假设 $h \in E$ 得出，第二个不等式则由 $C' = 2C\|t\widehat{g}'\|_{L_1}$ 得到（2.6）。根据引理 2.10，我们推得 E 包含 C_c^∞(R*)。特别地，如果 w 是 Besov 空间定义中所述的函数，那么 E 还包含函数 $h_1 : t \mapsto w(|t|)$，以及 $h_2 : t \mapsto tw(|t|)$。这就证明了该引理，因为

$W_n = 2^n\widehat{h_1}(2^n\cdot)$ and $W_n' = -2i\pi 2^{2n}\widehat{h_2}(2^n\cdot)$, so

$$W_n * F(x) = 2^n\int F(x-t)\widehat{h_1}(2^nt)dt = \int F(x-\frac{t}{2^n})\widehat{h_1}(t)dt$$

$$(W_n * F)'(x) = -2i\pi 2^{2n}\int F(x-t)\widehat{h_2}(2^nt)dt = -2i\pi 2^n\int F(x-\frac{t}{2^n})\widehat{h_2}(t)dt.\ \square$$

3. From approximation properties of von Neumann algebras to regularity of Schur multipliers

本节旨在证明定理 1.4。我们先简要回顾理解该定理陈述所需的基本定义。给定一个离散群 Γ，其冯·诺依曼代数 $\mathcal{L}\Gamma$ 是作用在 Γ 上的所有有界左卷积算子构成的空间，也就是满足以下条件的作用在 $\ell_2(\Gamma)$ 上的有界算子 a 的集合：存在 $\xi \in \ell_2(\Gamma)$，使得对每个 $\eta \in \ell_2(\Gamma)$ 都有 $a\eta = \xi * \eta$。它带有一个迹态 $\tau_\Gamma(a) = \langle a\delta_e, \delta_e\rangle$。根据一般构造（§ 2.2），对于 $1 \le p < \infty$，映射 $a \mapsto \|a\|_{L_p(\tau_\Gamma)} := (\tau_\Gamma(a^*a)^p\rangle^{\frac{1}{p}}$ 是 $\mathcal{L}\Gamma$ 上的一个范数，其完备化为 $L_p(\mathcal{L}\Gamma)$，即由 Γ 构成的非交换 L_p 空间。根据 [21, §3.1], 中的讨论，以下是若干个等价定义之一：若存在一个网 T_α，其元素是作用在 $L_p(\mathcal{L}\Gamma)$ 上的有限秩线性映射，并且满足以下条件，则称 $L_p(\mathcal{L}\Gamma)$ 具有算子空间逼近性质（有界逼近性质，OAP）：

$$\lim_\alpha \sup_i \|T_\alpha \otimes \mathrm{id}(x_i) - x_i\|_{L_p(\tau_\Gamma\otimes \mathrm{Tr})} = 0$$

对于每个满足 $\lim_i \|x_i\|_{L_p(\tau_\Gamma\otimes\mathrm{Tr})} = 0$ 的序列 $x_i \in L_p(\mathcal{L}\Gamma) \otimes M_{n_i}$。

定理 1.4 的证明。我们给出证明，着重说明新的部分，并快速略过文献中已有的相同论证。读者可参阅 [21, 10, 8] 了解更多细节。

我们回顾 [21] 中的一个概念：如果存在一个常数 C和一个网 $\psi_\alpha \in A(G)$，使得 $\psi_\alpha \to 1$ 在 G 的紧子集上一致成立，并且符号为 $\psi_\alpha(gh^{-1})$ 的舒尔乘子在 $S_p(L_2(G))$ 上的完全有界范数小于 C，那么称局部紧群在 S_p 上具有由舒尔乘子给出的完全有界逼近性质。此类常数的下确界记为 $\Lambda^{\mathrm{Schur}}_{p\ \mathrm{cb}}, (G)$，约定 $\inf\emptyset = \infty$。这里，$A(G) \subset C_0(G)$ 是 G 的傅里叶代数：

$$A(G) = \{\xi * \eta \mid \xi, \eta \in L_2(G).$$

我们证明，在定理 1.4 的假设下，$\Lambda^{\mathrm{Schur}}_{p\ \mathrm{cb}}(\mathrm{SL}_{2d-1}(\text{实数集})) = \infty$。根据 [21, 9, 10] 的结果（例如参见 [10, 定理 4.7] 的证明），这确实意味着，对每一个 Γ SL_{2d-1}(实数集) 中的格，或李代数包含 $\mathfrak{sl}_{2d-1}$ 的连通单李群中的格，$L_p(\mathcal{L}\Gamma)$ 都不具有有界逼近性质。若 $2d-1 = 3$ 或 $2d-1 \ge 9$，这包括所有秩为 $2d-1$ 的单李群。

记 $G = \mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{R})$ 和 $K = \mathrm{SO}(2d-1)$。对于 $v > 0$，记 $D(v)$ 为 $\in G$ 对角矩阵，其前 $d-1$ 个元素等于 v，一个元素等于 0，最后 $d-1$ 个元素等于 $-v$。设 $\psi\colon G \to \mathbb{C}$ 是一个连续的 K-双不变函数，并且在无穷远处趋于零，使得符号为 (g,h) 的 Schur 乘子 $\mapsto \psi(g^{-1}h)$ 在 $S_p(L_2(G))$ 上有界，且范数为 1。我们证明

$$|\psi(D(v))| \le C\sum_{n\ge 1}\varepsilon(\exp(-(1+c)^n v/C)). \tag{3.1}$$

其中某些正常数 c, C 仅依赖于 d。在此之前，我们先说明为什么 (3.1) 能证明该定理。首先，由于 ε 是非递减的，我们有

$$\varepsilon(\exp(-(1+c)^n v/C)) \leq \frac{1+c}{c} \int_{(1+c)^{n-1}}^{(1+c)^n} \frac{\varepsilon(\exp(-sv/C))}{s} ds.$$

对 n求和，得到

$$|\psi(D(v))| \leq \frac{C+cC}{c} \int_1^\infty \frac{\varepsilon(\exp(-sv/C))}{s} ds = \frac{C+cC}{c} \int_0^{\exp(-v/C)} \frac{\varepsilon(t)}{t|\log t|} dt.$$

最后一个等式是作变量替换 $t = \exp(-sv/C)$。右端有限，并且当 $v \to \infty$ 时趋于 0。特别地，对于每个实数 $A > 1$，存在$g \in G$，使得对于每个在 K 下双边不变、在无穷远处趋于零且 Schur 乘子范数为 1 的连续函数，都有 $|\psi(g)| \leq \frac{1}{A}$。因此，对于每个 $\varphi \in A(G)$，我们有 $\int_{K\times K} \varphi(kgk')dkdk' \leq \frac{1}{A}\|\varphi\|_{MS_p(L_2(G))}$。这意味着 $\Lambda^{\mathrm{Schur}}_{p\ \mathrm{cb}}(G) \geq A$，因此 $\Lambda^{\mathrm{Schur}}_{p\ \mathrm{cb}}(G) = \infty$。

剩下要证明 (3.1)。这基本上就是 [21]（对于$d = 2$）和 [10]（对于 $d > 2$）中的论证所证明的内容。我们先回顾 $d = 2$ 时的论证。令$r \geq s \geq t$，其中 $r + s + t = 0$。考虑函数

$$(k, k') \in K \times K \mapsto \psi(\mathrm{diag}(-t, t/2, t/2)k^{-1}k' \,\mathrm{diag}(-t, t/2, t/2)).$$

由于 $\mathrm{diag}(-t, t/2, t/2)$ 与 SO(2) 对易，它可下降为 SO(3)/SO(2)×SO(3)/SO(2) 上的函数，因此通过同一化 $\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \simeq \mathrm{S}^2$，，我们可以将其视为 $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^2 \to \mathbb{C}$ 上的函数，形式为 $(\xi, \eta) \mapsto \varphi(\langle \xi, \eta\rangle)$。由引理 2.1 可知，它是一个 Schur 乘子，其范数为 ≤ 1，定义在 $S_p(L_2(\mathrm{S}^2))$ 上。沿用这些同一化，简单计算可得，对于 $\varphi(0) = \psi(\mathrm{diag}(-t/2, -t/2, t))$；而对于$\delta = \frac{\sinh(r+t/2)\sinh(-3t/2)}{}$，$\varphi(\delta) = \psi(\mathrm{diag}(r, s, t))$。因此，根据假设，我们得到

$$|\psi(\mathrm{diag}(r, s, t)) - \psi(\mathrm{diag}(-t/2, -t/2, t))| \leq \varepsilon(\delta) \leq \varepsilon(e^{t-s}).$$

第二个不等式是因为 ε 单调不减且 $\delta \leq e^{r+2t} = e^{t-s}$。因此，若 $r' \geq s' \geq t$ 是另一个满足 $r' + s' + t = 0$ 的三元组，

$$|\psi(\mathrm{diag}(r, s, t)) - \psi(\mathrm{diag}(r', s', t))| \leq \varepsilon(e^{t-s}) + \varepsilon(e^{t'-s'}).$$

由对称性，我们还可得

$$|\psi(\mathrm{diag}(r, s, t)) - \psi(\mathrm{diag}(r, s', t'))| \leq \varepsilon(e^{s-r}) + \varepsilon(e^{s'-r'}),$$

将两式合并，并记 $g = \mathrm{diag}(3/2v, -v/2, -v)$，可得

$$\begin{aligned} |\psi(D(v)) - \psi(D(3v/2))| &\leq |\psi(D(v)) - \psi(g)| + |\psi(g) - \psi(D(3v/2))| \\ &\leq 4\varepsilon(\exp(-v/2)). \end{aligned}$$

这就证明了 (3.1)，其中 $c = \frac{1}{2}$ 和 $C = 4$。

当 $d \geq 2$ 时，沿用 [10, 引理 4.3–4.4] 的证明，我们类似地得到

$$\begin{aligned} |\psi(\mathrm{diag}(v_1, \dots, v_{d-1}, u, t, \dots, t)) - \psi(\mathrm{diag}(v_1, \dots, v_i', \dots, v_{d-1}, u' - \delta, t, \dots, t))| \\ \leq \varepsilon(e^{t-u}) + \varepsilon(e^{t-u'}) \end{aligned}$$

当 $(v_1, \dots, v_{d-1}, u, t, \dots, t)$ 和 $(v_1, \dots, v_i', \dots, v_{d-1}, u' - \delta, t, \dots, t)$ 都属于 Weyl室 $\{a_1 \geq \cdots \geq a_{2d-1}, \sum a_i = 0\}$ 时。由 $d - 1$ 连续

应用 $v_i = v$ 和 $v_i' = (1+1/d)v$，我们得到

$$\left|\psi(D(v)) - \psi(\mathrm{diag}(\frac{d+1}{d}v, \dots, \frac{d+1}{d}v, -\frac{d-1}{d}v, -v, \dots, -v)\right| \le 2(d-1)\varepsilon(e^{-v/d})$$

并利用对称性

$$\left|\psi(\mathrm{diag}(\frac{d+1}{d}v, \dots, \frac{d+1}{d}v, -\frac{d-1}{d}v, -v, \dots, -v) - \psi(D(\frac{d+1}{d}v))\right| \le 2(d-1)\varepsilon(e^{-\frac{d+1}{d}v}).$$

将这两个估计结合起来，我们得到

$$|\psi(D(v)) - \psi(D(\frac{d+1}{d}v))| \le 4(d-1)\varepsilon(e^{-v/d}),$$

这就证明了 (3.1)，其中 $c = \frac{1}{d}$ and $C = 4(d-1)$。 □

我们选择遵循 [21]，中的原始论证，该论证运用了一些相当精细的推理（[21, §3]）。或者，我们也可以采用源自 [31, 7, 8] 的更直接论证，并说明可以从 (3.1) 的证明中导出一个显式分离 `，即 Hahn-Banach 式的分离：将恒等算子与 $L_p(\mathcal{L}\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z}))$ 上的有限秩算子分开。事实上，若 $s\colon \mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{R})$ 是一个可测截面，且 m_v 表示 $\mathrm{SO}(2d-1)\times\mathrm{SO}(2d-1)\times\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z})$ 上均匀测度经映射

$$(k, k', \omega) \mapsto (kD(v)k's(\omega))^{-1}s(kD(v)k'\omega) \in \Gamma,$$

于是，映射序列 $T \in CB(L_p(\mathcal{L}\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z}))) \mapsto \sum_\gamma m_v(\gamma)\tau(T(\lambda_\gamma)\lambda_\gamma^*)$ 在 $L_p(\mathcal{L}\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z}))$ 上所有完全有界算子的集合的对偶空间中是柯西序列。其极限将恒等算子（取值为 1）与有限秩算子（取值为 0）区分开来。

4. Qualitative regularity of radial Fourier multipliers

本节致力于证明定理 1.7。证明沿用了 Fefferman 的论证 [13]。

4.1. 化归为平方函数估计。本节作如下假设：$m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个有界可测函数，$d \ge 2$且 $p \ne 2$ 使得 $T_{m(|\cdot|)}$ 在 $L_p(\mathbb{R}^d) \to L_p(\mathbb{R}^d)$ 上有界。我们将傅里叶乘子 $T_{m(|\cdot|)}$ 记为 T，并将其 $L_p(\mathbb{R}^d) \to L_p(\mathbb{R}^d)$-范数记为 $\|T\|$。

L_∞（实数集）的单位球，赋予弱*拓扑 $\sigma(L_\infty(\mathbb{R}), L_1(\mathbb{R}))$，是可度量化且紧的。因此，$L_\infty(\mathbb{R})$ 中的任意有界序列都有一个弱*收敛子序列。这意味着有很多序列 s_n, r_n 满足下一个引理的假设。

引理 4.1. 设 s_n, r_n 是正实数序列，满足

- $\lim_n r_n = +\infty$，且
- $m(s_n \exp(\frac{\cdot}{r_n}))$ 弱*收敛到 $m_\infty \in L_\infty(\mathbb{R})$。

则 m_∞ 在 $L_p(\mathbb{R})$ 上定义了一个范数为 $\le \|T\|$ 的傅里叶乘子。

此外，对于 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，令 U_n 为 $L_p(\mathbb{R}^d)$ 上的线性等距变换，定义为 $U_n f(x) = \exp(i\langle s_n u, x\rangle)(s_n/r_n)^{\frac{d}{p}} f(xs_n/r_n)$。那么 $U_n^{-1} T U_n$ 在弱算子拓扑下收敛到符号为 $m_\infty(\langle\cdot, u\rangle)$ 的傅里叶乘子。

证明。令 f, g 为定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的两个函数，其傅里叶变换 C^∞ 具有紧支撑。特别地，$f \in L_p(\mathbf{R}^d)$ 和 $g \in L_q(\mathbf{R}^d)$，并且所有此类 f (g) 构成 $L_p(\mathbf{R}^d)$（分别为 $L_q(\mathbf{R}^d)$）的稠密子空间。我们将证明

$$\lim_n \int U_n^{-1} T U_n f(x) \overline{g(x)} dx = \int m_\infty(\langle u, \xi \rangle) \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi. \tag{4.1}$$

由于算子序列 $U_n^{-1} T U_n$ 的算子范数均为 $\|T\|$，这也意味着 S（符号为 $m_\infty(\langle \cdot, u \rangle)$ 的傅里叶乘子）在 $L_p($ 实数集 $^d)$ 上有界，且范数为 $\leq \|T\|$（这等价于说，符号为 m_∞ 的傅里叶乘子在 L_p(实数集) 上有界，且范数为 $\leq \|T\|$），并且 S 是 $U_n^{-1} T U_n$ 在弱算子拓扑下的极限。

首先注意，在 Schwartz 空间中，

$$\widehat{U_n f}(\xi) = (s_n / r_n)^{\frac{d}{q}} \widehat{f}(r_n / s_n \xi - r_n u).$$

这意味着，若 T_φ 是符号为 φ 的有界傅里叶乘子，则 $U_n^{-1} T_\varphi U_n$ 是符号为 $\varphi(s_n($ $u + \frac{\cdot}{r_n}))$ 的傅里叶乘子。特别地，$U_n^{-1} T U_n$ 是符号为 $m(|s_n(u + \frac{\cdot}{r_n})|)$ 的傅里叶乘子。因此，

$$\int U_n^{-1} T U_n f(x) \overline{g(x)} dx = \int m(s_n | u + \frac{\xi}{r_n} |) h(\xi) d\xi,$$

其中 $h(\xi) = \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi)$ 是一个紧支撑的 C^∞ 函数。在实数集$^d =$ 实数集$u \oplus u^\perp$ 的分解中，这变为

$$\int_{u^\perp} \int_{\mathbf{R}} m(s_n \sqrt{1 + 2\frac{t}{r_n} + \frac{t^2 + |\eta|^2}{r_n^2}}) h(tu + \eta) dt d\eta.$$

事实上，由于 h 具有紧支撑，我们可以将这些区间限制为 $u^\perp \cap B(R)$ 和 $[-R, R]$，其中 R 为某个固定值。对于每个固定的 η，我们可以进行变量替换 $t \to t'$，其中 $\exp(\frac{t'}{r_n}) = \sqrt{1 + 2\frac{t}{r_n} + \frac{t^2 + |\eta|^2}{r_n^2}}$。这个变量替换不是单射（方程 $e^{2t'/r_n} = 1 + 2\frac{t}{r_n} + \frac{t^2 + |\eta|^2}{r_n^2}$ 在 t 中有两个解），但当 $r_n > R$ 时，将其限制在 $[-R, R]$ 上便成为单射（因为两个解之和为 $-2r_n$）。此外，我们有 $t' = t + o($ $1)$ 和 $\frac{dt'}{dt} = 1 + o(1)$。特别地，利用 h 的连续性，我们有 $h(tu + \eta) dt = (1 + o(1)) h($ $t' u + \eta) dt'$，且该关系一致成立，从而得到

$$\int U_n^{-1} T U_n f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{u^\perp} \int_{\mathbf{R}} m(s_n \exp(\frac{t'}{r_n})) h(t' u + \eta) dt' d\eta + o(1).$$

取极限 $n \to \infty$，并利用 $m(s_n \exp(\frac{\cdot}{r_n}))$ 弱星收敛到 m_∞ 的假设，可得 (4.1) 左侧的极限存在，且等于

$$\int_{u^\perp} \int_{\mathbf{R}} m_\infty(t) h(tu + \eta) dt d\eta.$$

这就是 (4.1) 的右侧。 □

用 M_∞ 表示所有在引理 4.1 中出现的 m_∞，其中 $(s_n)_n$ 和 $(r_n)_n$ 是满足引理 4.1 假设的序列。

例 4.2. 若 m 是球的示性函数，则

$$M_\infty = \{\chi_{(-\infty,a)} \mid -\infty \le a \le \infty\}.$$

更一般地，若 m 是一个在 $(0,\infty)\setminus\{1\}$上连续的函数，且在 1 处的左极限和右极限分别为 m_- 和 m_+，则

$$M_\infty = \{m(s) \mid s \in (0,\infty)\setminus\{1\}\} \cup \{m_-\chi_{(-\infty,a)} + m_+\chi_{(a,\infty)} \mid -\infty \le a \le \infty\}.$$

以下是迈耶引理 [13]的推广。

引理 4.3. 对每个 $m_\infty \in M_\infty$以及每个有限族 $u_1,\dots,u_N \in \mathbb{S}^{d-1}$和$f_1,\dots,f_N \in L_p(\mathbb{R}^d)$,

$$\Big\|\Big(\sum_j |T_{m_\infty(\langle\cdot,u_j\rangle)} f_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p \le \|T\|\Big\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p.$$

证明. 一个经典事实 [14, 定理 5.5.1] 表明， T 的有界性自动蕴含其 ℓ^2-延拓的有界性：对于任意有限序列 $g_1,\dots,g_N \in L_p(\mathbb{R}^d)$,

$$\Big\|\Big(\sum_j |Tg_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p \le \|T\|\Big\|\Big(\sum_j |g_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p. \tag{4.2}$$

设 (r_n)、(s_n) 如引理 4.1 中所述。令 $U_{n,j}$ 为引理 4.1 中针对该s_n, r_n 但对应向量 u_j 的等距变换。我们将把 (4.2) 应用于 $g_j = U_{n,j} f_j$。重要的是，对于 j的不同取值，算子$U_{n,j}$ 之间仅相差一个相位乘法。因此，

$$\Big(\sum_j |g_j|^2\Big)^{\frac12}(x) = \Big(\frac{s_n}{r_n}\Big)^{\frac{d}{p}} \Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{\frac12}\Big(\frac{s_n}{r_n}x\Big),$$

并且 (4.2) 的右侧等于 $\big\|\big(\sum_j |f_j|^2\big)^{\frac12}\big\|_p$。出于同样的原因，(4.2) 的左侧等于

$$\Big\|\Big(\sum_j |U_{n,j}^{-1} T U_{n,j} f_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p.$$

引理 4.1 告诉我们，$U_n^{-1}{}_{,\ j} T U_{n,\ j} f_j$在弱算子拓扑下收敛于$T_{m_\infty(\langle\cdot,\ u_j\rangle)} f_j$，其中 $n \to \infty$。由范数关于弱拓扑的半连续性可知，引理得证。□

4.2. 探究方向平方不等式。下面的定理刻画了满足引理 4.3 结论的函数。

定理 4.4. 设 $m \in L_\infty$(实数集)。假设存在 $p > 2$ 和 $d \ge 2$，使得对每个有限族 u_1, ..., $u_N \in \mathbb{S}^{d-1}$ 以及 f_1, ..., $f_N \in L_p$(实数集^d),

$$\Big\|\Big(\sum_j |T_{m(\langle\cdot,u_j\rangle)} f_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p \le \Big\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p. \tag{4.3}$$

于是存在 $c \in \mathbb{C}$，使得 $m = c$ 几乎处处成立。

证明依赖于两个引理。第一个很简单，也可由 [26] 得出。

引理 4.5. 若 $m \in L_\infty$(实数集) 满足：对于每个闭区间 $I \subset$ 实数集以及每个支集包含于 I 的 $f \in L_2$(实数集)， $T_m f$ 的支集包含于 I，则 m 几乎处处为常数。

证明. 假设 T_m 在 $B(L_2(\text{实数集}))$ 中与区间示性函数的乘法算子可交换。因此，它与所有乘法算子都可交换（由区间示性函数生成的冯·诺依曼代数就是整个 $L_\infty(\text{实数集})$）。特别地，对每个 $a \in \text{实数集}$， T_m 都与乘以 $e^{ia\cdot}$ 的算子可交换；也就是说，对每个 a， $m(\cdot - a) = m$ 几乎处处成立。这意味着 m 几乎处处为常数。□

在第二个引理中， m 与定理 4.4 中相同。

引理 4.6. 设 f 是一个支集包含于区间 $I = [s,t]$ 的 C^∞ 函数。设 $I_\pm$ 区间 $I \pm 2$（$t-s$）。那么

$$\int_{I_-} |T_m f|^2 = 0 \text{ and } \int_{I_-} |T_m f|^2 = 0.$$

这两个引理推出定理 4.4：事实上，若 f 是一个支集包含于区间 $I = [s,t]$ 的 C^∞ 函数，那么对于任意 $s' < s$，它也支集包含于区间 $I' = [s',t]$，因此引理 4.6 的第一个结论表明，对每个 $s' < s$，都有 $\int_{I'_+} |T_m f|^2 = 0$，也就是说 $\int_{2t-s}^\infty |T_m f|^2 = 0$。此外，将 f 写成有限个支集包含于 $[s,t]$ 的大小为 $\leq \varepsilon$ 的子区间上的 C^∞ 函数之和，可得 $\int_{t+\varepsilon}^\infty |T_m f|^2 = 0$，因此 $\int_t^\infty |T_m f|^2 = 0$。类似地，考察 $t' > t$ 对应的区间 $[s,t']$，引理 4.6 的第二个结论表明 $\int_{-\infty}^s |T_m f|^2 = 0$。因此 $T_m f$ 的支集包含于 $[s,t]$。但这对每个 $s < t$ 和每个 f 都成立。引理 4.5 表明 m 是一个常数。

引理 4.6 的证明。利用 $L_p(\mathbf{R}^d)$ 的伸缩对称性，我们可以假设 $t - s = 1$。我们需要证明 $\int_{s+2}^{s+3} |T_m|^2 = 0$ 和 $\int_{s-2}^{s-1} |T_m f|^2 = 0$。我们着重证明第二个不等式。另一个不等式可用类似方法证明，留给读者完成。[1]

证明依赖于 Besicovich 构造（§ 2.3）。设 $\varepsilon > 0$。根据 Besicovich 构造，存在满足 (2.1) 的 $\delta > 0$ 和 δ-管 $R_1, \dots, R_N$。也就是说， $E = \bigcup_{i=1}^N R_i$ 的测度为 $\leq \varepsilon \sum_i |R_i|$。记 $\vec{u}_j = \vec{u}(R_j)$，并选取线性等距变换 $x \in \mathbf{R}^d \mapsto (\langle x, \vec{u}_j \rangle, P_j x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1}$。存在 $a_j \in \mathbf{R}$ $b_j \in \mathbf{R}^{d-1}$，使得

$$R_j = \Big\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, \vec{u}_j \rangle \in a_j + I \text{ and } |P_j x - b_j| \leq \delta \Big\}$$

$$\overline{R_j} = \Big\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, \vec{u}_j \rangle \in a_j + 2 + I \text{ and } |P_j x - b_j| \leq \delta \Big\}.$$

定义 f_j：实数集^d →实数集，使得

$$f_j(x) = f\big(\langle x, \vec{u}_j \rangle - a_j - 2\big) h_j(P_j x),$$

其中 h_j 是 $B(b_j, \delta)$的示性函数。于是 f_j 支集包含于 $\overline{R_j}$，这些集合两两不相交，因此

$$\Big\| \big(\sum_j |f_j|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p = \big(\sum_j \|f_j\|_p^p \big)^{\frac{1}{p}} = \big(\sum_j |R_j| \big)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

另一方面，如果 $m_j(x) = m(\langle x, u_j \rangle)$，由于在分解 $\mathbf{R}^d = \mathbf{R} u_j \oplus \mathbf{R}^{d-1}$, f_j 中， $f_j(\cdot - a_j - 2) \otimes h_j$ 和 $m_j = m \otimes 1$ 分解为，我们有 $T_{m_j} f_j(x) =$

[1]唯一的区别是，我们定义 $m_j(x) = m(\langle x, -u_j \rangle)$，而不是 $m(\langle x, u_j \rangle)$。

$(T_m f)(\langle x, u_j\rangle - a_j - 2)h_j(P_j x)$。因此，我们可以对其进行界定

$$\begin{aligned}\int_E \sum_j |T_{m_j} f_j|^2 &\geq \sum_j \int_{R_j} |T_m(\langle x, u_j\rangle - a_j - 2)|^2 |h_j(P_j x)|^2 dx \\ &= \sum_j |R_j| \int_{s-2}^{s-1} |T_m f|^2.\end{aligned}$$

根据 H¨older 不等式

$$\begin{aligned}\Big(\int_E \sum_j |T_{m_j} f_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq |E|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \Big\| \big(\sum_j |T_{m_j} f_j|^2\big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \big(\sum_j |R_j|\big)^{\frac{1}{2}} \|f\|_p.\end{aligned}$$

综合以上各点可得

$$\Big(\int_{I_-} |T_m f|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

对 R_1、.....、 R_N 的所有取值取下确界，我们可以在此不等式中用 $f_d(\delta)$ 替换 ε；又由于 $\lim_{\delta\to 0} f_d(\delta) = 0$，故得到所需的 $\Big(\int_{I_-} |T_m f|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = 0$。□

4.3. 结论。

定理 1.7 的证明。记 $f = m \circ \exp$。令 M_∞ 表示序列 $m(s_n e^{\frac{t}{r_n}}) = f(\log(s_n) + \frac{\cdot}{r_n})$ 对于 $s_n \in (0,\infty)$ 和 $r_n \to 0$ 的所有 $\sigma(L_\infty(\mathbb{R}), L_1(\mathbb{R}))$-极限。所有 $m_\infty \in M_\infty$ 都满足引理 4.3 的结论，因此根据定理 4.4 几乎处处为常数。命题 2.4 蕴含 $f \in b^0_{\infty,\infty}$，或等价地， F 是光滑的。□

5. Quantitative regularity of radial Fourier multipliers

本节旨在证明定理 1.9 及其推论。证明有时会使用并沿用上一节中的论证，有时则会偏离这些论证。

定理 1.9 可由以下引理轻易推出。

引理 5.1. 存在一个非零的 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，以及一个常数 C_d，使得对于每个 $1 \leq p \leq \infty$、每个定理 1.9 中所述的 φ、每个 $r \in \mathbb{R}^*$ 和 $\delta \in (0,1)$，

$$\Big|\int_{\mathbf{R}} \varphi(x/r)\widehat{h}(x)dx\Big| \leq C_d \|T\|_{L_p\to L_p}\big(f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{|r|\delta^2}\big).$$

假设引理 5.1 成立，证明定理 1.9。定理的第一部分是将命题 2.8 应用于

$$G_r(x) = C_d \|T\|_{L_p\to L_p}\big(f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{|r|\delta^2}\big).$$

该命题的假设显然易于验证： G_r 是一个常数函数，因此 $MG_r = G_r$ 显然成立，而 $G_{\lambda r} \leq \max(\lambda, 1/\lambda)G_r$ 则显而易见。

第二部分依据 Keich 构造 Besicovich 集的方法（2.2）以及下文的引理 5.2。最后一个结论可由标准的 Littlewood-Paley 理论（2.5）推出。□

引理 5.2. 对任意 α、$\beta > 0$ 和 $A \geq 1$,

$$\inf_{0<\delta} \delta^{\alpha} + \frac{1}{A\delta^{\beta}} \leq 2A^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

$$\inf_{0<\delta<1} |\log \delta|^{-\alpha} + \frac{1}{A\delta^{\beta}} \leq C(\alpha,\beta)(\log(1+A))^{-\alpha}.$$

证明。对于第一个不等式，取 $\delta = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}$，于是两项 δ^{α} 和 $\frac{1}{A\delta^{\beta}}$ 都等于 $A^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$。

对于第二个不等式，取 $\delta = \min(A^{-\frac{1}{\beta}}\log(1+A)^{\frac{\alpha}{\beta}}, 1/2)$。两项都是 $O(\log(1+A)^{-\alpha})$。□

5.1. 引理 5.1 的证明。我们可以进行归一化，使得 $m \ \|T\|_{L_p \to L_p} = 1$。我们还可以假设 $p < 2$，否则就将 p 替换为其共轭指数 $q = \frac{p}{p-1}$。最后，我们可以假设 $|r| \geq 1$，因为否则根据以下界，对于任意 h，该引理显然成立

$$\Big| \int_{\mathbf{R}} \varphi(x/r)\widehat{h}(x)dx \Big| \leq \|\varphi\|_{\infty}\|\widehat{h}\|_1.$$

设 $f, g \in C_c^{\infty}$在实数集上支集分别包含于 $(-1, 0)$ 和 $(1, 2)$。我们将证明该引理，其中 $h = f * g^*$，且 $g^*(x) = g(-x)$。

设 $\varepsilon > 0$ 和 $\{R_j\}$ 是一族 δ-管，使得 $\overline{R_j}$ 两两不相交，并满足（2.1）。记作 $\vec{u}_j = \vec{u}(R_j)$，并选取一个线性等距 $x \in \mathrm{R}^d \mapsto (\langle x, \vec{u}_j\rangle, P_j x) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{d-1}$。存在 $a_j \in \mathrm{R}$ $b_j \in \mathrm{R}^{d-1}$ 使得

$$R_j = \Big\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, \vec{u}_j\rangle \in [a_j - 1, a_j] \text{ and } |P_j x - b_j| \leq \delta \Big\}$$

$$\overline{R_j} = \Big\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, \vec{u}_j\rangle \in [a_j + 1, a_j + 2] \text{ and } |P_j x - b_j| \leq \delta \Big\}.$$

固定 $\rho \in C_c^{\infty}(\mathrm{R}^{d-1})$，其支集包含于 $B(0,1)$ 中，并且满足 $\|\rho\|_2 = 1$。定义 $f_j, g_j : \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}$ 为

$$f_j(x) = \delta^{-\frac{d-1}{p}} f\big(\langle x, \vec{u}_j\rangle - a_j\big)\rho\big((P_j x - b_j)/\delta\big), \tag{5.1}$$

$$g_j(x) = \delta^{-\frac{d-1}{p}} g\big(\langle x, \vec{u}_j\rangle - a_j\big)\rho\big((P_j x - b_j)/\delta\big), \tag{5.2}$$

使得 f_j 的支集包含于 R_j 中，g_j 的支集包含于 $\overline{R_j}$ 中，$\|f_j\|_p = \|f\|_p\|\rho\|_p$ 且 $\|g_j\|_q = \|g\|_q\|\rho\|_q$。最后，令 $\varphi_j(x) = m(u_j + \frac{1}{r}x)$，并令 T_j 为符号为 φ_j 的傅里叶乘子。所有这些定义都满足：$\int (T_j f_j)\overline{g_j}$ 不依赖于 j，并且满足以下条件（回忆 $h = f * g^*$）。

引理 5.3. 存在一个常数 $C = C(d, \rho, f, g)$，使得对于每个 j 和 $|r| \geq 1$,

$$\Big| \int_{\mathbf{R}^d} (T_j f_j)\overline{g_j} - \int_{\mathbf{R}} \varphi(\cdot/r)\widehat{h} \Big| \leq C\frac{1}{|r|\delta^2}.$$

注 5.4. 该陈述不需要对 f、g 的支集作任何假设，且常数的形式为

$$C(d,\rho,f,g) = C(d,\rho)\Big(\frac{1}{r\delta^2}\|\widehat{h}'\|_1 + \frac{1}{r}\|x^2\widehat{h}'\|_1\Big).$$

在证明这个引理之前，让我们先完成引理 5.1 的证明。我们需要以下事实，它本质上是 [13] 中的迈耶引理。

引理 5.5. 设 $r \neq 0$, $N \in \mathbb{N}$ 和 $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{S}^{d-1}$。令 T_j 表示符号为 $x \mapsto m(|u_j + \frac{1}{r}x|)$ 的傅里叶乘子。那么对每个 $f_1, \dots, f_N \in L_p$(实数集^d),

$$\Big\|\big(\sum_j |T_j f_j|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \leq \Big\|\big(\sum_j |f_j|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p.$$

证明。引理 4.1 和引理 4.3 的证明中的论证得出了这一结论。 □

接下来，我们利用 δ-管满足 (2.1) 这一事实，如下所示。

引理 5.6。令 c 表示实数集 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中单位球的体积，则

$$\Big\|(\sum_{j=1}^N |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \Big\|(\sum_{j=1}^N |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_q \leq (c\varepsilon)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} N \|f\|_2 \|g\|_q \|\rho\|_q.$$

证明。由于 g_j 的支集包含于 $\overline{R_j}$，且 $\overline{R_j}$ 两两不相交，因此我们有

$$\Big\|(\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_q = (\sum_j \|g_j\|_q^q)^{\frac{1}{q}} = N^{\frac{1}{q}} \|g\|_q \|\rho\|_q.$$

由 H¨older 不等式，以及 $\sum_j |f_j|^2$ 的支集包含于 $\bigcup_j R_j$ 内且其测度为 $\leq c\varepsilon N\delta^{d-1}$这一事实，我们有

$$\Big\|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \leq (c\varepsilon N\delta^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \Big\|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_2 = (c\varepsilon)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{p}} \|f\|_2.$$

引理得证。 □

由柯西–施瓦茨不等式和 H¨older 不等式，我们可以得到如下界

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_j \int (T_j f_j)\overline{g_j}\Big| &\leq \int (\sum_j |T_j f_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big\|(\sum_j |T_j f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \Big\|(\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_q \\
&\leq \Big\|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \Big\|(\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_q \\
&\leq N(c\varepsilon)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|f\|_2 \|g\|_q \|\rho\|_q.
\end{aligned}$$

最后两行分别是引理 5.5 和引理 5.6。结合引理 5.3，可得

$$\Big|\int \varphi(x/r)\widehat{h}(x)dx\Big| \lesssim \frac{1}{|r|\delta^2} + \varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

剩下只需对所有 R_i 取下确界，即可得到引理 5.1 的结论。

剩下需要证明引理 5.3。这个证明是对引理 4.1 中简洁论证的展开。

引理 5.3 的证明。对傅里叶变换的积分公式作变量替换，可得

$$\widehat{f_j}(x) = \delta^{\frac{d-1}{q}} e^{-2i\pi(a_j\langle x,\vec{u}_j\rangle + \langle P_j x, b_j\rangle)} \widehat{f}(\langle x, \vec{u}_j\rangle)\widehat{\rho}(\delta P_j x)$$

and

$$\widehat{g_j}(x) = \delta^{\frac{d-1}{p}} e^{-2i\pi(a_j\langle x,\vec{u}_j\rangle + \langle P_j x, b_j\rangle)} \widehat{g}(\langle x, \vec{u}_j\rangle)\widehat{\rho}(\delta P_j x).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此，由于 h 的定义满足 $h = f\overline{\widehat{g}}$，

$$\widehat{f_j}(x)\overline{\widehat{g_j}(x)} = \delta^{d-1}\widehat{h}(\langle x, \vec{u}_j\rangle)|\widehat{\rho}|^2(\delta P_j x). \tag{5.3}$$

根据傅里叶乘子 T_j 的定义，我们因此有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d}(T_j f_j)\overline{g_j} &= \int_{\mathbf{R}^d} m(|u_j + \frac{1}{r}x|)\widehat{f_j}(x)\overline{\widehat{g_j}}(x)dx \\ &= \delta^{d-1}\iint m(\sqrt{(1+\frac{x}{r})^2 + \frac{|y|^2}{r^2}})\widehat{h}(x)|\widehat{\rho}(\delta y)|^2 dxdy \\ &= \iint m(\sqrt{(1+\frac{x}{r})^2 + \frac{|y|^2}{\delta^2 r^2}})\widehat{h}(x)|\widehat{\rho}(y)|^2 dxdy.\end{aligned}$$

首先假设 $r \geq 1$。我们处于引理 5.7 的情形，其中 $F := \widehat{h}$, $G := |\widehat{\rho}|^2$,$r_1 = r$, $r_2 = \delta r$, 因此 $\frac{r_1}{r_2^2} = \frac{1}{\delta^2 r}$。由于函数 F 和 G 是依赖于 d, f, g, ρ 的施瓦茨函数，我们可直接应用引理 5.7 得出引理 5.3。若 $r \leq -1$，我们可以作变量替换 $x \to -x$ ，得到

$$\int_{\mathbf{R}^d}(T_j f_j)\overline{g_j} = \iint m(\sqrt{(1+\frac{x}{|r|})^2 + \frac{|y|^2}{\delta^2 r^2}})\widehat{h}(-x)|\widehat{\rho}(y)|^2 dxdy$$

结论以同样的方式得出。 □

要完成引理 5.1 的证明，还需证明下面这个前面用到的引理。

引理 5.7。设 $F \in \mathcal{S}$(实数集)， $G \in \mathcal{S}$(实数集$^{d-1}$)， $m \in L_\infty$(实数集) 的范数为 1，且 $r_1 \geq r_2 \geq 1$。令

$$\begin{aligned}A &= \iint F(x)G(y)m\Big(\sqrt{(1+\frac{x}{r_1})^2 + \frac{|y|^2}{r_2^2}}\Big)dxdy \\ B &= \Big(\int F(x)m(\exp(\frac{x}{r_1}))dx\Big)\Big(\int G(y)dy\Big)\end{aligned}$$

Then

$$|A - B| \lesssim \|(1+|y|^2)G\|_1\Big(\frac{r_1}{r_2^2}\|F'\|_1 + \frac{1}{r_1}\|x^2 F'\|_1\Big)$$

证明。证明思路很直接：在 $r_1 = o(r_2^2)$ 且 $r_1 \to \infty$ 与 x、y 有界的范围内， $\sqrt{(}1 + \frac{x}{r_1})^2 + \frac{y^2}{r_2^2}$ 是 $\exp(\frac{x}{r_1} + o(\frac{1}{r_1}))$。当然，由于我们对 m 没有任何正则性假设，无法直接在这些坐标中界定 $A - B$，因此我们进行变量替换，以便利用 F 的正则性。

现在来看细节。为方便起见，我们将 G 规范化，使得 $\|(1+|y|^2)G\|_1 = 1$。令$\alpha \leq \frac{1}{2}$，其精确值将在证明过程中确定。我们隐式地确保所写出的每一个 $O(\cdot)$都与 α无关。考虑

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{d-1} \mid |x| \leq \alpha r_1, |y| \leq r_2\Big\}$$

and

$$A_1 := \iint_\Omega F(x)G(y)m\Big(\sqrt{(1+\frac{x}{r_1})^2 + \frac{|y|^2}{r_2^2}}\Big)dxdy.$$

我们有

$$\begin{aligned}|A-A_1| &\le \iint_{\mathbf{R}^d\setminus\Omega}|F(x)G(y)|dxdy\\ &\le \|F\|_{L_1([-\alpha r_1,\alpha r_1]^c)}\|G\|_1+\|F\|_1\|G\|_{L_1(B(r_2)^c)},\end{aligned}$$

我们只需将其界定为（回忆 $\|(1+|y|^2)G\|_1=1$）：

$$|A-A_1|\le \frac{1}{\alpha r_1}\|xF\|_1+\frac{1}{r_2^2}\|F\|_1. \tag{5.4}$$

考虑变量代换 $(x,y)\in\Omega\mapsto(u,y)$，其中 $u=u(x,y)\in\mathbf{R}$ 由 $e^{\frac{u}{r_1}}=\sqrt{(1+\frac{x}{r_1})^2+\frac{|y|^2}{r_2^2}}$ 刻画。它在 Ω 上是单射，其像为

$$\Sigma=\Big\{(u,y)\in\mathbf{R}^d\mid |y|\le r_2,\exp(\frac{2u}{r_1})-\frac{|y|^2}{r_2^2}\in[(1-\alpha)^2,(1+\alpha)^2]\Big\}$$

其逆映射为 $(u,y)\mapsto(x(u,y),y)$，其中 $x(u,y)=r_1\sqrt{\exp(\frac{2u}{r_1})-\frac{|y|^2}{r_2^2}}-r_1$。注意，后续将用到：对于 $(x,y)\in\Omega$，$e^{\frac{2u}{r_1}}\in[(1-\alpha)^2,(1+\alpha)^2+1]\subset[1/4,3]$，因此 $\frac{u}{r_1}=O(e^{\frac{2u}{r_1}}-1)$，且

$$|u(x,y)|=O(|x|+\frac{|y|^2r_1}{r_2^2}). \tag{5.5}$$

对积分进行变量代换后，我们得到

$$A_1=\iint_\Sigma F(x(u,y))G(y)m(\exp(\frac{u}{r_1}))\partial_u x(u,y)dudy.$$

我们将看到，A_1 接近于

$$B_1:=\iint_\Sigma F(u)G(y)m(\exp(\frac{u}{r_1}))dudy.$$

首先注意到，$\partial_u x(u,y)=\exp(2u/r_1)\sqrt{\exp(2u/r_1)-|y|^2/r_2^2}$ 接近于 1：

$$\Big|\partial_u x(u,y)-1\Big|=O\Big(\frac{|u|}{r_1}+\frac{|y|^2}{r_2^2}\Big)\le C\partial_u x(u,y)\Big(\frac{|x|}{r_1}+\frac{|y|^2}{r_2^2}\Big).$$

第二个不等式是 (5.5)，因为在 Σ 上，$\partial_u x(u,x)$ 有正的下界。由同样的变量代换可得

$$A_2:=\iint_\Sigma F(x(u,y))G(y)m(\exp(\frac{u}{r_1}))dudy$$

满足

$$|A_1-A_2|\le C\iint_\Omega|F(x)G(y)|\Big(\frac{|x|}{r_1}+\frac{|y|^2}{r_2^2}\Big)dxdy\le C\Big(\frac{1}{r_1}\|xF\|_1+\frac{1}{r_2^2}\|F\|_1\Big). \tag{5.6}$$

然后注意到，在 Σ 上，$x(u,y)$ 接近于 u：

$$|x(u,y)-u|=O\Big(\frac{u^2}{r_1}+\frac{r_1|y|^2}{r_2^2}\Big).$$

因此我们可以对其进行估计

$$|F(x(u,y))-F(u)|\le\int_{-C'\left(\frac{u^2}{r_1}+\frac{r_1|y|^2}{r_2^2}\right)}^{C'\left(\frac{u^2}{r_1}+\frac{r_1|y|^2}{r_2^2}\right)}|F'(u+s)|,$$

经过积分并进行变量替换 $s \mapsto v = u + s$ 后，得到

$$|A_2 - B_1| \leq \iint_\Sigma \int |F'(v)G(y)| 1_{|v-u| \leq C'\left(\frac{u^2}{r_1} + \frac{r_1|y|^2}{r_2^2}\right)} dvdudy.$$

设 $\beta \leq 1$ 为一个稍后确定的参数。将 Σ 划分为 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$，其中$\Sigma_1 = \{(u,y) \in \Sigma \mid \beta|u|/r_1 \leq |y|/r_2\}$ 且 $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$。于是我们有

$$|A_1 - B_1| \leq \iint_{\Sigma_1} \int |F'(v)G(y)| 1_{|v-u| \leq C'(1+\beta^{-2})\frac{r_1|y|^2}{r_2^2}} dvdudy + \iint_{\Sigma_2} \int |F'(v)G(y)| 1_{|v-u| \leq 2C'\frac{u^2}{r_1}} dvdudy.$$

第一个积分显然有如下上界：

$$\int_{y \in \mathbf{R}^d} \int_{v \in \mathbf{R}} |F'(v)G(y)| 2C'(1+\beta^{-2}) \frac{r_1|y|^2}{r_2^2} dvdy = 2C'(1+\beta^{-2}) \frac{r_1}{r_2^2} \|F'\|_1 \|G\|_1.$$

对于第二个区间，我们需要 α 和 β 足够小。事实上，在 Σ_2 上，由 (5.5) 以及 $|u|/r_1 = O(1)$这一事实可知，

$$\frac{u}{r_1} = O(\alpha + \beta),$$

因此，如果 α和 β选得足够小，那么在 Σ_2上有 $2C'\frac{|u|}{r_1} \leq \frac{1}{2}$。这意味着，若 $|v-u| \leq 2C'\frac{u^2}{r_1}$，则有 $|v-u| \leq |u|/2$，从而 $|u| \leq 2|v|$，最终$|v-u| \leq 8C'\frac{v^2}{r_1}$，因此第二个积分小于

$$\int_{\mathbf{R}^{d-1}} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |F'(v)G(y)| 1_{|v-u| \leq 8C'\frac{v^2}{r_1}} dvdudy = \frac{16C'}{r_1} \|G\|_1 \|v^2 F'\|_1.$$

结合这两个估计，我们得到（此时 x 为积分变量）

$$|A_2 - B_1| \lesssim \frac{r_1}{r_2^2}\|F'\|_1 + \frac{1}{r_1}\|x^2 F'\|_1. \tag{5.7}$$

最后，我们来对 $|B - B_1|$进行估计。同样，我们需要 α 足够小，使其满足 $e^{2\alpha^2} \leq (1+\alpha)^2$ 和 $e^{-2\alpha^2} - \alpha \geq (1-\alpha)^2$。事实上，此时每个满足$|u| \leq \alpha^2 r_1$且 $\frac{|y|^2}{r_2^2} \leq \alpha$的 (u,y) 都满足 $e^{\frac{2u}{r_1}} - \frac{|y|^2}{r_2^2} \in [e^{-2\alpha^2} - \alpha, e^{2\alpha^2}] \subset [(1-\alpha)^2, (1+\alpha)^2]$,，也就是说 $(u,y) \in \Sigma$。由逆否命题可知，一对 $(u,y) \notin \Sigma$ 必须满足 $|u| > \alpha^2 r_1$或$|y| \geq r_2\sqrt{\alpha}$。因此，我们有

$$|B - B_1| \leq \|F\|_{L_1([-\alpha^2 r_1, \alpha^2 r_1]^c)} \|G\|_1 + \|F\|_1 \|G\|_{L_1([-r_2\sqrt{\alpha}, r_2\sqrt{\alpha}]^c)},$$

我们只需将其估计为

$$|B - B_1| \leq \frac{1}{\alpha^2 r_1}\|xF\|_1 + \frac{1}{\alpha r_2^2}\|F\|_1. \tag{5.8}$$

综合所有界，我们可以选取 α，使得所有界 (5.4)、(5.6)、(5.7) 和 (5.8) 均成立。这就证明了

$$|A - B| \lesssim \frac{1}{r_1}\|xF\|_1 + \frac{1}{r_2^2}\|F\|_1 + \frac{r_1}{r_2^2}\|F'\|_1 + \frac{1}{r_1}\|x^2 F'\|_1.$$

要得到引理的结论，只需使用以下对实数集上的施瓦茨函数和实数 $r_2 \geq 1$ 成立的一般不等式：

$$\|xF\|_1 \leq \frac{1}{2}\|x^2 F'\|_1, \tag{5.9}$$

$$\frac{1}{r_2^2}\|F\|_1 \le \frac{r_1}{r_2^2}\|F'\|_1 + \frac{1}{r_1}\|x^2F'\|_1. \tag{5.10}$$

为证明 (5.9)，计算

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}|xF(x)|dx &= \int_{-\infty}^{0}|x|\Big|\int_{-\infty}^{x}F'(t)dt\Big|dx\\ &\le \int_{-\infty}^{0}|F'(t)|\Big|\int_{t}^{0}|x|dx\Big|dt = \frac{1\ }{2}\int_{-\infty}^{0}|F'(t)|t^2dt.\end{aligned}$$

类似地，$\int_0^\infty |xF(x)|dx \le \int_0^\infty t^2|F'(t)|dt$。对于 (5.10)，我们可以从相同的证明入手，得到

$$\|F\|_1 \le \|xF'\|_1,$$

由不等式 $|x| \le r_1 + x^2/r_1$ 可得 $\|F\|_1 \le r_1\|F'\|_1 + \frac{1}{r_1}\|x^2F'\|_1$。这就推出了 (5.10)（回想一下 $r_2 \ge 1$）。□

注 5.8。假设 $1 \le p < 2$，并令 $q = \frac{p}{p-1}$ 为共轭指数。更确切地说，证明表明，只要 $h = f * g^*$，其中 f 支集包含于 $[0,1]$，且 g支集包含于 $[a,b]$，引理 5.1 的结论就成立，其中

$$C_d(h) \lesssim_d \frac{1}{r\delta^2}\|\widehat{h}'\|_1 + \frac{1}{r}\|x^2\widehat{h}'\|_1 + f_d^{[a,b]}(\delta)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|f\|_2\|g\|_q.$$

5.2. 推论。以下是推论 1.10 的精确表述。指数 $1\ 4$ 并非最优。

推论 5.9. 设 φ ： 实数集 $\to$ 实数集，使得以 $m(\xi) = \varphi(\log|\xi|)$ 为符号的乘子在 L_p(实数集^d) 上有界。则对几乎每个 $s,\ t \in$ 实数集，

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \lesssim \|T_m\|_p\left(\int_0^{|s-t|^{1/4}}\frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta}d\delta + |s-t|^{\frac{1}{4}}\right).$$

证明。不失一般性，我们可以假设 $\|T_m\| = 1$。记

$$c_n = \inf_{\delta\in(0,1)}\left(f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{2^n\delta^2}\right).$$

取 $\delta \in [2^{-(n+1)/3}, 2^{-n/3}]$ 并积分，我们得到

$$c_n \le \frac{3}{\log 2}\int_{2^{-(n+1)/3}}^{2^{-n/3}}\frac{f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}}{\delta}d\delta + 2^{-(n-2)/3},$$

从而对每个整数 N，

$$\sum_{n\ge N}c_n \lesssim \int_0^{2^{-N/3}}\frac{f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}}{\delta}d\delta + 2^{-N/3}.$$

令 $s,t \in$ 属于实数集，且 $|s-t| \le 1$。由引理 2.7 和定理 1.9 可知，对几乎所有的 s,t,

$$\begin{aligned}|\varphi(s) - \varphi(t)| &\lesssim_d \sum_n \min(1, 2^n|s-t|)c_n\\ &\le \sum_{n>N}c_n + |s-t|\sum_{n\le N}2^nc_n,\end{aligned}$$

对任意整数 $N \geq 0$。序列 $2^n c_n$ 显然是非递减的，因此 $\sum_{n \leq N} 2^n c_n \leq (N+1) 2^N c_N$。所以，若 $N \geq 0$ 是满足 $|s-t|(N+1)2^N \leq 1$ 的最大整数，则有 $2^N = O(\frac{1}{|s-t| \log |s-t|})$，因此当 $|s-t|$ 足够小时，$2^N \leq |s-t|^{-3/4}$，并且

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \lesssim \sum_{n \geq N} c_N \lesssim \int_0^{|s-t|^{1/4}} \frac{f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|}}{\delta} d\delta + 2^{-N/4}. \qquad \square$$

5.3. Besicovich 构造的松弛。我们以一条评论结束这段简短的讨论。在 $f_d(\delta)$ 的定义中，可以将要求 $\overline{R_i}$ 两两不相交改为要求它们几乎两两不相交。例如，对于 $4/3 \leq p \leq 4$ 和 $1 < a < b \leq \infty$，定理 1.9 仍然成立：我们不考虑 $f_d(\delta)$，而是考虑满足下述条件的最小 ε：存在一个由 δ-管组成的族，使得

$$\frac{\left|\bigcup_j R_j\right|}{\sum_j |R_j|} \cdot \frac{\sum_{i,j} |\overline{R_i}^{[a,b]} \cap \overline{R_j}^{[a,b]}|}{\sum_j |R_j|} \leq \varepsilon. \tag{5.11}$$

显然，对于 $[a,b] = [2,3]$，它小于 $f_d(\delta)$，因为当 $\overline{R_i}$ 两两不相交时，$\frac{\sum_{i,j} |\overline{R_i} \cap \overline{R_j}|}{\sum_j |R_j|} = 1$。证明中唯一的区别是以下引理 5.6 的变体。

引理 5.10。设 $\frac{4}{3} \leq p \leq 2$ 和 $q = \frac{p}{p-1}$ 为共轭指数。设 R_j 是满足 (5.11) 的 δ-管族。设 f、$g \in C_c^\infty$(实数集) 和 σ、$\rho \in C_c^\infty$(实数集$^{d-1}$) 支集包含于 $[1,2]$、$[a,b]$、$B(0,1)$ 和 $B(0,1)$ 中，分别如此。对于每个管 R_j，它是 $[0,1] \times B(0,\delta)$ 经等距变换 U_j 后的像，令 f_j 和 g_j 分别为函数 $(x,y) \mapsto f(x)\delta^{-\frac{d-1}{p}} \sigma(y/\delta)$ 以及 $(x,y) \mapsto g(x)\delta^{-\frac{d-1}{q}} \rho(y/\delta)$ 经 U_j 后的像。则

$$\left\| (\sum_{j=1}^N |f_j|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \left\| (\sum_{j=1}^N |g_j|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq C N \varepsilon^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, \tag{5.12}$$

对于一个实数 $C = C(f,g,\rho,\sigma,p)$。

证明。$p = 2$ 的情形显然成立，其中 $C(f,g,\rho,2) = \|f\|_2 \|g\|_2 \|\sigma\|_2 \|\rho\|_2$。我们将证明，对于 $p = \frac{4}{3}$，(5.12) 在 $C(f,g,\sigma,\rho,4/3) = \sqrt{c}\|f\|_2 \|g\|_\infty \|\sigma\|_2 \|\rho\|_\infty$ 的条件下成立，其中 c 是 $\mathbf{R}^{d-1}$ 中单位球的体积。通过插值，这将推出一般情形，其中

$$C(f,g,\sigma,\rho,p) = c^{\frac{2}{p}-1} \|f\|_2 \|g\|_{\frac{2p}{3p-4}} \|\sigma\|_2 \|\rho\|_{\frac{2q}{3p-4}}.$$

因此，设 $p = \frac{4}{3}$，则 $q = 4$。注意到 f_j 和 g_j 分别支集包含于 R_j 和 $\overline{R_j}^{[a,b]}$。由 Hölder 不等式，我们得到

$$\left\| (\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\frac{4}{3}} \leq |\bigcup_{j=1}^N R_j|^{\frac{1}{4}} \left\| (\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 = |\bigcup_{j=1}^N R_j|^{\frac{1}{4}} N^{\frac{1}{2}} \delta^{-\frac{d-1}{4}} \|f\|_2 \|\sigma\|_2.$$

考虑函数 $N_{\mathcal{R}}, \overline{N}_{\mathcal{R}} :$ 实数集$^d \to \mathbf{N}$

$$N_{\mathcal{R}}(x) = \sum_{j=1}^N 1_{x \in R_j}, \quad \overline{N}_{\mathcal{R}}(x) = \sum_{j=1}^N 1_{x \in \overline{R_j}^{[a,b]}}.$$

那么我们有

$$|\bigcup_{j=1}^{N} R_j| = \sum_j \int_{R_j} \frac{1}{N_{\mathcal{R}}}(x)dx, \quad \sum_{i,j} |\overline{R_i}^{[a,b]} \cap \overline{R_j}^{[a,b]}| = \|\overline{N}_{\mathcal{R}}\|_2^2.$$

此外，我们有如下逐点不等式

$$(\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|g_j\|_\infty \overline{N}_{\mathcal{R}}^{\frac{1}{2}} = \|g\|_\infty \|\rho\|_\infty \delta^{-\frac{d-1}{4}} \overline{N}_{\mathcal{R}}^{\frac{1}{2}},$$

so

$$\begin{aligned}\Big\|(\sum_{j=1}^{N} |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\Big\|_4 &\leq \|g\|_\infty \|\rho\|_\infty \delta^{-\frac{d-1}{4}} \|\overline{N}_{\mathcal{R}}\|_2^{\frac{1}{2}} \\ &= \|g\|_\infty \|\rho\|_\infty \delta^{-\frac{d-1}{4}} \big(\sum_{i,j} |\overline{R_i} \cap \overline{R_j}|\big)^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

要完成证明，还需注意 $\delta^{-\frac{d-1}{2}} N^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{c}N}{(\sum_i |R_i|)^{\frac{1}{2}}}$，因此

$$\delta^{-\frac{d-1}{2}} N^{\frac{1}{2}} \big(\sum_{i,j} |\overline{R_i} \cap \overline{R_j}|\big)^{\frac{1}{4}} |\bigcup_{j=1}^{N} R_j|^{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{c} N \varepsilon^{\frac{1}{4}}. \qquad \square$$

6. Schur multipliers on the sphere

定理 1.11 可由下面的引理轻易推出。

引理 6.1. 存在 $h \in C_c^\infty(\text{实数集}) \setminus \{0\}$ 和一个常数 C_d，使得对于每个有界可测函数 $m : (-1, 1) \to \mathbb{C}$，若 Schur 乘子以 $(\xi, \eta) \in S^d \times S^d \mapsto m(\langle \xi, \eta \rangle)$ 为符号，则其为 S_p-有界，范数为 1；并且对于每个 $r \in \mathbb{R}^*$和 $\delta \in (0, 1)$,

$$\Big|\int_{\mathbf{R}} m(\cos(\theta + t/r))\widehat{h}(t)dt\Big| \leq C_d\big(f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{|r\delta^2 \sin\theta|^{\frac{1}{3}}}\big).$$

利用引理 6.1 证明定理 1.11。对于 $n \geq 1$，第一个不等式由命题 2.8 和例 2.8 得出，而第二个不等式则由引理 5.2 和 Keich 的估计 (2.2) 得出。对于 $n = 0$，定理显然成立，因为左侧是$\lesssim \|m\|_{L_\infty}$，而右侧更大。□

6.1. 引理 6.1 的证明。思路是将上一节的论证调整到球面几何和舒尔乘子的情形。为了直接回到欧几里得情形，我们将使用立体投影。一个重要的计算是分析经过两个不同极点的两个立体投影如何发生畸变（引理 6.2）。为了将傅里叶乘子与欧几里得分析联系起来，我们还将利用 Schur-傅里叶传递的思想 [22, 4]（引理 6.3），以及实数集 $\mathbb{R}^d$的可和性。接着，在引理 6.4 中，我们证明一个替代引理 5.3 中变量替换论证的结果。

我们将在三个小尺度上进行研究。第一个是尺度 $1/r$，对于引理 6.1 陈述中的参数 r，我们将其视为最小尺度。第三个是尺度 δ，我们认为它远大于 $1/r$。第二个（中间）尺度为尺度 $1/R$，其中 R 是自由参数。这里存在一个取舍：选择较大的 R，使得 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 R 的球构成良好的 Følner 序列，从而尺度为 $1/R$ 的 Schur 乘子表现得如同

傅里叶乘子；还是选择较小的 R，使其相对于 r 足够小，从而引理 6.2 中的立体投影畸变可以忽略。我们将看到，最佳选择是$R = (r \sin\theta/\delta)^{\frac{1}{3}}$。

设 $\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{d-1})$，使得 $\|\rho\|_{L_2} = 1$ and $f, g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ 非零，且支集分别包含于 $(-1, 0)$ 和 $(1, 2)$。我们将用 $h = f * g^*$ 证明引理 6.1，其中$g(t) = g(-t)$。

固定引理 6.1 中的 d, p, m。由对偶性，不妨设 $p < 2$。当 $|r| \leq 1$ 时，该引理显然成立，因此可以假设 $r \geq 1$。由对称性，也不妨设 $\theta \in (0, \pi)$。为简便起见，还假设 $r > 1$；$r < -1$ 的情形完全相同，只需将所有界 $r^{\frac{1}{\text{正弦 }\theta}}$ 替换为 $|r|^{\frac{1}{\text{正弦 }\theta}}$。

考虑函数 $\widetilde{m_r} : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$，定义如下：

$$\widetilde{m_r}(x, y) = m\Big(\Big\langle \frac{e_{d+1} + x/r}{|e_{d+1} + x/r|}, V_\theta \frac{e_{d+1} - y/r}{|e_{d+1} - y/r|} \Big\rangle\Big), \tag{6.1}$$

其中 $V_\theta \in O(d+1)$ 是反射矩阵

$$V_\theta = \begin{pmatrix} 1_{d-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

我们有以下结论：

引理 6.2。函数 $\psi_r :$ 实数集$^d \times$实数集$^d \to$ 实数集由下式给出

$$\psi_r(x, y) = r\Big(\arccos\Big\langle \frac{e_{d+1} + x/r}{|e_{d+1} + x/r|}, V_\theta \frac{e_{d+1} - y/r}{|e_{d+1} - y/r|} \Big\rangle - \theta \Big)$$

是光滑的，并且满足

$$|\psi_r(x, y) - (x_d - y_d)| \lesssim \frac{|x|^2 + |y|^2}{r \sin\theta},$$

$$\Big| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_d}(x, y) - 1 \Big| \lesssim \frac{|x| + |y|}{r \sin\theta}.$$

这些隐含常数不依赖于 r 和 θ。

证明。考虑定义在 (实数集$^{d+1} \setminus \{0\}$) $\times$ (实数集$^{d+1} \setminus \{0\}$) 上的函数

$$\beta(X, Y) = \arccos\Big\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|} \Big\rangle.$$

简单计算可知，β 在 $\{(X, Y) \mid \mathbf{R}X = \mathbf{R}Y\}$ 之外是光滑的，并且

$$\nabla_X \beta(X, Y) = -\frac{1}{|X|} \frac{P_{X^\perp}(Y)}{|P_{X^\perp}(Y)|}.$$

这里，$P_{X^\perp}$ 表示在正交子空间 $X^\perp \subset$实数集$^{d+1}$上的正交投影，而 ∇_X 是关于前 $d+1$ 个变量（共 $2d+2$个变量）的梯度。由此公式可知，对于任意一对 X_0、$Y_0 \in$ 实数集$^{d+1}$ 中的单位向量，以及任意一对范数为 ≥ 1的向量X、$Y \in$ 实数集$^{d+1}$

$$|\nabla_X \beta(X, Y) - \nabla_X \beta(X_0, Y_0)| \lesssim \frac{|X - X_0| + |Y - Y_0|}{|P_{X_0^\perp}(Y_0)|}.$$

若取 $X_0 = e_{d+1}$、$Y_0 = V_\theta e_{d+1}$，则有 $\beta(X_0, Y_0) = \theta$，$|P_{X_0^\perp}(Y_0)| = \sin\theta$，$\nabla_X \beta(X_0, Y_0) = e_d$，由此可得

$$|\nabla_X \beta(X,Y) - e_d| \lesssim \frac{|X - X_0| + |Y - Y_0|}{\sin\theta}. \tag{6.3}$$

根据我们的定义，有 $\psi_r(x,y) = r(\beta(e_{d+1} + x/r, V_\theta(e_{d+1} - y/r)) - \beta(X_0, Y_0))$，因此由 (6.3) 可得

$$|\nabla_x \psi_r(x,y) - e_d| \lesssim \frac{|x| + |y|}{r\sin\theta}.$$

这尤其意味着引理中的第二个不等式。对于第一个不等式，利用 $V_\theta = V_\theta^*$ 可推出 $\psi_r(x,y) = \psi_r(-y,-x)$，并且

$$|\nabla_y \psi_r(x,y) + e_d| \lesssim \frac{|x| + |y|}{r\sin\theta}.$$

因此，在区间 $[0,(x,y)]$ 上对 ψ_r 积分即可得到第一个不等式。 □

如 §5 中所述，设 $\{R_j \mid 1 \le j \le N\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一族 δ-管，使得这些 $\overline{R_j}$ 两两不相交，并且对于某个 $\varepsilon > 0$ 满足 (2.1)；设 $\vec{u}_j = \vec{u}(R_j)$，并按照 (5.1) 和 (5.2) 定义函数 f_j、g_j。再选取 $U_j \in O(d)$ 使得 $U_j\vec{u}_j = e_d$，并定义 S_j 为符号 $(x,y) \mapsto \widetilde{m}_r(U_j x, U_j y)$ 的 Schur 乘子。

取一个取非负值的径向函数 $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，其 $L_2(\mathbb{R}^d)$-范数为 1，且支集包含于半径为 1 的球内。对于 $R > 0$，令 $\varphi_R(\xi) = \varphi_1(\xi/R)R^{-\frac{d}{2}}$。那么 φ_R 是径向的，支集包含于半径为 R 的球内，且 L_2-范数为 1。通过其核定义一个算子 $A_j \in B(L_2(\mathbb{R}^d))$:

$$A_j = (\varphi_R(x)^{\frac{1}{p}} \widehat{f_j}(x-y)\varphi_R(y)^{\frac{1}{p}})_{x,y\in\mathbf{R}^d}$$

类似地

$$B_j = (\varphi_R(x)^{\frac{1}{q}} \widehat{g_j}(x-y)\varphi_R(y)^{\frac{1}{q}})_{x,y\in\mathbf{R}^d}.$$

引理 6.3. 若 $f_1, \dots, f_N \in L_p(\mathbb{R}^d)$ 和 $g_1, \dots, g_N \in L_p(\mathbb{R}^d)$ 如上定义，

$$|\sum_j \mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*)| \le \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L_p} \|(\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L_q} \lesssim N\varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

证明. 第二个不等式由引理 5.6 得出，因此我们只需证明第一个不等式。记 $A = \sum_j A_j \otimes e_{1,j} \in B(L_2(\mathbb{R}^d)) \otimes M_N(\mathbb{C}) \simeq B(L_2((\mathbb{R}^d)^N))$，对 B 也类似定义。映射 $f_j \mapsto A_j$ 可延拓为完全压缩映射 $L_p(\mathbb{R}^d) \to S_p(L_2(\mathbb{R}^d))$。例如，在 φ_R 为归一化示性函数的情形下，这在 [4, 定理 5.1] 中得到证明，但证明过程完全相同。[2] 特别地，我们有

$$\|A\|_p \le \|\sum_j f_j \otimes e_{1,j}\|_{L_p(\mathbf{R}^d; S_p^N)} = \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L_p} \tag{6.4}$$

类似地

$$\|B\|_q \le \|(\sum_j |g_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L_q}. \tag{6.5}$$

[2]我们回顾一下证明。根据插值，只需处理 $p = \infty$ 和 $p = 1$ 的情形。$\widehat{}$ 情形 $p = \infty$ 显然，因为通过傅里叶变换，核为 $f_j(x-y)$ 的算子对应于在 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上乘以 f_j 的乘法算子。$p = 1$ 情形很简单：若 $F \in L_1(\mathbb{R}^d; S_1)$，则它可写为 g^*h，其中 g、$h \in L_2(\mathbb{R}^d; S_2)$ 满足 $\|g\|_2\|h\|_2 = \|f\|_1$。于是，当 $X = (\widehat{h}(x-y)\varphi_R(y))_{x,\,y\in\mathbf{R}^d}$ 时，A_j 可分解为 Y^*X；Y 和 g 的情形也类似。根据 Fubini 定理和 Plancherel 定理，我们可以计算 $\|X\|_{S_2} = \|h\|_2\|\varphi_R\|_2 = \|h\|_2$ 和 $\|Y\|_{S_2} = \|g\|_2$，因此 $\|A_j\|_{S_1} \le \|X\|_2\|Y\|_2 = \|f_j\|_1$。

线性映射 $X=(X_{i,j})_{i,j\leq N}\mapsto(S_j(X_{i,j}))$ 是一个 Schur 乘子，其符号$S\colon (x,i),(y,j)\mapsto \widetilde{m}_r(U_jx,U_jy)$。根据 $\widetilde{m}_r$ 的定义，我们可以改写

$$S((x,i),(y,j))=m\Big(\Big\langle \frac{e_{d+1}+x/r}{|e_{d+1}+x/r|},\begin{pmatrix}U_j^* & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}V_\theta\begin{pmatrix}U_j & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{e_{d+1}-y/r}{|e_{d+1}-y/r|}\Big\rangle\Big).$$

由这个表达式，根据引理 2.1 可知， S 在 S_p 上有界，范数为≤ 1 （回想一下，我们假设 $(\xi,\eta)\in \mathbf{S}^d\times\mathbf{S}^d\mapsto m(\langle\xi,\eta\rangle)$ 是 S_p-有界的，范数为 1）。因此，我们得到

$$|\sum_j \mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*)|=|\,\mathrm{Tr}(S(A)B^*)|\leq \|A\|_p\|B\|_p.$$

该引理由 (6.4) 和 (6.5) 得出。 □

引理 6.4. 存在一个常数 $C=C(d,\rho)$，使得若我们令 $h=f*g^*$，

$$\Big|\,\mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*)-\int_{\mathbf{R}} m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))\widehat{h}(t)dt\Big|\leq C\Big(\frac{1}{\delta R}+\frac{R^2}{r\sin\theta}\Big)\|(1+|s|)\widehat{h}\|_1.$$

证明. 展开后可得

$$\mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*)=\iint \widetilde{m}_r(U_jx,U_jy)\varphi_R(x)\varphi_R(y)(\widehat{f_j}\overline{\widehat{g_j}})(x-y)dxdy.$$

我们可以作变量替换 $x\mapsto U_jx$, $y\mapsto U_jy$ ，并注意到（φ_R 是径向的）这个量等于

$$\iint \widetilde{m}_r(x,y)\varphi_R(x)\varphi_R(y)(\widehat{f_j}\overline{\widehat{g_j}})(U_j^{-1}(x-y))dxdy.$$

此外，与（5.3）中一样，在坐标 $x=(x',x_d)\in\mathbf{R}^{d-1}\times\mathbf{R}$ 下，它变为

$$\iint \widetilde{m}_r(x,y)\varphi_R(x)\varphi_R(y)\widehat{h}(x_d-y_d)\delta^{d-1}|\widehat{\rho}(\delta(x'-y'))|^2dxdy.$$

在前一个方程中作变量替换 $\omega=\delta(x'-y')\in\mathbf{R}^{d-1}, s=x_d-y_d\in\mathbf{R}$, $\xi=y/R\in\mathbf{R}^d$。若记 $F=|\widehat{\rho}|^2$ and $M_r(\xi,\omega,s)=\widetilde{m}_r(R\xi+(\frac{\omega}{\delta},s)\,R\xi)$，则得到

$$\mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*)=\iint M_r(\xi,\omega,s)\varphi_1(\xi+(\frac{\omega}{\delta R},\frac{s}{R}))\varphi_1(\xi)\widehat{h}(s)F(\omega)dsd\omega d\xi.$$

由此表达式可直接看出，引理陈述中的左端为 $\leq 2\|\widehat{h}\|_1$，因此当 $\frac{1}{\delta R}+\frac{}{r^{R^2}\sin\theta}\geq c$ 时，引理显然成立，常数为 $2/c$。

由于 φ_1 是 C^1 且为紧支撑的，我们有

$$\varphi_1(\xi+(\frac{\omega}{\delta R},\frac{s}{R}))=\varphi_1(\xi)+O\Big(\frac{|\omega|}{R\delta}+\frac{s}{R}\Big),$$

并由此推出

$$\mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*)=\iint M_r(\xi,\omega,s)\varphi_1(\xi)^2\widehat{h}(s)F(\omega)dsd\omega d\xi \\ +O\Big(\frac{1}{\delta R}\|(1+|w|)F\|_1\|(1+|s|)\widehat{h}\|_1\Big). \tag{6.6}$$

令 $\Omega=\{(\xi,\omega,s)\mid |\xi|\leq 1,|\omega|\leq\delta R,|s|\leq R\}$。那么（回顾一下， φ_1的支集包含于半径为 1 的球中）我们有

$$\|\widehat{h}\|_{L_1([-R,R]^c)}+\|F\|_{L_1(\mathbf{R}^{d-1}\setminus B(0,\delta R))}\leq\frac{1}{\delta R}\|(1+|w|)F\|_1\|(1+|s|)\widehat{h}\|_1,$$

从而得到

$$\mathrm{Tr}(S_j(A_j)B_j^*) = \iint_\Omega M_r(\xi,\omega,s)\varphi_1(\xi)^2\widehat{h}(s)F(\omega)dsd\omega d\xi + O\Big(\frac{1}{\delta R}\|(1+|w|)F\|_1\|(1+|s|)\widehat{h}_1\Big). \tag{6.7}$$

固定 ξ,ω，我们作引理 6.2 中的变量替换 $s\mapsto t=\psi_r(R\xi+(\frac{\omega}{\delta},s)\ R\xi)$。为此，可假设 $R\le \alpha r\sin\theta$，其中常数 $\alpha>0$ 使得 $\partial\psi_r/\partial x_d-1$ 上的界为 $\le\frac12$，且像 $|s|\le R\mapsto t$ 包含 $[-R/2,R/2]$。事实上，正如我们已经论证的，否则引理显然成立。在这种情况下，我们看到该变量替换是双射，并将逆映射记为 $t\mapsto s_{\xi,\omega}(t)=s$。若 Σ 是 Ω 在 $(\xi,\omega,s)\mapsto(\xi,\omega,t)$ 下的像，则 Σ 包含 $B(0,1)\times B(0,\delta R)\times[-R/2,R/2]$。此外，根据 M_r 的定义，$M_r(\xi,\omega,s)=m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))$，因此由引理 6.2，(6.7) 中的积分为

$$\iint_\Sigma \varphi_1(\xi)^2 m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))\widehat{h}(s)F(\omega)dtd\omega d\xi + O\Big(\frac{R}{r\sin\theta}\|\widehat{h}\|_1\Big).$$

在 Σ 上，引理 6.2 意味着

$$|t-s|\le C\frac{R^2}{r\sin\theta},$$

对于某个常数 C。因此，

$$|\widehat{h}(t)-\widehat{h}(s)|\le\int_{\mathbf{R}}|\widehat{h}'(v)|1_{|t-v|\le\frac{CR^2}{r\sin\theta}}dv.$$

积分后，我们得到

$$\Big|\iint_\Sigma \varphi_1(\xi)^2 m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))(\widehat{h}(s)-\widehat{h}(t))F(\omega)dtd\omega d\xi\Big| \le \iiint_{\mathbf{R}^{2d}}\varphi_1(\xi)^2|\widehat{h}'(v)|F(\omega)\frac{2CR^2}{r\sin\theta}dvd\omega d\xi = \frac{2CR^2}{r\sin\theta}\|\widehat{h}'\|_1.$$

注意，由于 h 支集包含于 $[-3,-1]$，存在一个普适常数，使得 $\|\widehat{h'}\|_1\lesssim\|h\|_1$。这证明了 (6.7) 中的积分是

$$\iint_\Sigma \varphi_1(\xi)^2 m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))\widehat{h}(t)F(\omega)dtd\omega d\xi + O\Big(\frac{R^2}{r\sin\theta}\|\widehat{h}\|_1\Big).$$

最后，由于 Σ 包含实数集 $^d\times B(0,\delta R)\times[-R/2,R/2]$，这个积分是

$$\iint_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\varphi_1(\xi)^2 m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))\widehat{h}(t)F(\omega)d\xi dtd\omega$$

$$+O(\|\widehat{h}\|_{L_1([-R/2,R/2]^c)}+\|F\|_{L_1(\mathbf{R}^{d-1}\setminus B(0,\delta R))}) = O\Big(\frac{1}{\delta R}\|(1+|w|)F\|_1\|(1+|s|)\widehat{h}\|_1\Big).$$

最后一个积分可以化简为 $\int m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))$，因为 $\|\varphi_1\|_2^2=\int F=1$。综合以上各项，我们得到

$$\Big|\mathrm{Tr}(S_j(A)B^*)-\int_{\mathbf{R}} m(\cos(\theta+\frac{t}{r}))\widehat{h}(t)dt\Big| \lesssim \frac{1}{\delta R}\|(1+|w|)F\|_1\|(1+|s|)\widehat{h}\|_1+\frac{R^2}{r\sin\theta}\|\widehat{h}\|_1. \quad \square$$

现在我们可以完成引理 6.1 的证明。由引理 6.3 和引理 6.4，我们得到

$$\Big|\int_{\mathbf{R}} m(\cos(\theta+t/r))\widehat{h}(t)dt\Big| \lesssim \frac{1}{\delta R}+\frac{R^2}{r\sin\theta}+\varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$

其中隐含常数取决于 d, f, g, ρ。这对每个 R 以及每族 δ-管都成立，因此取 $R=\left(\frac{r}{\delta}\sin\theta\right)^{\frac{1}{3}}$，并对所有这类管取下确界，得到

$$\Big|\int_{\mathbf{R}} m(\cos(\theta+t/r))\widehat{h}(t)dt\Big| \lesssim \frac{1}{\left(r\delta^2\sin\theta\right)^{\frac{1}{3}}}+f_d(\delta)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

6.2. 推论。下面陈述一个推论。同样，指数$1\ 3$ 并非最优。

推论 6.5. 设 $m:(-1,1)\to\mathbf{C}$，使得符号为 $(\xi,\eta)\mapsto m(\langle\xi,\eta\rangle)$ 的 Schur 乘子在 $S_p(L_2(\text{实数集}^d))$ 上有界，范数为 1。那么对几乎所有$s,t\in$ 实数集，

$$|m(\cos s)-m(\cos t)| \lesssim \int_0^{|s-t|^{1/3}} \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta}d\delta+|s-t|^{\frac{1}{9}}\Big(\frac{1}{|\sin s|^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{|\sin s|^{\frac{1}{3}}}\Big)$$

其中隐含常数取决于 d。

证明。写作

$$c_n(\theta)=\inf_{\delta\in(0,1)}\left(f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{|2^n\delta^2\sin\theta|^{1/3}}\right).$$

取 $\delta\in[2^{-(n+1)/3},2^{-n/3}]$ 并积分，得到

$$c_n(\theta)\le\frac{3}{\log 2}\int_{2^{-(n+1)/3}}^{2^{-n/3}}\frac{f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}}{\delta}d\delta+\frac{1}{|2^{(n-2)/3}\sin\theta|^{\frac{1}{3}}},$$

因此，对于每个整数 N，

$$\sum_{n\ge N}c_n(\theta)\lesssim\int_0^{2^{-N/3}}\frac{f_d(\delta)^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}}{\delta}d\delta+\frac{1}{|2^{N/3}\sin\theta|^{\frac{1}{3}}}. \tag{6.8}$$

设 $\varphi=m\circ\cos$ 和 $\varphi_n=W_n*\varphi$。与引理 2.7 的证明一样，定理 1.11 使我们能够对几乎处处的 $s<t$ 以及每个 $N\ge 0$ 写出

$$\begin{aligned}|\varphi(s)-\varphi(t)| &\le \sum_{n\le N}\int_s^t|\varphi_n'(\theta)|d\theta+\sum_{n>N}|\varphi_n(s)|+|\varphi_n(t)|\\ &\le \sum_{n\le N}\int_s^t 2^n c_n(\theta)d\theta+\sum_{n>N}c_n(s)+c_n(t)\\ &\le \sum_{n\le N}|s-t|2^n c_n(s)+\sum_{n>N}c_n(s)+c_n(t).\end{aligned}$$

不等式 $|\varphi_n'(\theta)|=|(W_n'*\varphi)(\theta)|\lesssim 2^n c_n(\theta)$ 是我们使用定理 1.11 之处，同时也使用了命题 2.8 和例 2.9，而不等式 $\int_s^t c_n(\theta)d\theta\le|s-t|c_n(s)$ 是例 2.9。

序列 $2^{n/3}c_n(s)$ 显然是非递减的，因此

$$\sum_{n\le N} 2^n c_n(s) \le 2^N c_N(s) \sum_{n\le N} 2^{2(n-N)/3} \le \frac{1}{2^{2/3}-1} 2^N c_N(s).$$

若 $N \ge 0$ 是满足 $2^{-N} \le |s-t|$的最小整数，

$$|\varphi(s)-\varphi(t)| \lesssim \sum_{n\ge N} c_n(s) + c_n(t),$$

由 (6.8) 可知，这证明了该推论。 □

推论 6.6. 若 $d \in \mathbb{N}$ $1 \le p \le \infty$ 满足函数

$$\delta \mapsto \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|} \log|\log\delta|}{\delta}$$

在 0 处可积，则每个函数 $m : (-1,1) \to \mathbb{C}$，只要其符号为 $(\xi,\eta) \mapsto m(\langle\xi,\eta\rangle)$ 的 Schur 乘子在 $S_p(L_2(\text{实数集}^d))$ 上有界，且范数为 ≤ 1，就几乎处处等于一个连续函数；该函数在 0 处的连续模 ω独立于 m，并且 $t \mapsto \omega_{(t)\,t|\log t|}$ 在 0 处可积。

特别地，若 Γ 是 $\mathrm{SL}_{2d-1}(\mathbb{Z})$ 或定理 1.4 中的任意群，则 $L_p(\mathcal{L}\Gamma)$ 不具有算子空间逼近性质。

证明。就有界逼近性质而言，其结论是定理 1.4。对于第一部分，由推论 5.9，我们必须证明

$$\omega(t) := \int_0^{t^{1/3}} \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta} d\delta + t^{\frac{1}{9}}$$

满足 $t \mapsto \omega_{(t)\,t|\log t|}$ 在 0 处可积。$t^{\frac{1}{9}}$项不会造成任何问题，因此我们计算该积分

$$\begin{aligned}\int_0^{1/e^3} \frac{1}{t|\log t|} \int_0^{t^{1/3}} \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta} d\delta &= \int_0^{1/e} \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta} \int_{\delta^3}^{1/e^3} \frac{1}{t|\log t|} dt d\delta \\ &= \int_0^{1/e} \frac{f_d(\delta)^{|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}}{\delta} \log|\log\delta| d\delta < \infty. \qquad \square\end{aligned}$$

References

[1] A. B. Aleksandrov 和 V. V. Peller。算子 H¨older-Zygmund 函数。 *Adv. Math.*，224 3 910( )：–966，2010。[2] Stefan Banach。 *Théorie des opérations linéaires*。 ´Editions Jacques Gabay，索镇，1993。1932 年原版的重印本。[3] H. Brezis 和 L. Nirenberg。度理论与 BMO。I. 无边界的紧流形。 *Selecta Math. (N.S.)*，1(2)：197–263，1995。[4] Martijn Caspers 和 Mikael de la Salle。可 amenable 群作用于非交换 L^p-空间时的舒尔乘子与傅里叶乘子。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，367(10)：6997–7013，2015。[5] Jos´e M. Conde-Alonso、Adri´an M. Gonz´alez-P´erez、Javier Parcet 和 Eduardo Tablate。Schatten–von Neumann 类中的舒尔乘子。 *Ann. of Math. (2)*，198(3)：1229–1260，2023。[6] Roy O. Davies。关于 Kakeya 问题的一些评论。 *Proc. Cambridge Philos. Soc.*，69：417–421，1971。[7] Mikael de la Salle。群及其表示的刚性与可塑性方面。大学任教资格论文，里昂高等师范学院，`http://perso.ens-lyon.fr/mikael.de.la.salle/HDR_delaSalle.pdf`，2016。

[8] Mikael de la Salle。单李群与格上的分析。载于 *ICM—International Congress of Mathematicians. Vol. 4. Sections 5–8* 3166 3188 [2023]，页码 –。EMS Press，柏林，©2023。[9] Tim de Laat。李群中格所关联的非交换 L^p-空间的逼近性质。*J. Funct. Anal.*，264(10)：2300–2322，2013。[10] Tim de Laat 和 Mikael de la Salle。高秩格的非交换 L^p- 空间的逼近性质与扩张图的不可嵌入性。*J. Reine Angew. Math.*，737 69，2018 49：–。[11] Guillaume Dumas。紧李群对的矩阵系数正则性。*Trans. Am. Math. Soc.*，377(10)：7421–7474，2024。[12] Per Enflo。巴拿赫空间中逼近问题的一个反例。*Acta Math.*，130 309：–317，1973。[13] Charles Fefferman。球的乘子问题。*Ann. Math. (2)*，94：330–336，1971。[14] Loukas Grafakos。*Modern Fourier analysis*，第 250 卷，*Graduate Texts in Mathematics*。施普林格，纽约，第二版，2009。[15] A. Grothendieck。拓扑张量积度量理论概要。*Bol.* ，：–。*Soc. Mat. São Paulo* 8 1 79, 1953
[16] Alexandre Grothendieck。拓扑张量积与核空间。*Mem. Amer.* ，第号：*Math. Soc.* 16 1 196 2 140, 1955
章：页；章：。[17] Uffe Haagerup 和 Tim de Laat。没有逼近性质的单李群。*Duke Math. J.*，162(5)：925–964，2013。[18] Yaryong Heo、F¨edor Nazarov 和 Andreas Seeger。高维中的径向傅里叶乘子。*Acta Math.*，206(1)：55–92，2011。[19] U. Keich。关于 Kakeya 极大函数的 L^p 界及实数集中的闵可夫斯基维数。$\mathbb{R}^2$*Bull. Lond. Math. Soc.*，31(2)：213–221，1999。[20] Vincent Lafforgue。性质 (T) 的一种强化。´，143(3)：559–602，2008。*Duke Math. J.*Vincent Lafforgue 和 Mikael de la Salle。不具有完全有界逼近性质的非交换 L^p-空间。*Duke Math. J.*，160(1)：71–116，2011。[22] Stefan Neuwirth 和 ´Eric Ricard。将傅里叶乘子转化为舒尔乘子，以及离散群中的和集。*Canad. J. Math.*，63(5)：1161–1187，2011。[23] Javier Parcet。舒尔乘子对调和分析与算子代数的影响，2026年国际数学家大会论文集，2025。[24] Javier Parcet、Mikael de la Salle 和 Eduardo Tablate。幂等舒尔乘子的局部几何。*Forum Math. Pi*，13：论文编号 e14，21，2025。[25] Javier Parcet、*Duke Math.* Eric *J.* 171 6 1235 1297, 2022
Ricard 和 Mikael de la Salle。实数域上的特殊线性群中的傅里叶乘子。*Duke Math.* ，( )：–。*J.* 171 6 1235 1297, 2022
[26] Jaak Peetre。对文章《微分算子的抽象刻画》的修订。*Math. Scand.*，8：116–120，1960。[27] Gilles Pisier。非交换向量值 L_p-空间与完全 p-求和映射。*Astérisque*，(247)：vi+131，1998。[28] Gilles Pisier。*Introduction to operator space theory* 294 *London Mathematical* ，第 卷，*Society Lecture Note Series* 2003
出版社。剑桥大学出版社，剑桥，。[29] Gilles Pisier 和 Quanhua Xu。非交换 L^p *Handbook of the geometry of* -空间。载 *Banach spaces Vol. 2* 1459 1517 2003
于，，页码 –。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，。[30] Andrzej Szankowski。$B(H)$ 不具有逼近性质。*Acta Math.*，147(1-2)：89–108，1981。[31] I. Vergara。有限中心单李群的 p *J. Funct.* -逼近性质。*Anal.* 273 11 3463 3503, 2017
[32] ，( )：–。*Journal of the American Mathematical Society* 2025 Hong Wang 和 Joshua Zahl。粘性 Kakeya 集与黏性 Kakeya 猜想。[33] ，11 月。[34] Hong Wang 和 Joshua Zahl。凸集并的体积估计，以及三维中的 Kakeya 集猜想，2025。*Duke Math. J.*Antoni Zygmund。光滑函数。，12：47–76，1945。